Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра оптимального керування та економічної кібернетики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

«Моделювання взаємодії суб'єктів з метою отримання спільної вигоди»

« Modeling the interaction of subjects in order to gain a common benefit»

Виконав: здобувач денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Освітня програма "Прикладна математика"
Боровський Денис Володимирович

Керівник:
доц., доктор фіз.-мат. наук Кічмаренко О.Д.
Рецензент:
проф., кандидат техн. наук Мороз В.В.

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ___ від «_____» ________ р.
Завідувач кафедри
_____________ __________________

Захищено на засіданні ЕК № _______
Протокол № _____ від «_____» _____ р.
Оцінка ________ / ________ / ________
Голова ЕК
_____________ ______________________

Одеса — 2023 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

В сучасному світі, де глобалізація та складні економічні виклики вимагають ефективних рішень, вивчення взаємодії між суб'єктами стає ключовим напрямком досліджень. Зокрема, аспекти співпраці та конфліктів між учасниками економічних відносин набувають особливого значення.

При вирішені економічних задач часто доводиться аналізувати ситуації, в яких стикаються інтереси двох або більше конкуруючих сторін, що переслідують різні цілі – такі ситуації називаються конфліктними. Це особливо характерно в умовах ринкової економіки. Отож, саме теорія ігор вивчає раціональні стратегії в умовах конфлікту та співпраці між різними гравцями. ЇЇ основна ідея полягає в тому, що гравці обирають дії, раціонально розглядаючи дії інших учасників гри.

При вирішенні прикладних задач можна стикнутися з двома основними формами конфліктів: безкоаліційним та коаліційним. У безкоаліційних іграх гравці діють індивідуально, без формування альянсів чи коаліцій з іншими гравцями. Кожен гравець вибирає свої стратегії на основі власних цілей та очікуваних дій інших. Натомість, у коаліційних іграх гравці об'єднуються в коаліції, спільно обираючи стратегії. Коаліції можуть змінюватися в ході гри, і гравці спільно розв'язують конфлікти чи розподіляють вигоди. Особливою підгрупою коаліційних ігор є кооперативні ігри, де гравці спільно працюють для досягнення спільних цілей і діляться вигодами.

Актуальність вивчення кооперативних ігор виявляється у розробці співпраці та альянсів між підприємствами та країнами для досягнення економічних цілей; аналізі угод, договорів, торгових блоків та міжнародних відносин, де різні держави співпрацюють для забезпечення безпеки та економічних вигід; вивченні колективних дій та рішень в групах, організаціях та суспільстві.

Кооперативні ігри допомагають розуміти, як різні сторони можуть спільно досягти компромісів та вирішувати складні завдання в умовах конфлікту.

Предмет дослідження: Взаємодія суб'єктів у контексті отримання спільної вигоди.

Об'єкт дослідження: Стратегії та механізми взаємодії різних суб'єктів у різних сферах, таких як економіка, соціум, або інші сфери.

Методи дослідження:

1. Математичне моделювання: Розробка математичних моделей, що відображають взаємодію суб'єктів та стратегії, спрямовані на досягнення спільної вигоди.

2. Емпіричні дослідження: Аналіз конкретних сценаріїв взаємодії суб'єктів та вивчення реальних ситуацій, де досягнення спільної вигоди має важливе значення.

3. Теорія ігор: Застосування концепцій теорії ігор для аналізу стратегій учасників та можливих варіантів взаємодії.

Мета дослідження: Головною метою дипломної роботи є розробка і вивчення моделей взаємодії суб'єктів, спрямованих на досягнення спільної вигоди. Дослідження спрямоване на розкриття оптимальних стратегій, інструментів та умов, які сприяють ефективній взаємодії різних сторін з метою отримання взаємовигідних результатів.

Задля досягнення мети роботи були поставлені наступні завдання:

• створити математичні моделі, які адекватно відображають взаємодію суб'єктів;

• визначити параметри, які впливають на результативність взаємодії та досягнення спільної вигоди;

• провести аналіз реальних сценаріїв взаємодії суб'єктів у конкретних галузях або ситуаціях;

• порівняти ефективність різних стратегій взаємодії;

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ПРО ВЗАЄМОДІЮ СУБ'ЄКТІВ

1.1 Основні концепції теорії ігор

Логічною основою теорії ігор є формалізація трьох ключових понять, які є фундаментальними для всієї теорії: конфлікт, процес прийняття рішень у конфлікті та оптимальність прийнятого рішення. У теорії ігор ці поняття розглядаються в широкому контексті. Їх формалізації відповідають сутності відповідних об'єктів. З погляду змісту, конфлікт може охоплювати будь-яке явище, стосовно якого можна говорити про його учасників, їхні дії, наслідки цих дій, сторони, які мають інтереси в цих наслідках, і сутність цього інтересу. Ми будемо вважати, що ситуація вважається конфліктною, якщо існує предмет суперечки та зацікавлені сторони. Кожна з цих сторін має власну мету щодо предмету конфлікту і визначає можливі дії, за допомогою яких вона намагатиметься досягти своєї мети [3].

Давайте розглянемо короткий історичний нарис виникнення та розвитку теорії ігор. Вже в XVIII столітті деякі вчені почали формалізувати стратегічний підхід у поведінці суб'єктів ринку, серед них Ж. Бертран та А. Курно. Пізніше, Е. Ласкер, Е. Цермело та Е. Борель внесли вагому ідею математичного підходу для вирішення конфліктів. Проте, відсутність чіткої методології для прийняття рішень учасниками ринку в XX столітті викликала необхідність створення теорії ігор. Джон фон Нейман та Оскар Моргенштерн в своїх дослідженнях визначили, що на поведінку учасника ринку впливають не лише його особисті наміри та стан, але й аналогічні показники його конкурентів [2].

Грою прийнято вважати систему правил, що визначає кількість учасників гри, їх можливі дії та розподіл виграшів в залежності від їх поведінки та результату гравців. Гравцем вважається учасник або група учасників гри, які мають спільні інтереси, відмінні від інших груп. Таким чином, не кожен учасник може вважатися гравцем. Наприклад, якщо чотири людини грають у гру і кожна з них представляє свої інтереси, що відрізняються від інших, то кожен грає за себе. У спортивних іграх, таких як футбол чи баскетбол, зазвичай змагаються дві команди, кожна з яких складається з декількох учасників. Ці учасники об'єднуються в команди, маючи спільні цілі, але протилежні одна одній, тому в таких іграх розглядаються по два гравці.

Наприклад, три гравці з капіталом, які хочуть використовувати його для продажу своєї продукції, можуть отримувати вигоду від свого вкладу. Однак ця вигода залежить не лише від їхніх внесків, але й від внесків інших гравців. Ніхто не має повного контролю над результатами гри, і кожен гравець впливає лише частково на остаточний результат.

В економічному контексті взаємодії трьох гравців у грі можна розглядати так:

1. Усі три гравці діють незалежно, максимізуючи свою вигоду на основі своїх можливостей та поведінки інших гравців. Це вважається грою трьох гравців.

2. Будь-які два гравці об'єднуються в коаліцію, спільно працюючи для досягнення максимальної вигоди за умови можливої реакції третього гравця. Це може бути розглянуто як гра двох гравців.

Правила або умови гри визначають можливу поведінку, вибір та ходи для гравців на будь-якому етапі розвитку гри. Зробити вибір гравцеві – це означає обрати один з можливих варіантів поведінки, потім гравець здійснює цей вибір за допомогою ходів. Зробити хід – це означає на певному етапі гри здійснити відразу весь вибір або його частину в залежності від можливостей, передбачених правилами гри. Кожен гравець на певному етапі гри робить хід, відповідно до зробленого вибору. Інший гравець, знаючи або не знаючи про зроблений вибір першого гравця, також робить хід. Кожен з гравців намагається врахувати інформацію про минулий розвиток гри, якщо така можливість дозволяється правилами гри.

Набір правил, який однозначно вказує гравцю який вибір він повинен зробити при кожному ході, в залежності від ситуації, що склалася в результаті поведінки гри називається стратегією гравця. Стратегія в теорії ігор означає певний закінчений план дій гравця, показує як треба діяти йому у всіх можливих випадках розвитку цієї гри. Стратегія означає сукупність всіх вказівок для будь-якого стану інформації наявної у гравця на будь-якому етапі розвитку гри [2].

Стратегії можуть бути чітко визначеними або випадковими, індивідуальними або колективними, залежними від попередніх подій або незалежними. Особливу увагу приділяють грі у чистих або змішаних стратегіях. Чиста стратегія визначає, як гравець буде продовжувати гру, надаючи конкретний результат для кожного можливого вибору, який може бути зроблений гравцем. Простір стратегій включає в себе всі доступні чисті стратегії для даного гравця. Змішана стратегія представляє собою розподіл ймовірностей між різними чистими стратегіями. Це означає, що гравець вибирає одну з чистих стратегій відповідно до ймовірностей, визначених змішаною стратегією. Вибір робиться перед початком гри і залишається незмінним до її закінчення. Кожна чиста стратегії є частковим випадком змішаної стратегії, при умові, що ймовірність вибору однієї з чистих стратегій рівна одиниці, тоді як для інших чистих стратегій вона дорівнює нулю.

Важливим поняттям є стратегія в домінантних стратегіях, коли одна стратегія завжди принесе гравцеві кращий результат, незалежно від вибору інших гравців. В іграх, що відображають економічну ситуацію, стратегіями можуть бути розміри коштів, що вкладаються в певні події. Отож, в грі трьох гравців кожен вносить певну долю свого капіталу – це і є стратегія.

Правила гри передбачають певні виграші для гравців, що залежать від їх стратегій та результату гри.

Оцінка правильності вибору стратегій відповідає функції виграшу. Вона являє собою математичну функцію, яка визначає виграш або втрату гравця в залежності від його власних дій та дій інших учасників у грі. Функція виграшу для того, щоб визначити, наскільки задоволені або незадоволені гравці результатом гри, враховуючи їхні стратегії

$$v_i(s_1, s_2, ..., s_n) \tag{1.1}$$

де i–індекс гравця, s_1,s_2,. . . ,s_n – стратегії всіх учасників гри. Вона повертає числове значення, яке вказує на виграш або втрату гравця. Виграшна функція може бути визначена для різних типів ігор та може враховувати різноманітні фактори, такі як вартість, користь чи інші критерії, залежно від конкретного контексту гри[5].

Подолання труднощів у процесі розв'язання ігрових ситуацій, пов'язаних із чіткістю та реалістичністю їх подання, включає в себе визначення основних правил, елементів гри, стратегій гравців і ходів. В таких умовах виникає потреба у розробці методів вирішення гри, які вимагають належної інформації та практичної реалізації.

1.2 Форми взаємодії суб'єктів

Реальні конфліктні ситуації призводить до виникнення різних видів ігор. В залежності від виду гри розробляється і метод її вирішення. Сьогодні немає цілком чітко сформованої класифікації ігор. Однак можна відзначити основні напрямки за якими здійснюється класифікація ігор: кількість гравців, кількість стратегій, кількість взаємовідносин, характер виграшів, вид функції виграшів, кількість ходів, за станом інформації.

В залежності від кількості гравців визначають ігри одного гравця, двох гравців і n гравців. Теорія ігор не вивчає ігри одного гравця. Ігри двох гравців найбільш поширені, їх дослідженню присвячено багато робіт і досягнуті найбільші успіхи [6]. Як у теорії так і практично, ігри трьох і більше гравців менш досліджені через принципові труднощі та технічні можливості отримання рішень. Труднощі вирішення ігор підвищуються зі збільшенням кількості гравців.

За кількістю стратегій ігри діляться на скінченні та нескінченні. Якщо в грі кожен із гравців має скінченну кількість можливостей стратегій, то вона називається скінченною. Якщо хоча б один з гравців має нескінченну кількість можливих стратегій - ігри з необмеженою кількістю стратегій. Труднощі вирішення ігор залежать від кількості стратегій. Як правило зі збільшенням кількості стратегій підвищується труднощі рішень ігор.

За характером виграшів вони діляться на ігри з нульовою сумою і ігри з ненульовою сумою. Гра з нульовою сумою буде тоді, коли сума виграшів в кожній її партії дорівнює нулю, тобто у грі з нульовою сумою загальний капітал усіх гравців не змінюється, а перерозподіляється між гравцями залежно від отриманих результатів. Так велике різноманіття економічних та військових ситуацій можна розглядати як ігри з нульовою сумою. Прикладом гри з ненульовою сумою можуть бути торгові відносини між країнами. У результаті використанні своїх стратегій усі країни можуть бути у виграші.

Усяка гра в якій треба робити внесок певному гравцю за право приймати участь у грі є грою з ненулевою сумою. Ігри з ненулевою сумою характеризуються більш складними алгоритмами, оскільки таким іграм притаманні властивості гри з нулевою сумою та ще додаткові труднощі виграшу.

За кількістю ходів ігри діляться на однокрокові та багатокрокові. Однокрокові ігри закінчуються після одного кроку кожного гравця. У багатокрокових іграх виділяють особливий вид – диференційні ігри. Якщо в багатокрокових іграх робляться ходи неперервно і є можливість підпорядковувати поведінку інших гравців певним умовам, що описується диференційним рівнянням, то такі ігри називаються диференційними. В іграх типу погоні кожен об'єкт може рухатися, підкорюючись певним умовам, що описуються диференційним рівнянням. Метою одного об'єкта є досягнути певної області, метою іншого – не допусти першого до цієї області.

За характером взаємовідносин ігри діляться на безкоаліційні, коаліційні та кооперативні. Безкоаліційні ігри – це ігри в яких гравці не можуть вступати у взаємодію. Коаліційними іграми називають ігри в яких гравці можуть вступати в співпрацю, утворюючи коаліції. Кооперативною грою, що є основним об'єктом розгляду дипломної роботи, називають гру, у якій коаліції заздалегідь визначені. Критики зазвичай піддаються думці, що раціональність притаманна групам, а не окремим особам. Раціональна поведінка з боку окремого гравця полягає лише в погодженні того, що є раціональним для групи гравців у цілому. Карл Маркс є найвідомішим прихильником цієї помилки (він ставився до абстрактно задуманих коаліцій, таких як Капітал і Праця, так, ніби вони мали цілеспрямовані й довгострокові цілі окремих людей) .

Деякі філософи не помічають важливості припущення в теорії кооперативних ігор про можливість укладення обов'язкових угод. Для справді обов'язкової угоди всі гравці повинні знати, що коли прийде час, у кожного будуть вагомі причини дотримати своє слово. В економічних додатках гравці дотримуються своїх контрактів, боячись, що в іншому випадку на них подадуть до суду. У соціальних додатках причини, чому гравці піклуються про ефект нечесної поведінки в сьогоденні може вплинути на їхню репутацію надійної поведінки в майбутньому [1].

Люди зазвичай погано реагують на припущення про те, що обманювати й брехати було б розумно. Вони думають, що суспільство зруйнувалося б, якби такі речі були правдою. Де б ми були, якби не могли довіряти своїм друзям і сусідам? Але теоретики ігор не кажуть, що раціональні люди ніколи не повинні довіряти один одному. Кажуть тільки, що це робити нераціонально. Натомість є причини довіряти нашим друзям і сусідам, але у нас є не менш вагомі причини не довіряти політикам і продавцям вживаних автомобілів чи комп'ютерів. Те, чи буде розумно довіряти іншим людям, залежить від обставин. Наприклад, усі знають, що не варто довіряти незнайомцю, який підходить до вас у темному провулку пізно ввечері.

Ми можемо досягти набагато більшого, об'єднавшись і співпрацюючи, ніж це було б можливо, якби ми всі займалися своїми справами. Надлишок, який ми можемо створити, об'єднуючи наші таланти та ресурси, часто набагато більший, ніж сума його частин.

Кооперативна теорія ігор відрізняється від некооперативної теорії ігор відмовою від будь-яких претензій на пояснення, чому співпраця виживає в нашому виді. Натомість це постулює, що гравці мають доступ до немодельованої чорної скриньки, вміст якої якимось чином вирішує всі проблеми відданості та довіри, які періодично хвилювали нас[12].

Ці форми взаємодії надають основу для аналізу різноманітних сценаріїв і можливостей у теорії ігор, що допомагає в розумінні прийняття рішень та визначенні оптимальних стратегій для гравців.

РОЗДІЛ 2

КООПЕРАТИВНІ ІГРИ

2.1 Визначення та особливості

В області кооперативних ігор виникає новий концепт – ідея коаліцій. У випадку з двома гравцями можлива тільки одна коаліція, тоді як у грі з n учасниками можливі різноманітні коаліції. Позначимо через N множину усіх гравців, N ={1,2,...,n}, а через K – будь-яку його підмножину. Нехай гравці узгоджують спільні дії між собою, утворюючи таким чином одну коаліцію. Зрозуміло, що кількість таких коаліцій, які складаються з m гравців, дорівнює числу комбінацій n по m.

$$C_n^m = \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!}. \tag{2.1}$$

Тоді число всіляких коаліція дорівнює

$$\sum_{m=1}^{n} C_n^m = 2^n - 1 \tag{2.2}$$

З даної формули випливає, що кількість різноманітних коаліцій значно збільшується залежно від кількості всіх гравців у даній грі. Для вивчення цих ігор необхідно враховувати всі можливі коаліції, що призводить до зростання складності досліджень із збільшенням параметра n. Коли утворюється коаліція, множмна гравців K діє як один об'єднаний гравець проти інших учасників, а виграш цієї коаліції залежить від обраної кожним з n гравців стратегії.

2.2 Характеристична функція та її властивості

Функція υ, що ставить у відповідність кожної коаліції K найбільшший, гарантовано одержуваний його виграш K, називається характеристичною функцією гри. Таким чином, $\upsilon(K)$ являє собою корисність, яку коаліція K може отримати з гри незалежно від дії інших гравців. Це визначення описує наступні властивості:

1. персональність

$$\upsilon(\varnothing) = 0, \tag{2.3}$$

тобто коаліція, що не містить жодного гравця, нічого не може виграти;

2. супераддитивність

$$\upsilon(K \cup L) \geq \upsilon(K) + \upsilon(L), \quad K, L \subset N, \ K \cap L \neq \varnothing, \tag{2.4}$$

тобто спільний виграш коаліції не менший від сумарного виграшу всіх учасників коаліції.

Розподіл виграшів (розподіл) гравців повинен бути відповідним наступним умовам: якщо позначити через x_i і виграш $i-$го гравця, то, по-перше, має виконуватися умова індивідуальної раціональності

$$x_i \geq \upsilon(i) \tag{2.5}$$

для усіх $i \in N$, тобто будь-який гравець повинен отримати виграш у коаліції не менше, ніж він отримав би не беручи участь у ній, інакше він не буде брати участь у коаліції; по-друге, повинна задовольнятися умова колективної раціональності

$$\sum_{i \in N} x_i = \upsilon(N), \tag{2.6}$$

тобто сума виграшу гравців повинна відповідати можливостям (якщо сума виграшів усіх гравців менша, ніж $\upsilon(N)$, то гравцям немає сенсу вступати в коаліцію; якщо ж вимагати щоб сума виграшу гравців було більше, ніж

$\upsilon(N)$, то це означає, що гравці повинні ділити між собою суму більше, ніж у них є).

Вектор $x = (x_1, ..., x_n)$, що задовольняє умовам індивідуальної та колективної раціональностей, називається поділом в умовах характеристичної функції υ.

Система $\{N, \upsilon\}$, що складається з множини гравців, характеристичних функцій над цією множиною і множиною поділів, що задовольняють співвідношенням (2.5)-(2.6) в умовах характеристичної функції, називається класичною кооперативною грою.

З цих визначень випливає наступна теорема: для того, щоб вектор $x = (x_1, ..., x_n)$ був розподілом у класичній кооперативній грі $\{N, \upsilon\}$, необхідно й достатньо

$$x_i = \upsilon(i) + \alpha_i(i \in N), \tag{2.7}$$

при тому

$$\alpha_i \geq 0 \ (i \in N), \quad \sum_{i \in N} \alpha_i = \upsilon(N) - \sum_{i \in N} \upsilon(i). \tag{2.8}$$

Тепер питання ставиться наступним чином. Який із поділів є результатом гри? Це, звичайно, складна, якщо взагалі вирішувана проблема. Правда, можлива ситуація, за якої ця проблема тривіальна, а саме, якщо множина усіх розподілів складається з одного елемента. У цьому випадку очевидним результатом буде цей єдиний розподіл.

Результатом кооперативної гри є розподіл, що виникає не як наслідок дій гравців, а як результат їх угод. Тому в кооперативних іграх порівнюються не ситуації, а розподіли. Дане порівняння має важливе значення у теорії кооперативних ігор, тому відзначимо їх деякі особливості. Кооперативні ігри вважаються суттєвими, якщо для будь-яких коаліцій K та L виконується нерівність

$$\upsilon(K) + \upsilon(L) < \upsilon(K \cup L), \tag{2.9}$$

тобто умови супераддитивності виконується строга нерівність. Якщо ж в умові супераддитивності виконується рівність, тобто виконується властивість адитивності, то такі ігри називаються несуттєвими

$$\upsilon(K) + \upsilon(L) = \upsilon(K \cup L). \tag{2.10}$$

Мають сенс наступні властивості:

1. для того, щоб характеристична функція була адитивною (кооперативна гра - несуттєва) необхідне і достатнє виконання наступної рівності:

$$\sum_{i \in N} \upsilon(i) = \upsilon(N); \tag{2.11}$$

2. в несуттєвій грі з одним гравцем є лише один розподіл:

$$\{\upsilon(1), \upsilon(2), ..., \upsilon(n)\}; \tag{2.12}$$

3. в несуттєвій грі з більше, ніж одним гравцем, множина розподілів - нескінченно:

$$\begin{aligned} &\{\upsilon(1) + \alpha_1, \upsilon(2) + \alpha_2, ..., \upsilon(n) + \alpha_n\}, \\ &\alpha_i \geq 0 \ (i \in N), \ \upsilon(N) - \sum_{i \in N} \upsilon(i) > 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

З доведеннями цих властивостей можна ознайомитися в [9]

2.3 Стратегічно еквівалентна гра та її властивості

З метою систематизації досліджень кооперативних ігор вводиться поняття стратегічних та еквівалентних ігор. Кооперативна гра з множиною гравців N та характеристичною функцією υ називається стратегічною еквівалентною грою з множмною гравців та характеристичною функцією υ^1, якщо знайдуться такі $k > 0$ та довільні дійсні $c_i (i \in N)$, що для будь-якої коаліції $K \subset N$ має місце рівність

$$\upsilon^1(K) = k\upsilon(K) + \sum_{i \in K} c_i. \tag{2.14}$$

Сутність інтерпретації стратегічної еквівалентності для кооперативних ігор полягає у тому, що характеристичні функції стратегічно еквівалентних кооперативних ігор відрізняються лише масштабом вимірювання виграшів k

та початковими капіталами c_i. Така стратегічна еквівалентність кооперативних ігор із характеристичними функціями v та v^1 позначається так $v \sim v^1$, їх можна розглядати як еквівалентні з точки зору стратегічних аспектів. Зазвичай використовується термінілогія стратегічої еквівалентністі характеристичних функцій замість стратегічної еквівалентності кооперативних ігор для підкреслення важливості саме характеристичних функцій у порівнянні цих ігор. Справедливі наступні властивості для стратегічних еквівалентних ігор:

1. Рефлексивність: кожна характеристична функція еквівалентна собі $v \sim v$. Якщо взяти $k = 1$, $c_i = 0$ $(i \in N)$ у (2.14), то отримаємо очікуване.

2. Симетрія: якщо $v \sim v^1$, то $v^1 \sim v$. Розв'язавши рівняння (2.14) відносно $v(K)$, отримаємо

$$v(K) = \frac{1}{k}v^1(K) - \sum_{i \in K} \frac{c_i}{k}, \quad (k > 0), \tag{2.15}$$

або, якщо $\frac{1}{k} = k^1$; $-\frac{c_i}{k} = c_i^1$, отримаємо наступне

$$v(K) = k^1 v^1(K) + \sum_{i \in K} c_i^1, \quad (k > 0). \tag{2.16}$$

3. Транзитивність: якщо $v \sim v^1$ та $v^1 \sim v^2$, то $v \sim v^2$. Оскільки $v \sim v^1$, то справедливо (2.14), а оскільки справедливо $v^1 \sim v^2$, то має сенс наступне:

$$v^1 = k^1 v^2(K) + \sum_{i \in K} c_i^1 \quad (k^1 > 0). \tag{2.17}$$

Підставимо це значення у (2.14), отрмаємо

$$v(K) = kk^1 v^2(K) + \sum_{i \in K} (c_i + kc_i^1) \quad . \tag{2.18}$$

або при $kk^1 = k^2$, $c_i + kc_i^1 = c_i^2$, отримаємо

$$v(K) = k^2 v^2(K) + \sum_{i \in K} c_i^2, \quad k^2 > 0. \tag{2.19}$$

З властивостей рефлексивності, симетрії і транзитивності випливає, що множина всіх характеристичних функцій розпадається єдиним способом на попарні класи, що перетинаються, які називаються класами статистичної еквівалентності.

Відносини стратегічної еквівалентності ігор та їх характеристичних функцій переноситься на окремі розподіли: нехай $\upsilon \sim \upsilon^1$, тобто виконується умова (2.14), та $x = (x_1,...,x_n)$ – розподіл в умовах характеристичної функції υ; розглянемо вектор $x^1 = (x_1^1,...,x_n^1)$, де $x_i^1 = kx_i + c_i$; для нього

$$x_i^1 = kx_i + c_i \geq k\upsilon(i) + c_i = \upsilon^1(i), \tag{2.20}$$

тобто виконується умова індивідуальної раціональності, та

$$\sum_{i\in N} x_i^1 = \sum_{i\in N}(kx_i + c_i) = k\sum_{i\in N} x_i + \sum_{i\in N} c_i = k\upsilon(N) + \sum_{i\in N} c_i = \upsilon^1(N), \tag{2.21}$$

тобто виконується умова колективної ірраціональності. Тому вектор x^1 є розподілом в умовах υ^1. Розподіл x^1 відповідає розподілу x при стратегічній еквівалентності $\upsilon \sim \upsilon^1$. Далі розглянемо конкретні ігри, які є характерними для кожного класу несуттєвих кооперативних ігор. Гра називається нульовою, якщо всі значення її характеристичної функції дорівнюють нулю. Суттєве значення нульової гри полягає в тому, що учасники в ній не мають жодних зацікавленостей.

Виявляється, що будь-яка несуттєва гра є стратегічно еквівалентною нульовій. Дійсно, для несуттєвої гри це твердження має місце

$$\upsilon(N) = \sum_{i\in N} \upsilon(i), \tag{2.22}$$

тому стратегічно еквівалентна їй характеристична функція υ повинна мати наступний вигляд:

$$\upsilon^1(K) = k\upsilon(K) + \sum_{i\in K} c_i = \upsilon(K) - \sum_{i\in K} \upsilon(i) = 0. \tag{2.23}$$

Випливає, що всі несуттєві ігри з даною множиною гравців N є стратегічно еквівалентними між собою, іншими словами, вони належать до одного класу стратегічної еквівалентності.

Кооперативна гра з характеристичною функцією υ мають 0-1 редуковану форму, якщо виконуються наступні співвідношення:

$$\upsilon(i) = 0, \quad (i \in N), \quad \upsilon(N) = 1. \tag{2.24}$$

Скористаємося наступною теоремою.

Теорема 2.1. *Кожна суттєва кооперативна гра стратегічно еквівалентна одній й тільки одній грі в 0 - 1 редукованій формі.*

Доведення. Нехай υ – характеристична функція довільної суттєвої гри n гравців. Для неї підберемо таку стратегічну евівалентну характеристичну функцію, що

$$\upsilon^1(i) = k\upsilon(i) + c_i = 0 \quad (i = 1, 2, ..., n), \tag{2.25}$$

$$\upsilon^1(N) = k\upsilon(N) + \sum_{i \in N} c_i = 1. \tag{2.26}$$

Додаючи по i ліву та праву частини (2.25), отримаємо

$$k \sum_{i \in N} \upsilon(i) + \sum_{i \in N} c_i = 0, \tag{2.27}$$

звідки

$$\sum_{i \in N} c_i = -k \sum_{i \in N} \upsilon(i). \tag{2.28}$$

Підставимо (2.28) у (2.26), отримаємо

$$k\upsilon(N) - k \sum_{i \in N} \upsilon(i) = 1. \tag{2.29}$$

Оскільки гра суттєва, то

$$\upsilon(N) - \sum_{i \in N} \upsilon(i) > 0, \tag{2.30}$$

тому з (2.29) отримаємо

$$k = \frac{1}{\upsilon(N) - \sum_{i \in N} \upsilon(i)} > 0. \tag{2.31}$$

З (2.25) отримаємо

$$c_i = -kv(i) = -\frac{v(i)}{v(N) - \sum_{i \in N} v(i)} \quad (i \in N). \tag{2.32}$$

Значення k та c_i, що були отримані з формул (2.31), (2.32) та за допомогою розв'язку системи рівнянь (2.25), (2.26), є єдиним її розв'язком, тому була отримана гра в 0 - 1 редукованій формі, що й повинні були довести.

У грі в 0 - 1 редукованій формі розподілом є будь-який вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, для якого

$$x_i \geq 0 \quad (i \in N), \quad \sum_{i \in N} x_i = 1. \tag{2.33}$$

В теорії ігор розглядаються ігри в $a - b$ редукованій формі, подібно 0 - 1 редукованій формі. Треба розуміти під ними ігри з наступними характеристичними функціями v^1:

$$v^1(i) = a \quad (i \in N),\ v^1(N) = b, \quad (na \neq b). \tag{2.34}$$

Варто зазначити, що будь-яка суттєва кооперативна гра має рівно одну $a - b$ редуковану форму при будь-яких a та b, якщо $na \neq b$.

Розглянемо з більшою увагою можливі класи ігор, враховуючи відношення стратегічної еквівалентності. Варто нагадати, що для кожної множини гравців N існує єдиний клас стратегічно еквівалентних несуттєвих ігор з множиною нравців N. Тому варто розглянути класи суттєвих коопертивних ігор. Зупинимося на описі класів ігор в 0 - 1 редукованій формі.

Розглянемо кооперативну гру з нулевою сумою.

1. Ігри двох гравців.

Виявляється, що будь-яка кооперативна гра двох гравців із нульовою сумою є несуттєвою. Розглянемо ситуацію, де маємо суттєву кооперативну гру двох гравців з характеристикою функції v. В такому випадку, ця гра повинна бути стратегічно еквівалентною певній грі в 0 - 1 редукованій формі з характеристикою функцією v^1. Це можна пояснити наступним чином:

$$v^1(1) = 0 \quad v^1(2) = 0 \quad v^1(1{,}2) = 1. \tag{2.35}$$

Тоді, використавши властивість, отрмаємо

$$v^1(2) = v^1(1{,}2) - v^1(1) = 1 - 0 = 1, \tag{2.36}$$

а це суперечить (2.35). Відповідно, гіпотеза о суттєвості кооперативної гри двох гравців з нулевою сумою не є вірною.

Отож, клас кооперативних ігор з двома гравцями з нулевою сумою обмежується несуттєвими іграми.

2. Ігри трьох гравців.

Нехай v – характеристична функція суттєвої гри в 0 - 1 редукованій формі, тоді

$$v(1) = v(2) = v(3) = 0, \quad v(1,2,3) = 1. \tag{2.37}$$

Тоді, використавши властивість, отрмаємо

$$\begin{aligned} v(1{,}2) &= v(1{,}2{,}3) - v(3) = 1 - 0 = 1, \\ v(1{,}3) &= v(1{,}2{,}3) - v(2) = 1 - 0 = 1, \\ v(2{,}3) &= v(1{,}2{,}3) - v(1) = 1 - 0 = 1. \end{aligned} \tag{2.38}$$

таким чином, характеристична функція повністю визначається. Зазначимо, що існують дві категорії кооперативних ігор із нульовою сумою для трьох гравців: суттєві та несуттєві.

3. Ігра чотирьох гравців.

Розглянемо усі класи стратегічної евівалентності таких ігор. Насамперед маємо клас несуттєвих ігор. Для отримання класу суттєвих ігор в 0 - 1 редукованій формі визначимо характеристичну функцію v такої гри

$$v(1) = v(2) = v(3) = v(4) = 0, \quad v(1,2,3,4) = 1. \tag{2.39}$$

Тоді, використавши властивість, отрмаємо

$$\begin{aligned} \upsilon(1{,}2{,}3) &= \upsilon(1{,}2{,}3{,}4) - \upsilon(4) = 1 - 0 = 1, \\ \upsilon(1{,}2{,}4) &= \upsilon(1{,}2{,}3{,}4) - \upsilon(3) = 1 - 0 = 1, \\ \upsilon(1{,}3{,}4) &= \upsilon(1{,}2{,}3{,}4) - \upsilon(2) = 1 - 0 = 1, \\ \upsilon(2{,}3{,}4) &= \upsilon(1{,}2{,}3{,}4) - \upsilon(1) = 1 - 0 = 1. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Тепер необхідно визначити значення характеристичної функції на коаліції двох гравців. Всього таких коаліції шість: $(1{,}2), (1{,}3), (1{,}4), (2{,}3), (2{,}4), (3{,}4)$. Характеристична функція на цих коаліціях відповідно властивості задовільняють наступним співвідношенням:

$$\upsilon(1,4) = 1 - \upsilon(2,3), \quad \upsilon(1,3) = 1 - \upsilon(2,4), \quad \upsilon(1,2) = 1 - \upsilon(3,4). \tag{2.41}$$

Оскільки значеньневідомих - шість, а співвідношень - лише три, то три значення щ шести можемо обрати довільно. Позначимо ці довільні значення через x_1, x_2, x_3, тобто

$$\upsilon(1,4) = x_1 \quad \upsilon(2,4) = x_2, \quad \upsilon(3,4) = x_3, \tag{2.42}$$

тоді

$$\upsilon(2,3) = 1 - x_1 \quad \upsilon(1,3) = 1 - x_2, \quad \upsilon(1,2) = 1 - x_3. \tag{2.43}$$

Крім того, має бути $0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1, 0 \le x_3 \le 1$, оскільки значення характеристичної функції на коаліції з двох гравців не може бути менше, ніж значення характеристичної функції для одного з цих гравців (дорівнює нулю для одного гравця), і не може бути більше, ніж значення характеристичної функції для коаліції із трьох гравців (дорівнює одиниці як для трьох гравців). Геометрично (x_1, x_2, x_3) можна зобразити як точку одиничного куба, тобто кожному класу стратегічної еквівалентності ігор чотирьох гравців буде відповідати точкою одиничного куба. Отже, множина класів стратегічної еквівалентності суттєвих ігор чотирьох гравців нескінченна та трипараметрична, тобто залежить від довільних параметрів.

4. Ігри, що складаються з кількість гравців, більше ніж чотири. Ігри цього типу характеризуються більшим різноманіттям класів стратегічної

еквівалентності суттєвих ігор.

Розмірність множини класів ігор n гравців буде $2^{n-1} - n - 1$, тобто маємо $2^{n-1} - n - 1$ довільних параметрів. Розглянемо кооперативні ігри без вимог до сталості суми.

1. Ігри двох гравців. З використанням властивості редукованості для множини $N = \{1, 2\}$

$$v(\varnothing) = v(1) = v(2) = 0, \quad v(1, 2) = 1. \tag{2.44}$$

Суттєві кооперативні ігри двох гравців з ненульвою сумою складають один клас стратегічної еквівалентності.

2. Ігри трьох гравців. З використанням властивості редукованості для множини $N = \{1, 2, 3\}$

$$v(\varnothing) = v(1) = v(2) = v(3) = 0, \quad v(1, 2, 3) = 1. \tag{2.45}$$

Значення характеристичної функції на множинах коаліцій двох гравців довільні

$$v(1, 2) = c_3, \quad v(1, 3) = c_2, \quad v(2, 3) = c_1, \tag{2.46}$$

але задовільняють умовам

$$0 \le c_1 \le 1, \quad 0 \le c_2 \le 1, \quad 0 \le c_3 \le 1. \tag{2.47}$$

Отож, класи стратегічної еквівалентності спільних кооперативних ігор трьох гравців можуть відповідати точкам трьохвимірного одиничного куба (як це виходило для ігор чотирьох гравців з нулевою сумою).

Для вивчення ігор важливо враховувати можливість врахування переваг, що виявляються через концепцію домінування в розподілах.

Означення 2.1. Нехай є два розподіли $x = (x_1, ..., x_n)$ та $y = (y_1, ..., y_n)$ в кооперативній грі $\Gamma = \{N, v\}$ та $K \subset N$ – деяка коаліція. Тоді розподіл домінує за коаліцією , якщо

$$\begin{aligned} &1. \quad \sum_{i \in K} x_i \leq v(K); \\ &2. \quad x_i > y_i, \quad \forall i \in K. \end{aligned} \tag{2.48}$$

З даного визначення випливає, що якщо x домінує над y для коаліції k, то розподіл y вважається менш важливим у порівнянні з розподілом x для цієї коаліції. Також вводиться поняття загального домінування.

Означення 2.2. Розподіл x домінує y, якщо існує така коаліція K, для якої розподіл x домінує y. Домінування позначається наступним чином: $x \succ y$.

Наявність домінування означає, що з множини гравців N знайдеться коаліція, в якій x краще y. Домінування не має повністю властивості рефлексивності, симетричності та тарнзитивності. Співвідношення домінування може бути не за всією коаліцією. Тому не варто говорити про домінування, коли в коаліції один гравець або усі разом.

Домінування інваріантні відносно стратегічної еквівалентності. Запишемо дану властивість у вигляді теореми: якщо v та v^1 – дві стратегічні еквівалентні характеристичні функції, причому роподіли x та y відповідають розподілами x^1 та y^1, тоді з $x \succ y$ отримаємо $x^1 \succ y^1$. Доведення теореми можна знайти у

Очевидно, всі явища, які можна описати через домінування розподілів, належать до класів стратегічної еквівалентності. Таким чином, достатньо вивчати ці класи, а не самі ігри, для суттєвих ігор у їхній редукованій формі та для несуттєвих ігор з нульовою сумою. У будь-якій несуттєвій грі є лише один розподіл, тому ніяких домінувань немає.

2.4 C - ядро

Існує багато варіантів, що з'являються під час вивчення домінування розподілів кооперативної теорії ігор. Чим більше гравців - тим більше варіантів. Варто зазначити, що особливу увагу приділяють досить стійким розподілам, тобто таким розподілам, які не можуть домінуватися ніякими іншими розподілами. Множину досить стійких розподілів в кооперативній грі називають $C-$ ядром. Наведемо теорему, яка дає ознаку приналежності до $C-$ ядра.

Теорема 2.2. *Для того щоб розподіл x належав $C-$ ядру кооперативної гри з характеристичною функцією v, необхідною і достатньо, щоб для будь-якої коаліції K виконувалася нерівність*

$$v(K) \leq \sum_{i \in K} x_i \tag{2.49}$$

З доведенням теореми можна ознайомитися у [9].

Нерівність (2.49) лінійне відносно x, то з теореми (2.2) випливає, що $C-$ ядро в будь-якій грі є опуклий багатогранником. Відзначемо деякі особливості кооперативних ігор щодо існування $C-$ ядра. У несуттєвій грі $C-$ ядро існує і складається з єдиного розподілу гри. У будь-якій суттєвій грі з постійною сумою $C-$ ядро порожнє. Для загальної гри трьох гравців у 0 - 1 редукованій формі маємо наступне. Її характеристична функція має вигляд:

$$\begin{aligned} v(\varnothing) = v(1) = v(2) = v(3) = 0, \quad v(1{,}2{,}3) = 1, \\ v(1{,}2) = c_3, \quad v(1{,}3) = c_2, \quad v(2{,}3) = c_1, \end{aligned} \tag{2.50}$$

де $0 \leq c_1 \leq 1, \quad 0 \leq c_2 \leq 1, \quad 0 \leq c_3 \leq 1.$

Для того, щоб розподлі x належив $C-$ ядру необхідно й достатньо виконання наступних нерівностей

$$x_1 + x_2 \geq c_3, \quad x_1 + x_3 \geq c_2, \quad x_2 + x_3 \geq c_1 \tag{2.51}$$

вбо, якщо використати $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, отримаємо

$$x_3 \leq 1 - c_3, \quad x_2 \leq 1 - c_2, \quad x_1 \leq 1 - c_1. \tag{2.52}$$

Це означає, що точка x має знаходитись ближче до $i-$ ой вершини основного трикутника, ніж пряма

$$\xi_i = 1 - c_i \quad (i = 1, 2, 3). \tag{2.53}$$

З нерівності (2.52), використавши додавання розподілів x_1, x_2, x_3, отримаємо

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 - (c_1 + c_2 + c_3) \tag{2.54}$$

або, взявши до уваги, що $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, отрмаємо

$$c_1 + c_2 + c_3 \leq 2. \tag{2.55}$$

Нерівність (2.55) є необхідною умовою існування непустого $C-$ ядра. Але, якщо (2.55) виконується, то можна обрати такі невід'ємні $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, щоб

$$\sum_{i=1}^{3} (c_i + \varepsilon_i) = 2, \tag{2.56}$$

та узяти таі

$$x_i = 1 - c_i - \varepsilon_i \quad (i = 1{,}2{,}3). \tag{2.57}$$

Дані значення x_i задовільянють (2.52), тобто розподіл $x = (x_1, x_2, x_3)$ належить $C-$ ядру.

Геометрично непусте $C-$ ядро є заштрихованим трикутником, сторони якого - значення рівнянь (2.53), якщо виконується співвідношення

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1, \tag{2.58}$$

та розв'язок будь-якої пари рівнянь (2.57) є невід'ємним. Наприклад, розглянемо систему

$$\xi_1 = 1 - c_1, \quad \xi_2 = 1 - c_2. \tag{2.59}$$

Оскільки $0 \leq c_1 \leq 1, \quad 0 \leq c_2 \leq 1$, то $\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0$. Звідси отримаємо

$$\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2 = 1 - (1 - c_1) - (1 - c_2) = c_1 + c_2 - 1. \tag{2.60}$$

Щоб отримати $\xi_3 \geq 0$, необхідно виконання умови

$$c_1 + c_2 - 1 \geq 0. \tag{2.61}$$

В даному випадку $C-$ ядро подано у вигляді заштрихованого трикутника всередині основного трикутника. Аналогічно розглядаються інші можливі варіанти поєднання нерівностей. Наприклад, якщо $c_1 + c_2 < 1$, то $C-$ ядро має вигляд заштрихованого чотирикутника всередині основного трикутника.

Перейдемо до розгляду питання визначення та знаходження розв'язку кооперативних ігор. Очевидно, що розв'язки гри повинні включати поділи, які є кращими з певного погляду. Так, поділи, що входять у C-ядро, мають деяку стійкість у пасивному сенсі, що означає відсутність обґрунтованих причин відхилятися від такого розподілу. Як рішення гри можна використовувати розподіли, проте бажано знайти той, який не лише не домінується іншими розподілами, а й сам домінує будь-який інший розподіл. Такий розподіл був би ідеальним для розв'язку гри. Однак в кооперативних іграх не вдається знайти такий розподіл. Навіть за декілька ослаблених вимог не вдається визначити кращий розподіл. Тому в розв'язку гри шукають шляхи розширення класу розподілів, де розв'язком гри буде не один, а множина розподілів. Одним із таких рішень є розроблене Нейманом - Моргенштерном.

2.5 Розв'язок кооперативної гри за Немайном - Моргенштерном

Означення 2.3. Розв'язком кооперативної гри за Нейманом - Моргенштерном називається така множина R розподілів у ній, що:

1. ніякі два розподіли з R не домінують один одного;

2. який би не був розподіл s, що не належить R, знайдеться розподіл r, що належить R, який домінував би s.

Цей розв'язок, який ми позначимо як Н - М розв'язок, визначається двома умовами: перша відображає внутрішню стійкість, а друга – зовнішню. Сутність інтерпретації Н - М розв'язку полягає в тому, що будь-які дві норми поведінки, які відповідають Н - М розв'язку, не можуть бути протиставлені одна одній; навіть при будь-якому відхиленні від припустимих норм поведінки існує така коаліція, яка буде працювати на відновлення норми. Варто зазначити, що між $C-$ ядром та Н - М розв'язком існує тісний зв'язок, яки описаний у наступній теоремі.

Теорема 2.3. *Якщо в кооперативній грі існує с− ядро C та Н - М розв'язок R, то $C \subset R$.*

Доведення. Якщо розподіл $x \in C$, то він може бути домінований будь-яким іншим розподілом. Якщо ж $x \overline{\in} R$, то він має бути домінований деяким розподілом із розв'язку. Тому, якщо $x \in C$, то $x \in R$. Це й треба було довести.

Розв' язок Н - М має наступні властивості.

Розв'язок Н - М для кооперативної гри не може складатися лише з одного поділу через те, що у таких грах характеристична функція є несуттєвою.

Існують кооперативні ігри, де взагалі відсутнє Н - М рішення. На сьогодні немає відомих критеріїв, які дозволяють визначити наявність Н - М розв'язку у конкретній кооперативній грі. Таким чином, принцип оптимальності, вбудований у Н - М розв'язок, не має універсальної реалізації, і його застосування залишається неоднозначним. Цей принцип не є повним, оскільки не здатний визначити єдину систему норм розподілу виграшів для гравців. Деякі кооперативні ігри можуть мати кілька Н - М розв'язків.

Розв'язок за методом Неймана-Моргенштерна само по собі не надає визначення переможців у грі. Ці характеристики свідчать про те, що Н - М розв'язок має свої особливості, які слід враховувати в контексті конфліктних ситуацій. Наприклад, у реальних конфліктних економічних ситуаціях може існувати множмна різних розв'язків, які неможливо чітко та повністю порівняти за перевагами. Отже, Н - М розв'язок може надати корисну інформацію для фахівців, які приймають рішення в таких ситуаціях.

2.6 Вектор Шеплі

У зв'язку з тим, що наразі не існує загальної теореми про існування рішень у теорії ігор, математики звернули увагу на інші концепції рішень. Однією з таких концепцій є вектор значень гри, який вперше ввів Шеплі.

Він підійшов до свого визначення значення гри, базуючись на аксіоматичних принципах. Дамо кілька визначень.

Означення 2.4. Носієм гри рхарактеристичною функцією v називається така коаліція T, що $v(S) = v(S \cap T)$ для будь-якої коаліції S.

Зміст коаліції T полягає в тому, що будь-який гравець, який не входить до складу T, є нейтральним, і він не може мати впливу на жодну коаліцію. Такий гравець не має жодного внеску до спільних зусиль та розподілу коштів.

Означення 2.5. Нехай v – характеристична функція кооперативної гри n гравців, π – будь-яка перестановка множини N гравців. Через πv позначимо характеристичну функцію u такої гри, що для коаліції $S = \{i_1, i_2, ..., i_s\}$ буде

$$u(\{\pi(i_1), \pi(i_2),...,\pi(i_s)\}) = v(S). \tag{2.62}$$

Змістовна характеристика функції πv полягає в тому, що якщо в грі з характеристичною функцією v поміняти місцями гравців згідно з перестановкою π, то отримаємо гру з характеристичною функцією πv.

Означення 2.6. Вектором цін гри з характеристикою функцією v називається $n-$мірний вектор $\phi(v) = (\phi_1(v), \phi_2(v),..., \phi_n(v))$, що задовольняє наступним аксіомам Шеплі.

A1. Аксіома ефективності. Якщо S – будь-який носій гри з характеристичною функцією v, то

$$\sum_{i \in S} \phi_i(v) = v(S). \tag{2.63}$$

A2. Аксіома симетрії. Для будь-якої перестановки π та $i \in N$ повинно бути

$$\phi_{\pi(i)}(\pi v) = \phi_i(v), \tag{2.64}$$

тобто гравці, які однаково входять в гру, повинні за справедливіастю отримувати однакові виграші.

А3. Аксіома агрегації. Якщо є дві гри з характеристичними функціями v та u, то

$$\phi_i(u+v) = \phi_i(u) + \phi_i(v), \tag{2.65}$$

тобто заради справедливості треба вважати, що за участю гравців у двох іграх їх виграші в окремих іграх мають додаватися. Вектор, що задовольняє аксіомам А1 - А3 називається вектором Шеплі.

Існування такого вектора випливає з наступної теореми.

Теорема 2.4. *Існує єдина функція ϕ, що визначена для всіх ігор і задовольняє аксіомам А1 - А3.*

Для доведення цієї теореми потрібні наступні визначення та леми.

Означення 2.7. Характеристична функція $w_s(T)$, що визначена для будь-якої коаліції S, називається найпростішою, якщо

$$w_s(T) = \begin{cases} 1 & \text{при } S \subset T, \\ 0 & \text{при } S \not\subset T. \end{cases} \tag{2.66}$$

Змістовно найпростіша харакеристична функція описує такий стан справ, при якому множмна гравців S виграє одиницю тоді і тільки тоді, коли вона містить деяку основну мінімальну виграшну коаліцію S.

Лема 2.1. *Для будь-якої коаліції S з числом гравців s*

$$\phi_s(w_s) = \begin{cases} \dfrac{1}{s} & \text{при } i \in S, \\ 0 & \text{при } i \notin S. \end{cases} \tag{2.67}$$

Доведення. Очевидно, S є носієм гри з характеристичною функцією w_s , тоді за аксіомою А1 маємо

$$\sum_{i \in T} \phi_i(w_s) = 1, \tag{2.68}$$

де $T \supset S$. Оскільки може бути $T = S$, то

$$\phi_i(w_s) = 0, i \notin S. \tag{2.69}$$

Якщо π - будь-яка перестановка, що відображає S на себе, то $\pi w_s = w_s$ та за аксіомою А2 для будь-яких $i, j \in S$ буде $\phi_i(w_s) = \phi_i(w_s)$, тобто усі $\phi_i(w_s)$ однакові, їхня кількість s . Крім того, їхня сума дорівнює 1. Тому $\phi_i(w_s) = \frac{1}{s}$, якщо $i \in S$.

З цієї теореми маємо наслідок: якщо $c > 0$, то

$$\phi_i(cws) = \begin{cases} \dfrac{c}{s} & \text{при } i \in S, \\ 0 & \text{при } i \notin S. \end{cases} \tag{2.70}$$

Лема 2.2. *Якщо υ – характеристична функція кооперативної гри, то для $S \subset N$ існує $2^n - 1$ таких дійсних чисел c_s, що*

$$\upsilon = \sum_{S \subset N} c_s w_s, \tag{2.71}$$

де w_s – найпростіша характеристична функція. Доведення. Нехай

$$c_s = \sum_{T \subset S} (-1)^{s-t} \upsilon(T), \tag{2.72}$$

де t – число елементів у T. Нехай U – будь-яка коаліція, тоді

$$\sum_{S \subset N} c_s w_s(U) = \sum_{S \subset U} c_s = \sum_{S \subset U} (\sum_{T \subset S} ((-1))^{s-t} \upsilon(T)) = \sum_{T \subset U} \sum_{\substack{S \subset U \\ S \supset T}} (-1)^{s-t} \upsilon(T) \tag{2.73}$$

Дляк кожного s між t та u маємо C_{u-t}^{u-s} таких множин S з $s-$елементами, що $T \subset S \subset U$. Відповідно,

$$\sum_{\substack{S \subset U \\ S \supset T}} (-1)^{s-t} = \sum_{s=t}^{u} C_{u-t}^{u-s} (-1)^{s-t}, \tag{2.74}$$

що є біномінальним розкладом $(1-t)^{u-t}$. Відповідно, для усіх $t < u$ воно дорівнює 0, а для $t = u$ воно дорівнює 1. Тому для усіх $U \subset N$ маємо:

$$\sum_{s \subset U} c_s w_s(U) = \upsilon(U), \tag{2.75}$$

що й треба було довести.

Тепер доведемо теорему (2.4). Лема (2.2) має наступний зміст: характеристична функція будь-якої коаліціоної гри може бути представлена у вигляді лінійної комбінації найпростіших. На підставі леми (2.1) для ігор з найпростішими функціями функція ϕ єдина. Деякі з коефіцієнтів c_s від'ємні; хоча з аксіоми А3 випливає, що $\phi(u-\upsilon) = \phi(u) - \phi(\upsilon)$ та функція ϕ визначається єдиним чином. Тепер для функції ϕ отримаємо явне представлення. На підставі рівності

$$\upsilon = \sum_{S \subset N} c_s w_s, \tag{2.76}$$

аксіоми А3 та леми (2.1), (2.2) можна записати

$$\phi_i(\upsilon) = \sum_{S \subset N} c_s \phi_i(w_s) = \sum_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} \frac{c_s}{s}, \tag{2.77}$$

де

$$c_s = \sum_{T \subset S} (-1)^{s-t} \upsilon(T). \tag{2.78}$$

Тому

$$\phi_i(\upsilon) = \sum_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} \frac{1}{s} \sum_{T \subset S} (-1)^{s-t} \upsilon(T) = \sum_{T \subset N} \sum_{\substack{S \subset N \\ T \cup \{i\} \subset S}} \frac{1}{s} (-1)^{s-t} \upsilon(T). \tag{2.79}$$

Нехай

$$\gamma_i(T) = \sum_{\substack{S \subset N \\ T \cup \{i\} \subset S}} \frac{1}{s} (-1)^{s-t}. \tag{2.80}$$

З останньої рівності відомо, що $i \notin T^1$ та $T = T^1 \cup \{i\}$, то

$$\gamma_i(T^1) = -\gamma_i(T), \tag{2.81}$$

оскільки усі члени правої $\gamma_i(T)$ частини для будуть в обох випадках однакові, за виключенням, $t = t^1 + 1$ та будуть відрізнятися лише знаком.

Тому

$$\phi(\upsilon) = \sum_{\substack{S\subset N\\ i\in T}} \gamma_i(T)[\upsilon(T) - \upsilon(T\backslash\{i\})]. \tag{2.82}$$

Якщо $i \in T$, то маємо C_{n-t}^{s-t} таких коаліцій S з $s-$ елементами, що $T \subset S$, тому

$$\gamma_i(T) = \sum_{s=t}^{n} \frac{1}{s}(-1)^{s-t}C_{n-t}^{s-t} = \sum_{s=t^n}(-1)^{s-t}C_{n-t}^{s-t}\int_0^1 x^{s-1}dx =$$
$$= \int_0^1 x^{t-1}\sum_{s=t}^{n}(-1)^{s-t}C_{n-t}^{s-t}x^{s-t}dx = \int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{n-t}dx = \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} \tag{2.83}$$

Тепер компоненти вектора Шеплі можна записати у явному вигляді

$$\phi_i(\upsilon) = \sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}[\upsilon(T) - \upsilon(T\backslash\{i\})]. \tag{2.84}$$

Тепер можна стверджувати, що отримане значення для задовільняє усім аксіомам Шеплі та

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i(T) = 1, \tag{2.85}$$

тому

$$\phi(\upsilon) \geq \upsilon(\{i\}), \tag{2.86}$$

та, відповідно, $\phi(\upsilon)$ є розподілом.

Вектор Шеплі змістовно можна характеризувати наступним чином: величина, яку вносить $i-$ гравець у коаліцію T, виражається як $\upsilon(T) - \upsilon(T\backslash\{i\})$ і вважається виграшем $i-$го гравця;$\gamma_i(T)$ – ймовірність того, що $i-$ий гравець увійде в коаліцію $T\backslash\{i\}$; $\phi_i(\upsilon)$ – середній вигращ $i-$го гравця у такій схемі інтерпретації. У тому випадку, коли υ – найпростіша,

$$\upsilon(T) - \upsilon(T\backslash\{i\}) = \begin{cases} 1 & \text{, якщо виграюча коаліція - це } T, \\ 0 & \text{, якщо виграюча коаліція - це } T, \\ & \text{програюча коаліція - це } T\backslash\{i\}. \end{cases} \tag{2.87}$$

Відповідно,

$$\phi_i(v) = \sum_T \gamma_i(T) = \sum_T \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}, \tag{2.88}$$

де додавання по T поширюється на всі такі коаліції T, що виграють, а коаліція $T\backslash\{i\}$ не є виграючою.

РОЗДІЛ 3

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ КООПЕРАТИВНІ ІГРИ

3.1 Визначення та особливості

Розглянемо загальну диференційну гру $\Gamma(x_0, T - t_0)$ для n осіб із рівнянням руху

$$x'(s) = f[s, x(s), u_1(s), u_2(s), ..., u_n(s)] \quad x(t_0) = x_0, \tag{3.1}$$

Виграш гравця i визначається так:

$$\begin{gathered}\int_{t_0}^{T} g^i[s, x(s), u_1(s), u_2(s), \ldots, u_n(s)]\, ds + q^i(x(T)),\\ i \in N = \{1, 2, \ldots, n\},\end{gathered} \tag{3.2}$$

де $x(s) \in X \subset R^m$ — позиційна змінна ігри та $u_i \in U^i$ — керування гравця $i \in N$. Виграші гравців передбачаються трансферабельними. Позиційна рівновага може бути побудована у припущенні, що гравці у грі не кооперуються.

А тепер розглянемо випадок, коли гравці погодилися на кооперацію. Позначимо через $\Gamma_c(x_0, T - t_0)$ кооперативну гру з ігровою структурою гри $\Gamma(x_0, T - t_0)$, у якій гравці погодилися діяти відповідно до деякого заздалегідь визначеного принципу оптимальності. Угода про те, як кооперуватися і як поділити виграш, що вийшов у результаті кооперації, становить зміст принципу оптимальності в кооперативній грі.

Таким чином, принцип оптимальності в кооперативній грі $\Gamma_c(x_0, T - t_0)$ складається з:

1) угоди про множину кооперативних стратегій (управлінь),

2) механізм розподілу загального виграшу між гравцями.

Принцип оптимальності повинен зберігати свою ефективність вздовж кооперативної траєкторії $\{x_s^*\}_{s=t_0}^T$. Більше того, групова раціональність вимагає, щоб гравці орієнтувалися на множину стратегій (управлінь), що дають оптимальне рішення щодо Парето. На додаток до цього принцип розподілу виграшу повинен задовольняти властивості індивідуальної раціональності в тому сенсі, що жоден з гравців не повинен погіршити свій стан у результаті кооперації.

Для виконання властивості групової раціональності у разі трансферабельних виграшів гравці повинні прагнути максимізації сумарного виграшу за умови

$$\sum_{j=1}^{N}\left\{\int_{t_0}^{T} g^i[s,x(s),u_1(s),u_2(s),...,u_n(s)]ds+q^i(x(T))\right\}, \qquad (3.3)$$

при умові (3.1).

Використовуючи принцип максимуму, множина оптимальних управлінь $u^*(s)=[u_1^*(s),u_2^*(s),...,u_n^n(s)]$. Підставляючи цей набір оптимальних управлінь (3.1) отримуємо оптимальну траєкторію $\{x^*(t)\}_{t=t_0}^{T}$, де

$$x^*(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f[s,x^*(s)u^*(s)]ds, \quad t\in[t_0,T]. \qquad (3.4)$$

Як і раніше ми використовуватимемо як позначення $x^*(t)$, так і позначення x_t^*.

Позначимо величину

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{\int_{t_0}^{t} f[s,x^*(s)u^*(s)]ds+q^i(x^*(T))\right\}. \qquad (3.5)$$

через $v(N;x_0,T-t_0)$. Нехай $S\subseteq N$, і $v(S;x_0,T-t_0)$ — характеристична функція, що відображає максимальний гарантований виграш коаліції S. Величина $v(S;x_0,T-t_0)$ означає максимальний виграш коаліції S у випадку, коли гравці, що залишилися з коаліції $N\backslash S$ грають проти S. Використовуючи супераддитивність характеристичної функції, отримуємо $v(S;x_0,T-t_0)\geq v(S';x_0,T-t_0)$, якщо $S'\subset S\subseteq N$. Тому гравцям вигідно створювати максимальну коаліцію N для отримання максимально можливого сумарного виграшу $v(N;x_0,T-t_0)$ у цій грі.

3.2 Розподіли в динаміці

В динаміці у гравців виникає природне питання про те, як змінюються ці розподіли в ході розвитку гри по кооперативній траєкторії. Звернемо увагу на динаміку розподілів, які підпорядковані певним принципам оптимальності.

Далі будемо використовувати символ $\Gamma_v(x_0,T-t_0)$ для позначення кооперативної диференціальної гри у формі характеристичної функції.

Нехай у грі $\Gamma_v(x_0,T-t_0)$ обрано певний принцип оптимальності. Цей принцип оптимальності, застосований до гри з початкових станів $x(t_0) = x_0, t = t_0$, визначає деяке підмножина множини розподілів $W_v(x_0,T-t_0) \subseteq E_v(x_0,T-t_0)$ та оптимальну траєкторію $\{x^*(t)\}_{t=t_0}^T$, що максимізує

$$\sum_{j=1}^{N} \left\{ \int_{t_0}^{T} g^i[s, x^*(s), u^*(s)]ds + q^i(x^*(T)) \right\}. \tag{3.6}$$

Припускаємо також, що $W_v(x_0,T-t_0) = \varnothing$.

Означення 3.1. Будь-яка траєкторія $\{x^*(t)\}_{t=t_0}^T$ системи (3.1), для якої має місце

$$\sum_{j=1}^{N} \left\{ \int_{t_0}^{T} g^i[s, x^*(s), u^*(s)]ds + q^i(x^*(T)) \right\} = v(N; x_0, T-t_0), \tag{3.7}$$

називається оптимальною траєкторією гри $\Gamma_v(x_0,T-t_0)$ або оптимальною кооперативною траєкторією.

З визначення випливає, що уздовж оптимальної траєкторії гравці одержують максимальний сумарний виграш. Припустимо, що така траєкторія існує. Розглянемо поведінку множини $W_v(x_0,T-t_0)$ вздовж оптимальної траєкторії $\{x^*(t)\}_{t=t_0}^T$. Для кожного поточного стану $x^*(t) \equiv x_t^*$ на оптимальній траєкторії поточна підгра $\Gamma_v(x_t^*,T-t)$ визначається наступним чином. У момент часу t та стані $x^*(t)$ визначимо характеристичну функцію

$$v(S; x_t^*, T-t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } S = \emptyset, \\ \operatorname{Val}\Gamma_S(x_t^*, T-t), & \text{якщо } S \subset N, \\ K_N(x^*(t), u^*(\cdot), T-t), & \text{якщо } S = N. \end{cases} \tag{3.8}$$

де

$$KN(x_t^*, u^*(\cdot), T-t) = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \int_t^T g_j[s, x^*(s), u^*(s)]\, ds + q_j(x^*(T)) \right\} \tag{3.9}$$

представляє собою загальний виграш гравців на проміжку часу $[t, T]$ вздовж оптимальної траєкторії $\{x^*(s)\}_{T_s=t}$, а також $Val\ \Gamma_S(x_t^*, T-t)$ — значення антагоністичної гри $\Gamma_S(x_t^*, T-t)$ між коаліціями S та $N \setminus S$ від початкового стану $x_t^* \equiv x_t^*$ тривалістю $T-t$, де коаліція S максимізує виграш. Множина розділів у грі $\Gamma_v(x_t^*, T-t)$ має вигляд

$$\begin{aligned} E_v(x_t^*, T-t) = \Bigg\{ &\xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi_i \geq v(\{i\}; x_t^*, T-t), i = 1, 2, \ldots, n; \\ &\sum_{i \in N} \xi_i = v(N; x_t^*, T-t) \Bigg\} \end{aligned} \tag{3.10}$$

де

$$\begin{aligned} v(N; x_t^*, T-t) = v(N; x_0, T-t_0) - \\ - \sum_{j=1}^{n} \left\{ \int_{t_0}^{t} g_j[s, x^*(s), u^*(s)] ds + q_j(x^*(T)) \right\}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Величина $\sum_{j=1}^{n} \left\{ \int_{t_0}^{t} g_j[s, x^*(s), u^*(s)] ds + q_j(x^*(T)) \right\}$ представляє собою кооперативний виграш гравців на проміжку часу $[t_0, t]$ вздовж траєкторії $\{x^*(s)\}_{s=t_0}^{T}$.

Розглянемо сімейство поточних ігор $\{\Gamma_v(x_t^*, T-t), t_0 \leq t \leq T\}$ та їх рішень $W_v(x_t^*, T-t) \subset E_v(x_t^*, T-t)$, породжених тим же принципом оптимальності, який визначав рішення $W_v(x_0, T-t_0)$ в початковий момент.

Лема 3.1. *Множина $W_v(x_T^*, 0)$ є рішенням поточної гри $\Gamma_v(x_T^*, 0)$ у мо-*

мент T і складається з единого розподілу

$$q(x^*(T)) = \{q^1(x^*(T)), q^2(x^*(T)),..., q^n(x^*(T))\} = \\ = \{q^1(x^*_T), q^2(x^*_T),..., q^n(x^*_T)\} \tag{3.12}$$

Доведення. Оскільки гра $\Gamma_v(x^*_T, 0)$ має нульову тривалість, для всіх $i \in N$ має місце $v(\{i\}; x^*_T, 0) = q_i(x^*_T)$. Таким чином,

$$\sum_{i \in N} v(\{i\}; x^*_T, 0) = \sum_{i \in N} q_i(x^*_T) = v(N; x^*_T, 0),$$

і характеристична функція гри $\Gamma_v(x^*_T, 0)$ адитивна по S. Тоді, згідно з теоремою розподілу гри (7.2.1) маємо

$$E_v(x^*_T, 0) = q(x^*_T) = W_v(x^*_T, 0), \tag{3.13}$$

теорема доведена.

3.3 Принцип динамічної стійкості

Створення оптимальної поведінки гравців є ключовим елементом теорії кооперативних ігор. Поведінка гравців, яка відповідає певному принципу оптимальності, формує рішення гри. Іншими словами, рішення кооперативних ігор виникають зі здійснення цілої низки принципів оптимальності (наприклад, вектор Шеплі [11], рішення Неймана-Моргенштерна [8], арбітражне рішення Неша [7]). У динамічних іграх також повинно виконуватися ще одне важливе вимога: обраний принцип оптимальності повинен генерувати те ж саме рішення в будь-якій підігрі, що виникає вздовж оптимальної траєкторії, вибраної гравцями в початковий момент гри. Це вимога відома як динамічна стійкість або часова консистентність. Припустимо, що на початку гри гравці обрали певний принцип оптимальності (який включає у себе угоду щодо вибору траєкторії, що максимізує загальний виграш гравців). Коли гра розвивається вздовж оптимальної траєкторії, може виявитися, що обраний принцип оптимальності або породжує порожній набір рішень, або рішення, відмінне від того, яке йому відповідало на початку гри. У такому випадку деякі гравці можуть вважати більш вигідним відхилитися від кооперативної траєкторії (траєкторії, яка максимізує загальний виграш гравців), обраної ними на початку гри. Якщо це відбувається, це призводить до нестійкості процесу і, як наслідок, до невиконання початково обраного рішення про кооперацію. Зокрема, динамічна стійкість (часова консистентність) принципу оптимальності означає, що коли гра розвивається вздовж кооперативної траєкторії, гравці, керуючись тим самим принципом оптимальності, дотримуються тим же рішенням в кожний момент часу і, отже, не мають підстав відмовлятися від принципу оптимальності, обраного ними на початку гри, і, таким чином, не мають підстав відмовлятися від кооперації.

3.4 Динамічно стійкі розв'язки

Нехай маємо розв'язки підгри $W_v(x_t^*, T-t) \neq \varnothing$, $t_0 \leq t \leq T$ вздовж оптимальної кооперативної траєкторії (яка максимізує загальний виграш гравців) $x^(t)_T^{t_0}$. Якщо умова наявності рішень не виконана, то гравці не можуть слідувати обраному принципу оптимальності, оскільки вже в перший момент часу t, коли $W_v(x_t^*, T-t) = \varnothing$, гравці не матимуть можливості обрати рішення, що відповідає початковому принципу оптимальності. Припустимо, що в початковому стані x_0 гравці згодились на вибір розділу

$$\xi(x_0, T-t_0) = [\xi_1(x_0, T-t_0), \ldots, \xi_n(x_0, T-t_0)] \in W_v(x_0, T-t_0). \quad (3.14)$$

Це означає, що гравці домовились про такий розподіл загального виграшу, при якому виграш i-го гравця на проміжку часу $[t_0, T]$ становить $\xi_i(x_0, T-t_0)$. Якщо відповідно до цього розподілу гравець i повинен отримати виграш $\varpi_i[\xi(x_0, T-t_0); x^*(t), t-t_0]$ на відрізку часу $[t_0, t]$, то на залишковому проміжку $[t, T]$ йому слід отримати виграш, відповідний розподілу $\xi(x_0, T-t_0)$

$$\eta_i[\xi(x_0, T-t_0); x^*(t), T-t] = \xi_i(x_0, T-t_0) - \varpi_i[\xi(x_0, T-t_0); x^*(t), t-t_0]. \quad (3.15)$$

Означення 3.2. Нехай $\eta[\xi(x_0, T-t_0); x^*(t), T-t]$ вектор з компонентами

$$\eta_i[\xi(x_0, T-t_0); x^*(t), T-t], \quad i \in \{1, 2, ..., n\} \tag{3.16}$$

і тоді $\eta[\xi(x_0, T-t_0); x^*(t), T-t]$ буде справжнім рішенням поточної підігри $\Gamma_v(x_t^*, T-t)$. Якщо це умова виконується в кожний момент часу $t \in [t_0, T]$ вздовж траєкторії $\{x^*(t)\}_{t=t_0}^T$, то розподіл $\xi(x_0, T-t_0)$ є динамічно стійким.

Вдоль траекторії $x^*(t)$ на проміжку часу $[t, T]$, $t_0 \leq t \leq T$, коаліція, яка складається з усіх гравців N, отримує виграш

$$v(N; x^*(t), T-t) = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \int_t^T g_j[s, x^*(s), u^*(s)]\, ds + q_j(x^*(T)) \right\} \tag{3.17}$$

Тоді різниця

$$v(N; x_0, T-t_0) - v(N; x^*(t), T-t) = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{t} g_j[s, x^*(s), u^*(s)]\, ds \tag{3.18}$$

виграш коаліції N на проміжку $[t_0, t]$.

Динамічна стійкість (часова послідовність) розподілу $\xi(x_0, T-t_0)$ гарантує, що принцип оптимальності, який породив цей розподіл, застосований до початкових умов на оптимальній траєкторії в більш пізні моменти часу, призводить до розподілу аналогічної структури. Крім того, зберігається групова та індивідуальна раціональність рішення. Для виконання цього умови необхідно ввести певний механізм реалізації розподілу в часі (механізм часових виплат).

3.5 Процедура розподілу виграшу

Ми визначимо процедуру розподілу виграшу (ПРВ),таким чином, щоб вибраний спочатку принцип оптимальності можна було фактично реалізувати в грі. Припустимо, що виграш, отриманий гравцем і на інтервалі часу $[t_0, t]$, може бути представлений у вигляді

$$\varpi_i[\xi(x_0(\cdot), T - t_0); x^*(\cdot), t - t_0] = \int_{t_0}^{t} B_i(s)\, ds, \tag{3.19}$$

де

$$B_j(s) = \sum_{j \in N} g_j[s, x^*(s), u^*(s)], \quad t_0 \le s \le t \le T. \tag{3.20}$$

Тоді з (3.19) отримаємо

$$\frac{d\omega_i}{dt} = B_i(t). \tag{3.21}$$

Ця величина може бути інтерпретована як миттєвий виграш гравця i у момент часу t. Очевидно, що вектор $B(t) = [B_1(t), B_2(t), ..., B_n(t)]$ визначає розподіл загального миттєвого виграшу між гравцями коаліції N. Правильним вибором функцій $B(t)$ можна досягти того, щоб гравці не були зацікавлені в моменти часу $t \in [t_0, T]$ відхилятися від початкової угоди про розподіл $\xi(x_0, T - t_0)$.

Означення 3.3. Розподіл $\xi(x_0, T - t_0) \in W_v(x_0, T - t_0)$ динамічно стійкий (часово стійкий) в грі $\Gamma_v(x_0, T - t_0)$, якщо виконані наступні умови:

існує оптимальна траєкторія $\{x^*(t)\}_{t=t_0}^{T}$, вздовж якої $W_v(x^*(t), T-t) \neq \emptyset$, $t_0 \le t \le T$;

існують функції $B(t) = [B_1(t), B_2(t), ..., B_n(t)]$, інтегровані на відрізку $[t_0, T]$, такі, що

$$\sum_{j \in N} B_j(t) = \sum_{j \in N} g_j[t, x^*(t), u^*(t)], \quad t_0 \le s \le t \le T, \tag{3.22}$$

$$\xi(x_0, T - t_0) \in \bigcap_{t_0 \le t \le T} \left(\varpi[\xi(x_0(\cdot), T - t_0); x^*(t), t - t_0] \oplus W_v(x^*(t), T - t)\right), \tag{3.23}$$

де вектор $\varpi[\xi(x_0(\cdot), T - t_0); x^*(t), t - t_0]$ з компонентами $\varpi_i[\xi(x_0(\cdot), T - t_0); x^*(t), t - t_0]$, $i \in N$; $W_v(x^*(t), T-t)$ — рішення поточної підгри $\Gamma_v(x^*(t), T-t)$ вздовж оптимальної траєкторії, а оператор $\oplus$ позначає наступне: для $\eta \in \mathbb{R}^n$ і $A \subset \mathbb{R}^n$, $\eta \oplus A = \{\eta + a | a \in A\}$.

Ми будемо говорити, що кооперативна диференціальна гра $\Gamma_v(x_0, T -$

t_0) має динамічно стійке (збережене в часі) рішення $W_v(x_0, T - t_0)$, якщо всі розподіли $\xi(x_0, T - t_0) \in W_v(x_0, T - t_0)$ є динамічно стійкими (збереженими в часі).

З визначення (3.3) отримуємо

$$\xi(x_0, T - t_0) \in (\varpi[\xi(x_0(\cdot), T - t_0); x^*(t), T - t_0] \oplus W_v(x^*(T), 0)), \quad (3.24)$$

де $W_v(x^*(T), 0) = q(x^*(T))$ — розв'язок гри $\Gamma_v(x^*(T), 0)$. Таким чином, можна записати

$$\xi(x_0, T - t_0) = \int_{t_0}^{T} B(s)\, ds + q(x^*(T)) \quad (3.25)$$

Динамічно стійкий розподіл $\xi(x_0, T - t_0) \in Wv(x_0, T - t_0)$ може бути реалізований наступним чином. З визначення (3.19) випливає, що на кожний момент часу $t_0 \le t \le T$ маємо включення:

$$\xi(x_0, T - t_0) \in (\varpi[\xi(x_0(\cdot), T - t_0); x^*(t), T - t_0] \oplus W_v(x^*(t), T - t))\,, \quad (3.26)$$

де $\varpi[\xi(x_0, T - t_0); x^*(t), t - t_0] = \int_{t_0}^{t} B(s)\, ds$ — вектор виграшів гравців на інтервалі часу $[t_0, t]$.

Виграш гравця протягом цього часового інтервалу виглядає наступним чином:

$$\omega_i[\xi(x_0, T - t_0); x^*(t), t - t_0] = \int_{t_0}^{t} B_i(s)\, ds. \quad (3.27)$$

Коли гра розвивається на відрізку часу $[t_0, t]$, гравці розділяють сумарний виграш, отриманий протягом цього відрізка

$$\int_{t_0}^{t} \sum_{j \in N} gj[s, x^*(s), u^*(s)]\, ds \quad (3.28)$$

таким чином, що виконується включення:

$$\xi(x_0, T - t_0) - \varpi[\xi(x_0, T - t_0); x^*(t), t - t_0] \in Wv(x^*(t), T - t) \quad (3.29)$$

Умова (3.29) забезпечує існування вектора $\xi(x_t^*, T - t) \in W_v(x^*(t), T - t)$, що відповідає співвідношенню

$$\xi(x_0, T - t_0) = \varpi[\xi(x_0, T - t_0); x^*(t), t - t_0] + \xi(x_t^*, T - t). \tag{3.30}$$

Таким чином, після вибору вектора $B(s)$ вектор виграшів, одержуваний гравцями на відрізку часу, що залишився $[t, T]$, задовольняє умові

$$\begin{aligned}\xi(x_t^*, T - t) &= \xi(x_0, T - t_0) - \varpi[\xi(x_0, T - t_0); x^*(t), t - t_0] \\ &= \int_T^t B(s)ds + q(x^*(T))\end{aligned} \tag{3.31}$$

де

$$\sum_{j \in N} B_j(s) = \sum_{j \in N} g_j[s, x^*(s), u^*(s)], \quad t \le s \le T, \tag{3.32}$$

$$\xi(x_t^*, T - t) \in W_v(x^*(t), T - t). \tag{3.33}$$

Змінюючи вектор $\varpi[\xi(x_0, T - t_0); x^*(t), t - t_0]$ за умови

$$\sum_{j \in N} \omega_j[\xi(x_0, T - t_0); x^*(t), t - t_0] = \int_{t_0}^t \sum_{j \in N} g_j[s, x^*(s), u^*(s)]\, ds, \tag{3.34}$$

гравці гарантують розташування множини

$$\omega[\xi(x_0, T - t_0); x^*(t), t - t_0] \oplus W_v(x^*(t), T - t) \tag{3.35}$$

таким чином, умова (3.26) виконується.

Реалізуючи свої виграші з використанням процедури розподілу виграшу (ПРВ) $B(\tau)$, яка задовольняє умовам (3.26)-(3.29) у кожний момент часу $t_0 \le t \le T$, гравці спрямовані на той самий принцип оптимальності, що призводить до одного й того ж розподілу $\xi(x_t^*, T - t) \in W_v(x^*(t), T - t)$ протягом усієї гри, тому вони не мають підстав для перегляду початкового рішення.

Динамічна нестійкість розв'язків кооперативної диференційної гри призводить до дискредитації принципу оптимальності, що породило даний розв'язок, оскільки обраний на початку гри розподіл з розв'язку $W_v(x_0, T -$

t_0) не залишається в цьому розв'язку при завершенні гри. Саме тому ми вважаємо, що множина $W_v(x_0, T - t_0)$ може бути визнана розв'язком гри $\Gamma_v(x_0, T - t_0)$, якщо вона динамічно стійка. У протилежному випадку ми змушені визнати, що гра $\Gamma_v(x_0, T - t_0)$ не має рішення в розумінні даного принципу оптимальності.

РОЗДІЛ 4

ПРИКЛАДИ МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОДІЇ

Розглянемо динамічну еколого-економічну гру з трьома гравцями. Обсяги викидів кожної країни $i \in \{1, 2, 3\}$ у момент часу t (де $t \in [0, \infty)$) позначаються як $m_i(t)$. Нехай $x(t)$ - рівень накопичених забруднень на момент t. Диференціальне рівняння для динаміки має наступний вигляд:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) = \sum_{i=1}^{3} m_i(t) - \delta x(t), \quad x(0) = 100, \tag{4.1}$$

де δ - параметр, який впливає на швидкість зменшення рівня забруднення.

4.1 Побудова моделі

Це рівняння описує, як рівень забруднення $x(t)$ змінюється в часі. Перший член $\sum_{i=1}^{3} m_i(t)$ представляє внесок кожної країни у викиди, а другий член $-\delta x(t)$ відображає процес природного очищення чи зменшення рівня забруднення з часом. Початкова умова $x(0) = 100$ встановлює початковий рівень забруднення на момент початку моделювання.

Кожен з гравців прагне мінімізувати загальну дисконтовану суму витрат на зменшення шкідливих викидів та витрат, які виникають через збитки, спричинені забрудненням атмосфери. Останнє залежить від накопиченого забруднення. Далі, для спрощення позначень, ми опускаємо аргумент, що позначає час, у тих випадках, коли це не призводить до можливого непорозуміння тексту. Позначимо через $C_i(m_i)$ витрати на зменшення викидів гравця i за умови, що він обмежив свої викиди величиною m_i, а через $D_i(x)$ позначимо витрати, що виникають через збитки, спричинені забрудненням атмосфери. Припустимо, що обидві функції є неперервно диференційовані та випуклі, причому $C'(m_i) < 0$ та $D'(x) > 0$. Таким чином, задача кожної країни (гравця) i полягає в мінімізації функціоналу.

$$\min_{m_i} J_i(m, x) = \int_0^{\infty} e^{-rs} \left(C_i(m_i(s)) + D_i(x(s)) \right) ds \tag{4.2}$$

за умови (4.1), де $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ та r – єдиний для всіх учасників коефіцієнт дисконтування.

Дану модель обрано на основі наступних припущень. По-перше, спрощена динаміка у розглянутій еколого-економічній задачі дозволяє виокремити проблему розподілу витрат між учасниками угоди і конструювати механізм розподілу цих витрат у часі. Далі, в цій постановці присутня основна особливість проблеми, що розглядається, а саме те, що витрати кожного гравця залежать від загального рівня викидів та накопиченого до даного моменту забруднення. Умова випуклості розглянутих функцій та умови щодо знаку похідних здаються нам також досить природними. Наприклад, умова випуклості функції $C_i(e_i)$ означає, що зростання витрат на скорочення викидів вище при невеликих рівнях викидів[10]. З метою спрощення математичних вивчень припускається, що країни дисконтують свої витрати однаковим чином. У даній постановці для полегшення задачі ми вважаємо, що зниження рівня забруднення відбувається лише за рахунок зниження рівня шкідливих викидів в атмосферу і не враховуємо можливість використання очисних заходів. Останній випадок досліджувався у роботі [9].

Розглянемо питання про розподіл вектора Шеплі на часовому інтервалі. Для вирішення завдання розподілу витрат на скорочення шкідливих викидів використовувалася методологія теорії кооперативних диференціальних ігор. Виділимо основні кроки використання цієї методології:

1) Обчислення значень характеристичної функції кооперативної гри.

2) Розподіл між гравцями загальних кооперативних витрат відповідно до вектора Шеплі.

3) Розподіл витрат, визначених компонентами вектора Шеплі для кожного гравця на відрізку часу з метою забезпечення динамічної стійкості (часової послідовності) вектора Шеплі.

Використаємо вектор Шеплі як принцип оптимальності з двох причин: його унікальністю і можливістю використання для будь-яких ігрових завдань. Перші два кроки нашого підходу є класичними (можливо, окрім частково першого кроку, оскільки метод обчислення значень характеристичної функції в нашому випадку може відрізнятися від традиційного). Третій крок передбачає розподіл витрат на часовому інтервалі способом, що є послідовним у часі.

4.2 Розв'язок кооперативної гри

Нехай відомі значення індекса забруднення для трьох країн та їх можливих об'єднань. Інформація про індекси забруднення навколишнього середовища була взята за допомогою онлайн-ресурса World Air Quality Index [13]

Значення характеристичнх фугкцій для всіх коаліцій. Визначимо вектор Шеплі для класичної кооперативної гри. Характеристична функція має вигляд

$$v(x) = \begin{cases} v\{1,2,3\} = 209, \\ v\{1\} = 65, \\ v\{2\} = 87, \\ v\{3\} = 109, \\ v\{1,2\} = 161, \\ v\{1,3\} = 188, \\ v\{2,3\} = 196. \end{cases} \tag{4.3}$$

Розрахунок вектора Шеплі:

$$\begin{aligned} \phi_1(v) &= \frac{1}{6}[209-196] + \frac{1}{2}[161-87] + \frac{1}{2}[188-109] + 65 = \frac{862}{6} = 143\frac{4}{6} \\ \phi_2(v) &= \frac{1}{6}[209-188] + \frac{1}{2}[161-65] + \frac{1}{2}[196-109] + 87 = \frac{1092}{6} = 182 \\ \phi_3(v) &= \frac{1}{6}[209-161] + \frac{1}{2}[188-65] + \frac{1}{2}[196-87] + 109 = \frac{1398}{6} = 233 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Отож, вектор Шеплі: $[143\frac{7}{10}; 182; 233]$.

Розподіл забруднень: Гравець 3 (з внеском 233) має найбільший виграш, що вказує на важливість його участі в утворенні коаліцій. Якщо ж ми розглядаємо результат у якості індекса якості повітря, то цей гравець приносить шкоду екологічному стану найбільше.

Гравець 2 має середній (182), показуючи помірне вплив на формування коаліцій.

Гравець 1 має найменший виграш $(143\frac{7}{10})$, що може свідчити про менший вплив на утворення коаліцій у порівнянні з іншими гравцями, тобто найменшу шкоду приносить саме цей гравець.

Визначення ключового гравця:

Гравець 3 вважається ключовим гравцем у даному контексті, оскільки його внесок є наібльшим. Його присутність суттєво підвищує виграш коаліції.

Справедливість розподілу:

Розподіл виграшів може вважатися справедливим, оскільки він відображає внесок кожного гравця у гру.

Потенційні зміни стратегій:

Гравці можуть намагатися мінімізувати свій внесок у гру, співпрацюючи або укладаючи угоди для оптимізації коаліцій, оскільки ми розглядаємо задачу забруднення повітря.

Стабільність:

Збереження вектора Шеплі гарантує стабільність розподілу виграшів без суттєвих змін при зміні умов гри.

Цей самий розв'язок було отримано за допомогою програми, яка була написана на мові програмування Python.

4.3 Розв'язок диференціальної кооперативної гри

Стан гри визначається парою (t, x). Тоді кооперативна підгра, яка починається в цьому стані, буде позначатися $\Gamma_v(x, t)$.Позначимо через $x_N(t)$ траєкторію (траєкторію розвитку рівня забруднення) за повної кооперації (великої коаліції N). Далі ми будемо використовувати два позначення для кооперативної траєкторії $x_N(t)$ та x_{Nt}. Нехай $\Gamma_v(x_{Nt}, t)$- підгра, що починається на кооперативній траєкторії. Значення характеристичної функції для підкоаліції $K \subseteq N$ в підгрі $\Gamma_v(x, t)$, визначається як мінімальні затрати цієї підкоаліції і позначається як $v(K; x, t)$. Відповідно до цього визначення, загальні кооперативні затрати, які мають бути розподілені між гравцями, дорівнюють $v(N; x, 0)$, що і є мінімальними затратами коаліції N і співпадає зі значенням характеристичної функції для великої коаліції в грі $\Gamma_v(x, 0)$. Позначимо через $\Phi_v(x, t) = \Phi_{v1}(x, t), \Phi_{v2}(x, t), \ldots, \Phi_{vn}(x, t)$ вектор Шеплі в підгрі $\Gamma_v(x, t)$. Далі позначимо через $B_i(t)$ затрати гравця і в момент часу t, і нехай $B(t) = (B_1(t), \ldots, B_n(t))$. Вектор $B(t) = [B_1(t), B_2(t), \ldots, B_n(t)]$ представляє собою процедуру розподілу (ПРВ), так що має місце.

Вектор $B(t) = [B_1(t), B_2(t), \ldots, B_n(t)]$ представляє процедуру розподілу виграшу (ПРВ), і відповідає

$$\Phi_{v_1}(x, 0) = \int_0^\infty \exp(-rt) B_i(t)\, dt, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.5}$$

Функція $B_i(t)$ визначає процедуру розподілу витрат гравця і в часі, використовуючи компоненту вектора Шеплі, розраховану для усієї гри $\Gamma_v(x, 0)$. Вектор B(t) є динамічно стійкою (часово збереженою) процедурою розподілу витрат, якщо для (x_t^N, t) при $t \in [0,\infty)$ виконується наступна умова:

$$\Phi_{v_i}(x_0, 0) = \int_0^t e^{-r\tau} B_i(\tau) d\tau + e^{-rt} \Phi_{vi}(x_{N_t}, t). \tag{4.6}$$

Для того, щоб інтерпретувати умову (4.6), припустимо, що гравці вирішили переглянути кооперативну угоду щодо витрат в грі $\Gamma_v(x, 0)$ в деякий довільний проміжний момент часу t. У цей момент стан системи буде $x_N(t)$, що означає, що співпраця гравців відбулася до моменту t і кожен з гравців поніс витрати, визначені першим доданком у формулі 4.6. Якщо те, що він вже витратив до моменту t, плюс те, що йому ще треба витратити, починаючи з цього моменту, орієнтуючись на той же принцип оптимальності (компонент вектора Шеплі в підігрі, яка починається з цього моменту), співпадає з компонентою вектора Шеплі, тоді зміна початкової угоди не має сенсу. Якщо можна знайти такий ПРВ $B(t) = [B_1(t), B_2(t), ..., B_n(t)]$.

Спочатку мінімізуємо загальні витрати великої коаліції.

Велика коаліція вирішує завдання мінімізації сумарних витрат за допомогою методу динамічного програмування при обмеженнях, визначених динамікою накопичення забруднення, тобто:

$$\min_{m_1, m_2, \ldots, m_n} \sum_{i \in N} \int_t^{\infty} \exp[-r(\tau - t)] \left\{ C_i(m_i(\tau)) + D_i(x(\tau)) \right\} d\tau \tag{4.7}$$

при умові

$$\dot{x}(s) = \sum_{i \in N} m_i(s) - \delta x(s), \quad x(t) = x_N(t) \tag{4.8}$$

Позначимо через $W(N, x, t)$ функцію Беллмана для цієї задачі оптимізації. У результаті розв'язання отримуємо вектор викидів $m_N(x_N(\tau)) = [m_{N1}(x_N(\tau)), \ldots, m_{Nn}(x_N(\tau))]$ та відповідне накопичене забруднення при повній кооперації $x_N(\tau)$.

Обчислюємо динамічно стійке позиційне рівновагу. Оскільки гра відбувається на нескінченному відрізку часу, розглядаються лише стаціонарні стратегії. Для отримання рівноваги Неша за умови неперервної диференційованості функцій значення (виграшів в рівновазі Неша), необхідно вирішити наступну систему нелінійних рівнянь Айзекса–Беллмана.

$$rV_i(x) = \min_{m_i} \left\{ C_i(m_i) + D_i(x) + V_i(x) \left(\sum_{i \in I} m_i - \delta x \right) \right\}, \quad i \in N. \tag{4.9}$$

Позначимо через $m^*(x) = [m_1^*(x), m_2^*(x), \ldots, m_n^*(x)]$ будь-яке консистентне позиційне рівноважне кооперативної гри. Цей набір можна розглядати як звичайну стратегію викидів при відсутності кооперації. Далі для конкретного випадку ми отримаємо вирази для цих стратегій у явному вигляді. Тепер ми лише зауважимо, що використовуючи ці стратегії, ми можемо отримати рівноважні витрати в грі $\Gamma_v(x_0, 0)$, які ми позначимо через $V_i(0, x_0) = V_i(x_0)$, і рівноважні витрати в підгрі $\Gamma_v(x_{Nt}, t)$, які ми позначимо через $V_i(t, x_{Nt}) = V_i(x_{Nt})$.

Наступний крок - обчислення витрат для підкоаліції. Для отримання витрат для будь-якої коаліції ми діємо наступним чином. Витрати кожної коаліції будуть сумою витрат гравців, які утворюють цю коаліцію. У функції витрат гравців і в правій частині диференціального рівняння ми використовуємо стратегії гравців, які не входять в коаліцію, отримані на кроці 2 (тобто стратегії, які утворюють рівновагу по Нешу). Позначимо через $W(K, x, t)$ значення цих витрат, обчислені для коаліції K. Це значення визначається з вирішення наступного завдання

$$W(K, x, t) = \min_{m_i, i \in K} \sum_{i \in K} \left\{ \int_t^{\infty} \exp[-r(\tau - t)]\{C_i(m_i(\tau)) + D_i(x(\tau))\} d\tau \right\}, \tag{4.10}$$

$$\dot{x}(s) = \sum_{i \in N} m_i(s) - \delta x(s), \quad x(t) = x_N(t), \quad m_j = m_{Nj}, \text{ для } j \in I \setminus K. \tag{4.11}$$

Визначимо тепер характеристичну функцію. Характеристична функція $v(K; x, t)$ визначається наступним чином:

$$\begin{aligned} v(\{i\}; x, t) = V_i(x, t) = V_i(x), \quad i = 1, ..., n; \\ v(K; x, t) = W(K; x, t), \quad K \subseteq I. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Тепер обчислимо вектор Шеплі. Позначимо через $\Phi_v(x, t) = [\Phi_1^v(x, t), \Phi_2^v(x, t), \ldots, \Phi_{vn}(x, t)]$, вектор Шеплі в грі $\Gamma_v(x,t)$; тоді i-а компонента вектора Шеплі визначається наступним чином:

$$\Phi_i^v(x, t) = \sum_{K \ni i} \frac{(n - |K|)!(|K| - 1)!}{n!} [W(K; x, t) - W(K \setminus \{i\}; x, t)], \tag{4.13}$$

де k — кількість гравців у коаліції K. Якщо співпраця триває протягом усієї гри, то витрати гравця i визначаються компонентою вектора Шеплі в грі $\Gamma_v(x_0, 0)$ і дорівнюють

$$\Phi_i^v(x_0, 0) = \sum_{K \supseteq i} \frac{(n-k)!(k-1)!}{n!}[W(K; x_0, 0) - W(K \setminus \{i\}; x_0, 0)]. \quad (4.14)$$

Побудова динамічно стійкої процедури розподілу (ПРВ) в часі. Розподіл витрат гравця i, $i = 1, ..., n$, на проміжку часу $t \in [0,\infty)$ здійснюється згідно з наступною формулою

$$B_i(t) = r\Phi_i^v(x_t^N, t) - \frac{d}{dt}\Phi_i^v(x_t^N, t) \quad (4.15)$$

дана формула наказує в кожен момент часу t витрати гравця і в відповідність до його майбутніми витратами мінус похідну майбутніх витрат.

Розглянемо деякі окремі види функцій, що є у завданні. Нехай у (4.2) маємо

$$\begin{gathered} C_i(m_i) = \frac{\gamma}{2}(m_i - m_i^*)^2, \\ 0 \le m_i \le m_i^*, \quad \gamma > 0, \quad i \in \{1,2,3\} \\ D_i(x) = \pi x, \quad \pi > 0. \end{gathered} \quad (4.16)$$

Обчислення оптимальних витрат великої коаліції. Нехай функція $W(N, x, t)$ задовольняє наступному рівнянню Беллмана:

$$rW(N, x, t) = \min_{m_1, m_2, m_3} \left\{ \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\gamma}{2}(mi - m_i)^2 + \pi x \right) + W_x(N, x, t) \left(\sum_{i=1}^{3} mi - \delta x \right) \right\}. \quad (4.17)$$

Проведемо мінімізацію (4.17), тоді отримуємо

$$m_i^N = m_i^* - \frac{1}{\gamma} W_x(N, x, t), \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (4.18)$$

Підставимо m_i^N у (4.17). Якщо вирішимо, отримаємо:

$$W(N, x, t) = W(N, x) = \frac{3\pi}{r(r+\delta)} \left\{ \left[\sum_{i=1}^{3} m_i - \frac{3}{2}\pi \frac{1}{2\gamma(r+\delta)} \right] + rx \right\}, \quad (4.19)$$

$$m_i^N = m_i - \frac{3\pi}{\gamma(r+\delta)}, \text{ при } i \in \{1, 2, 3\}. \quad (4.20)$$

Тоді оптимальна траєкторія викидів має наступний вигляд

$$x^N(t) = e^{-\delta t}x(0) + \frac{1}{\delta}\left[\sum_{i=1}^{3} m_i^N\right]\left[1 - e^{-\delta t}\right]. \tag{4.21}$$

Наступним кроком буде обчислення рівноваги за Нешем. Для знаходження позиційної рівноваги за Нешем використовуємо теорему одну з теорем і отримуємо наступне рівняння Беллмана

$$rV^{*i}(x) = \min_{m_i}\left\{\gamma^2\left[m_i - m_i^*\right]^2 + \pi x + V_x^i(x)\left[\sum_{j\in[1,2,3],i\neq j} m_j^* + m_i - \delta x\right]\right\}, \quad i \in 1, 2, 3. \tag{4.22}$$

Знайдемо мінімум у правій частині (4.22), отримуємо

$$m_i^* = m_i - \frac{1}{\gamma}V_x^i(x), \quad i \in \{1, 2, 3\}. \tag{4.23}$$

Підставимо (4.23) у (4.22) та вирішимо рівняння, знаходимо

$$V^{*i}(x) = \frac{\pi}{r(r+\delta)}\left\{\frac{\pi}{2\gamma(r+\delta)} + \sum_{i=1}^{3} m_i - \frac{3\pi}{\gamma(r+\delta)} + rx\right\}, \quad \text{при } i \in \{1, 2, 3\}. \tag{4.24}$$

Запишемо викиди, що мають рівновагу за Нешем

$$m_i^* = \tilde{m_i^*} - \frac{\pi}{\gamma(r+\delta)}, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \tag{4.25}$$

Відмінність між викидами за стратегії Неша і викидами при співпраці полягає в тому, що у випадку співпраці гравець враховує маргінальні затрати всіх учасників великої коаліції, а не лише свої власні.

Обчислення оптимальних витрат для проміжних коаліцій. Для цього Функція значень $W(K, x, t)$ для кожної коаліції K, яка складається з двох гравців, повинна задовольняти наступному рівнянню Беллмана:

$$\begin{aligned} rW(K,x,t) = \min_{m_i, i\in K} \Bigg\{ \sum_{i\in K} \left(\frac{\gamma}{2}(m_i - m_i^*)^2 + \pi x \right) + W_x(K,x,t) \\ \times \left[\sum_{i\in K} m_i + m_j^* - \delta x \right] \Bigg\}, \quad j \notin K. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Використуємо той самий спосіб розв'язку, який використовували для знаходження значення для великої коаліції. Тоді отимаємо наступне:

$$W(K,x,t) = \tilde{W}(K,x) = \frac{2\pi}{r(r+\delta)} \left\{ \sum_{i\in K} m_i - \frac{4\pi^2}{2\gamma(r+\delta)} - \frac{\pi}{\gamma(r+\delta)} + rx \right\}. \tag{4.27}$$

Відповідні викиди для коаліції K дорівнюватимуть

$$m_i^K = m_i^* - \frac{2\pi}{\gamma(r+\delta)}, \quad i \in K. \tag{4.28}$$

Визначимо характеристичну функцію

$$\begin{aligned} &v(\{i\};x,t) = V^i(x,t) = V^{*i}(x) = \\ &= \frac{\pi}{r(r+\delta)} \left\{ \frac{\pi}{2\gamma(r+\delta)} + \sum_{i=1}^{3} m_i - \frac{3\pi}{\gamma(r+\delta)} + rx \right\}, \quad i = 1,2,3; \\ &v(K;x,t) = W(K,x,t) = \tilde{W}(K,x) = \\ &= \frac{2\pi}{r(r+\delta)} \left\{ \sum_{i\in K} m_i - \frac{4\pi}{2\gamma(r+\delta)} - \frac{\pi}{\gamma(r+\delta)} + rx \right\}, \quad K \subseteq \{1,2,3\}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Наступний крок – обчислення вектора Шеплі. Якщо значення $\tilde{m}_i$симетричні, вектор Шеплі обчислюється в явному вигляді

$$\begin{aligned} \Phi_{vi}(x,t) &= \sum_{K\ni i} \frac{(n-k)!(k-1)!}{n!} \left[v(K;x,t) - v(K\ i;x,t) \right] \\ &= \frac{1}{2r(r+\delta)} \left\{ 2\pi \left(\sum_{i=1}^{3} m_i + \rho S \right) - 9\pi^2 \gamma(r+\delta) \right\}, \quad i = 1,2,3. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Обчислення функцій ПРВ. Варто зазначити, що згідно з (4.21) функції

ПРВ мають наступний вигляд

$$B_i(t) = r\Phi_i^{\upsilon}(x_t^N, t) - \frac{d}{dt}\Phi_i^{\upsilon}(x_t^N, t). \tag{4.31}$$

Обчислення дають нам наступне

$$B_i(t) = \pi x^N(t) + \frac{9\pi^2}{2\gamma(r+\delta)^2}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.32}$$

Множимо обидві частини (4.32) на дисконт-фактор та інтегруємо, тоді

$$\int_0^\infty \exp(-rt) B_i(t)\, dt = \int_0^\infty \exp(-rt) \left[\pi x^N(t) + \frac{9\pi^2}{2\gamma(r+\delta)^2}\right] dt, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.33}$$

З (4.20)–(4.21) отримуємо

$$x^N(t) = \exp(-\delta t)x(0) + \frac{1}{\delta}\left[\sum_{j=1}^{3}\left(m_j - \frac{3\pi}{2\gamma(r+\delta)}\right)\right](1 - \exp(-\delta t)). \tag{4.34}$$

Підстановка$x^N(t)$ у (4.33) дає нам

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \exp(-rt)\beta_i(t)dt \\
&= \int_0^\infty \exp[-(r+\delta)t]\pi x_0 dt \\
&\quad + \int_0^\infty \exp(-rt)\frac{\pi}{\delta}\left(\sum_{i=1}^{3} m_i - \frac{9\pi}{\gamma(r+\delta)}\right) dt \\
&\quad + \int_0^\infty \exp[-(r+\delta)t]\frac{\pi}{\delta}\left(\sum_{i=1}^{3} m_i - \frac{9\pi}{\gamma(r+\delta)}\right) dt \\
&\quad + \int_0^\infty \exp(-rt)\frac{9\pi^2}{2\gamma(r+\delta)^2}dt.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Проінтегрувавши отримуємо відповідь

$$\int_0^{\infty} \exp(-rt)\beta_i(t)dt = \\ = \frac{1}{2r(r+\delta)}\left\{2\pi\left(\sum_{i=1}^{3} m_i + rx(0)\right) - \frac{9\pi^2}{\gamma(r+\delta)}\right\} \\ = \Phi_i^v(x_0, 0), \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.36}$$

4.4 Обчислення компонент вектора Шеплі в класичній кооперативній грі

Розв'язок задачі було отримано за допомогою мови програмування Python (Додаток А). Отримали наступні результати.

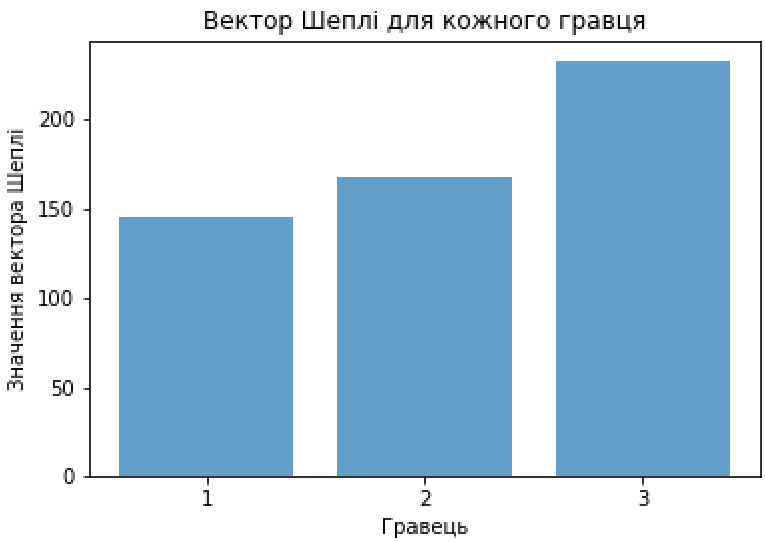

Рис. 4.1. Розподіл виграшів трьох гравців за Шеплі

вектор Шеплі: $[143\frac{7}{10}; 182; 233]$.

4.5 Обчислення компонент вектора Шеплі в диференціальній кооперативній грі

Розв'язок задачі (4.1) було отримано за допомогою мови програмування Python (Додаток Б). Отримали наступні результати:

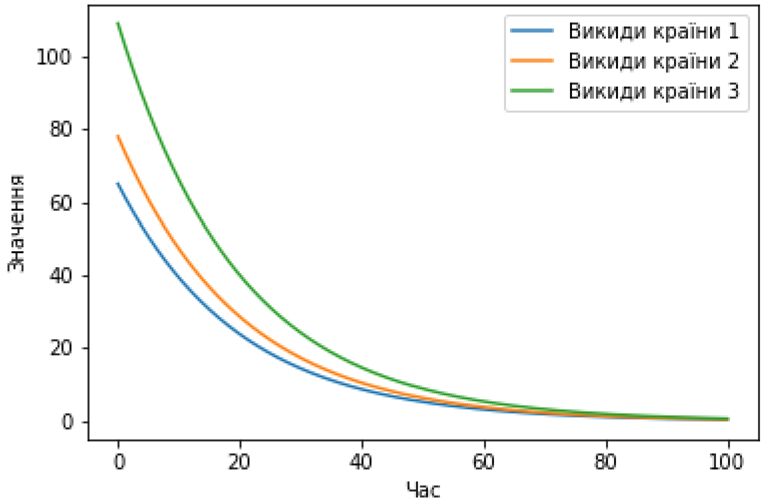

Рис. 4.2. Зміна забруднення за часом при $\delta = 0{,}05$

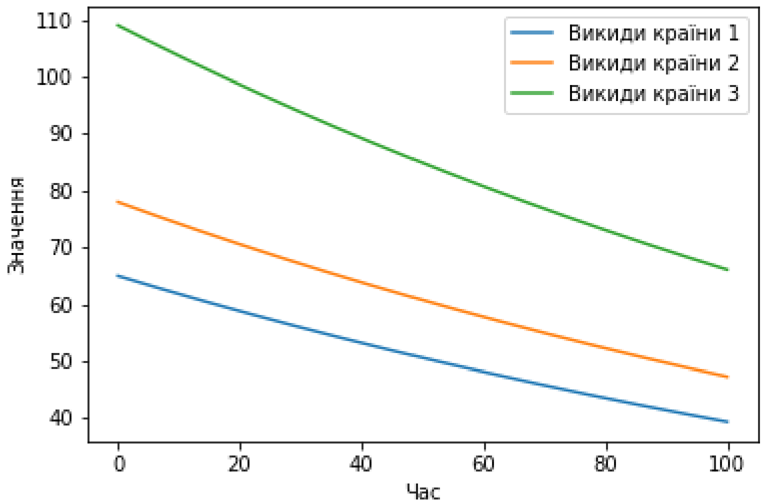

Рис. 4.3. Зміна забруднення за часом при $\delta = 0{,}01$

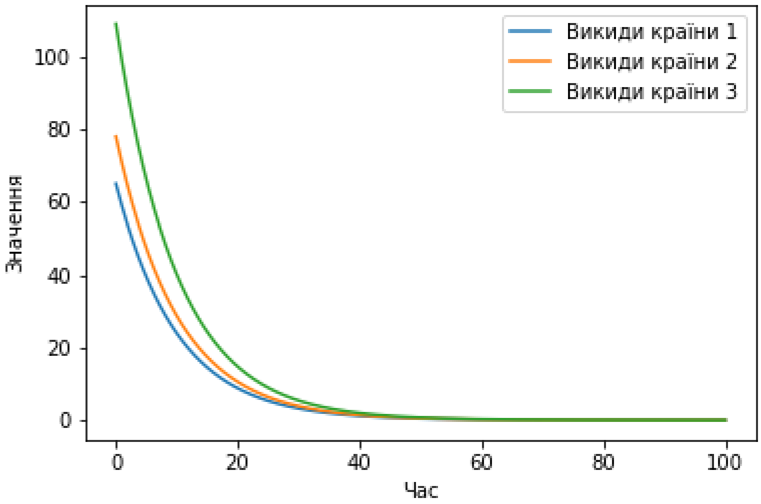

Рис. 4.4. Зміна забруднення за часом при $\delta = 0{,}5$

ВИСНОВКИ

В процесі роботи були створені математичні моделі, які відображають взаємодію між суб'єктами. Параметри цих моделей були визначені з урахуванням їх впливу на результативність взаємодії та досягнення спільної вигоди.

Був проведений аналіз реальних сценаріїв взаємодії суб'єктів в різних галузях та ситуаціях, що дозволило вивчити фактори, які впливають на успішну взаємодію та досягнення спільної вигоди.

Порівняльний аналіз ефективності різних стратегій взаємодії показав, як суб'єкти можуть вибирати оптимальні шляхи спільної діяльності.

На основі отриманих результатів розроблені практичні рекомендації для суб'єктів взаємодії з метою максимізації спільної вигоди.

Здійснений аналіз, який виділив потенційні напрямки для підвищення результативності взаємодії, що може слугувати основою для подальших стратегічних вирішень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Binmore K. Playing for real : a text on game theory 2007/ Library of Congress Cataloging-in-Publication Data, Published by Oxford University Press, Inc. 198 Madison Avenue - New York: 2007. - p. 639
2. Borovskiy D., Kichmarenko O. Research of the model of relations by methods of game theory, Black Sea Science 2022: Proceedings of the International Competition of Student Scientific Works / Odesa National University of Technology; B. Iegorov, M. Mardar (editors-in-chief.) [et al.]. – Odesa: ONUT, 2022. – p. 255 - 258.
3. Borovskyi D. Research of the labor market model by game theory methods, Information Technologies and Automation - 2023 / Proceedings of the XIV International Scientific and Practical Conference. Odessa, October 19-20, 2023. - Odessa, ONTU Publishing House, 2023 – p. 32 - 33.
4. Coleman, J. S. Control of Collectivities and the Power of a Collectivity to Act, Social Choice (B. Lieberman, ed.), London (Gordon and Breach), 1971, - p. 269–300.
5. Gibbons R. Game Theory for Applied Economists. – Princeton University Press, Princeton,New Jersey, 1992. – p. 197 - 207.
6. Kalai G., Mashiler M., Owen G. Asymptotik stability and other properties of trajectories and transfer sequences leading to the bargaining sets, International Journal of Game Theory, 4, 1975. - p. 193 - 213.
7. Littechild S. C., Owen G. A simple expression for the Shapley value in a special case, Management Science, 20, 1973. - p. 370 - 372.
8. Neumann J., Morgenstern O. Theory of games and economic behavior, Nature, Princeton University Press, 157 (3981), 1944. - p. 85 - 117.
9. Owen, G., Values of Games with a priori Unions, Mathematical Economics and Game Theory (R. Henn and O. Moeschlin, eds.), Berlin (Springer Verlag), p. 76–88.
10. Owen G., Winter E. The Multilinear Extension and the Coalition Structure Value, Games Econ. Behav. 4, 1992. - p. 582 - 587.
11. Shapley, L. S., and M. Shubik, The Assignment Game I: The Core, Internal. J. Game Thy. 1, 1972. - p. 111 – 130.

12. Winter, E. A Value for Cooperative Games with LevelsStructure of Cooperation, Int. J. Game Theory 18, 1989. - p. 227 – 240.

13. World Air Quality Index. Забруднення повітря у світі: Індекс якості повітря в реальному часі : веб-сайт. URL: https://waqi.info/uk/ (дата звернення: 05.12.2023)

ДОДАТОК А. КОД ПРОГРАМИ

```
from itertools import permutations
from math import factorial

def characteristic_function(coalition):
    if set(coalition) == {1, 2, 3}:
        return 209
    elif set(coalition) == {1}:
        return 65
    elif set(coalition) == {2}:
        return 87
    elif set(coalition) == {3}:
        return 109
    elif set(coalition) == {1, 2}:
        return 161
    elif set(coalition) == {1, 3}:
        return 188
    elif set(coalition) == {2, 3}:
        return 196
    else:
        return 0

def shapley_value(player, characteristic_function):
    n = 3
    shapley_value = 0

    for perm in permutations(range(1, n + 1)):
        coalition = []
        for i in range(n):
            coalition.append(perm[i])
            if perm[i] == player:
                marginal_contribution =
```

```
                characteristic_function(coalition)
                coalition.pop()
                shapley_value += marginal_contribution /
                factorial(i + 1) / factorial(n - i - 1)

    return shapley_value
def factorial(num):
    if num == 0 or num == 1:
        return 1
    else:
        return num * factorial(num - 1)
shapley_vector = [shapley_value(player, characteristic_function)
for player in range(1, 4)]
print("Вектор Шеплі:", shapley_vector)
```

ДОДАТОК В. КОД ПРОГРАМИ

```
from math import exp, factorial
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
from scipy.optimize import minimize
import matplotlib.pyplot as plt

def system_of_equations(x, t, m, delta):
    dxdt = np.sum(m) - delta * x
    return dxdt

def cost_function(m, x, r, gamma, t):
    C = 0.5 * np.sum((m - m)**2)
    D = x
    integrand = np.exp(-r * t) * (C + D)
    cost = np.trapz(integrand, t)
    return cost

n = 3
delta = 0.05
r = 0.05
x0 = 100
mi_max = 10
gamma = 0.1

time_points = np.linspace(0, 10, 100)

def solve_system(m):
    solution = odeint(system_of_equations, x0, time_points,
    args=(m, delta))
    return solution.flatten()

def objective_function(m):
```

```
    x = solve_system(m)
    return cost_function(m, x, r, gamma, time_points)

def calculate_shapley_values(n, objective_function):
    shapley_values = np.zeros(n)

    for player in range(n):
        marginal_contributions = []

        for coalition in range(1, 2**n - 1):
            if (coalition >> player) & 1:
                size = bin(coalition).count('1')
                marginal_contributions.append((1 /
                factorial(size)) * (1 / factorial(n - size)) *
                (objective_function(coalition) -
                objective_function(coalition ^ (1 << player))))

        shapley_values[player] = np.sum(marginal_contributions)

    return shapley_values

initial_guess = np.zeros(n)

result = minimize(objective_function,
initial_guess, method='SLSQP',
bounds=[(0, mi_max)] * n)

optimal_m = result.x

shapley_values = calculate_shapley_values(n, objective_function)

print("Оптимальні значення mi:", optimal_m)
print("Значення Шеплі:", shapley_values)
```

```
# Вивід графіка
plt.figure(figsize=(10, 5))

plt.subplot(1, 2, 1)
plt.bar(range(1, n + 1), optimal_m, color='blue')
plt.title('Оптимальні значення mi')
plt.xlabel('Країна')
plt.ylabel('mi')

plt.subplot(1, 2, 2)
plt.bar(range(1, n + 1), shapley_values, color='green')
plt.title('Значення Шеплі')
plt.xlabel('Країна')
plt.ylabel('Значення Шеплі')

plt.tight_layout()
plt.show()
```