УДК 517.928

А. К. Осадчий
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ОБОБЩЕНИЕ ВТОРОЙ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ Н. Н. БОГОЛЮБОВА НА СЛУЧАЙ СИСТЕМ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Осадчий О. К. Узагальнення другої основної теореми М. М. Боголюбова на випадок систем з розривною правою частиною. В статті доведено існування періодичних розв'язків для систем з розривною правою частиною та близькість статичного розв'язку усередненої системи і періодичного розв'язку розривної системи, а отже, отримано узагальнення другої основної теореми М. М. Боголюбова для розривних систем.
Ключові слова: диференціальні рівняння з розривною правою частиною, періодичні розв'язки, усереднення.

Осадчий А. К. Обобщение второй основной теоремы Н. Н. Боголюбова на случай систем с разрывной правой частью. В статье доказано существование периодических решений для систем с разрывной правой частью и близость статического решения усредненной системы и периодического решения разрывной системы, а следовательно, получено обощение второй основной теоремы Н. Н. Боголюбова для разрывных систем.
Ключевые слова: дифференциальные уравнения с разрывной правой частью, периодические решения, усреднение.

Osadchij A. K. The generalization of the second fundamental N. Bogolubov's theorem for the systems with the discontinuous right-hand side. The existing of the periodic solutions for the systems with the discontinuous right-hand side is proved in the article. The proximity of the static solution of the average system and the periodic solution of the discontinuous system is established, hence, the generalization of the second fundamental N. Bogolubov's theorem for the discontinuous system is obtained.
Key words: differential equations with discontinuous right-side, periodic solution, averaging.

Введение. Вопрос о существовании, единственности и устойчивости периодического решения для уравнений в стандартной форме, когда правые части системы и их частные производные по x ограничены и равномерно непрерывны, рассматривался Н. Н. Боголюбовым [1].

Ю. А. Митропольским [2] и А. М. Самойленко [4] было доказано существование периодических решений для систем с недифференцируемыми правыми частями.

В настоящей работе доказывается аналогичная теорема для систем с разрывной правой частью.

Итак, будем рассматривать систему стандартного вида

$$\dot{x} = \varepsilon X(t, x), \tag{1}$$

где x, X — n-мерные вектор функции, $X(t,x)$ — вещественная вектор-функция, определенная в области

$$Q_{n+1} = \{(t,x) \mid t \geq 0,\ x \in Q_n \subset E^n\}.$$

В точках поверхности S, заданной уравнением $\Phi(t,x) = 0$, правые части системы терпят разрыв, т. е.

$$X(t,x) = \begin{cases} X_1(t,x) \text{ при } \Phi(t,x) \leq 0, \\ X_2(t,x) \text{ при } \Phi(t,x) > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Системе (1) ставится в соответствие следующая усредненная система

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \overline{X}(\xi), \tag{3}$$

где

$$\overline{X}(x) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{I_1(x)} X_1(t,x)\,dt + \int_{I_2(x)} X_2(t,x)\,dt\right];$$

$$I_1(x) = \{t \in [0,2\pi] \mid \Phi(t,x) \leq 0\}, \quad I_2(x) = [0,2\pi] \setminus I_1(x).$$

Введем в рассмотрение следующие области

$$\mathcal{D}_1 = \left\{x \in E^n \mid \max_{t\in[0,2\pi]} \Phi(t,x) = \Phi_1(x) \leq 0\right\},$$

$$\mathcal{D}_2 = \left\{x \in E^n \mid \min_{t\in[0,2\pi]} \Phi(t,x) = \Phi_2(x) > 00\right\},$$

$$\mathcal{D}_3 = Q_n \setminus (\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2).$$

Теорема 1. *Пусть в области Q_{n+1} выполнены следующие условия:*

1. Функции $X_i(t,x)$, $i = 1,2$ являются непрерывными периодическими по t с периодом 2π и непрерывно дифференцируемыми по x.

2. Система усредненных уравнений

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \overline{X}(\xi), \quad \tau = \varepsilon t$$

имеет изолированное статическое решение $\xi = \xi_0$, принадлежащее с некоторой выпуклой $\rho-$ окрестностью U_ρ области $\mathcal{D}_3$.

3. Функция $\frac{\partial X(x)}{\partial x}$ локально удовлетворяет условию Липшица по x при $x \in \in U_\rho$.

4. $det\left|\frac{\partial X(x)}{\partial x}\right| \neq 0$ для $x \in U_\rho$.

5. Функция $\Phi(t,x)$ 2π-периодична по t и непрерывно дифференцируема по t и по x, причем $\left|\frac{\partial X(x)}{\partial x}\right| \geq \delta > 0$ при $(t,x) \in S$, $x \in U_\rho$.

6. На отрезке $[0,2\pi]$ функция $\Phi(t,x)$ имеет конечное число K простых нулей при $x \in U_\rho$, где $K = \max_{x\in U_\rho} K(x)$.

Тогда для любого $\eta > 0$ можно указать такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ существует 2π-периодическое решение $x(t)$ системы (1) и

$$\|x(t) - \xi_0\| \leq \eta. \tag{4}$$

Доказательство. Сделаем в (1) замену переменных

$$x = \xi_0 + h$$

и перейдем к системе уравнений

$$\frac{dh}{dt} = \varepsilon \overline{X}\left(\xi_0 + h\right) + Z\left(t, \xi_0 + h\right), \tag{5}$$

где

$$Z(t,x) = X(t,x) - \overline{X}(x). \tag{6}$$

По системе (5) запишем систему интегральных уравнений

$$h(t) = h(0) + \varepsilon \int_0^t \overline{X}\left(\xi_0 + h(\tau)\right) d\tau + \varepsilon \int_0^t Z\left(\tau, \xi_0 + h(\tau)\right) d\tau. \tag{7}$$

В силу условий теоремы для любого $x \in U_\rho$ корни $t_1(x), \ldots, t_K(x)$ функции $\Phi(t,x)$ непрерывно дифференцируемы. Следовательно, непрерывно дифференцируема функция

$$\overline{X}(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{K} \int_{t_i(x)}^{t_{i+1}(x)} X_{K_i}(t,x)\, dt,$$

где

$$t_0(x) = 0,\ t_{K+1}(x) = 2\pi\ K_0 = 1 + \theta\left(-\frac{\partial \Phi\left(t_1(x), x\right)}{\partial t}\right),$$

$K_i = 1 + \theta\left(\frac{\partial \Phi(t_i(x),x)}{\partial x}\right)$ при $i = \overline{1,K}$, θ – функция Хевисайда.

Тогда для решения $h(t)$ системы (7), принадлежащего ρ-окрестности U_ρ нуля $h(t) \equiv 0$, имеет место

$$\int_0^t \overline{X}\left(\xi_0 + h(r)\right) dr = \overline{X}\left(\xi_0 + h(0)\right) t + \int_0^t \frac{\partial \overline{X}\left(\xi_0 + \tilde{h}\right)}{\partial x} (h(\tau) - h(0))\, d\tau =$$

$$= \overline{X}\left(\xi_0 + h(0)\right) \cdot t + \tag{8}$$

$$+\varepsilon \int_0^t \frac{\partial \overline{X}\left(\xi_0 + \tilde{h}\right)}{\partial x} \cdot \left[\int_0^\tau \overline{X}\left(\xi_0 + h(s)\right) ds + \int_0^\tau Z\left(s, \xi_0 + h(s)\right) ds\right] d\tau),$$

где $\tilde{h}$ – некоторая постоянная $\tilde{h} \in [h(0), h(t)]$. В силу (8) систему (7) можно записать в виде

$$\begin{aligned} h(t) = h(0) + \varepsilon \overline{X}\left(\xi_0 + h(0)\right) \cdot t + \\ +\varepsilon^2 \int_0^t \frac{\partial \overline{X}\left(\xi_0 + \tilde{h}\right)}{\partial x} \cdot \int_0^\tau \overline{X}\left(\xi_0 + h(s)\right) ds\, d\tau + \\ +\varepsilon^2 \int_0^t \frac{\partial \overline{X}\left(\xi_0 + \tilde{h}\right)}{\partial x} \int_0^{\tilde{t}} Z\left(s, \xi_0 + h(s)\right) ds\, d\tau + \varepsilon \int_0^t Z\left(\tau, \xi_0 + h(\tau)\right) d\tau. \end{aligned} \tag{9}$$

Потребовав периодичность решения $h(t)$ с периодом 2π

$$h(2\pi) = h(0), \tag{10}$$

получим

$$\begin{aligned} \varepsilon\overline{X}\left(\xi_0 + h(0)\right)\cdot 2\pi + \varepsilon^2\int_0^{2\pi}\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+\tilde{h}\right)}{\partial x}\cdot\int_0^t\overline{X}\left(\xi_0+h(\tau)\right)\,d\tau\,dt + \\ +\varepsilon^2\int_0^{2\pi}\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+\tilde{h}\right)}{\partial x}\cdot\int_0^t Z\left(\tau,\xi_0+h(\tau)\right)\,d\tau\,dt + \\ +\varepsilon\int_0^{2\pi} Z\left(t,\xi_0+h(t)\right)\,dt = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Из (11), записанного в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+h^*\right)}{\partial x}h(0) = \frac{1}{2\pi}\left\{\varepsilon\int_0^{2\pi}\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+\tilde{h}\right)}{\partial x}\times\right. \\ \left.\times\int_0^t\left[\overline{X}\left(\xi_0+h(\tau)\right)+Z\left(\tau,\xi_0+h(\tau)\right)\right]\,d\tau\,dt+\varepsilon\int_0^{2\pi}Z\left(t,\xi_0+h(t)\right)\,dt\right\}, \end{aligned} \tag{12}$$

где h^* – некоторая постоянная $h^*\in[0,h(0)]$, следует

$$\begin{aligned} h(0) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+h^*\right)}{\partial x}\right]^{-1}\cdot\left\{\varepsilon\int_0^{2\pi}\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+\tilde{h}\right)}{\partial x}\times\right. \\ \left.\times\int_0^t\left[\overline{X}\left(\xi_0+h(\tau)\right)+Z\left(\tau,\xi_0+h(\tau)\right)\right]\,d\tau\,dt+\varepsilon\int_0^{2\pi}Z\left(t,\xi_0+h(t)\right)\,dt\right\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Подставляя $h(t)$ из (7) в последнее слагаемое (13), получаем

$$\begin{aligned} h(0) = \tfrac{1}{2\pi}\left[\tfrac{\partial\overline{X}(\xi_0+h^*)}{\partial x}\right]^{-1}\cdot\left\{\varepsilon\textstyle\int_0^{2\pi}\tfrac{\partial\overline{X}(\xi_0+\tilde{h})}{\partial x}\cdot\int_0^t X\left(\tau,\xi_0+h(\tau)\right)\,d\tau\,dt+\right. \\ \left.+\textstyle\int_0^{2\pi}Z\left(t,\xi_0+h(0)+\varepsilon\int_0^t X\left(\tau,\xi_0+h(\tau)\right)\,d\tau\right)\,dt\right\}. \end{aligned} \tag{14}$$

Подставив (14) в (7), получим следующую систему уравнений для определения $h(t)$, удовлетворяющего условию (10):

$$\begin{aligned} h(t) = \varepsilon\int_0^t X\left(\tau,\xi_0+h(\tau)\right)\,d\tau + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+h^*\right)}{\partial x}\right]^{-1}\cdot\varepsilon\cdot \\ \cdot\left\{\int_0^{2\pi}\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+\tilde{h}\right)}{\partial x}\times\int_0^t X\left(\tau,\xi_0+h(\tau)\right)\,d\tau\,dt+\right. \\ \left.+\int_0^{2\pi}Z\left(t,\xi_0=h(0)+\varepsilon\int_0^t X\left(\tau,\xi_0+h(\tau)\right)\,d\tau\right)\,dt\right\}. \end{aligned} \tag{15}$$

Покажем, что при сделанных выше предположениях, уравнение (15) для $t \in \in [0, 2\pi]$ имеет решение в некоторой η-окрестности U_η нуля $h(t) = 0$, $\eta \le \rho$.

Действительно, пусть T – шар непрерывных функций на $[0, 2\pi]$

$$\|\varphi(t)\| \le \eta. \tag{16}$$

Определим на T оператор U_t, задав его равенством

$$\begin{gathered} U_t\varphi = \varepsilon \int_0^t X\left(\tau, \xi_0 + \varphi(\tau)\right)\, d\tau + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial \overline{X}\left(\xi_0 + \varphi^*\right)}{\partial x}\right]^{-1} \cdot \varepsilon \cdot \\ \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\partial \overline{X}\left(\xi_0 + \tilde{\varphi}\right)}{\partial x} \times \int_0^t X\left(\tau, \xi_0 + \varphi(\tau)\right)\, d\tau\, dt + \\ + \int_0^{2\pi} Z\left(t, \xi_0 + \varphi(0) + \varepsilon \int_0^t X\left(\tau, \xi_0 + \varphi(\tau)\right)\, d\tau\right)\, dt. \end{gathered} \tag{17}$$

Проверим, что оператор $U_t\varphi$ вполне непрерывный в пространстве непрерывных функций. Имеем:

1) оператор $U_t\varphi$ переводит шар T в компактную его часть, что следует из неравенства

$$\begin{gathered} \|U_t\varphi\| \le \varepsilon \left\|\int_0^{2\pi} X\left(t, \xi_0 + \varphi(t)\right)\, dt\right\| + \frac{1}{2\pi}\left\|\left[\frac{\partial \overline{X}\left(\xi_0 + \varphi^*\right)}{\partial x}\right]^{-1} \times \right. \\ \left. \times \varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{\partial \overline{X}\left(\xi_0 + \tilde{\varphi}\right)}{\partial x} \times \int_0^t X\left(\tau, \xi_0 + \varphi(\tau)\right)\, d\tau\, dt\right\| + \frac{1}{2\pi}\left\|\left[\frac{\partial \overline{X}\left(\xi_0 + \varphi^*\right)}{\partial x}\right]^{-1} \times \right. \\ \times \left\{\int_0^{2\pi}\left[X\left(t, \xi_0 + \varphi(0) + \varepsilon \int_0^t X\left(\tau, \xi_0 + \varphi(\tau)\right)\, d\tau\right) - \right.\right. \\ \left.\left.\left. - \overline{X}\left(\xi_0 + \varphi(0) + \varepsilon \int_0^t X\left(\tau, \xi_0 + \varphi(\tau)\right)\, d\tau\right)\right]\, dt\right\}\right\|. \end{gathered}$$

Обозначим через

$$I_i^{12}\left(x_1, x_2\right) = I_i\left(x_1\right) \cap I_i\left(x_2\right), \quad I_i^1\left(x_1, x_2\right) = I_i\left(x_1\right) \setminus I_i^{12},$$
$$I_i^2\left(x_1, x_2\right) = I_i\left(x_2\right) \setminus I_i^{12}, \quad i = 1, 2.$$

На основании [3] для нулей функции $\Phi(t, x)$ справедливо неравенство

$$\left|t_i\left(x_1\right) - t_i\left(x_2\right)\right| \le D\left\|x_1 - x_2\right\|,$$

где D – некоторая постоянная. Тогда

$$\varepsilon \left\|\int_0^{2\pi} X\left(t, \xi_0 + \varphi(t)\right)\, dt\right\| \le \varepsilon 2\pi M;$$

$$\frac{1}{2\pi}\left\|\left[\frac{\partial \overline{X}\left(\xi_0 + \varphi^*\right)}{\partial x}\right]^{-1} \cdot \varepsilon \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\partial \overline{X}\left(\xi_0 + \tilde{\varphi}\right)}{\partial x} \int_0^t X\left(\tau, \xi_0 + \varphi(\tau)\right)\, d\tau\, dt\right\| \le 2\pi M_2 M_1 \varepsilon;$$

$$\frac{1}{2\pi}M_2\left\{\left\|\int_0^{2\pi}\left[X\left(t,\xi_0+\varphi(0)+\varepsilon\int_0^t X\left(\tau,\xi_0+\varphi(\tau)\right)\,d\tau\right)-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\overline{X}\left(\xi_0+\varphi(0)+\varepsilon\int_0^t X\left(\tau,\xi_0+\varphi(\tau)\right)\,d\tau\right)\right]\,dt\right\|\right\}\le$$
$$\le M_2\frac{1}{2\pi}\left\{\left\|\int_0^{2\pi}\left[X\left(t,\xi_0+\varphi(0)+\varepsilon\int_0^t X\left(\tau,\xi_0+\varphi(\tau)\right)\,d\tau\right)-\overline{X}\left(t,\xi_0+\varphi(0)\right)\right]dt\right\|+\right.$$
$$+\left\|\int_0^{2\pi}\left[X\left(t,\xi_0+\varphi(0)\right)-\overline{X}\left(\xi_0+\varphi(0)\right)\right]\,dt\right\|+$$
$$\left.+\left\|\int_0^{2\pi}\left[\overline{X}\left(\xi_0+\varphi(0)\right)-\overline{X}\left(\xi_0+\varphi(0)+\varepsilon\int_0^t X\left(\tau,\xi_0+\varphi(\tau)\right)\,d\tau\right)\right]\,dt\right\|\right\}. \qquad (18)$$

Оценим в (18) каждое слагаемое в отдельности

$$\left\|\int_0^{2\pi}\left[X\left(t,\xi_0+\varphi(0)+\varepsilon\int_0^t X\left(\tau,\xi_0+\varphi(\tau)\right)\,d\tau\right)-X\left(t,\xi_0+\varphi(0)\right)\right]\,dt\right\|\le$$
$$\le\left\|\int_{I_1^{12}(\varphi(t),\varphi(0))}\left[X_1\left(t,\xi_0+\varphi(t)\right)-X_1\left(t,\xi_0+\varphi(0)\right)\right]\,dt\right\|+$$
$$+\left\|\int_{I_1^1(\varphi(t),\varphi(0))}X_1\left(t,\xi_0+\varphi(t)\right)\,dt\right\|+\left\|\int_{I_1^2(\varphi(t),\varphi(0))}X_1\left(t,\xi_0+\varphi(0)\right)\,dt\right\|+$$
$$+\left\|\int_{I_2^{12}(\varphi(t),\varphi(0))}\left[X_2\left(t,\xi_0+\varphi(t)\right)-X_2\left(t,\xi_0+\varphi(0)\right)\right]\,dt\right\|+$$
$$+\left\|\int_{I_2^1(\varphi(t),\varphi(0))}X_2\left(t,\xi_0+\varphi(t)\right)\,dt\right\|+\left\|\int_{I_2^2(\varphi(t),\varphi(0))}X_2\left(t,\xi_0+\varphi(0)\right)\,dt\right\|\le$$
$$\le 4\pi\lambda\varepsilon 2\pi M+M\left(mesI_1^1+mesI_1^2+mesI_2^1+mesI_2^1\right)\le$$
$$\le 8\pi^2\lambda\varepsilon M+2M\left(mesI_1^1+mesI_1^2\right);$$
$$\left\|\int_0^{2\pi}\left[\overline{X}\left(\xi_0+\varphi(0)\right)-\overline{X}\left(\xi_0+\varphi(0)+\varepsilon\int_0^t X(\tau,\xi_0+\varphi(\tau))\,d\tau\right)\right]\,dt\right\|\le M_2 4\pi^2 M\lambda\varepsilon.$$

Окончательно имеем

$$\|U_t\varphi\|\le 2\pi M\varepsilon+2\pi M_2M_1M\varepsilon+M_2 4\pi\lambda M\varepsilon+M_2 4M^2DK\varepsilon+M_2^2\lambda M\varepsilon. \qquad (19)$$

Выберем $\varepsilon_0>0$ из условия

$$\varepsilon_0<\eta/\left(2\pi M+2\pi M_2M_1M+M_2 4\pi\lambda M+M_2 4M^2DK+M_2^2\lambda M\right).$$

Тогда из (19) следует, что при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ оператор переводит шар T в компактную его часть.

2) оператор $U_t\varphi$ непрерывен, что следует из неравенства

$$\|U_t\varphi_n-U_t\varphi\|\le\varepsilon\int_0^{2\pi}\left[X\left(t,\xi_0+\varphi_n(t)\right)-X\left(t,\xi_0+\varphi(t)\right)\right]\,dt\Big\|+$$

$$+\left\|\left\{\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+\varphi_n^*\right)}{\partial x}\right]^{-1}\cdot\varepsilon\int_0^{2\pi}\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+\tilde{\varphi}_n\right)}{\partial x}\int_0^t X\left(\tau,\xi_0+\varphi_n(\tau)\right)\,d\tau\,dt-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+\varphi^*\right)}{\partial x}\right]_{-1}\cdot\varepsilon\cdot\int_0^{2\pi}\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+\tilde{\varphi}\right)}{\partial x}\int_0^t X\left(\tau,\xi_0+\varphi(\tau)\right)\,d\tau\,dt\right\}\right\|+$$

$$+\left\{\left\|\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+\varphi_n^*\right)}{\partial x}\right]^{-1}\cdot\int_0^{2\pi}\left[X\left(t,\xi_0+\varphi_n(0)+\varepsilon\int_0^t X\left(\tau,\xi_0+\varphi_n(\tau)\right)\,d\tau\right)-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.-\overline{X}\left(\xi_0+\varphi_n(0)+\varepsilon\int_0^t X\left(\tau,\xi_0+\varphi_n(\tau)\right)\,d\tau\right)\right]\,dt\right\}-\left\{\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+\varphi^*\right)}{\partial x}\right]^{-1}\times\right.$$

$$\times\int_0^{2\pi}\left[X\left(t,\xi_0+\varphi(0)+\varepsilon\int_0^t X\left(\tau,\xi_0+\varphi(\tau)\right)\,d\tau\right)-\right.$$

$$\left.\left.\left.-\overline{X}\left(\xi_0+\varphi(0)+\varepsilon\int_0^t X\left(\tau,\xi_0+\varphi(\tau)\right)\,d\tau\right)\right]\,dt\right\}\right\|.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+\varphi_n^*\right)}{\partial x}\to\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+\varphi^*\right)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+\tilde{\varphi}_n\right)}{\partial x}\to\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+\tilde{\varphi}\right)}{\partial x}$$

при $\varphi_n(t)\to\varphi(t)$, и выполнив оценки интегралов, входящих в правую часть неравенства (20), аналогично тому, как это сделано при доказательстве условия сжатия оператора $U_t\varphi$, получим:

$$\lim_{\varphi_n\to\varphi}\|U_t\varphi_n-U_t\varphi\|=0.$$

Условия 1) и 2) означают, что оператор вполне непрерывный в пространстве непрерывных функций и, следовательно, в силу теоремы Шаудера [5] имеет неподвижную точку в шаре T. Это равносильно тому, что исходное уравнение (1) имеет в η-окрестности U_η точки $x=\xi_0$ периодическое с периодом 2π решение.

Заключение. Таким образом, доказано существование периодических решений для систем с разрывной правой частью и близость статического решения усредненной системы и периодического решения разрывной системы, т. е. получено обощение второй основной теоремы Н. Н. Боголюбова для разрывных систем. Полученные результаты имеют прикладное значение.

1. **Боголюбов Н. Н.** О некоторых статистических методах в математической физике [текст] / Н. Н. Боголюбов. – Львов: АН УССР, 1945. – 139 с.
2. **Митропольский Ю. А.** О периодических решениях систем нелинейных дифференциальных уравнений, правые части которых не дифференцируемы [текст] / Ю. А. Митропольский. – УМЖ, 1959. – Т. 9, № 4. – С. 366–379.

3. **Плотников В. А.** Метод усреднения в задачах управления [текст] / В. А. Плотников. – К.: Лыбидь, 1992. – 188 с.
4. **Самойленко А. М.** К вопросу о периодических решениях дифференциальных уравнений с недифференцируемыми правыми частями [текст] / А. М. Самойленко. – УМЖ, 1963. – Т. 15, № 3. – С. 7–12.
5. **Shauder J.** Der Fixpunktsatz in Functional Raumen [text] / J. Shauder. – Studia Math., 1930. – Bd. 2. – P. 171–180.
6. **Самойленко А. М.** Вторая теорема Боголюбова Н. Н. для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием [текст] / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк // Диф. ур-ние. – 1974. – Т. 10, № 11. – С. 2001–2010.