

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра методів математичної фізики

Дипломна робота

бакалавра

на тему: «Антиплоська задача теорії пружності для складеного клину з міжфазною тріщиною»

«Antiplane problem of the theory of elasticity for a compound wedge with an interfacial crack»

Виконав: студент денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика

Колаєв Олександр Борисович

Керівник

канд. фіз.-мат. наук доцент Процеров Ю.С.

(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали,
підпис)

Рецензент

канд. фіз.-мат. наук доцент Мойсеєнок О.П.

(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

Рекомендовано до захисту:	Захищено на засіданні ЕК №__
Протокол засідання кафедри	протокол № ____ від _____ р.
№ 12 від 7 червня 2022 р.	Оцінка _____ / _____ / _____ (за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Завідувач кафедри

Голова ЕК

проф. Вайсфельд Н.Д.
(підпис)(прізвище, ініціали)

(підпис) _____
(прізвище, ініціали)

Одеса – 2022

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. Антиплоска задача теорії пружності для складеного клину з міжфазною тріщиною.	4
1.1. Постановка задачі	4
1.2. Метод розв’язання	6
1.3. Отримання виразу для переміщення	8
1.4. Отримання інтегрального рівняння	14
ВИСНОВОК	20
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	21

ВСТУП

Теорія пружності займається деформацією та рухом пружних тіл під впливом зовнішніх навантажень. Тіла для різних задач мають різні форми, так наприклад, клиновидні структури часто використовуються в технологічних конструкціях та будівництві.

У дипломній роботі розглядається антиплоска задача для клину, що складається з двох частин та між цими частинами знаходиться дефект. Для розв'язання задачі використовується метод інтегральних перетворень, де ми зводимо вихідну крайову задачу до одномірної та розв'язавши задачу в трансформантах і використавши формулу обернення інтегрального перетворення отримаємо вираз для переміщення. Залишається зробити підстановку в ще нереалізовану умову на дефекті, яка приведе до інтегрального рівняння.

Розв'язок інтегрального рівняння будемо знаходити методом ортогональних многочленів вже у подальших роботах.

РОЗДІЛ 1

Антиплоска задача теорії пружності для складеного клину з міжфазною тріщиною

1.1. Постановка задачі

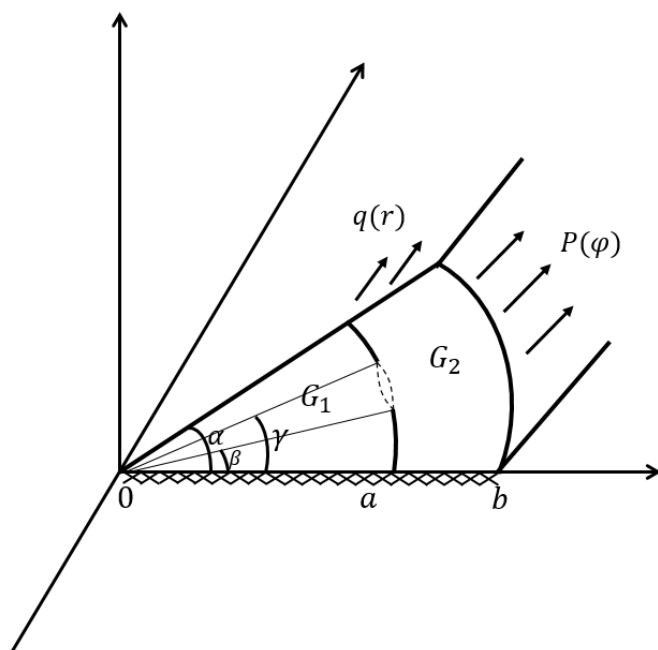
Нехай у циліндричній системі координат маємо клин, що складається з двох частин $0 < r < a$, $0 < \varphi < \alpha$ та $0 < r < b$, $0 < \varphi < \alpha$ з різних матеріалів з модулями зсуву G_1 та G_2 відповідно.

Нижня основа клину нерухомо закріплена, до другої частини до верхньої основи $a < r < b$ прикладене дотичне навантаження q , а до основи

$0 < \varphi < \alpha$ дотичне навантаження P . Прикладені навантаження не залежать від змінної z , отже тіло буде знаходитися в умовах антиплоскої деформації.

В цьому випадку відмінними від нуля будуть тільки переміщення $W(r, \varphi)$ та дотичні напруження τ_{rz} та $\tau_{\varphi z}$.

На лінії сполучення шарів $r = a$ на ділянці $\beta < \varphi < \gamma$ знаходиться тріщина, береги якої вільні від напруження.



Для такої задачі відповідає наступна крайова задача:

$$\Delta W(r, \varphi) = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 < r < b, \quad 0 < \varphi < \alpha, \quad r \neq a \quad (1)$$

Крайові умови:

$$W|_{\varphi=0} = 0; \quad \tau_{\varphi z}|_{\varphi=\alpha} = \begin{cases} 0, & 0 < r < a \\ G_2 \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\alpha} = q(r), & a < r < b \end{cases} \quad (2)$$

$$|W(0, \varphi)| < \infty; \quad \tau_{rz}|_{r=b} = G_2 \frac{\partial W}{\partial r} \Big|_{r=b} = P(\varphi), \quad 0 < \varphi < \alpha \quad (3)$$

Умови сполучення шарів:

$$< W > = W(a-0, \varphi) - W(a+0, \varphi) = \chi(\varphi), \quad \beta < \varphi < \gamma \quad (4)$$

$$\chi(\beta) = \chi(\gamma) = 0, \quad \chi(\varphi) = 0 \text{ поза проміжком } (\beta, \gamma)$$

$$\tau_{rz}|_{r=a-0} = 0, \quad \beta < \varphi < \gamma, \quad \text{звідки стрибок } < \tau_{rz,n} > = 0 \quad (5)$$

1.2. Метод розв'язання

Розв'язок задачі будуємо методом інтегральних перетворень.

До рівняння (1) застосуємо інтегральне сіпперетворення Фур'є

$$W_n(r) = \int_0^\varphi W(r, \varphi) \sin \lambda_n \varphi d\varphi, \quad \lambda_n = \frac{\pi(2n+1)}{2\alpha} \quad (6)$$

З формулою обернення

$$W(r, \varphi) = \frac{2}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} W_n(r) \sin \lambda_n \varphi \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right) \sin \lambda_n \varphi d\varphi &= \int_0^\alpha \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \sin \lambda_n \varphi d\varphi = \\ &= \left[\begin{array}{l} u = \sin \lambda_n \varphi; \quad du = \lambda_n \cos \lambda_n \varphi d\varphi \\ dv = \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} d\varphi \quad v = \frac{\partial W}{\partial \varphi} \end{array} \right] = \\ &= \frac{\partial W}{\partial \varphi} \sin \lambda_n \varphi \Big|_0^\alpha - \lambda_n \int_0^\alpha \frac{\partial W}{\partial \varphi} \cos \lambda_n \varphi d\varphi = \\ &= \left[\begin{array}{l} u = \cos \lambda_n \varphi; \quad du = -\lambda_n \sin \lambda_n \varphi d\varphi \\ dv = \frac{\partial W}{\partial \varphi} d\varphi \quad v = W \end{array} \right] = \\ &= \frac{\partial W}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\alpha} \sin \lambda_n \varphi - \lambda_n W \cos \lambda_n \varphi \Big|_0^\alpha - \lambda_n^2 \int_0^\alpha \sin \lambda_n \varphi d\varphi = \\ &= \frac{\partial W}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\alpha} (-1)^n - \lambda_n^2 W_n(r) \end{aligned}$$

З крайової умови (2) маємо:

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\alpha} = \frac{r}{G_2} q(r)$$

З цього випливає задача у просторі трансформант:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dW_n}{dr} \right) - \frac{\lambda_n^2 W_n}{r} = \frac{(-1)^n}{G_2} q(r), \quad 0 < r < b, \quad r \neq a \quad (8)$$

$$W_n'(b) = \frac{P_n}{G_2}, \quad W_n(0) - \text{обмежена коли } r \rightarrow 0, \quad P_n = \int_0^\alpha P(\alpha) \sin \lambda_n \varphi d\varphi$$

Умови сполучення шарів в трансформантах:

$$< W_n > = W_n(a-0) - W_n(a+0) = \chi_n \quad (9)$$

$$\chi_n = \int_\beta^\gamma \chi(\psi) \sin \lambda_n \psi d\psi$$

$$< \tau_{rz,n} > = G_1 W_n'(a-0) - G_2 W_n'(a+0) = 0$$

Розглянемо спочатку однорідну крайову задачу

$$(rW_n'(r))' - \frac{\lambda_n^2 W_n(r)}{r} = 0, \quad \text{тобто}$$

$$rW_n''(r) + W_n'(r) - \frac{\lambda_n^2 W_n(r)}{r} = 0 \quad (10)$$

$$W_n'(b) = 0, \quad W_n(0) - \text{обмежена} \quad (11)$$

1.3. Отримання виразу для переміщення

Для розв'язування одномірної розривної крайової задачі (10)-(11) будемо функцію Гріна.

Фундаментальна система розв'язків нашої одномірної задачі має наступний вигляд:

$$\varphi_0(r) = r^{\lambda_n} \text{ та } \varphi_1(r) = r^{-\lambda_n}$$

Функцію Грина будемо у вигляді:

$$G_n(r, \rho) = \begin{cases} a_0(\rho)r^{\lambda_n} + b_0(\rho)r^{-\lambda_n}, & 0 < r < \rho < b \\ a_1(\rho)r^{\lambda_n} + b_1(\rho)r^{-\lambda_n}, & 0 < \rho < r < b \end{cases} \quad (12)$$

В силу неперервності при $r = 0$:

$$b_0 = 0$$

За умовою неперервності при $r = \rho$:

$$a_0\rho^{\lambda_n} = a_1\rho^{\lambda_n} + b_1\rho^{-\lambda_n}$$

Умова стрибка першої похідної:

$$a_1\lambda_n\rho^{\lambda_n-1} - b_1\lambda_n\rho^{-\lambda_n-1} - a_0\lambda_n\rho^{\lambda_n-1} = \frac{1}{\rho}$$

Позначимо $c_0 = a_1 - a_0$, тоді:

$$\begin{cases} c_0\rho^{\lambda_n} + b_1\rho^{-\lambda_n} = 0 \Rightarrow c_0 = -b_1\rho^{-2\lambda_n} \\ c_0\lambda_n\rho^{\lambda_n-1} - b_1\lambda_n\rho^{-\lambda_n-1} = \frac{1}{\rho} \Rightarrow -b_1\lambda_n\rho^{-\lambda_n-1} - b_1\lambda_n\rho^{-\lambda_n-1} = \frac{1}{\rho} \end{cases}$$

$$-b_1 = -\frac{1}{2\lambda_n\rho}\rho^{\lambda_n+1} = -\frac{1}{2\lambda_n}\rho^{\lambda_n} \text{ та } c_0 = \frac{1}{2\lambda_n}\rho^{-\lambda_n}$$

Задовольняючи крайовим умовам, при $r = b$:

$$a_1\lambda_nb^{\lambda_n-1} - b_1\lambda_nb^{-\lambda_n-1} = 0 \Rightarrow a_1 = b_1b^{-2\lambda_n} = -\frac{1}{2\lambda_n}\rho^{\lambda_n}b^{-2\lambda_n} \text{ та}$$

$$a_0 = a_1 - c_0 = -\frac{b^{\lambda_n}}{2\lambda_n} \left(\frac{\rho}{b}\right)^{\lambda_n} - \frac{1}{2\lambda_n} \rho^{-\lambda_n}$$

$$G_n(r, \rho) = -\frac{1}{2\lambda_n} \left(\frac{\rho}{b}\right)^{\lambda_n} \left(\frac{r}{b}\right)^{\lambda_n} - \frac{1}{2\lambda_n} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\lambda_n}, \quad \text{при } r < \rho$$

$$G_n(r, \rho) = -\frac{1}{2\lambda_n} \left(\frac{\rho}{b}\right)^{\lambda_n} \left(\frac{r}{b}\right)^{\lambda_n} - \frac{1}{2\lambda_n} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\lambda_n}, \quad \text{при } \rho < r$$

Таким чином функція Грина:

$$G_n(r, \rho) = -\frac{1}{2\lambda_n} \left(\frac{\rho r}{b^2}\right)^{\lambda_n} - \frac{1}{2\lambda_n} \begin{cases} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\lambda_n}, & r < \rho \\ \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\lambda_n}, & \rho < r \end{cases}$$

Взявши за увагу те, що:

$$e^{-\lambda_n \left| \ln \frac{r}{\rho} \right|} = \begin{cases} e^{-\lambda_n \ln \frac{r}{\rho}} = \left(\frac{r}{\rho}\right)^{-\lambda_n}, & \text{якщо } \ln \frac{r}{\rho} > 0, \text{ тобто } \frac{r}{\rho} > 1 \text{ та } r > \rho \\ e^{\lambda_n \ln \frac{r}{\rho}} = \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\lambda_n}, & \text{якщо } \ln \frac{r}{\rho} < 0, \text{ тобто } \frac{r}{\rho} < 1 \text{ та } r < \rho \end{cases}$$

$$\text{Тобто } e^{-\lambda_n \left| \ln \frac{r}{\rho} \right|} = \begin{cases} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\lambda_n} & r > \rho \\ \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\lambda_n} & r < \rho \end{cases} \Rightarrow$$

Остаточно функція Грина (12) має вигляд:

$$G_n(r, \rho) = -\frac{1}{2\lambda_n} \left(\frac{\rho r}{b^2}\right)^{\lambda_n} - \frac{1}{2\lambda_n} e^{-\lambda_n \left| \ln \frac{r}{\rho} \right|} = -\frac{1}{2\lambda_n} \left[\left(\frac{\rho r}{b^2}\right)^{\lambda_n} + e^{-\lambda_n \left| \ln \frac{r}{\rho} \right|} \right] \quad (13)$$

Знайдемо фундаментальну базисну систему розв'язків:

$$\psi(r) = c_0 r^{\lambda_n} + c_1 r^{-\lambda_n}; \quad c_0 = 0$$

$$\psi'(r) = c_0 \lambda_n b^{\lambda_n-1} = 1; \quad c_0 = \frac{1}{\lambda_n} b^{-\lambda_n+1}$$

$$\psi(r) = \frac{b}{\lambda_n} \left(\frac{r}{b}\right)^{\lambda_n}$$

Тоді розв'язок неоднорідної розривної крайової задачі може бути представлений у вигляді:

$$W_n(r) = \frac{b}{\lambda_n} \left(\frac{r}{b}\right)^{\lambda_n} \frac{P_n}{G_2} + \frac{(-1)^n}{G_2} \int_a^b q(\rho) G_n(r, \rho) d\rho +$$

$$+ a \left(A_0 \frac{\partial G_n(r, \rho)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} - A_1 G_n(r, a) \right), \quad (14)$$

Де A_0 невідомий стрибок переміщення на тріщині, а A_1 - стрибок похідної від переміщення.

З умов сполучення (9) маємо:

$$A_0 = \langle W_n \rangle = \chi_n$$

$$A_1 = \langle W_n' \rangle = G_1 W_n'(a-0) - G_2 W_n'(a+0) = 0 \quad (15)$$

$$W_n(r) = \frac{b}{\lambda_n} \frac{P_n}{G_2} \left(\frac{r}{b}\right)^{\lambda_n} - \frac{(-1)^n}{2\lambda_n G_2} \int_a^b q(\rho) \left[\left(\frac{r\rho}{b^2}\right)^{\lambda_n} + e^{-\lambda_n |\ln \frac{r}{\rho}|} \right] d\rho +$$

$$+ a \left(-\chi_n \frac{1}{2a} \left[\left(\frac{ra}{b^2}\right)^{\lambda_n} + e^{-\lambda_n |\ln \frac{r}{a}|} \text{sign} \left(\ln \frac{r}{a} \right) \right] + A_1 \frac{1}{2\lambda_n} \left[\left(\frac{ra}{b^2}\right)^{\lambda_n} + e^{-\lambda_n |\ln \frac{r}{a}|} \right] \right)$$

Для знаходження A_1 потрібно обчислити похідну від переміщення та підставити в умову неперервності напруження,

$$\langle \tau_{rz,n} \rangle = G_1 W_n'(a-0) - G_2 W_n'(a+0) = 0$$

Маємо першу і другу похідні:

$$\frac{\partial G_n(r, \rho)}{\partial \rho} = -\frac{1}{2\rho} \left[\left(\frac{r\rho}{b^2}\right)^{\lambda_n} + e^{-\lambda_n |\ln \frac{r}{\rho}|} \text{sign} \left(\ln \frac{r}{\rho} \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 G_n(r, \rho)}{\partial r \partial \rho} = -\frac{\lambda_n}{2\rho r} \left[\left(\frac{r\rho}{b^2}\right)^{\lambda_n} - e^{-\lambda_n |\ln \frac{r}{\rho}|} \right]$$

Тоді похідна від переміщення:

$$\begin{aligned}
 W'_n(r) = & \frac{P_n}{G_2} \left(\frac{r}{b}\right)^{\lambda_n-1} - \frac{(-1)^n}{2G_2 r} \int_a^b q(\rho) \left[\left(\frac{r\rho}{b^2}\right)^{\lambda_n} - e^{-\lambda_n \left|\ln \frac{r}{\rho}\right|} \operatorname{sign} \left(\ln \frac{r}{\rho} \right) \right] d\rho + \\
 & + a \left(-\chi_n \frac{\lambda_n}{2ar} \left[\left(\frac{ra}{b^2}\right)^{\lambda_n} - e^{-\lambda_n \left|\ln \frac{r}{a}\right|} \right] + \right. \\
 & \left. + A_1 \frac{1}{2r} \left[\left(\frac{ra}{b^2}\right)^{\lambda_n} - e^{-\lambda_n \left|\ln \frac{r}{a}\right|} \operatorname{sign} \left(\ln \frac{r}{a} \right) \right] \right) \quad (16)
 \end{aligned}$$

Тоді при $r = a + 0$:

$$\begin{aligned}
 W'_n(a+0) = & \frac{P_n}{G_2} \left(\frac{a}{b}\right)^{\lambda_n-1} - \frac{(-1)^n}{2G_2 a} \int_a^b q(\rho) \left[\left(\frac{a\rho}{b^2}\right)^{\lambda_n} + e^{-\lambda_n \left|\ln \frac{a}{\rho}\right|} \right] d\rho + \\
 & + a \left(-\frac{\chi_n \lambda_n}{2a^2} \left[\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{\lambda_n} - e^{-\lambda_n \left|\ln \frac{a+0}{a}\right|} \right] + \right. \\
 & \left. + A_1 \frac{1}{2a} \left[\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{\lambda_n} - e^{-\lambda_n \left|\ln \frac{a+0}{a}\right|} \operatorname{sign} \left(\ln \frac{a+0}{a} \right) \right] \right) = \\
 = & \frac{P_n}{G_2} \left(\frac{a}{b}\right)^{\lambda_n-1} - \frac{(-1)^n}{2G_2 a} \int_a^b q(\rho) \left[\left(\frac{a\rho}{b^2}\right)^{\lambda_n} + e^{-\lambda_n \left|\ln \frac{a}{\rho}\right|} \right] d\rho - \\
 & - \chi_n \frac{\lambda_n}{2a} \left[\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{\lambda_n} - 1 \right] + A_1 \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{\lambda_n} - 1 \right] \quad (17)
 \end{aligned}$$

При $r = a - 0$:

$$W'_n(a-0) = \frac{P_n}{G_2} \left(\frac{a}{b}\right)^{\lambda_n-1} - \frac{(-1)^n}{2G_2 a} \int_a^b q(\rho) \left[\left(\frac{a\rho}{b^2}\right)^{\lambda_n} + e^{-\lambda_n \left|\ln \frac{a}{\rho}\right|} \right] d\rho -$$

$$-\chi_n \frac{\lambda_n}{2a} \left[\left(\frac{a^2}{b^2} \right)^{\lambda_n} - 1 \right] + A_1 \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a^2}{b^2} \right)^{\lambda_n} + 1 \right] \quad (18)$$

Тоді підставляючи знайденні доданки (17)-(18), маємо:

$$\begin{aligned} < \tau_{rz,n} > = G_1 W'_n(a-0) - G_2 W'_n(a+0) = \frac{G_1 P_n}{G_2} \left(\frac{a}{b} \right)^{\lambda_n-1} - \\ & - \frac{G_1 (-1)^n}{2G_2 a} \int_a^b q(\rho) \left[\left(\frac{a\rho}{b^2} \right)^{\lambda_n} + e^{-\lambda_n |\ln \frac{a}{\rho}|} \right] d\rho - \chi_n \frac{\lambda_n G_1}{2a} \left[\left(\frac{a^2}{b^2} \right)^{\lambda_n} - 1 \right] + \\ & + \frac{A_1 G_1}{2} \left[\left(\frac{a}{b} \right)^{2\lambda_n} + 1 \right] - \frac{G_2 P_n}{G_2} \left(\frac{a}{b} \right)^{\lambda_n-1} + \\ & + \frac{G_2 (-1)^n}{2G_2 a} \int_a^b q(\rho) \left[\left(\frac{a\rho}{b^2} \right)^{\lambda_n} + e^{-\lambda_n |\ln \frac{a}{\rho}|} \right] d\rho + \\ & + \chi_n \frac{\lambda_n G_2}{2a} \left[\left(\frac{a^2}{b^2} \right)^{\lambda_n} - 1 \right] - A_1 \frac{G_2}{2} \left[\left(\frac{a^2}{b^2} \right)^{\lambda_n} - 1 \right] = \\ & = 2 \left(\frac{G_1}{G_2} - 1 \right) P_n \left(\frac{a}{b} \right)^{\lambda_n-1} - \left(\frac{G_1}{G_2} - 1 \right) \frac{(-1)^n}{a} \int_a^b q(\rho) \left[\left(\frac{a\rho}{b^2} \right)^{\lambda_n} + e^{-\lambda_n |\ln \frac{a}{\rho}|} \right] d\rho - \\ & - \chi_n \frac{\lambda_n}{a} \left[(G_1 - G_2) \left(\frac{a}{b} \right)^{2\lambda_n} - G_1 + G_2 \right] + A_1 \left[(G_1 - G_2) \left(\frac{a}{b} \right)^{2\lambda_n} + G_1 + G_2 \right] = 0 \end{aligned}$$

Звідси:

$$\begin{aligned} A_1 \left[(G_1 - G_2) \left(\frac{a}{b} \right)^{2\lambda_n} + G_1 + G_2 \right] &= -2 \left(\frac{G_1}{G_2} - 1 \right) P_n \left(\frac{a}{b} \right)^{\lambda_n-1} + \\ &+ \left(\frac{G_1}{G_2} - 1 \right) \frac{(-1)^n}{a} \int_a^b q(\rho) \left[\left(\frac{a\rho}{b^2} \right)^{\lambda_n} + e^{-\lambda_n |\ln \frac{a}{\rho}|} \right] d\rho + \end{aligned}$$

$$+\chi_n \frac{\lambda_n}{a} \left[(G_1 - G_2) \left(\frac{a}{b} \right)^{2\lambda_n} - G_1 + G_2 \right] \quad (19)$$

Розділимо на G_2 і позначимо:

$$\Delta_n = \left(\frac{G_1}{G_2} - 1 \right) \left(\frac{a}{b} \right)^{2\lambda_n} + \frac{G_1}{G_2} + 1$$

Або

$$G^* = \frac{G_1}{G_2} \Rightarrow \Delta_n = \left[(G^* - 1) \left(\frac{a}{b} \right)^{2\lambda_n} + G^* + 1 \right] \quad (20)$$

Остаточно отримуємо:

$$\begin{aligned} A_1 = & -\frac{2(G^* - 1)}{G_2 \Delta_n} P_n \left(\frac{a}{b} \right)^{\lambda_n - 1} + \frac{(-1)^n}{a G_2 \Delta_n} (G^* - 1) * \\ & * \int_a^b q(\rho) \left[\left(\frac{a\rho}{b^2} \right)^{\lambda_n} + e^{-\lambda_n |\ln \frac{a}{\rho}|} \right] d\rho + \chi_n \frac{\lambda_n}{a \Delta_n} (G^* - 1) \left[\left(\frac{a}{b} \right)^{2\lambda_n} - 1 \right] \end{aligned} \quad (21)$$

Тоді трансформанта переміщення у клині має вигляд:

$$\begin{aligned} W_n(r) = & \frac{b}{\lambda_n} \frac{P_n}{G_2} \left(\frac{r}{b} \right)^{\lambda_n} - \frac{(-1)^n}{2\lambda_n G_2} \int_a^b q(\rho) \left[\left(\frac{r\rho}{b^2} \right)^{\lambda_n} + e^{-\lambda_n |\ln \frac{r}{\rho}|} \right] d\rho + \\ & + a \left(-\chi_n \frac{1}{2a} \left[\left(\frac{ra}{b^2} \right)^{\lambda_n} + e^{-\lambda_n |\ln \frac{r}{a}|} \text{sign} \left(\ln \frac{r}{a} \right) \right] + A_1 \frac{1}{2\lambda_n} \left[\left(\frac{ra}{b^2} \right)^{\lambda_n} + e^{-\lambda_n |\ln \frac{r}{a}|} \right] \right) \end{aligned} \quad (22)$$

1.4. Отримання інтегрального рівняння

Підставимо A_1 у (16):

$$\begin{aligned}
 W'_n(r) = & \frac{P_n}{G_2} \left(\frac{r}{b}\right)^{\lambda_n-1} - \frac{(-1)^n}{2rG_2} \int_a^b q(\rho) \left[\left(\frac{r\rho}{b^2}\right)^{\lambda_n} - e^{-\lambda_n \left|\ln \frac{r}{\rho}\right|} \operatorname{sign} \left(\ln \frac{r}{\rho}\right) \right] d\rho - \\
 & - \chi_n \frac{\lambda_n}{2r} \left[\left(\frac{ra}{b^2}\right)^{\lambda_n} - e^{-\lambda_n \left|\ln \frac{r}{a}\right|} \right] + \left(-\frac{a(G^* - 1)}{rG_2\Delta_n} P_n \left(\frac{a}{b}\right)^{\lambda_n-1} + \right. \\
 & + \frac{(-1)^n(G^* - 1)}{2rG_2\Delta_n} \int_a^b q(\rho) \left[\left(\frac{a\rho}{b^2}\right)^{\lambda_n} + e^{-\lambda_n \left|\ln \frac{a}{\rho}\right|} \right] d\rho + \\
 & \left. + \chi_n \frac{\lambda_n(G^* - 1)}{2r\Delta_n} \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{2\lambda_n} - 1 \right] \right) \left[\left(\frac{ra}{b^2}\right)^{\lambda_n} - \operatorname{sign} \left(\ln \frac{r}{a}\right) e^{-\lambda_n \left|\ln \frac{r}{a}\right|} \right] \quad (23)
 \end{aligned}$$

І запишемо (23) у вигляді:

$$W'_n(r) = M_n(r) + N_n(r) + \chi_n[K_n(r) + S_n(r)] \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
 M_n(r) = & \frac{P_n}{G_2} \left\{ \left(\frac{r}{b}\right)^{\lambda_n-1} - \frac{a(G^* - 1)}{r\Delta_n} \left(\frac{a}{b}\right)^{\lambda_n-1} * \right. \\
 & \left. * \left(\frac{ra}{b^2}\right)^{\lambda_n} - \operatorname{sign} \left(\ln \frac{r}{a}\right) e^{-\lambda_n \left|\ln \frac{r}{a}\right|} \right\} \quad (25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_n(r) = & -\frac{(-1)^n}{2rG_2} \int_a^b q(\rho) \left[\left(\frac{r\rho}{b^2}\right)^{\lambda_n} - \operatorname{sign} \left(\ln \frac{r}{\rho}\right) e^{-\lambda_n \left|\ln \frac{r}{\rho}\right|} \right] d\rho + \\
 & + \frac{(-1)^n(G^* - 1)}{2rG_2\Delta_n} \left[\left(\frac{ra}{b^2}\right)^{\lambda_n} - \operatorname{sign} \left(\ln \frac{r}{a}\right) e^{-\lambda_n \left|\ln \frac{r}{a}\right|} \right] * \\
 & * \int_a^b q(\rho) \left[\left(\frac{a\rho}{b^2}\right)^{\lambda_n} + e^{-\lambda_n \left|\ln \frac{a}{\rho}\right|} \right] d\rho, \quad (26)
 \end{aligned}$$

Де величини (25)-(26) залежать тільки від навантажень.

При оберненні інтегрального перетворення в ядрі при $r = a$ отримаємо розбіжний інтеграл, щоб уникнути цього розіб'ємо ядро при χ на два доданки:

$$K_n(r) = \frac{\lambda_n(G^* - 1)}{2r\Delta_n} \left(\frac{ra}{b^2}\right)^{\lambda_n} \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{2\lambda_n} - 1\right] - \frac{\lambda_n}{2r} \left(\frac{ra}{b^2}\right)^{\lambda_n} -$$

$$- \frac{\lambda_n(G^* - 1)}{2r\Delta_n} \left(\frac{a}{b}\right)^{2\lambda_n} \operatorname{sign}\left(\ln \frac{r}{a}\right) e^{-\lambda_n \left|\ln \frac{r}{a}\right|} \quad (27)$$

$$S_n(r) = \frac{\lambda_n(G^* - 1)}{2r\Delta_n} \operatorname{sign}\left(\ln \frac{r}{a}\right) e^{-\lambda_n \left|\ln \frac{r}{a}\right|} \quad (28)$$

Де при $r = a$ перший доданок дає збіжність, а другий доданок має особливість.

Обернувши інтегральне перетворення згідно з формулами (7), (9):

$$W(r, \varphi) = \frac{2}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} W_n(r) \sin \lambda_n \varphi$$

$$\chi_n = \int_{\beta}^{\gamma} \chi(\psi) \sin \lambda_n \psi d\psi$$

Отримаємо розв'язок:

$$\frac{\partial W(r, \varphi)}{\partial r} = \frac{2}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} [M_n(r) + N_n(r)] \sin \lambda_n \varphi +$$

$$+ \frac{2}{\alpha} \int_{\beta}^{\gamma} \chi(\psi) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [K_n(r) + S_n(r)] \sin \lambda_n \varphi \sin \lambda_n \psi \right\} d\psi \quad (29)$$

І задовільнимо умові на тріщині:

$$\left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{r=a+0} = 0$$

Але перед цим виділимо особливість, для цього винесемо другу похідну з ряду:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} S_n(r) \sin \lambda_n \varphi \sin \lambda_n \psi &= \left[\sin \lambda_n \psi = -\frac{1}{\lambda_n^2} \frac{d^2}{d\psi^2} \sin \lambda_n \psi \right] = \\ &= -\frac{d^2}{d\psi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n(r)}{\lambda_n^2} \sin \lambda_n \varphi \sin \lambda_n \psi \end{aligned} \quad (30)$$

Тоді в ньому можемо перейти до границі при $r \rightarrow a + 0$, який дасть збіжний ряд.

Отримаємо інтегральне рівняння з урахуванням (30):

$$\begin{aligned} & -\frac{d^2}{d\psi^2} \int_{\beta}^{\gamma} \chi(\psi) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n(a+0)}{\lambda_n^2} \sin \lambda_n \varphi \sin \lambda_n \psi \right] d\psi + \\ & + \int_{\beta}^{\gamma} \chi(\psi) \left[\sum_{n=0}^{\infty} K_n(a+0) \sin \lambda_n \varphi \sin \lambda_n \psi \right] d\psi = F(\varphi), \end{aligned} \quad (31)$$

Де

$$F(\varphi) = - \sum_{n=0}^{\infty} [M_n(a+0) + N_n(a+0)] \sin \lambda_n \varphi, \quad \beta < \varphi < \gamma$$

Розглянемо ряд в інтегральному рівнянні (31):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n(a)}{\lambda_n^2} \sin \lambda_n \varphi \sin \lambda_n \psi = \frac{(G^* - 1)}{2r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n \varphi \sin \lambda_n \psi}{\lambda_n \left[(G^* - 1) \left(\frac{a}{b} \right)^{2\lambda_n} + G^* + 1 \right]} \quad (32)$$

Представимо:

$$\frac{1}{\left[(G^* - 1) \left(\frac{a}{b} \right)^{2\lambda_n} + G^* + 1 \right]} = \frac{1}{(G^* + 1)} - \frac{(G^* - 1) \left(\frac{a}{b} \right)^{2\lambda_n}}{(G^* + 1) \left[(G^* - 1) \left(\frac{a}{b} \right)^{2\lambda_n} + G^* + 1 \right]}$$

Де останній доданок прагне до нуля при $n \rightarrow \infty$.

Перепишемо (32),

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n(a)}{\lambda_n^2} \sin \lambda_n \varphi \sin \lambda_n \psi &= \frac{(G^* - 1)}{2a(G^* + 1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n \varphi \sin \lambda_n \psi}{\lambda_n} - \\ &- \frac{(G^* - 1)^2}{2a(G^* + 1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{b} \right)^{2\lambda_n} \sin \lambda_n \varphi \sin \lambda_n \psi}{\lambda_n \left[(G^* - 1) \left(\frac{a}{b} \right)^{2\lambda_n} + G^* + 1 \right]} \end{aligned} \quad (33)$$

Використовуючи відоме співвідношення[5]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} = \frac{1}{4} \ln \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2}, \quad 0 < x < \pi$$

Та просумувавши ряд в (33), виділимо сингулярну частину ядра, де залежно від виду цієї сингулярної частини ми можемо застосувати до розв'язку інтегрального рівняння метод ортогональних поліномів:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n \varphi \sin \lambda_n \psi}{\lambda_n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n(\varphi - \psi)}{\lambda_n} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n(\varphi + \psi)}{\lambda_n} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1) \frac{\pi}{2\alpha} (\varphi - \psi)}{2n+1} - \frac{\alpha}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1) \frac{\pi}{2\alpha} (\varphi + \psi)}{2n+1} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\alpha}{4\pi} \ln \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi(\varphi - \psi)}{4\alpha} - \frac{\alpha}{4\pi} \ln \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi(\varphi + \psi)}{4\alpha} \right] \quad (34)
\end{aligned}$$

До першого доданку в (34) відніmemo та додамо $2\ln \frac{1}{|\varphi - \psi|}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \ln \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi(\varphi - \psi)}{4\alpha} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[2\ln \operatorname{ctg} \frac{\pi(\varphi - \psi)}{4\alpha} - 2\ln \frac{1}{|\varphi - \psi|} + 2\ln \frac{1}{|\varphi - \psi|} \right] = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[2\ln \frac{1}{|\varphi - \psi|} + 2\ln \frac{|\varphi - \psi| \cos \frac{\pi}{4\alpha} |\varphi - \psi|}{\sin \frac{\pi}{4\alpha} |\varphi - \psi|} \right] \quad (35)
\end{aligned}$$

Де останній доданок не має особливостей при $\varphi = \psi$, тому запишемо його в регулярну частину ядра.

Остаточно отримуємо з урахуванням (32)-(35):

$$\begin{aligned}
& - \frac{d^2}{d\psi^2} \int_{\beta}^{\gamma} \chi(\psi) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n(a)}{\lambda_n^2} \sin \lambda_n \varphi \sin \lambda_n \psi \right] d\psi = \\
&= - \frac{(G^* - 1)}{2a(G^* + 1)} \frac{\alpha}{2\pi} \frac{d^2}{d\psi^2} \int_{\beta}^{\gamma} \chi(\psi) \ln \frac{1}{|\varphi - \psi|} d\psi - \frac{(G^* - 1)}{2a(G^* + 1)} \frac{\alpha}{2\pi} \frac{d^2}{d\psi^2} * \\
& * \int_{\beta}^{\gamma} \chi(\psi) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\ln \frac{|\varphi - \psi| \cos \frac{\pi}{4\alpha} |\varphi - \psi|}{\sin \frac{\pi}{4\alpha} |\varphi - \psi|} - \ln \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi(\varphi - \psi)}{4\alpha} \right] d\psi - \\
& - \frac{(G^* - 1)^2}{2a(G^* + 1)} \int_{\beta}^{\gamma} \chi(\psi) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{2\lambda_n} \sin \lambda_n \varphi \sin \lambda_n \psi}{\lambda_n \left[(G^* - 1) \left(\frac{a}{b}\right)^{2\lambda_n} + G^* + 1 \right]} \right] d\psi
\end{aligned}$$

Тоді можемо записати інтегральне рівняння наступним чином:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2}{d\psi^2} \int_{\beta}^{\gamma} \chi(\psi) \ln \frac{1}{|\varphi - \psi|} d\psi + \frac{d^2}{d\psi^2} \int_{\beta}^{\gamma} \chi(\psi) * \\
 & * \sum_{n=0}^{\infty} \left[\ln \frac{|\varphi - \psi| \cos \frac{\pi}{4\alpha} |\varphi - \psi|}{\sin \frac{\pi}{4\alpha} |\varphi - \psi|} - \ln \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi(\varphi - \psi)}{4\alpha} \right] d\psi \\
 & + \int_{\beta}^{\gamma} \chi(\psi) \left[K_n(a) + (G^* - 1) \frac{2\pi}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{2\lambda_n} \sin \lambda_n \varphi \sin \lambda_n \psi}{\lambda_n \left[(G^* - 1) \left(\frac{a}{b}\right)^{2\lambda_n} + G^* + 1 \right]} \right] d\psi \\
 & = f(\varphi),
 \end{aligned}$$

$$\text{де } f(\varphi) = - \sum_{n=0}^{\infty} [M_n(a) + N_n(a)] \sin \lambda_n \varphi$$

ВИСНОВОК

В дипломній роботі була розглянута антиплоска задача теорії пружності для складеного клину з міжфазною тріщиною, яка була зведена до розв'язку інтегрального рівняння відносно невідомого стрибка переміщення на тріщині.

У подальших роботах після його розв'язку методом ортогональних поліномів вже зможемо знайти шукані напруження та переміщення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Методичні вказівки до курсу «Математичне моделювання деяких задач механіки і техніки» / [упорядкув. канд. фіз.-мат. наук: Процеров Ю.С., Мойсєєнок О.П. – Одеса: 2015]
2. Попов Г.Я. , Реут В.В., Моїсєєв М.Г., Вайсфельд Н.Д. «Навчальний посібник «Рівняння математичної фізики. Метод ортогональних многочленів»Одеса : Астропринт, 2010 – 115с.
3. Новацкий В. Теория упругости. –М.: Мир, 1975. –с.872.
4. Попов Г. Я. Навчальний посібник з курсу “Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень”: для студ. техн. спец. ВНЗ / Г. Я. Попов, В. В. Реут, Н. Д. Вайсфельд. – Одеса: Астропринт, 2005 . – 183 с.
5. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. В 3 т. Т.1. Элементарные функции. —2-е изд., 2002. —580-584 с. [ур. 5.4.6.7].