Вісник Одеськ. держ. ун-ту.– 2001.– Т. 6, вип. 3. Фіз.-мат. науки.– С. 62–66

УДК 519.6

Р. В. Загайнова
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рекомендовано до друку науковим семінаром
"Чисельно-аналітичні методи дослідження диференціальних рівнянь" ОНУ 13.09.2001 р.

Розглядається клас різницевих методів, які відрізняються від лінійних багатокрокових методів використанням похідних від розв'язку порядку вище від першого.

Рассматривается класс разностных методов, отличающихся от линейных многошаговых методов использованием производных от решения порядка выше первого.

A class of difference methods which differ from linear multistep methods by the use of higher than the first order solution derivatives is investigate.

Для численного решения задачи

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)), \tag{1}$$

$$y(t_0) = y_0, \tag{2}$$

где $f(t,y) \in C_{t,y}^{(d,d)}(\Gamma), \Gamma \subset I_t \times R_y^m, I_t = \{0 \le t < \infty\}$, $t_0 \ge 0$, на промежутке $[t_0, t_0 + T]$, $T > 0$, принадлежащем промежутку существования решения, разработано достаточно много методов, каждый из которых имеет свои достоинства, определяющие область его применения. В последние несколько десятилетий задача (1)–(2) привлекла внимание математиков в связи с необходимостью решения так называемых "жестких" систем, которые постоянно возникают в приложениях, но не поддаются решению классическими методами. Для решения таких систем разработаны и продолжают разрабатываться специальные методы. К их числу относятся методы, удовлетворяющие некоторым специальным требованиям устойчивости: A-устойчивые, L-устойчивые, жестко устойчивые [1, 2, 3] и другие. В данной работе рассматривается класс многошаговых методов, использующих производные от решения порядка выше первого. В простейшем частном случае (одношаговые методы) удается получить методы от третьего до шестого порядка, удовлетворяющие указанным выше требованиям устойчивости. И поскольку методы являются одношаговыми, им соответствуют однородные алгоритмы, не требующие построения стартового участка таблицы значений решения и сохраняющие известные преимущества при выполнении расчетов с переменным шагом интегрирования.

1°. Рассмотрим класс методов

$$u_k = g_k(h), k = \overline{0, j-1} \text{ (начальные условия)}, \tag{3}$$

$$\sum_{i=0}^{j} \alpha_i u_{k-i} = h \sum_{i=0}^{j} \beta_i f_{k-i} + h^2 \sum_{i=0}^{j} \gamma_i f_{k-i}^{(1)} + h^3 \sum_{i=0}^{j} \delta_i f_{k-i}^{(2)}, \quad k = \overline{j, N}, \tag{4}$$

где $\{u_k\}_{k=\overline{0,N}}$ – таблица приближенных значений решения на сетке $t_k = t_0 + kh$, $Nh = T$, $k = \overline{0, N}$ (для простоты считаем ее равномерной),

$$f_{k-i}^{(\nu)} = \left. \frac{d^\nu f(t,y)}{dt^\nu} \right|_{\substack{t=t_{k-i} \\ y=u_{k-i}}}, \quad \nu = 0, 1, 2; \quad i = \overline{0, j}; \quad j \le N; \quad k = \overline{j, N},$$

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \left(i = \overline{0, j}\right)$ – числовые коэффициенты.

Для построения метода s-того порядка воспользуемся методом неопределенных коэффициентов [1, с.231] и потребуем, чтобы погрешность аппроксимации

$$\psi(h,y_k)=-\frac{1}{h}\sum_{i=0}^{j}\alpha_i y_{k-i}+\sum_{i=0}^{j}\beta_i f(t_{k-i},y_{k-i})+$$
$$+h\sum_{i=0}^{j}\gamma_i f^{(1)}(t_{k-i},y_{k-i})+h^2\sum_{i=0}^{j}\delta_i f^{(2)}(t_{k-i},y_{k-i}) \qquad (5)$$

была величиной $O(h^s)$ при $h\to 0$. Подставляя в (5) вместо $y_{k-i}=y(t_k-ih)$, $f^{(\nu)}(t_{k-i},y_{k-i})=y^{(\nu+1)}(t_{k-i})$, $(\nu=0,1,2)$ их разложения в ряды Тейлора (при условии $d\ge s$), собирая и приравнивая нулю коэффициенты при h^ν для $\nu\le s-1$, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов α_i, β_i, γ_i, δ_i $\left(i=\overline{0,j}\right)$ разностного метода (3)–(4), к которой присоединим условие нормировки $\sum_{i=0}^{j}\beta_i=1$. Имеем

$$\begin{cases}\sum_{i=0}^{j}\beta_i=1,\\ \sum_{i=0}^{j}\alpha_i=0,\\ \sum_{i=0}^{j}(i\alpha_i+\beta_i)=0,\\ \sum_{i=0}^{j}(i^2\alpha_i+2i\beta_i-2\gamma_i)=0,\\ \sum_{i=0}^{j}(i^3\alpha_i+3i^2\beta_i-6i\gamma_i+6\delta_i)=0,\\ \sum_{i=0}^{j}i^{l-3}(i^3\alpha_i+li^2\beta_i-l(l-1)i\gamma_i+l(l-1)(l-2)\delta_i)=0, \quad l=\overline{4,s}.\end{cases} \qquad (6)$$

Потребуем, чтобы число уравнений системы (6) не превосходило числа неизвестных, т.е. положим $s+2\le 4j+4$. Тогда $s\le 4j+2$ и $s_{\max}=4j+2$.

2°. В методе (3)–(4) положим $j=1$ и перейдем к рассмотрению одношаговых методов. В этом случае $s_{\max}=6$, а система (6) приводится к виду

$$\begin{cases}\beta_0+\beta_1=1,\\ \alpha_0+\alpha_1=0,\\ \alpha_1+\beta_0+\beta_1=0,\\ \alpha_1+2\beta_1-2\gamma_0-2\gamma_1=0,\\ \alpha_1+3\beta_1-6\gamma_1+6\delta_0+6\delta_1=0,\\ \alpha_1+4\beta_1-12\gamma_1+24\delta_1=0,\\ \alpha_1+5\beta_1-20\gamma_1+60\delta_1=0,\\ \alpha_1+6\beta_1-30\gamma_1+120\delta_1=0.\end{cases} \qquad (7)$$

Система (7) имеет единственное решение

$$\alpha_0=-\alpha_1=1,\ \beta_0=\beta_1=1/2,\ \gamma_0=-\gamma_1=-1/10,\ \delta_0=\delta_1=1/120.$$

Таким образом, получается разностный метод шестого порядка вида

$$u_0 = y_0,$$

$$u_k - u_{k-1} = \frac{h}{2}\left(f_k + f_{k-1}\right) + \frac{h^2}{10}\left(-f_k^{(1)} + f_{k-1}^{(1)}\right) + \frac{h^3}{120}\left(f_k^{(2)} + f_{k-1}^{(2)}\right), \quad k = \overline{1,N}. \qquad (8)$$

Исследование свойств устойчивости разностного метода (3)–(4) предполагает применение этого метода к тестовой задаче $y' = \lambda y$, $y(t_0) = y_0$, $\lambda = \alpha + i\beta$, $i^2 = -1$. В рассматриваемом случае $j = 1$ это приводит к разностному уравнению

$$u_k - u_{k-1} = h\lambda\left(\beta_0 u_k + \beta_1 u_{k-1}\right) + h^2\lambda^2\left(\gamma_0 u_k + \gamma_1 u_{k-1}\right) + h^3\lambda^3\left(\delta_0 u_k + \delta_1 u_{k-1}\right). \qquad (9)$$

Тогда для единственного корня характеристического уравнения, соответствующего разностному уравнению (9), получим

$$r = \frac{1 + h\lambda\beta_1 + h^2\lambda^2\gamma_1 + h^3\lambda^3\delta_1}{1 - h\lambda\beta_0 - h^2\lambda^2\gamma_0 - h^3\lambda^3\delta_0}. \qquad (10)$$

Утверждение 1. *Разностный метод* (8) *является A-устойчивым методом* [2, с. 119] *шестого порядка.*

Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что область устойчивости метода (8) содержит всю левую полуплоскость комплексной плоскости $h\lambda$.

Соотношение (10) для метода (8) приобретает вид

$$r = \frac{120 + 60h\lambda + 12h^2\lambda^2 + h^3\lambda^3}{120 - 60h\lambda + 12h^2\lambda^2 - h^3\lambda^3}.$$

Найдем множество значений $h\lambda$, для которых выполняется неравенство

$$|r| < 1. \qquad (11)$$

Выполняя необходимые вычисления, придем к эквивалентному неравенству

$$h\alpha\left(600 + 70h^2\alpha^2 + 30h^2\beta^2 + h^4\left(\alpha^2 + \beta^2\right)^2\right) < 0.$$

Последнее неравенство, а следовательно и неравенство (11), выполняется при любом $\alpha < 0$ $(h > 0)$ и любом β, что и доказывает утверждение 1.

3°. Если в системе (7) отбросить последние ν $(\nu \le s-1)$ уравнений и считать ν коэффициентов свободными параметрами, то получим ν-параметрическое семейство методов порядка $s-\nu$. В дальнейшем выбором параметров можно распорядиться для получения желаемых свойств метода. Одним из таких свойств может быть уменьшение количества обращений к правой части системы (2) или получение определенных свойств устойчивости.

Рассмотрим некоторые частные случаи. Отбросим последние три уравнения системы (7) и будем считать δ_0, δ_1, γ_1 свободными параметрами. Положим далее $\delta_0 = \delta_1 = 0$. Тогда из (7) получим систему

$$\begin{cases} \beta_0 + \beta_1 = 1, \\ \alpha_0 + \alpha_1 = 0, \\ \alpha_1 + \beta_0 + \beta_1 = 0, \\ \alpha_1 + 2\beta_1 - 2\gamma_0 = 2\gamma_1, \\ \alpha_1 + 3\beta_1 = 6\gamma_1, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение

$$\alpha_0 = -\alpha_1 = 1, \ \beta_0 = \frac{2 - 6\gamma_1}{3}, \ \beta_1 = \frac{6\gamma_1 + 1}{3}, \ \gamma_0 = \frac{6\gamma_1 - 1}{6}, \qquad (12)$$

определяющее однопараметрическое семейство методов третьего порядка.

Выбрав $\gamma_1 = 0$, получим разностный метод

$$u_0 = y_0,$$
$$u_k - u_{k-1} = \frac{h}{3}\left(2f_k + f_{k-1}\right) - \frac{h^2}{6} f'_k, \ k = \overline{1,N}. \qquad (13)$$

В соответствии с (10) для метода (13) получим

$$r = \frac{6 + 2h\lambda}{6 - 4h\lambda + h^2\lambda^2}.$$

Требование $|r| < 1$ приводит к эквивалентному неравенству

$$h\alpha\left(72 + 8h^2\beta^2 + 8h^2\alpha^2\right) < 12h^2\left(\alpha^2 + \beta^2\right) + h^4\left(\alpha^2 + \beta^2\right)^2,$$

которое выполняется при любом $\alpha < 0$ $(h > 0)$ и любом β. Заметим также, что

$$\lim_{\mathrm{Re}(h\lambda)\to -\infty} |r| = 0,$$

а это означает, что доказано

Утверждение 2. *Разностный метод* (13) *является L-устойчивым методом* [2, с.122] *третьего порядка.*

Выберем теперь $\gamma = -1/6$. Тогда в соответствии с (12) получим разностный метод

$$u_0 = y_0,$$
$$u_k - u_{k-1} = hf_k + \frac{h^2}{6}\left(-2f_k^{(1)} - f_{k-1}^{(1)}\right), \qquad (14)$$

отличающийся от известного неявного метода Эйлера первого порядка дополнительным слагаемым, повышающим порядок метода на две единицы. Однако, если метод Эйлера является L-устойчивым, то метод (14) лишь A-устойчив.

Действительно, для метода (14) имеем

$$r = \frac{6 - h^2\lambda^2}{6 - 6h\lambda + 2h^2\lambda^2}.$$

Неравенство $|r| < 1$ эквивалентно неравенству

$$h\alpha\left(72 + 24h^2\alpha^2 + 24h^2\beta^2\right) < 72h^2\alpha^2 + 3h^4\left(\alpha^2 + \beta^2\right)^2,$$

которое выполняется для любого $\alpha < 0$ $(h > 0)$ и любого β. Однако

$$\lim_{\mathrm{Re}(h\lambda)\to -\infty} |r| = \frac{1}{2}.$$

4°. Отбрасывая в системе (7) два последние уравнения и освобождая два коэффициента, перейдем к рассмотрению методов четвертого порядка.

Будем считать свободными коэффициентами δ_0 и δ_1 и положим $\delta_0 = \delta_1 = 0$. Вычислив остальные коэффициенты, получим метод

$$u_0 = y_0,$$
$$u_k - u_{k-1} = \frac{h}{2}\left(f_k + f_{k-1}\right) + \frac{h^2}{12}\left(-f_k^{(1)} + f_{k-1}^{(1)}\right), \ k = \overline{1,N}. \qquad (15)$$

Утверждение 3. *Разностный метод* (15) *является A-устойчивым методом четвертого порядка.*

Действительно, в данном случае

$$r = \frac{12 + 6h\lambda + h^2\lambda^2}{12 - 6h\lambda + h^2\lambda^2},$$

неравенство $|r| < 1$ приводится к эквивалентному неравенству

$$h\alpha\left(12 + h^2\alpha^2 + h^2\beta^2\right) < 0,$$

которое выполняется при любом $\alpha < 0$ $(h > 0)$ и любом β. Утверждение 3 доказано.

Выберем в качестве свободных коэффициенты δ_1 и γ_1 и положим $\delta_1 = \gamma_1 = 0$. Система (7) при этом приводится к виду

$$\begin{cases} \beta_0 + \beta_1 = 1, \\ \alpha_0 + \alpha_1 = 0, \\ \alpha_1 + \beta_0 + \beta_1 = 0, \\ \alpha_1 + 2\beta_1 - 2\gamma_0 = 0, \\ \alpha_1 + 3\beta_1 + 6\delta_0 = 0, \\ \alpha_1 + 4\beta_1 = 0 \end{cases}$$

и имеет решение $\alpha_0 = -\alpha_1 = 1$, $\beta_0 = 3/4$, $\beta_1 = 1/4$, $\gamma_0 = -1/4$, $\delta_0 = 1/24$. Таким образом, рассматривается разностный метод

$$u_0 = y_0,$$

$$u_k - u_{k-1} = \frac{h}{4}(3f_k + f_{k-1}) - \frac{h^2}{4} f_k^{(1)} + \frac{h^3}{24} f_k^{(2)}. \tag{16}$$

Утверждение 4. *Разностный метод* (16) *является L-устойчивым методом четвертого порядка.*

Действительно, в данном случае в соответствии с формулой (10) имеем

$$r = \frac{1 + 1/4\,h\lambda}{1 - 3/4\,h\lambda + 1/4\,h^2\lambda^2 - 1/24\,h^3\lambda^3}. \tag{17}$$

Неравенство $|r| < 1$ приводится к эквивалентному неравенству

$$h\alpha\left(1152 + 262h^2\alpha^2 + 62h^2\beta^2 + 12h^4(\alpha^2+\beta^2)^2\right) <,$$

$$< 288h^2\alpha^2 + 72h^4\alpha^2(\alpha^2+\beta^2) + h^6(\alpha^2+\beta^2)^3,$$

которое выполняется при любом $\alpha < 0$ $(h > 0)$ и любом β и, кроме того,

$$\lim_{\mathrm{Re}(h\lambda)\to-\infty} |r| = 0.$$

При этом степень многочлена относительно $h\lambda$ в знаменателе дроби (17) на две единицы превосходит степень многочлена в числителе, что должно обеспечивать быстрое затухание жестких составляющих в решении задачи.

Если в системе (7) отбросить последнее уравнение и, освободив коэффициент δ_1, положить $\delta_1 = 0$, то придем к L-устойчивому методу пятого порядка

$$u_0 = y_0,$$

$$u_k - u_{k-1} = \frac{h}{10}(7f_k + 3f_{k-1}) + \frac{h^2}{40}\left(-9f_k^{(1)} + f_{k-1}^{(1)}\right) + \frac{h^3}{24} f_k^{(2)}, \quad k = \overline{1,N}.$$

Таким образом, в работе предложена простая и достаточно общая методика построения и исследования многошаговых разностных методов повышенного, по сравнению с линейными многошаговыми методами, порядка, позволившая выделить A-устойчивые и L-устойчивые одношаговые методы от третьего до шестого порядка.

1. **Самарский А. А., Гулин А. В.** Численные методы.– М.: Наука, 1989.– 430 с.
2. **Современные** численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.– М.: Мир, 1979.– 312 с.
3. **Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г.** Численные методы решения жестких систем.– М.: Наука, 1979.– 208 с.