Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2012. – Т. 17, вип. 1-2(13-14). – С. 98–113

УДК 517.911.5

О. А. Осадчая, Н. В. Скрипник
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

СХЕМА ПОЛНОГО УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СМЕШАННЫХ СИСТЕМ

Осадча О. А., Скрипник Н. В. Схема повного усереднення для одного класу змішаних систем. У статті розглядається обгрунтування схеми повного усереднення для одного класу змішаних систем, коли одне з рівнянь є диференціальним рівнянням з похідною Хукухари, а друге – звичайним диференціальним рівнянням.
Ключові слова: метод усереднення, змішана система, похідна Хукухари.

Осадчая О. А., Скрипник Н. В. Схема полного усреднения для одного класса смешанных систем. В статье рассматривается обоснование схемы полного усреднения для одного класса смешанных систем, когда одно из уравнений является дифференциальным уравнением с производной Хукухары, а второе – обыкновенным дифференциальным уравнением.
Ключевые слова: метод усреднения, смешанная система, производная Хукухары.

Osadcha O. A., Skripnik N. V. Scheme of full averaging for one class of hybrid systems. This paper contains the substantiation of the scheme of full averaging for one class of hybrid systems where one equation is a differential equation with Hukuhara derivative and the second is an ordinary differential equation.
Key words: averaging method, hybrid system, Hukuhara derivative.

Введение. На практике часто встречаются так называемые смешанные системы – системы, содержащие уравнения разной природы: например, одно из уравнений является уравнением в частных производных, другое – обыкновенным дифференциальным уравнением, или же одно из уравнений является дискретным, а другое – дифференциальным и т.д. В данной статье рассмотрен случай смешанной системы, когда одно из уравнений является дифференциальным уравнением с производной Хукухары, а другое – обыкновенным дифференциальным уравнением. Интерес к смешанным системам такого типа связан с тем, что часть параметров модели могут оказаться точными, а остальные содержать помехи, погрешности, неточности. В статье рассматривается вопрос обоснования схемы полного усреднения для смешанных систем такого типа.

Основные определения.

Развитие теории многозначных отображений привело к вопросу, что необходимо понимать под производной от многозначного отображения. Основной причиной возникновения трудностей для введения данного понятия оказалась нелинейность пространства $comp(R^n)$, которая приводит к отсутствию понятия разности. Существуют несколько подходов к определению разности двух множеств, одним из которых является разность Хукухары.

Определение 1. [5] *Пусть* $X, Y \in conv(R^n)$. *Множество* $Z \in conv(R^n)$ *такое, что* $X = Y + Z$, *называется разностью Хукухары множеств* X *и* Y *и обозначается* $X \overset{h}{-} Y$.

Одновременно с введенной разностью появилось и понятие производной.

Определение 2. [5] *Многозначное отображение* $X : I \to conv(R^n), I \subset \subset R$, *называется дифференцируемым по Хукухаре в точке* $t \in I$, *если существует* $D_H X(t) \in conv(R^n)$ *такое, что пределы* $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left(X(t+\Delta t) \overset{h}{-} X(t) \right)$ *и* $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left(X(t) \overset{h}{-} X(t-\Delta t) \right)$ *существуют и равны* $D_H X(t)$. *Множество* $D_H X(t)$ *при этом называется производной Хукухары многозначного отображения* $X : I \to conv(R^n)$ *в точке* t .

В работах M.Hukuhara [5] наряду с понятием производной было введено и понятие интеграла от многозначного отображения и установлена связь между ними. В 1969 г. F.S. de Blasi и F. Iervolino впервые рассмотрели дифференциальное уравнение с производной Хукухары [1, 6, 3, 4], решением которого является многозначное отображение. В последующем были доказаны различные теоремы существования, единственности и устойчивости решений для такого типа уравнений, а также были рассмотрены интегро-дифференциальные уравнения, импульсные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения с дробной производной, управляемые дифференциальные уравнения с производной Хукухары и рассмотрена возможность применения некоторых схем усреднения для такого типа уравнений [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14].

Рассмотрим смешанную систему вида

$$\begin{cases} D_H X = F(t, X, y), \\ \dot{y} = g(t, X, y), \\ X(t_0) = X_0, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

где $I = [t_0, T] \subset R$; $X : I \to conv(R^n)$ – многозначное отображение; $y : I \to \to R^m$ – вектор-функция; $F : I \times conv(R^n) \times R^m \to conv(R^n)$ – многозначное отображение; $g : I \times conv(R^n) \times R^m \to R^m$ – вектор-функция; $X_0 \in conv(R^n)$, $y_0 \in R^m$.

Рассмотрим класс S пар $(X(\cdot), y(\cdot))$, где $X(\cdot)$– непрерывно-дифференцируемое в смысле Хукухары на I многозначное отображение, $y(\cdot)$– непрерывно-дифференцируемая на I вектор-функция.

Определение 3. *Пара* $(X(\cdot), y(\cdot)) \in S$ *называется решением системы (10), если она удовлетворяет этой системе при всех* $t \in I$ *(т.е. для всех* $t \in I$ *справедливы равенства* $D_H X(t) = F(t, X(t), y(t))$, $\dot{y}(t) = g(t, X(t), y(t))$ *) и* $X(t_0) = = X_0$, $y(t_0) = y_0$.

Теорема 1. *Пусть в области*

$$Q = \{(t, X, y) :\, t_0 \le t \le t_0 + a,\, h(X, X_0) \le b,\, \|y - y_0\| \le c\}$$

многозначное отображение $F(t, X, y)$ *и вектор-функция* $g(t, X, y)$ *непрерывны и удовлетворяют условию Липшица по переменным* X *и* y , *т.е. существует постоянная* $\lambda > 0$ *такая, что*

$$h\left(F(t, X_1, y_1), F(t, X_2, y_2)\right) \le \lambda \left[h(X_1, X_2) + \|y_1 - y_2\|\right],$$

$$\|g(t,X_1,y_1)-g(t,X_2,y_2)\|\le\lambda\left[h(X_1,X_2)+\|y_1-y_2\|\right].$$

Тогда система (1) имеет единственное решение, определенное на промежутке $[t_0,t_0+d]$, *где* $d=\min\left(a,\frac{b}{M},\frac{c}{M}\right)$, *постоянная M такова, что* $|F(t,X,y)|\le M$, $\|g(t,X,y)\|\le M$ *в области* Q.

Основные результаты.

Рассмотрим смешанную систему с малым параметром

$$\begin{cases} D_H X=\varepsilon F(t,X,y),\\ \dot y=\varepsilon g(t,X,y),\\ X(0)=X_0,\\ y(0)=y_0,\end{cases} \tag{2}$$

где $t\ge 0$ – время, $X\in D_1\subset conv(R^n)$, $y\in D_2\subset R^m$, ε – малый параметр.

Системе (2) поставим в соответствие следующую усредненную систему:

$$\begin{cases} D_H \bar X=\varepsilon \bar F(\bar X,\bar y),\\ \dot{\bar y}=\varepsilon \bar g(\bar X,\bar y),\\ \bar X(0)=X_0,\\ \bar y(0)=y_0,\end{cases} \tag{3}$$

где

$$\bar F(X,y)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F(t,X,y)\,dt, \tag{4}$$

$$\bar g(X,y)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T g(t,X,y)\,dt. \tag{5}$$

Теорема 2. *Пусть в области* $Q=\{(t,X,y):\ t\ge 0, X\in D_1, y\in D_2\}$ *выполнены следующие условия:*

1) многозначное отображение $F(t,X,y)$ *и вектор-функция* $g(t,X,y)$ *непрерывны по* t, *равномерно ограничены постоянной* M *и удовлетворяют условию Липшица по* X *и* y *с постоянной* λ, *т.е.*

$$|F(t,X,y)|\le M, h\left(F(t,X_1,y_1),F(t,X_2,y_2)\right)\le\lambda\left[h(X_1,X_2)+\|y_1-y_2\|\right],$$

$$\|g(t,X,y)\|\le M, \|g(t,X_1,y_1)-g(t,X_2,y_2)\|\le\lambda\left[h(X_1,X_2)+\|y_1-y_2\|\right];$$

2) равномерно относительно $X\in D_1$ *и* $y\in D_2$ *существуют пределы (4) и (5);*

3) решение $\left(\bar X(t),\bar y(t)\right)$ *системы (3) с начальным условием* $\bar X(0)=X_0\in$ $\in D_1'\subset D_1$, $\bar y(0)=y_0\in D_2'\subset D_2$ *определено при всех* $t\ge 0$, *и* $\bar X(t)$ *лежит вместе с некоторой* ρ *- окрестностью в области* D_1, *а* $\bar y(t)$ *лежит вместе с* ξ *- окрестностью в области* D_2.

Тогда для любых $\eta>0$ *и* $L>0$ *существует такое* $\varepsilon_0(\eta,L)>0$, *что для* $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ *и для* $0\le t\le L\varepsilon^{-1}$ *имеют место неравенства*

$$h\left(X(t),\bar X(t)\right)<\eta, \|y(t)-\bar y(t)\|<\eta,$$

где $(X(\cdot), y(\cdot))$ *и* $\left(\bar{X}(\cdot), \bar{y}(\cdot)\right)$ *– решения систем (2) и (3) соответственно с начальными условиями* $X(0) = \bar{X}(0) \in D_1'$, $y(0) = \bar{y}(0) \in D_2'$.

Доказательство. Заметим, что многозначное отображение $\bar{F}(X, y)$ и вектор-функция $\bar{g}(X, y)$ ограничены и удовлетворяют условию Липшица.

Действительно, в силу условия 2) теоремы для любого $\delta > 0$ можно найти такое $T(\delta)$, что при $T > T(\delta)$ будут выполнены неравенства:

$$h\left(\frac{1}{T}\int\limits_0^T F(t, X, y)\, dt, \bar{F}(X, y)\right) < \delta, \left\|\frac{1}{T}\int\limits_0^T g(t, X, y)\, dt - \bar{g}(X, y)\right\| < \delta.$$

Тогда

$$\left|\bar{F}(X, y)\right| = h\left(\bar{F}(X, y), \{0\}\right) \leq$$

$$\leq h\left(\bar{F}(X, y), \frac{1}{T}\int\limits_0^T F(t, X, y)\, dt\right) + h\left(\frac{1}{T}\int\limits_0^T F(t, X, y)\, dt, \{0\}\right) <$$

$$< \delta + \frac{1}{T}\int\limits_0^T h\left(F(t, X, y), \{0\}\right)\, dt \leq \delta + M,$$

$$\|\bar{g}(X, y)\| \leq \left\|\bar{g}(X, y) - \frac{1}{T}\int\limits_0^T g(t, X, y) dt\right\| + \left\|\frac{1}{T}\int\limits_0^T g(t, X, y) dt\right\| <$$

$$< \delta + \frac{1}{T}\int\limits_0^T \|g(t, X, y)\|\, dt \leq \delta + M,$$

$$h\left(\bar{F}(X', y'), \bar{F}(X'', y'')\right) \leq h\left(\bar{F}(X', y'), \frac{1}{T}\int\limits_0^T F(t, X', y') dt\right) +$$

$$+ h\left(\frac{1}{T}\int\limits_0^T F(t, X', y') dt, \frac{1}{T}\int\limits_0^T F(t, X'', y'') dt\right) +$$

$$+ h\left(\frac{1}{T}\int\limits_0^T F(t, X'', y'') dt, \bar{F}(X'', y'')\right) <$$

$$< 2\delta + h\left(\frac{1}{T}\int\limits_0^T F(t,X',y')dt, \frac{1}{T}\int\limits_0^T F(t,X'',y'')dt\right) \le$$

$$\le 2\delta + \frac{1}{T}\int\limits_0^T h\left(F(t,X',y'),F(t,X'',y'')\right)dt \le 2\delta + \lambda\left[h(X',X'') + \|y'-y''\|\right],$$

$$\|\bar{g}(X',y') - \bar{g}(X'',y'')\| \le \left\|\bar{g}(X',y') - \frac{1}{T}\int\limits_0^T g(t,X',y')dt\right\| +$$

$$+\left\|\frac{1}{T}\int\limits_0^T g(t,X',y')dt - \frac{1}{T}\int\limits_0^T g(t,X'',y'')dt\right\| + \left\|\frac{1}{T}\int\limits_0^T g(t,X'',y'')dt - \bar{g}(X'',y'')\right\| <$$

$$< 2\delta + \frac{1}{T}\int\limits_0^T \|g(t,X',y') - g(t,X'',y'')\|\,dt \le$$

$$\le 2\delta + \lambda\left[h(X',X'') + \|y'-y''\|\right].$$

Так как δ произвольно, то получим

$$\left|\bar{F}(X,y)\right| \le M, \|\bar{g}(X,y)\| \le M,$$

$$h\left(\bar{F}(X',y'),\bar{F}(X'',y'')\right) \le \lambda\left[h(X',X'') + \|y'-y''\|\right],$$

$$\|\bar{g}(X',y') - \bar{g}(X'',y'')\| \le \lambda\left[h(X',X'') + \|y'-y''\|\right],$$

что и требовалось показать.

Из условий 1) и 2) теоремы следует, что у систем (2) и (3) существуют единственные решения, продолжаемые при $t \ge 0$ до тех пор, пока $X(t)$ и $y(t)$ (соответственно $\bar{X}(t)$ и $\bar{y}(t)$) принадлежат множествам D_1, D_2. Поэтому при $D_1 = conv(R^n)$, $D_2 = R^m$ выполнение условия 3) автоматически следует из условий 1) и 2).

Заменим системы (2) и (3) эквивалентными им системами интегральных уравнений:

$$\begin{cases} X(t) = X_0 + \varepsilon\int\limits_0^t F(s,X(s),y(s))\,ds, \\ y(t) = y_0 + \varepsilon\int\limits_0^t g(s,X(s),y(s))\,ds, \end{cases} \tag{6}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{X}(t) = X_0 + \varepsilon \int\limits_0^t \bar{F}(\bar{X}(s), \bar{y}(s))\, ds, \\ \bar{y}(t) = y_0 + \varepsilon \int\limits_0^t \bar{g}(\bar{X}(s), \bar{y}(s))\, ds. \end{array} \right. \tag{7}$$

Тогда

$$h\left(X(t), \bar{X}(t)\right) =$$

$$= h\left(X_0 + \varepsilon \int\limits_0^t F(s, X(s), y(s))ds, X_0 + \varepsilon \int\limits_0^t \bar{F}(\bar{X}(s), \bar{y}(s))ds \right) =$$

$$= h\left(\varepsilon \int\limits_0^t F(s, X(s), y(s))ds, \varepsilon \int\limits_0^t \bar{F}(\bar{X}(s), \bar{y}(s))ds \right) \leq$$

$$\leq h\left(\varepsilon \int\limits_0^t F(s, X(s), y(s))ds, \varepsilon \int\limits_0^t F(s, \bar{X}(s), \bar{y}(s))ds \right) +$$

$$+ h\left(\varepsilon \int\limits_0^t F(s, \bar{X}(s), \bar{y}(s))ds, \varepsilon \int\limits_0^t \bar{F}(\bar{X}(s), \bar{y}(s))ds \right) \leq$$

$$\leq \varepsilon \int\limits_0^t h\left(F(s, X(s), y(s)), F(s, \bar{X}(s), \bar{y}(s))\right) ds +$$

$$+ \varepsilon h\left(\int\limits_0^t F(s, \bar{X}(s), \bar{y}(s))ds, \int\limits_0^t \bar{F}(\bar{X}(s), \bar{y}(s))ds \right) \leq$$

$$\leq \varepsilon\lambda \int\limits_0^t \left[h(X(s), \bar{X}(s)) + \|y(s) - \bar{y}(s)\| \right] ds +$$

$$+ \varepsilon h\left(\int\limits_0^t F(s, \bar{X}(s), \bar{y}(s))ds, \int\limits_0^t \bar{F}(\bar{X}(s), \bar{y}(s))ds \right). \tag{8}$$

Аналогично,

$$\|y(t) - \bar{y}(t)\| \leq$$

$$\leq \varepsilon\lambda \int\limits_0^t \left[h(X(s), \bar{X}(s)) + \|y(s) - \bar{y}(s)\| \right] ds +$$

$$+ \varepsilon \left\| \int\limits_0^t \left[g(s, \bar{X}(s), \bar{y}(s)) - \bar{g}(\bar{X}(s), \bar{y}(s)) \right] ds \right\|. \tag{9}$$

Разобъем отрезок $[0, L\varepsilon^{-1}]$ на m равных частей точками $t_i = \frac{iL}{\varepsilon m}, i = \overline{0,m}$. Обозначим $(\bar{X}_i, \bar{y}_i) = (\bar{X}(t_i), \bar{y}(t_i))$ – решение системы (2) в точках разбиения.

Оценим выражения $\varepsilon h\left(\int\limits_0^t F(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds, \int\limits_0^t \bar{F}(\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds\right)$ и $\varepsilon\left\|\int\limits_0^t \left[g(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s)) - \bar{g}(\bar{X}(s),\bar{y}(s))\right]ds\right\|$ на промежутке $[t_k, t_{k+1}]$, где $0 \le k \le$ $\le m-1$.

$$\varepsilon h\left(\int\limits_0^t F(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds, \int\limits_0^t \bar{F}(\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds\right) =$$

$$= \varepsilon h\left(\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds + \int\limits_{t_k}^{t} F(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds,\right.$$

$$\left.\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{F}(\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds + \int\limits_{t_k}^{t} \bar{F}(\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds\right) \le$$

$$\le \varepsilon\left[h\left(\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds, \sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{F}(\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds\right) +\right.$$

$$\left.+h\left(\int\limits_{t_k}^{t} F(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds, \int\limits_{t_k}^{t} \bar{F}(\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds\right)\right] \le$$

$$\le \varepsilon\left[\sum_{i=0}^{k-1}\left(h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F(s,\bar{X}_i,\bar{y}_i)ds\right) +\right.\right.$$

$$\left.+h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F(s,\bar{X}_i,\bar{y}_i)ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{F}(\bar{X}_i,\bar{y}_i)ds\right) + h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{F}(\bar{X}_i,\bar{y}_i)ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{F}(\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds\right)\right) +$$

$$+h\left(\int\limits_{t_k}^{t} F(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds, \int\limits_{t_k}^{t} F(s,\bar{X}_k,\bar{y}_k)ds\right) + h\left(\int\limits_{t_k}^{t} F(s,\bar{X}_k,\bar{y}_k)ds, \int\limits_{t_k}^{t} \bar{F}(\bar{X}_k,\bar{y}_k)ds\right) +$$

$$+\,h\left(\int\limits_{t_k}^{t}\bar F(\bar X_k,\bar y_k)ds,\int\limits_{t_k}^{t}\bar F(\bar X(s),\bar y(s))ds\right)\Bigg]\le$$

$$\le\varepsilon\left[\sum_{i=0}^{k-1}\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}h\left(F(s,\bar X(s),\bar y(s)),F(s,\bar X_i,\bar y_i)\right)\,ds+\right.\right.$$

$$\left.+h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}F(s,\bar X_i,\bar y_i)ds,\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\bar F(\bar X_i,\bar y_i)ds\right)+\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}h\left(\bar F(\bar X_i,\bar y_i),\bar F(\bar X(s),\bar y(s))\right)ds\right)\Bigg)+$$

$$+\int\limits_{t_k}^{t}h\left(F(s,\bar X(s),\bar y(s)),F(s,\bar X_k,\bar y_k)\right)ds+$$

$$\left.+h\left(\int\limits_{t_k}^{t}F(s,\bar X_k,\bar y_k)ds,\int\limits_{t_k}^{t}\bar F(\bar X_k,\bar y_k)ds\right)+\int\limits_{t_k}^{t}h\left(\bar F(\bar X_k,\bar y_k),\bar F(\bar X(s),\bar y(s))\right)ds\right]\le$$

$$\le\varepsilon\left[\sum_{i=0}^{k}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\left(h\left(F(s,\bar X(s),\bar y(s)),F(s,\bar X_i,\bar y_i)\right)+h\left(\bar F(\bar X(s),\bar y(s)),\bar F(\bar X_i,\bar y_i)\right)\right)ds+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=0}^{k-1}h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}F(s,\bar X_i,\bar y_i)ds,\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\bar F(\bar X_i,\bar y_i)ds\right)+h\left(\int\limits_{t_k}^{t}F(s,\bar X_k,\bar y_k)ds,\int\limits_{t_k}^{t}\bar F(\bar X_k,\bar y_k)ds\right)\right].$$

Аналогично

$$\varepsilon\left\|\int\limits_{0}^{t}\left[g(s,\bar X(s),\bar y(s))-\bar g(\bar X(s),\bar y(s))\right]ds\right\|\le$$

$$\le\varepsilon\left[\sum_{i=0}^{k}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\left(\left\|g(s,\bar X(s),\bar y(s))-g(s,\bar X_i,\bar y_i)\right\|+\left\|\bar g(\bar X(s),\bar y(s))-\bar g(\bar X_i,\bar y_i)\right\|\right)ds+\right.$$

$$+\sum_{i=0}^{k-1}\left\|\int_{t_i}^{t_{i+1}}\big(g(s,\bar X_i,\bar y_i)-\bar g(\bar X_i,\bar y_i)\big)\,ds\right\|+\left\|\int_{t_k}^{t}\big(g(s,\bar X_k,\bar y_k)-\bar g(\bar X_k,\bar y_k)\big)\,ds\right\|\Bigg].$$

Заметим, что

$$h\left(\bar X(s),\bar X_i\right)=h\left(\bar X(s),\bar X(t_i)\right)\le\varepsilon\int_{t_i}^{s}h\left(\bar F(\bar X(v),\bar y(v)),\{0\}\right)dv\le\varepsilon M(s-t_i),$$

$$\|\bar y(s)-\bar y_i\|=\|\bar y(s)-\bar y(t_i)\|\le\varepsilon\int_{t_i}^{s}\left\|\bar g(\bar X(v),\bar y(v))\right\|dv\le\varepsilon M(s-t_i).$$

Тогда

$$\varepsilon\sum_{i=0}^{k}\int_{t_i}^{t_{i+1}}h\left(F(s,\bar X(s),\bar y(s)),F(s,\bar X_i,\bar y_i)\right)ds\le$$

$$\le\varepsilon\sum_{i=0}^{k}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\lambda\left[h\left(\bar X(s),\bar X_i\right)+\|\bar y(s)-\bar y_i\|\right]ds\le$$

$$\le\varepsilon\lambda\cdot 2\varepsilon M\sum_{i=0}^{k}\int_{t_i}^{t_{i+1}}(s-t_i)ds=$$

$$=2\varepsilon^2\lambda M\sum_{i=0}^{k}\frac{(t_{i+1}-t_i)^2}{2}=\varepsilon^2\lambda M\cdot(k+1)\cdot\left(\frac{L}{\varepsilon m}\right)^2\le\frac{\lambda ML^2}{m},$$

$$\varepsilon\sum_{i=0}^{k}\int_{t_i}^{t_{i+1}}h\left(\bar F(\bar X(s),\bar y(s)),\bar F(\bar X_i,\bar y_i)\right)\le\frac{\lambda ML^2}{m},$$

$$\varepsilon\sum_{i=0}^{k}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left\|g(s,\bar X(s),\bar y(s))-g(s,\bar X_i,\bar y_i)\right\|ds\le$$

$$\leq \varepsilon \sum_{i=0}^{k} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \lambda \left[h\left(\bar{X}(s), \bar{X}_i\right) + \|\bar{y}(s) - \bar{y}_i\| \right] ds \leq$$

$$\leq \varepsilon^2 \lambda M \cdot (k+1) \cdot \left(\frac{L}{\varepsilon m}\right)^2 \leq \frac{\lambda M L^2}{m},$$

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{k} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| \bar{g}(\bar{X}(s), \bar{y}(s)) - \bar{g}(\bar{X}_i, \bar{y}_i) \right\| \leq \frac{\lambda M L^2}{m}.$$

В силу условия 2) теоремы можно указать такие монотонно убывающие функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$, стремящиеся к нулю при $t \to \infty$, что для всех $(X, y) \in D_1 \times D_2$ будем иметь:

$$h\left(\int\limits_0^t F(s, \bar{X}, \bar{y}) ds, \int\limits_0^t \bar{F}(\bar{X}, \bar{y}) ds \right) \leq t \cdot f_1(t),$$

$$\left\| \int\limits_0^t \left(g(s, \bar{X}, \bar{y}) - \bar{g}(\bar{X}, \bar{y}) \right) ds \right\| \leq t \cdot f_2(t)$$

Тогда

$$\varepsilon h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F(s, \bar{X}_i, \bar{y}_i) ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{F}(\bar{X}_i, \bar{y}_i) ds \right) =$$

$$= \varepsilon h\left(\int\limits_0^{t_{i+1}} F(s, \bar{X}_i, \bar{y}_i) ds \overset{h}{-} \int\limits_0^{t_i} F(s, \bar{X}_i, \bar{y}_i) ds, \int\limits_0^{t_{i+1}} \bar{F}(\bar{X}_i, \bar{y}_i) ds \overset{h}{-} \int\limits_0^{t_i} \bar{F}(\bar{X}_i, \bar{y}_i) ds \right) \leq$$

$$\leq \varepsilon \left[h\left(\int\limits_0^{t_{i+1}} F(s, \bar{X}_i, \bar{y}_i) ds, \int\limits_0^{t_{i+1}} \bar{F}(\bar{X}_i, \bar{y}_i) ds \right) + h\left(\int\limits_0^{t_i} F(s, \bar{X}_i, \bar{y}_i) ds, \int\limits_0^{t_i} \bar{F}(\bar{X}_i, \bar{y}_i) ds \right) \right] \leq$$

$$\leq \varepsilon \left[t_{i+1} \cdot f_1(t_{i+1}) + t_i \cdot f_1(t_i) \right] \leq 2 \sup_{\tau \in [0, L]} \tau f_1\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) = \gamma_1(\varepsilon),$$

$$\varepsilon \left\| \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left(g(s, \bar{X}_i, \bar{y}_i) - \bar{g}(\bar{X}_i, \bar{y}_i) \right) ds \right\| =$$

$$= \varepsilon \left\| \int\limits_0^{t_{i+1}} \big(g(s,\bar{X}_i,\bar{y}_i) - \bar{g}(\bar{X}_i,\bar{y}_i)\big)\, ds - \int\limits_0^{t_i} \big(g(s,\bar{X}_i,\bar{y}_i) - \bar{g}(\bar{X}_i,\bar{y}_i)\big)\, ds \right\| \le$$

$$\le \varepsilon \left[\left\| \int\limits_0^{t_{i+1}} \big(g(s,\bar{X}_i,\bar{y}_i) - \bar{g}(\bar{X}_i,\bar{y}_i)\big)\, ds \right\| + \left\| \int\limits_0^{t_i} \big(g(s,\bar{X}_i,\bar{y}_i) - \bar{g}(\bar{X}_i,\bar{y}_i)\big)\, ds \right\| \right] \le$$

$$\le \varepsilon \left[t_{i+1} \cdot f_2(t_{i+1}) + t_i \cdot f_2(t_i) \right] \le 2 \sup_{\tau \in [0,L]} \tau f_2 \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) = \gamma_2(\varepsilon),$$

где $\tau = \varepsilon t$, а $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \gamma_1(\varepsilon) = 0$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \gamma_2(\varepsilon) = 0$. Аналогично

$$h \left(\int\limits_{t_k}^{t} F(s,\bar{X}_k,\bar{y}_k) ds, \int\limits_{t_k}^{t} \bar{F}(\bar{X}_k,\bar{y}_k) ds \right) \le$$

$$\le \varepsilon \left[t \cdot f_1(t) + t_k \cdot f_1(t_k) \right] \le 2 \sup_{\tau \in [0,L]} \tau f_1 \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) = \gamma_1(\varepsilon),$$

$$\varepsilon \left\| \int\limits_{t_k}^{t} \big(g(s,\bar{X}_k,\bar{y}_k) - \bar{g}(\bar{X}_k,\bar{y}_k)\big)\, ds \right\| \le$$

$$\le \varepsilon \left[t \cdot f_2(t) + t_k \cdot f_2(t_k) \right] \le 2 \sup_{\tau \in [0,L]} \tau f_2 \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) = \gamma_2(\varepsilon).$$

Таким образом,

$$\varepsilon h \left(\int\limits_0^{t} F(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s)) ds, \int\limits_0^{t} \bar{F}(\bar{X}(s),\bar{y}(s)) ds \right) \le \frac{2\lambda M L^2}{m} + (k+1)\gamma_1(\varepsilon) \le$$

$$\le \frac{2\lambda M L^2}{m} + m\gamma_1(\varepsilon) \equiv \phi_1(\varepsilon, m), \tag{10}$$

$$\varepsilon \left\| \int\limits_0^{t} \left[g(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s)) - \bar{g}(\bar{X}(s),\bar{y}(s)) \right] ds \right\| \le \frac{2\lambda M L^2}{m} + m\gamma_2(\varepsilon) \equiv \phi_2(\varepsilon, m). \tag{11}$$

Подставляя (10) в (8) и (11) в (9), получим

$$h\left(X(t),\bar{X}(t)\right) \leq \varepsilon\lambda \int\limits_0^t \left[h(X(s),\bar{X}(s)) + \|y(s)-\bar{y}(s)\|\right] ds + \varphi_1(\varepsilon,m),$$

$$\|y(t)-\bar{y}(t)\| \leq \varepsilon\lambda \int\limits_0^t \left[h(X(s),\bar{X}(s)) + \|y(s)-\bar{y}(s)\|\right] ds + \varphi_2(\varepsilon,m).$$

Сложим эти два неравенства и к сумме применим лемму Гронуола-Беллмана. В результате получим

$$h\left(X(t),\bar{X}(t)\right) + \|y(t)-\bar{y}(t)\| \leq e^{2\varepsilon\lambda \int\limits_0^t 1ds} \left(\phi_1(\varepsilon,m)+\phi_2(\varepsilon,m)\right) =$$

$$= e^{2\varepsilon\lambda t}\left(\frac{4\lambda ML^2}{m} + m\gamma_1(\varepsilon) + m\gamma_2(\varepsilon)\right) \leq$$

$$\leq e^{2\lambda L}\left(\frac{4\lambda ML^2}{m} + m\gamma_1(\varepsilon) + m\gamma_2(\varepsilon)\right).$$

Тогда для каждого из слагаемых справедливо

$$h\left(X(t),\bar{X}(t)\right) \leq e^{2\lambda L}\left(\frac{4\lambda ML^2}{m} + m\gamma_1(\varepsilon) + m\gamma_2(\varepsilon)\right),$$

$$\|y(t)-\bar{y}(t)\| \leq e^{2\lambda L}\left(\frac{4\lambda ML^2}{m} + m\gamma_1(\varepsilon) + m\gamma_2(\varepsilon)\right).$$

Пусть $\eta_1 = \min\{\eta,\rho,\xi\}$. Выберем число m так, чтобы выполнялось неравенство

$$e^{2\lambda L}\frac{\lambda ML^2}{m} < \frac{\eta_1}{12}.$$

Теперь зафиксируем и выберем так, чтобы были справедливы неравенства

$$e^{2\lambda L} m\gamma_1(\varepsilon) \leq \frac{\eta_1}{3}, e^{2\lambda L} m\gamma_2(\varepsilon) \leq \frac{\eta_1}{3}.$$

Тогда $h\left(X(t),\bar{X}(t)\right) \leq \eta_1$ и $\|y(t)-\bar{y}(t)\| \leq \eta_1$ при условии, что решение $(X(t),y(t))$ не покидает области $D_1 \times D_2$, а это выполнено в силу условия 3) теоремы.

Таким образом получили, что для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ существует такое ε_0, что для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и для $0 \leq t \leq L\varepsilon^{-1}$ справедливы неравенства

$$h\left(X(t), \bar{X}(t)\right) \leq \eta, \|y(t) - \bar{y}(t)\| \leq \eta,$$

где $(X(t), y(t))$ и $(\bar{X}(t), \bar{y}(t))$ – решения систем (2) и (3) соответственно, удовлетворяющие условиям $X(0) = \bar{X}(0) \in D_1'$, $y(0) = \bar{y}(0) \in D_2'$.

Теорема доказана.

Пример 1. *Рассмотрим смешанную систему*

$$\begin{cases} D_H X = \varepsilon \left[\begin{pmatrix} \sin^2 4y & -1 \\ 0 & -\sin^2 4t \end{pmatrix} X + S_{0.1} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right], X_0 = S_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \dot{y} = -0.3\varepsilon\, |X| \sin^2 t,\ y_0 = 5. \end{cases}$$

Усредненная система имеет вид:

$$\begin{cases} D_H \bar{X} = \varepsilon \left[\begin{pmatrix} \sin^2 4y & -1 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix} \bar{X} + S_{0.1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right], X_0 = S_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \dot{\bar{y}} = -0.15\varepsilon \left|\bar{X}\right|,\ y_0 = 5. \end{cases}$$

а) При $\varepsilon = 0.1$ *:*

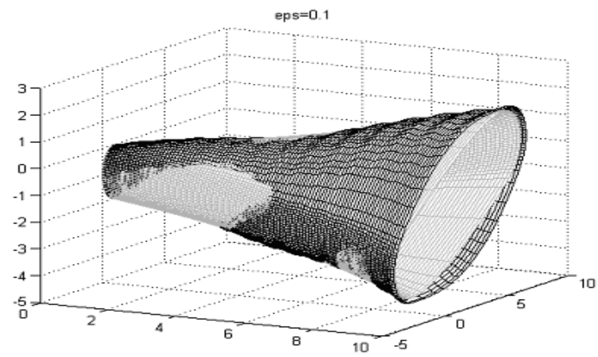

Рис.1 График решений исходной системы $X(t)$ (черным) и усредненной системы $\bar{X}(t)$ (серым)

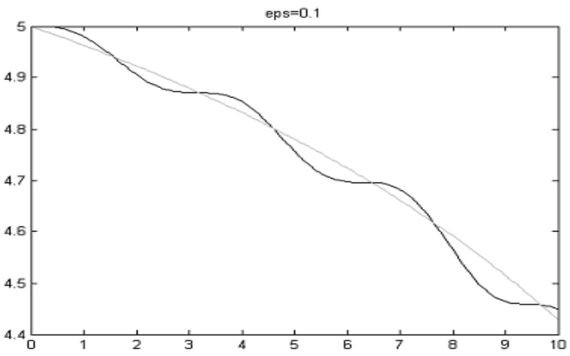

Рис.2 График решений исходной системы $y(t)$ *(черным) и усредненной системы* $\bar{y}(t)$ *(серым)*

б) При $\varepsilon = 0.01$ *:*

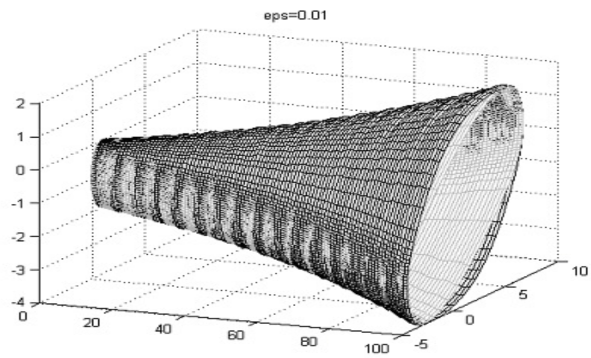

Рис.3 График решений исходной системы $X(t)$ *(черным) и усредненной системы* $\bar{X}(t)$ *(серым)*

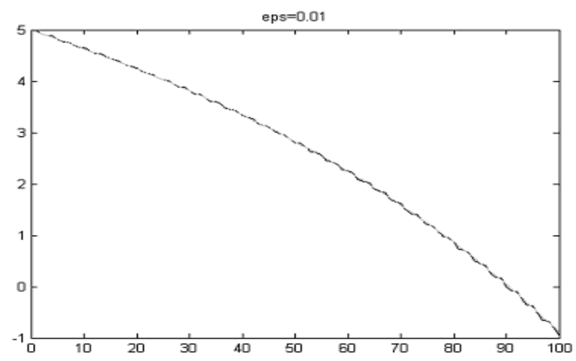

Рис.4 График решений исходной системы $y(t)$ *(черным) и усредненной системы* $\bar{y}(t)$ *(серым)*

Заключение. В случае, когда правые части являются периодическими по времени, оценка может быть улучшена, а именно: можно показать, что для любого $L > 0$ найдутся $C(L) > 0$ и $\varepsilon_0(L) > 0$ такие, что имеет место утверждение теоремы с $\eta = C\varepsilon$. Кроме того, в ряде случаев вместо схем полного усреднения применяются схемы частичного усреднения. Такой вариант метода усреднения бывает полезен, когда для некоторых отображений не существует среднего или же их наличие в системе не усложняет его исследования.

1. **de Blasi F. S.** On the differentiability of multifunctions [text] / F. S. de Blasi // Pacific J. Math. – 1976. – Vol. 66, № 1. – P. 67–81.
2. **de Blasi F. S.** Equazioni differentiali con soluzioni a valore compatto convesso [text] / F. S. de Blasi, F. Iervolino // Boll. Unione Mat. Ital. – 1969. – Vol. 2, № 4–5. – P. 491–501.
3. **de Blasi F. S.** Euler method for differential equations with set - valued solutions [text] / F. S. de Blasi, F. Iervolino // Boll. Unione Mat.Ital. – 1971. – Vol. 4, № 4. – P. 941–949.
4. **Brandao Lopes Pinto A. J.** Uniqueness and existence theorems for differential equations with compact convex valued solutions [text] / A. J. Brandao Lopes Pinto, F. S. de Blasi, F. Iervolino // Boll. Unione Mat.Ital. – 1970. – № 4. – P. 534–538.
5. **Hukuhara M.** Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe [text] / M. Hukuhara // Func. Ekvacioj. – 1967. – № 10. – P. 205–223.
6. **Differential** equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities (De Gruyter Studies in Mathematics: 40) [text] / Perestyuk N. A., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., Skripnik N. V. – Berlin/Boston: Walter De Gruyter GmbHCo., 2011. – 307 p.
7. **Скрипник Н. В.** Усереднення імпульсних диференціальних рівнянь з похідною Хукухари [текст] / Н. В. Скрипник // Вісник Чернівецького національного університету ім. Юрія Федьковича. – 2008. – Вип. 374. – С. 109–115.
8. **Импульсные** дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью [текст] / Перестюк Н. А., Плотников В. А., Самойленко А. М., Скрипник Н. В. – К.: Инс-т математики НАН Украины, 2007. – 428 с.
9. **Плотников В. А.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы [текст] / В. А. Плотников, А. В. Плотников, А. Н. Витюк. – Одесса: АстроПринт, 1999. – 354 с.
10. **Kisielewicz M.** Method of Averaging for Differential Equations with Compact Convex Valued Solutions [text] / M. Kisielewicz // Rend. Math. – 1976. – Vol. 9, № 3. – P. 397–408.
11. **Plotnikov V. A.** Existence, continuous dependence and averaging in differential equations with Hukuhara derivative and delay [text] / V. A. Plotnikov, P. I. Rashkov // "Mathematics and education in mathematics": Proceedings of Twenty Sixth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians (April 22 - 25, 1997). – Plovdiv, Bulgaria, 1997. – P. 179–184
12. **Plotnikov V. A.** Averaging in differential equations with Hukuhara derivative and delay [text] / V. A. Plotnikov, P. I. Rashkov // Funct. Differ. Equ. – 2001. – № 8. – P. 371–381.

13. **Плотников В. А.** Усреднение управляемых уравнений с производной Хукухары // Нелінійні коливання [текст] / В. А. Плотников, О. Д. Кичмаренко – 2006. – Т. 9, № 3. – С. 376–385.

14. **Плотников В. А.** Усреднение уравнений с производной Хукухары, многозначным управлением и запаздыванием [текст] / В. А. Плотников, О. Д. Кичмаренко // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2007. – Т. 12, вип. 7. – С. 130–139.