

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра диференціальних рівнянь, геометрії та топології

Дипломна робота

бакалавра

на тему: «Існування та асимптотична поведінка деяких розв’язків
напів’явних систем диференціальних рівнянь типу Брію та Буке»

«On the existence and asymptotic behavior of some solutions of semi-automatic differential
systems Briot and Bouquet equations»

Виконав: студент денної форми навчання
спеціальності 111 Математика
Мойсеєнко Богдан Вікторович

Керівник: к. ф.-м. н., доц. Самкова Г. Є.
Рецензент: к. ф.-м. н., доц. Шарай Н. В.

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ 11 від 10 червня 2021 р.

Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № _____
протокол № ____ від _____ р.
Оцінка _____ / _____ / _____
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Голова ЕК

(підпис)

(прізвище, ініціали)

(підпис)

(прізвище, ініціали)

Одеса – 2021

ЗМІСТ

ЗМІСТ.....	2
ВСТУП.....	3
Розділ 1. Система рівнянь типу Бріо та Буке.....	12
§ 1.1 Допоміжні означення та теореми.....	12
§ 1.2 Постановка задачі.....	14
§ 1.3 Пошук формальних розв'язків системи (1.3).....	17
Розділ 2. Виділення системи, що може бути розв'язана відносно похідної.....	33
§ 2.1 Виділення системи, що може бути розв'язана відносно похідної...33	
Розділ 3. Асимптотична поведінка розв'язків системи (1.3) при $t \rightarrow +0$.....	36
§ 3.1 Асимптотична поведінка розв'язків системи (1.3) при $t \rightarrow +0$	36
§ 3.2 Асимптотична поведінка розв'язків системи (3.1) при $t \rightarrow +0$ у випадку діагональної матриці Λ	37
ВИСНОВКИ.....	45
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	49

ВСТУП

В теорії звичайних диференціальних рівнянь дослідження питань існування, існування і єдиності розв'язків початкових задач розбивається на два класи:

- задачі, для яких виконуються умови однієї з теорем існування єдиного розв'язку початкової задачі, наприклад, теореми Пікара – Коші, теореми Коші і т. д.;

- задачі, для яких не виконуються умови теорем існування єдиного розв'язку початкової задачі.

Задачі першого класу математики почали досліджувати в першій половині XIX століття. Першим поставив і вирішив таку задачу французький математик Огюстен Луї Коші. Дослідження задач другого класу розпочато в другій половині XIX століття французькими математиками Шарлем Бріо (учнем Ж. Ліувіля) і Жаном Клодом Буке (учнем О. Коші). В їхніх роботах розпочато дослідження рівнянь вигляду

$$t\dot{y} = Py + f(t, y) \quad (0.1)$$

з голоморфною в точці $(0, 0)$ функцією f (1858 рік). Було виявлено, що навіть розбіжні функціональні ряди можуть асимптотично представляти деякі розв'язки рівняння при наближенні до особливої точки. Ш. Бріо і Ж. Буке показали, що деякі рівняння в околі особливої точки після перетворення приводяться до сингулярного рівняння вигляду

$$t^p y' = \phi(t, y) \quad (0.2)$$

де $p \in \mathbb{N}$, функція ϕ голоморфна в точці $(0, 0)$ і $\phi(0, 0) = 0$. При деяких обмеженнях Ш. Бріо і Ж. Буке довели існування голоморфних розв'язків рівняння (0.2) у точці $t = 0$. Вивчалися питання про кількість і вигляд негломорфних розв'язків рівняння (0.2), що задовольняють початкову умову

$$y(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow 0.$$

Вважаючи, що $\frac{\partial \phi}{\partial y}(0,0) = \lambda$, розглянуті такі випадки:

а) $\lambda \notin \mathbb{Z}_+$ и $\operatorname{Re} \lambda > 0$,

б) $\lambda \in \mathbb{Z}_+$.

У випадку а) Ш. Бріо і Ж. Буке довели, що існують розв'язки рівняння (0.2), голоморфні по t і t^λ , а в випадку б) – розв'язки рівняння (0.2), голоморфні по t і $t \ln t$.

А. Пуанкаре розглядав системи рівнянь вигляду (0.2), вважаючи, що

$$\dot{\phi} = A\phi + \phi_1(t, \phi), \quad (0.3)$$

де $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, n -вимірна вектор-функція ϕ_1 – голоморфна в точці $(0,0)$, $\phi_1(0,0) = 0$. У дослідженнях А. Пуанкаре визначальну роль відігравали власні значення матриці A , тобто розв'язків рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$. А. Пуанкаре розглядав такі властивості власних значень матриці A :

а) або вони всі різні і їхні дійсні частини відмінні від нуля;

б) або $m_2\lambda_2 + \dots + m_n\lambda_n \neq \lambda_1$ ($m_i \geq 0$ – цілі);

в) або в комплексній площині вони розташовані з одного боку відносно деякої гладкої кривої, що проходить через початок координат.

Bendixon J. (1901) знімає першу умову.

Загальновідомі роботи О.М. Ляпунова (1892), в яких при виконанні умови в), роль такої кривої відіграє уявна вісь, а $\lambda_i, i = \overline{1; n}$, розташовані зліва від неї. Далі відомі його результати і в критичних випадках.

Одним з напрямків таких досліджень є роботи Рапопорта Н.М. (1974) з дослідження L -діагональних систем.

Важливою частиною дослідження задач другого класу є вивчення звичайних диференціальних рівнянь і систем звичайних диференціальних рівнянь, які не розв'язані відносно похідних.

У дійсній області рівняння

$$f(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

в якому функція f є поліномом від $y, y', \dots, y^{(n)}$ з коефіцієнтами, залежними від t , досліджувалося Fine H.B. (1889), Даутовим М.А., Муратовим Л.М. (1964), Муратовим Н.М. (1965), Костіним О.В. (1967). При деяких припущеннях побудовані асимптотичні наближення розв'язків. Причому, як правило, степеневі наближення. При $n = 1$ в припущенні неперервності функції f в околі деякої точки (x_0, y_0, y'_0) Conti R. (1959), Бабкін Б.Н. (1953), Вітюк О.Н. (1965) будують двосторонні збіжні наближення розв'язків.

У скінченновимірному банаховому просторі задача Коші для напів'явного диференціального рівняння

$$\dot{y} = F(t, y, \dot{y})$$

досліджена у роботах Kowalski Z (1963, 1965), Рудакова А.Н. (1971), Вітюка О.Н. (1974).

Сучасний розвиток теорії диференціальних рівнянь, які не розв'язані відносно похідних, включає в себе дослідження сингулярних рівнянь і систем рівнянь в дійсній і комплексній областях. Дослідження диференціальних систем, які не розв'язані відносно похідних, в дійсній області проводяться у роботах Аширова О., Бабкіна Б.М., Вітюка О.Н., Грабовської Р.Г., Й. Дібліка, Самкової Г.Є., М. Hanke, М. Lando, St. Campbell, R. März, В. Самойленко, Ю. Каплун, П. Кравцова і багатьох інших.

Дослідження систем звичайних диференціальних рівнянь типу Бріо і Буке, які не розв'язані відносно похідних, вигляду

$$t^s y' = Py + p_1 t + F(t, y, y'), \quad (0.3)$$

де $t \in (0, t_0]$, $s \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{R}^n$, $p_1 \in \mathbb{R}^n$, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F: (0, t_0] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – вектор-функція, яку можна представити в околі точки $(0,0,0)$ у вигляді збіжного степеневого ряду, що не містить вільних і лінійних членів, розпочаті Самковою Г.Є. (1992 рік, $s = 1$) і продовжені в ряді дипломних і магістерських робіт попередніх років. Досліджувалося питання про існування розв’язків системи (0.3), які задовольняють умови

$$y_i(t) \rightarrow 0, y'_i(t) \rightarrow 0, i = \overline{1, n} \text{ при } t \rightarrow 0 \text{ або } t \rightarrow +0. \quad (0.4)$$

Задачі (0.3) – (0.4) при $s = 1$ вивчалися в роботах Дімітрієва О., Костенко О., Зозулі Н., Федик С., Навроцького С., Соколової О. В припущенні, що $t^s = \text{diag}(t^{s_1}, \dots, t^{s_n})$, $1 < s_1 < \dots < s_n$ система (0.3) вивчалася в роботах Зик Т., Браславської Т., Брезицького О., Левченко І., Мукан А. При цьому поряд з вивченням питання про існування і кількість розв’язків задач (0.3) – (0.4), асимптотично рівних відріzkам степеневих рядів (Федик С.), основне завдання полягало в дослідженні асимптотичної поведінки розв’язків, які представлені у вигляді відріzkів нестепеневих рядів. Розклад за степенями $t, t^{s_1}, \dots, t^{s_n}$ будувався в роботах Зик Т., Брезицького О., Левченко І. Розклад за степенями t і $\frac{1}{\ln t}$ будувався в роботах Браславської Т., Мукан А. Побудову розкладів за степенями t і $\frac{1}{a \ln t + b}$, $a \neq 0, a, b > 0$ проведено в роботах Дмитрієва О., Григор’євої В. Розклад за степенями t і $\ln t$ розпочато в роботах Костенко О. (для систем двох рівнянь), Зозулі Н. (для систем n рівнянь), Навроцького С. і продовжено в роботах Бабілової О. і Соколової О. Однак, слід зауважити, що в зазначених роботах вивчалися тільки випадки дійсних власних значень матриці лінійного наближення. Вивчення випадків комплексних власних значень матриці лінійного наближення розпочато в роботі Шляпошникової Ю.

У цій роботі розглядається система звичайних диференціальних рівнянь типу Бріо та Буке, не розв'язаних відносно похідних, що має вигляд:

$$\begin{cases} t\dot{y}_1 = p_{11}y_1 + \dots + p_{1n}y_n + F_1(t, y_1, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n), \\ \dots \\ t\dot{y}_n = p_{n1}y_1 + \dots + p_{nn}y_n + F_n(t, y_1, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n), \end{cases} \quad (0.5)$$

де $t \in \mathbb{R}$ – незалежна змінна, $y_s = y_s(t)$, $s = \overline{1, n}$ – невідомі функції, $p_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = \overline{1, n}$, $F_q = F_q(t, y_1, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n)$, $q = \overline{1, n}$ – голоморфні в точці $(0, 0, \dots, 0)$ функції, розклад яких в околі цієї точки в збіжні степеневі ряди не містить вільних та лінійних членів.

У першому розділі описаний пошук формальних розв'язків системи (0.5) у вигляді рядів

$$\begin{cases} y_i = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} b_{mk}^i t^m (\ln t)^k = \sum_{m=2}^{\infty} b_{m0}^i t^m + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{mk}^i t^m (\ln t)^k, \\ i = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (0.6)$$

що задовольняють умову

$$y_k(t) \rightarrow 0, \dot{y}_k(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +0, k = \overline{1, n}. \quad (0.7)$$

Використовуючи метод невизначених коефіцієнтів після підстановки (0.6) в (0.5) отримано, що коефіцієнти ряду (0.6) b_{20}^i і b_{21}^i , $i = \overline{1, n}$ знаходяться з відповідної системи рівнянь другого порядку. Припускаючи, що ця система може бути розв'язана відносно b_{20}^i та b_{21}^i для її довільного фіксованого розв'язку отримано, що коефіцієнти $b_{v\eta}^i$, $i = \overline{1, n}$, $v \in \mathbb{N}$, $v \geq 3$, $\eta = \overline{0, 1}$ рядів (0.6) визначаються з системи:

$$(P + \nu A - \nu E)b_{\nu 0} + (A - E)b_{\nu 1} = D_{\nu 1}, \quad (0.8)$$

де

$$b_{\nu 0} = \begin{bmatrix} b_{\nu 0}^1 \\ \vdots \\ b_{\nu 0}^n \end{bmatrix}, b_{\nu 1} = \begin{bmatrix} b_{\nu 1}^1 \\ \vdots \\ b_{\nu 1}^n \end{bmatrix}, D_{\nu 1} = \begin{bmatrix} D_{\nu 1}^1 \\ \vdots \\ D_{\nu 1}^n \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$a_{ij} = A_{0l_j 1}^i + 2A_{0l_j 2}^i(2b_{20}^j + b_{21}^j) + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^n A_{0l_s + l_j 0}^i(2b_{20}^s + b_{21}^s).$$

Коефіцієнти $b_{\nu \eta}^i$, $i = \overline{1, n}$, $\nu, \eta \in \mathbb{N}$, $\nu \geq 2$, $\eta \geq 2$ визначаються з системи:

$$\eta(A - E)b_{\nu \eta} = D_{\nu \eta}, \quad (0.9)$$

де $D_{\nu \eta} = (D_{\nu \eta}^1, \dots, D_{\nu \eta}^n)^T$, $D_{\nu \eta}^i = D_{\nu \eta}^i(A_{plr}^i, b_{\alpha \beta}^i)$, $\alpha = \overline{2, \nu}$, $\beta = \overline{0, \eta - 1}$, $\nu \geq 2$, $\eta \geq 2$, $i = \overline{1, n}$, $p = (p_1, \dots, p_n)$, $l = (l_1, \dots, l_n)$ – вже відомі функції коефіцієнтів A_{plr}^i ($2 \leq |p| + |l| \leq \nu$) розкладів функцій F_s і $b_{\alpha \beta}^i$, які визначаються на попередніх кроках прирівнювання коефіцієнтів при степенях t та $\ln t$.

Доведено теореми про існування та кількість розв'язків системи (0.8) у випадку коли матриця A не має власного значення, що дорівнює одиниці, і у випадку коли матриця $P + \nu A$ не має власного значення, що дорівнює $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geq 3$.

У випадку, коли умови вище вказаних теорем не виконуються, немає принципової різниці, який з векторів b_{20} або b_{21} вважати параметром.

У другому розділі вивчається питання про виділення з (0.5) системи, що може бути розв'язана відносно похідної. Для довільного натурального

фіксованого $N > 1$ у системі (0.5) виконується заміна невідомих функцій та їхніх похідних за формулами:

$$y_i = \sum_{m=2}^N \sum_{k=1}^{N+1} b_{mk}^i t^m \ln^k t + \sum_{m=2}^N b_{m0}^i t^m + t^{N+\varepsilon} Y_i, i = \overline{1, n}, \quad (0.10)$$

$$\dot{y}_i = \sum_{m=2}^N t^{m-1} \left[m b_{m0}^i + \sum_{k=1}^{N+1} b_{mk}^i (m \ln^k t + k \ln^{k-1} t) \right] + t^{N+\varepsilon-1} S_i, \quad (0.11)$$

$$i = \overline{1, n},$$

де $Y_i = Y_i(t)$ та $S_i = S_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ – нові невідомі функції, ε – довільне число з інтервалу $(0, 1)$. У результаті заміни та враховуючи, що N обирається так, щоб $D_{N, N+2} = 0$, система (0.5) зводиться до системи вигляду

$$R(t, t^\varepsilon, t^{1-\varepsilon}, Y, S) = 0, \quad (0.12)$$

де

$$R = (A - E)S + PY + D_{N, N+2} t^{-\varepsilon} \ln^{1-\varepsilon} t + T(t, t^\varepsilon, t^{1-\varepsilon}, Y, S),$$

і вектор-функція T голоморфна в точці $(0, 0, 0, 0, 0)$, а її розклад в околі цієї точки не містить вільних та лінійних членів. Якщо $\det(A - E) \neq 0$, то система (0.12) може бути однозначно розв'язана відносно S , тобто

$$S = \omega(t, t^\varepsilon, t^{1-\varepsilon}, Y),$$

де вектор-функція ω голоморфна в точці $(0, 0, 0, 0)$ і $\omega(0, 0, 0, 0) = 0$.

З'ясувавши, як пов'язані між собою Y_i та S_i , $i = \overline{1, n}$, отримаємо, що за умови $D_{N, N+2} = 0$, система (0.5) зводиться до системи, що може бути розв'язана відносно похідної

$$t\dot{Y} = GY + T_2(t, t^\varepsilon, t^{1-\varepsilon}, Y), \quad (0.13)$$

де

$$G = (A - E)^{-1}P - (N + \varepsilon)E,$$

$$T_2(t, t^\varepsilon, t^{1-\varepsilon}, Y) = (A - E)^{-1}T_1(t, t^\varepsilon, t^{1-\varepsilon}, Y),$$

де вектор-функція T_2 голоморфна в точці $(0, 0, 0, 0)$, а її розклад в околі цієї точки не містить вільних та лінійних членів.

У третьому розділі досліджується асимптотична поведінка розв'язків системи (0.5) при $t \rightarrow +0$. У випадку $\det(A - E) \neq 0$ виконавши заміну невідомої функції $Y = Ku$, де K – невироджена матриця розмірності $n \times n$, $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ – нова невідома вектор-функція від t , отримаємо, що система (0.5) приводиться до вигляду:

$$t\dot{u} = \Lambda u + \sum_{|k|+|j|=2}^{\infty} H_{kj} u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n} (t^\varepsilon)^{j_1} (t^{1-\varepsilon})^{j_2}, \quad (0.14)$$

де $|k| = \sum_{i=1}^n k_i$, $|j| = j_1 + j_2$, Λ – діагональна матриця, тобто

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Застосовуючи до системи (0.14) метод кривих та поверхонь без контакту разом з топологічним принципом Важевського були доведені теореми про асимптотичну поведінку розв'язків системи (0.5) та їхніх похідних. Наведемо одну з цих теорем.

Теорема. Нехай $N > 1$, $N \in \mathbb{N}$: $D_{N,N+2} = 0$. Якщо власні значення матриці Λ , λ_i , $i = \overline{1, n}$ – від'ємні, то існує хоча б один розв'язок системи (0.5), що разом зі своєю похідною при $t \rightarrow +0$ володіє такою асимптотикою:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_i = \sum_{m=2}^N \sum_{k=0}^{N+1} b_{mk}^i t^m \ln^k t + o(t^{N+\alpha_i}), \\ \dot{y}_i = \sum_{m=2}^N m b_{m0}^i t^{m-1} + \sum_{m=2}^N \sum_{k=1}^{N+1} b_{mk}^i t^{m-1} \ln^{k-1} t (m \ln t + k) + \\ \quad + o(t^{N+\alpha_i-1}), 0 < \alpha_i < \varepsilon < 1, \\ \quad i = \overline{1, n}. \end{array} \right.$$

РОЗДІЛ 1

Система рівнянь типу Бріо та Буке

§ 1.1 Допоміжні означення та теореми

Наведемо тут означення та теореми, які знадобляться нам у цій роботі.

Означення 1.1. Функція $f = f(x_1, \dots, x_n)$ називається голоморфною в точці $(x_1^0, \dots, x_n^0)$, якщо в околі цієї точки її можна представити у вигляді збіжного степеневого ряду

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{m_1 + \dots + m_n \geq 0}^{\infty} a_{m_1 \dots m_n} (x_1 - x_1^0)^{m_1} \dots (x_n - x_n^0)^{m_n},$$

де $a_{m_1 \dots m_n}$ — дійсні константи.

Теорема 1.1 (про неявну голоморфну функцію). Нехай функції $\Phi_k: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi_k = \Phi_k(x_1, \dots, x_n, t)$, $k = \overline{1, n}$ задовольняють такі умови:

1. Φ_k , $k = \overline{1, n}$, голоморфні в точці $(x_1^0, \dots, x_n^0, t_0)$;
2. $\Phi_k(x_1^0, \dots, x_n^0, t_0) = 0$, $k = \overline{1, n}$;
3. $\frac{D(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(x_1^0, \dots, x_n^0, t_0) \neq 0$.

Тоді система

$$\begin{cases} \Phi_k(x_1, \dots, x_n, t) = 0; \\ k = \overline{1, n}. \end{cases}$$

має єдиний розв'язок відносно змінних $x_1, \dots, x_n$, причому функції $x_k = x_k(t)$, $k = \overline{1, n}$, голоморфні в точці t_0 і $x_k(t_0) = x_k^0$, $k = \overline{1, n}$.

Розглянемо задачу Коші

$$\begin{cases} \frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, \dots, y_n), k = \overline{1, n}, \\ y_k(x_0) = y_k^0, k = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (1.1)$$

де $f_k: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $k = \overline{1, n}$, а $x_0, y_1^0, \dots, y_n^0$ – деякі дійсні константи.

Теорема 1.2 (Коші). Нехай дано систему (1.1), де функції f_k , $k = \overline{1, n}$, розкладаються в степеневі ряди, що збігаються в області

$$|x - x_0| < \rho, \quad |y_k - y_k^0| < r, \quad k = \overline{1, n},$$

$$\rho = \text{const}, \quad r = \text{const}, \quad \rho > 0, \quad r > 0.$$

Тоді існує єдиний голоморфний розв’язок задачі Коші (1.1) з початковими умовами

$$y_k(x_0) = y_k^0, \quad k = \overline{1, n}.$$

Цей розв’язок можна представити у вигляді степеневих рядів

$$y_k = y_k^0 + \sum_{s=1}^{\infty} C_s^{(k)} (x - x_0)^s, \quad k = \overline{1, n},$$

що збігаються в області

$$|x - x_0| \leq \rho_1 < \rho,$$

де

$$\rho_1 = \rho' \left(1 - e^{\frac{-r'}{(1+n)\rho'M}} \right), \quad 0 < r' < r, \quad 0 < \rho' < \rho,$$

$C_s^{(k)}$, $k = \overline{1, n}$, – дійсні константи, а M визначається з умови

$$|f_k(x, y_1, \dots, y_n)| \leq M \quad \text{при} \quad |x - x_0| \leq \rho', \quad |y_k - y_k^0| \leq r', \quad k = \overline{1, n}.$$

Нехай $f = f(x, y_1, \dots, y_n)$, $f \in C(D)$, $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ D – область в $\mathbb{R}^{n+1}$. Зафіксуємо точку $(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0) \in D$ і задамо множину

$$V = \{(x, y_1, \dots, y_n) \in D: |x - x_0| \leq a, |y_k - y_k^0| \leq b, k = \overline{1, n}, a > 0, b > 0\}.$$

Із неперервності f на компактній множині V випливає, що існує така константа $M \geq 0$, для якої виконується умова

$$\max_V \|f(x, y_1, \dots, y_n)\| = M$$

Означення 1.2. Говорять, що функція $f = f(x, y)$, $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ задовольняє умову Ліпшица по змінній y на множині $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, якщо існує така константа $L \geq 0$, що

$$\forall (x, y_1), (x, y_2) \in D \quad \|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\|.$$

Позначається $f \in Lip_y(D; L)$.

Теорема 1.3 (Пікара–Коші про існування та єдиність розв’язку задачі Коші). Нехай для функцій f_k , $k = \overline{1, n}$, в задачі Коші (1.1) виконуються такі умови:

1. $f_k \in C(V)$, $k = \overline{1, n}$;
2. $f_k \in Lip_y(V; L)$, $k = \overline{1, n}$.

Тоді задача Коші (1.1) має єдиний розв’язок на відрізку

$$I = [x_0 - h, x_0 + h],$$

де

$$h = \min\left(a; \frac{b}{M}\right).$$

§ 1.2 Постановка задачі

Розглянемо систему n диференціальних рівнянь типу Бріо та Буке, які не розв’язані відносно похідних

$$\begin{cases} t \frac{dy_1}{dt} = p_{11}y_1 + \dots + p_{1n}y_n + p_{1,n+1}t + F_1(y_1, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n, t); \\ \dots \dots \dots \\ t \frac{dy_n}{dt} = p_{n1}y_1 + \dots + p_{nn}y_n + p_{n,n+1}t + F_n(y_1, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n, t), \end{cases} \quad (1.2)$$

де $p_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n+1}$ $F_s = F_s(y_1, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n, t)$, $s = \overline{1, n}$, — голоморфні в точці $t = y_1 = \dots = y_n = \dot{y}_1 = \dots = \dot{y}_n = 0$ функції, розклад яких в околі цієї точки в збіжні степеневі ряди не містить вільних та лінійних членів.

З'ясуємо, за яких умов система (1.2) приводиться до системи, що не має лінійних членів по змінній t . Введемо нові невідомі функції $Y_s = Y_s(t)$, $s = \overline{1, n}$, які пов'язані зі старими рівністю

$$Y_s = y_s - p_s t, \quad s = \overline{1, n},$$

де p_s , $s = \overline{1, n}$ — деякі дійсні константи. Підставивши $Y_1, \dots, Y_n$ в (1.2), отримаємо

$$t \frac{dY_s}{dt} = p_{s1}Y_1 + \dots + p_{sn}Y_n + p_{s,n+1}t + F_s(Y_1, \dots, Y_n, \dot{Y}_1, \dots, \dot{Y}_n, t), \quad s = \overline{1, n},$$

$$\begin{aligned} t \frac{dy_s}{dt} &= p_{s1}y_1 + \dots + p_{sn}y_n + (p_s + p_{s,n+1} - p_{s1}p_1 - \dots - p_{sn}p_n)t \\ &\quad + F_s(y_1 - p_1 t, \dots, y_n - p_n t, \dot{y}_1 - p_1, \dots, \dot{y}_n - p_n, t), \quad s = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Прирівняємо до нуля коефіцієнти при t і розглянемо отриману систему

$$p_s + p_{s,n+1} - p_{s1}p_1 - \dots - p_{sn}p_n = 0, \quad s = \overline{1, n}$$

або

$$\begin{cases} (p_{11} - 1)p_1 + p_{12}p_2 + \dots + p_{1n}p_n = p_{1,n+1} \\ p_{21}p_1 + (p_{22} - 1)p_2 + \dots + p_{2n}p_n = p_{2,n+1} \\ \dots \dots \dots \\ p_{n1}p_1 + p_{n2}p_2 + \dots + (p_{nn} - 1)p_n = p_{n,n+1} \end{cases}$$

Останню систему будемо розглядати як систему лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих p_s , $s = \overline{1, n}$. Випишемо визначник цієї системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_{11} - 1 & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} - 1 & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} - 1 \end{vmatrix} = \det(P - E).$$

Якщо серед власних значень матриці $P = \|p_{ij}\|_{i,j=1}^n$ немає власного значення, що дорівнює 1, то $\Delta \neq 0$ і тоді існує єдиний розв'язок $p_1, \dots, p_n$ цієї системи, а система (1.2) приводиться до вигляду

$$\begin{cases} t \frac{dy_1}{dt} = p_{11}y_1 + \dots + p_{1n}y_n + F_1(y_1, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n, t); \\ \dots \dots \dots \\ t \frac{dy_n}{dt} = p_{n1}y_1 + \dots + p_{nn}y_n + F_n(y_1, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n, t). \end{cases} \quad (1.3)$$

Перепишемо систему (1.3) у векторній формі

$$t\dot{y} = Py + F(t, y, \dot{y}), \quad (1.4)$$

де $y = (y_1, \dots, y_n)^T$, $\dot{y} = (\dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n)^T$, $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F = (F_1, \dots, F_n)^T$.

Перевіримо, чи виконуються для (1.4) умови теореми 1.1 про неявну голоморфну функцію відносно $\dot{y}$. Для цього розглянемо функцію

$$\Phi(t, y, \dot{y}) = t\dot{y} - Py - F(t, y, \dot{y}).$$

1. Оскільки компоненти вектор-функції F за умовою є голоморфними у точці $(0, 0, 0)$ функціями, то і сама функція F , а з нею і Φ , є голоморфними у цій точці. Перша умова виконана.

2. Оскільки розклад компонент вектор функції F в околі точки $(0, 0, 0)$ за умовою не містить вільних та лінійних членів, то $F(0, 0, 0) = 0$, а отже і $\Phi(0, 0, 0) = 0$. Друга умова виконана.
3. Знайдемо похідну Φ'_y у точці $(0, 0, 0)$. Оскільки компоненти вектор-функції F є голоморфними у точці $(0, 0, 0)$ функціями, розклад яких в околі цієї точки в збіжні степеневі ряди не містить вільних та лінійних членів, то розклади відповідних цим функціям похідних не матимуть вільних членів, а отже $F'_y(0, 0, 0) = 0$, з чого випливає, що і $\Phi'_y(0, 0, 0) = 0$. Це означає, що умова 3 теореми 1.1 не виконується.

У цій роботі нас будуть цікавити розв'язки системи (1.3), що задовольняють умову

$$y_k(t) \rightarrow 0, \dot{y}_k(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +0, k = \overline{1, n}. \quad (1.5)$$

§ 1.3 Пошук формальних розв'язків системи (1.3)

Будемо шукати формальні розв'язки системи (1.3), що задовольняють умову (1.5), у вигляді рядів

$$\left\{ y_i = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} b_{mk}^i t^m (\ln t)^k = \sum_{\substack{m=2 \\ i = \overline{1, n}}}^{\infty} b_{m0}^i t^m + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{mk}^i t^m (\ln t)^k, \right. \quad (1.6)$$

де b_{mk}^i , $m = \overline{2, \infty}$, $k = \overline{0, \infty}$, $i = \overline{1, n}$ – невідомі дійсні коефіцієнти.

Формально продиференціюємо ряди (1.6):

$$\begin{cases} \dot{y}_i = \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{mk}^i [mt^{m-1}(\ln t)^k + kt^{m-1}(\ln t)^{k-1}] + \sum_{m=2}^{\infty} mb_{m0}^i t^{m-1}, \\ i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (1.7)$$

Підставимо (1.6) та (1.7) в систему (1.3):

$$\begin{aligned} & \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{mk}^i [mt^m(\ln t)^k + kt^m(\ln t)^{k-1}] + \sum_{m=2}^{\infty} mb_{m0}^i t^m \\ &= p_{i1} \sum_{m+k \geq 2}^{\infty} b_{mk}^1 t^m (\ln t)^k + \dots + p_{in} \sum_{m+k \geq 2}^{\infty} b_{mk}^n t^m (\ln t)^k + \\ &+ \sum_{|p|+|l|+r=2}^{\infty} A_{plr}^i (b_{20}^1 t^2 + b_{30}^1 t^3 + b_{21}^1 t^2 \ln t + \dots + b_{mk}^1 t^m (\ln t)^k + \dots)^{p_1} \\ &\quad \times \\ &\quad \times \dots \times \\ &\quad \times (b_{20}^n t^2 + b_{30}^n t^3 + b_{21}^n t^2 \ln t + \dots + b_{mk}^n t^m (\ln t)^k + \dots)^{p_n} \times \\ &\quad \times (b_{20}^1 (2t) + b_{30}^1 (3t^2) + b_{21}^1 (2t \ln t + t) + \dots + b_{mk}^1 (mt^{m-1}(\ln t) + \\ &\quad + kt^{m-1}(\ln t)^{k-1}) + \dots)^{l_1} \times t^r \end{aligned} \quad (1.8)$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях t :

$$t^2 | 2b_{20}^i + b_{21}^i = p_{i1} b_{20}^1 + \dots + p_{in} b_{20}^n + A_{02l_1 0}^i (2b_{20}^1 + b_{21}^1)^2 +$$

$$+ A_{0l_1+l_20}^i(2b_{20}^1 + b_{21}^1)(2b_{20}^2 + b_{21}^2) + \dots + \quad (1.9)$$

$$+ A_{0l_{n-1}+l_n0}^i(2b_{20}^{n-1} + b_{21}^{n-1})(2b_{20}^n + b_{21}^n) +$$

$$+ A_{0l_11}^i(2b_{20}^1 + b_{21}^1) + \dots + A_{0l_n1}^i(2b_{20}^n + b_{21}^n) + A_{002}^i.$$

Отримаємо систему рівнянь (1.9) з невідомими $b_{20}^i, b_{21}^i, i = \overline{1, n}$. Надалі вважатимемо, що система (1.9) сумісна, і вектори b_{20}, b_{21} – її довільні фіксовані розв'язки.

Продовжимо прирівнювати коефіцієнти при однакових степенях t :

$$\begin{aligned} t^3 | 3b_{31}^i + b_{31}^i &= p_{i1}b_{20}^1 + \dots + p_{in}b_{30}^n + [2A_{02l_10}^i(2b_{20}^1 + b_{21}^1) + \\ &A_{0l_1+l_20}^i(2b_{20}^2 + b_{21}^2) + \dots + A_{0l_1+l_n0}^i(2b_{20}^n + b_{21}^n) + A_{0l_11}^i](3b_{30}^1 + b_{31}^1) \\ &+ \dots + \\ &[2A_{02l_n0}^i(2b_{20}^n + b_{21}^n) + A_{0l_1+l_n0}^i(2b_{20}^1 + b_{21}^1) \\ &+ \dots + \\ &A_{0l_{n-1}+l_n0}^i(2b_{20}^{n-1} + b_{21}^{n-1}) + A_{0l_n1}^i](3b_{30}^n + b_{31}^n) + D_{31}^i \\ &\dots \\ t^v | vb_{v0}^i + b_{v1}^i &= p_{i1}b_{v0}^1 + \dots + p_{in}b_{v0}^n + [2A_{02l_10}^i(2b_{20}^1 + b_{21}^1) + \\ &A_{0l_1+l_20}^i(2b_{20}^2 + b_{21}^2) + \dots + A_{0l_1+l_n0}^i(2b_{20}^n + b_{21}^n) + A_{0l_11}^i](vb_{v0}^1 + b_{v1}^1) \\ &+ \dots + \\ &[2A_{02l_n0}^i(2b_{20}^n + b_{21}^n) + A_{0l_1+l_n0}^i(2b_{20}^1 + b_{21}^1) \\ &+ \dots + \end{aligned}$$

$$A_{0l_{n-1}+l_n0}^i(\nu b_{\nu0}^{n-1} + b_{\nu1}^{n-1}) + A_{0l_{n1}}^i](\nu b_{\nu0}^n + b_{\nu1}^n) + D_{\nu1}^i,$$

де $D_{\nu1}^i = D_{\nu1}^i(A_{plr}^i, b_{\alpha\beta}^i)$, $\alpha = \overline{2, i-1}$, $\beta = 0, 1$, $2 \leq |p| + |l| + r \leq \nu$, $i = \overline{1, n}$ – вже відомі функції коефіцієнтів A_{plr} з розкладів функцій F_i і коефіцієнтів $b_{\alpha\beta}^i$, які визначаються з систем рівнянь, отриманих на попередніх етапах прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях t .

Перепишемо отримані рівняння у матричній формі

$$(P + \nu A - \nu E)b_{\nu0} + (A - E)b_{\nu1} = D_{\nu1}, \quad (1.10)$$

де

$$b_{\nu0} = \begin{bmatrix} b_{\nu0}^1 \\ \vdots \\ b_{\nu0}^n \end{bmatrix}, b_{\nu1} = \begin{bmatrix} b_{\nu1}^1 \\ \vdots \\ b_{\nu1}^n \end{bmatrix}, D_{\nu1} = \begin{bmatrix} D_{\nu1}^1 \\ \vdots \\ D_{\nu1}^n \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$a_{ij} = A_{0l_{j1}}^i + 2A_{0l_{j2}}^i(2b_{20}^j + b_{21}^j) + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^n A_{0l_s+l_{j0}}^i(2b_{20}^s + b_{21}^s).$$

Таким чином, ми отримали, що коефіцієнти $b_{\nu0}^i$ і $b_{\nu1}^i$, $i = \overline{1, n}$, $\nu \geq 3$ рядів (1.6) повинні задовольняти систему (1.10).

Лема 1. Існує не більше ніж n значень ν , для яких

$$\det(P + \nu A - \nu E) = 0. \quad (1.11)$$

Доведення. Розглянемо довільні невиврожені квадратні матриці M_1 і M_2 n -го порядку. З властивості лінійності визначника випливає, що визначник суми матриць M_1 і M_2 можна записати у вигляді

$$\det(M_1 + M_2) = \quad (1.12)$$

$$= \det(M_1) + \sum \Delta(1) + \dots + \sum \Delta(i) + \dots + \sum \Delta(n-1) + \det(M_2),$$

де $\Delta(i)$ – визначник, отриманий заміною i рядків визначника матриці M_1 відповідними рядками визначника матриці M_2 , а $\sum \Delta(i)$ – сума всіх таких можливих визначників.

Використаємо формулу (1.12) для обчислення визначника

$$\det(P + \nu A - \nu E) = \begin{vmatrix} p_{11} - \nu a_{11} - \nu & p_{21} + \nu a_{21} & \cdots & p_{n1} + \nu a_{n1} \\ p_{12} + \nu a_{12} & p_{22} + \nu a_{22} - \nu & \cdots & p_{n2} + \nu a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{1n} + \nu a_{1n} & p_{2n} + \nu a_{2n} & \cdots & p_{nn} + \nu a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Нехай $M_1 = P$, а $M_2 = \nu A - \nu E$, тоді

$$\det(P + \nu A - \nu E) = \det(P) + c_1 \nu + c_2 \nu^2 + \dots + c_{n-1} \nu^{n-1} + c_n \nu^n,$$

де $c_i, i = \overline{1, n-1}$ – функції від $p_{ij}, a_{ij}, i, j = \overline{1, n}, c_n = \det(A - E)$.

Тут можливі два варіанти:

- 1) якщо серед власних значень матриці A немає значення, яке дорівнює 1, то $\det(A - E) \neq 0$, і $\det(P - \nu A - \nu E)$ є многочленом n -го степеня відносно ν . А отже, існує не більше ніж n дійсних значень ν , для яких $\det(P - \nu A - \nu E) = 0$;
- 2) якщо матриця A має власне значення, яке дорівнює 1, то $c_n = \det(A - E) = 0$. А тому степінь многочлена $\det(P + \nu A - \nu E)$ не може перевищувати $n - 1$. Отже, існує не більше ніж $n - 1$ дійсних значень ν , для яких $\det(P - \nu A - \nu E) = 0$.

Лему доведено.

Позначимо корені рівняння (1.11) через $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Тоді справедлива наступна лема.

Лема 2. Якщо матриця $P + \lambda_1 A - \lambda_1 E$ нульова, а матриця A не має власного значення, що дорівнює 1, то всі власні значення матриці $P + \nu A$ рівні між собою.

Доведення. При $\nu = \lambda_k$ матриця $P + \nu A - \nu E$ має вигляд:

$$\begin{bmatrix} p_{11} - \lambda_k a_{11} - \lambda_k & p_{21} + \lambda_k a_{21} & \cdots & p_{n1} + \lambda_k a_{n1} \\ p_{12} + \lambda_k a_{12} & p_{22} + \lambda_k a_{22} - \lambda_k & \cdots & p_{n2} + \lambda_k a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{1n} + \lambda_k a_{1n} & p_{2n} + \lambda_k a_{2n} & \cdots & p_{nn} + \lambda_k a_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

За припущенням леми матриця $P + \lambda_1 A - \lambda_1 E$ нульова, а отже з (1.13) отримаємо:

$$\begin{array}{cccc} p_{11} = -\lambda_1(a_{11} - 1) & p_{21} = -\lambda_1 a_{21} & \cdots & p_{n1} = -\lambda_1 a_{n1} \\ p_{12} = -\lambda_1 a_{12} & p_{22} = -\lambda_1(a_{22} - 1) & \cdots & p_{n2} = -\lambda_1 a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{1n} = -\lambda_1 a_{1n} & p_{2n} = -\lambda_1 a_{2n} & \cdots & p_{nn} = -\lambda_1(a_{nn} - 1) \end{array}$$

Підставимо знайдені значення $p_{ij}, i, j = \overline{1, n}$ в (1.13) при $k = 2$.

$$\begin{bmatrix} (\lambda_2 - \lambda_1)(a_{11} - 1) & (\lambda_2 - \lambda_1)a_{21} & \cdots & (\lambda_2 - \lambda_1)a_{n1} \\ (\lambda_2 - \lambda_1)a_{12} & (\lambda_2 - \lambda_1)(a_{22} - 1) & \cdots & (\lambda_2 - \lambda_1)a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\lambda_2 - \lambda_1)a_{1n} & (\lambda_2 - \lambda_1)a_{2n} & \cdots & (\lambda_2 - \lambda_1)(a_{nn} - 1) \end{bmatrix} =$$

$$(\lambda_2 - \lambda_1)^n (A - E).$$

Оскільки λ_2 – розв’язок рівняння (1.11), то $\det(P + \lambda_2 A - \lambda_2 E) = 0$, тобто $(\lambda_2 - \lambda_1)^n \det(A - E) = 0$. А оскільки за припущенням леми матриця A не має власного значення, що дорівнює 1, то $\det(A - E) \neq 0$, а отже, $\lambda_2 = \lambda_1$. Повторивши вказану операцію для $k = 3, \dots, n$, отримаємо, що $\lambda_3 = \lambda_1, \dots, \lambda_n = \lambda_1$, що і треба було показати.

Лему доведено.

З'ясуємо тепер, за яких умов існують розв'язки системи (1.10) та який вигляд мають ці розв'язки.

Теорема 1.4. Нехай матриця A не має власного значення, що дорівнює 1. Тоді для фіксованих векторів b_{20} та b_{21} (розв'язків системи (1.9)) і для кожного фіксованого $\nu \geq 3$ існує $(\nu - 2)n$ -параметрична сім'я розв'язків системи (1.10).

Доведення. Оскільки матриця A не має власного значення, що дорівнює 1, то $\det(A - E) \neq 0$. Відповідно, система (1.10) може бути розв'язана відносно $b_{\nu 1}$:

$$b_{\nu 1} = (A - E)^{-1}(D_{\nu 1} - (P - \nu A) - \nu E)b_{\nu 0}. \quad (1.14)$$

Тоді система (1.10) для фіксованих векторів b_{20} та b_{21} і для кожного фіксованого $\nu \geq 3$ має $(\nu - 2)n$ -параметрична сім'я розв'язків вигляду (1.14), де параметрами є компоненти векторів $b_{30}, \dots, b_{\nu 0}$.

Теорему доведено.

Теорема 1.5. Нехай для кожного фіксованого $\nu \geq 3$ матриця $P + \nu A$ не має власного значення, що дорівнює ν . Тоді для фіксованих векторів b_{20} та b_{21} (розв'язків системи (1.9)) існує $(\nu - 2)n$ -параметрична сім'я розв'язків системи (1.10).

Доведення. Оскільки матриця $P + \nu A$ не має власного значення, що дорівнює ν , то $\det(P + \nu A - \nu E) \neq 0$ для всіх $\nu \geq 3$, і система (1.10) може бути розв'язана відносно $b_{\nu 0}$:

$$b_{\nu 0} = (P + \nu A - \nu E)^{-1}(D_{\nu 1} - (A - E)b_{\nu 1}) \quad (1.15)$$

Тоді система (1.10) для кожного фіксованого $v \geq 3$ має $(v - 2)n$ -параметричну сім'ю розв'язків вигляду (1.15), де параметрами є компоненти векторів $b_{31}, \dots, b_{v1}$.

Теорему доведено.

Якщо умови теорем 1.4 і 1.5 не виконуються, то принципової різниці в тому, який з векторів b_{v0} або b_{v1} вважати параметром, немає. Якщо в якості параметра взяти b_{v1} , то систему (1.10) представити у вигляді:

$$(P + vA - vE)b_{v0} = D'_{v1}, \quad (1.16)$$

де $D'_{v1} = D_{v1} - (A - E)b_{v1}$. У випадку, коли параметром є b_{v0} , система (1.10) набуває вигляду

$$(A - E)b_{v1} = D''_{v1}, \quad (1.17)$$

де $D''_{v1} = D_{v1} - (P + vA - vE)b_{v0}$.

Детально розглянемо випадок (1.16).

Теорема 1.6. Нехай λ_1 – власне значення матриці $P + \lambda_1 A$, а $\lambda_k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ – власні значення матриць $P + \lambda_k A$ відповідно. Тоді для фіксованих векторів b_{20} і b_{21} (розв'язків системи (1.9)) і фіксованого $v \geq 3$ існує не більше ніж $((v - 2)n + 1)$ -параметрична сім'я розв'язків системи (1.16).

Доведення. Якщо $v \neq \lambda_1$, то $\det(P + vA - vE) \neq 0 \quad \forall v \geq 3$ і $b_{v0} = (P + vA - vE)^{-1}D'_{v1}$, тобто b_{v0}^i , $i = \overline{1, n}$ визначаються з точністю до $(v - 2)n$ параметрів, в якості яких виступають компоненти векторів $b_{31}, \dots, b_{v1}$. Якщо ж $v = \lambda_1$, то за умовою теореми $\det(P + vA - vE) = 0$.

Яким би не був розв'язок системи, він завжди буде залежати також від нових параметрів – компонент вектора $b_{\lambda_1 1}$. Тоді ми завжди можемо підібрати $b_{\lambda_1 1}^i$, $i = \overline{1, n}$ так, щоб виконувалась умова

$$\begin{cases} \text{rang}(P + \lambda_1 A - \lambda_1 E) = n - 1, \\ \text{rang}(P + \lambda_1 A - \lambda_1 E, D'_{\lambda_1,1}) = n - 1, \\ \lambda_1 \geq 3, \end{cases} \quad (1.18)$$

а отже, система $(P + \lambda_1 A - \lambda_1 E)b_{\lambda_1 0} = D'_{\lambda_1,1}$ має не більше ніж $((\lambda_1 - 2)n + 1)$ -параметричну сім'ю розв'язків, в якій параметрами є компоненти векторів $b_{31}, \dots, b_{\lambda_1-1,1}$, k компонент вектора $b_{\lambda_1 1}$ ($0 \leq k \leq n$) і довільний $b_{\lambda_1 0}^i$, $i = \overline{1, n}$. Відповідно, система (1.16) має $(\nu - 2)n$ -параметричну сім'ю розв'язків при $\nu < \lambda_1$, $\nu \geq 3$, і не більше ніж $((\nu - 2)n + 1)$ -параметричну сім'ю розв'язків при $\nu \geq \lambda_1$, $\nu \geq 3$.

Теорему доведено.

Теорема 1.7. Нехай матриці $P + \lambda_i A$ мають відповідно власні значення $\lambda_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1, s}$, $1 \leq s \leq n$, а матриці $P + \lambda_k A$ – власні значення $\lambda_k \notin \mathbb{N}$, $k \geq s + 1$, і $\lambda_i \neq \lambda_j$ ($i \neq j$, $i, j = \overline{1, s}$, $1 \leq s \leq n$). Тоді для фіксованого $\nu \geq 3$ і фіксованих векторів b_{20} та b_{21} (розв'язків системи (1.9)) існує не більше ніж $((\nu - 2)n + s)$ -параметрична сім'я розв'язків.

Доведення. При $\nu = \lambda_i$, $i = \overline{1, s}$, $1 \leq s \leq n$ є справедливими твердження теорема 1.6 лише з тією різницею, що умова (1.18) замінюється умовою

$$\begin{cases} \text{rang}(P + \lambda_i A - \lambda_i E) = n - 1, \\ \text{rang}(P + \lambda_i A - \lambda_i E, D'_{\lambda_i 1}) = n - 1, \\ i = \overline{1, s}, 1 \leq s \leq n. \end{cases}$$

Нехай для визначеності $\lambda_i < \lambda_{i+1}$, $i = \overline{1, s-1}$. Тоді при $\nu \geq 3$, $\nu < \lambda_1$ система (1.16) має $(\nu - 2)n$ -параметричну сім'ю розв'язків, у якій параметрами є компоненти векторів $b_{31}, \dots, b_{\nu 1}$. При $\nu \geq 3$, $\nu > \lambda_1$, $\nu < \lambda_2$

система (1.16) має не більше ніж $((v-2)n+1)$ -параметричну сім'ю розв'язків, у якій параметрами є компоненти векторів $b_{31}, \dots, b_{\lambda_1-1,1}, b_{\lambda_1+1,1}, \dots, b_{v1}$, k компонент вектора $b_{\lambda_1 1}$ та довільний $b_{\lambda_1 0}^i$, $i = \overline{1, n}$. При $v \geq 3$, $v \geq \lambda_s$ система (1.16) має не більше ніж $((v-2)n+s)$ -параметричну сім'ю розв'язків, у якій параметрами є компоненти векторів $b_{\alpha 1}$, $\alpha = \overline{1, v}$, $\alpha \neq \lambda_i$, $i = \overline{1, s}$, $1 \leq s \leq n$ і по k компонент векторів $b_{\alpha 1}$, $\alpha = \lambda_i$, $i = \overline{1, s}$, $1 \leq s \leq n$ ($0 \leq k_i \leq n$), а також s параметрів вигляду $b_{\lambda_i 0}^j$ ($j = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, s}$, $1 \leq s \leq n$, $\lambda_i \geq 3$).

Теорему доведено.

Теорема 1.8. Нехай $\lambda_1 \in \mathbb{N}$ – власне значення матриці $P + \lambda_1 A$, і λ_1 має кратність k , а $\lambda_i \notin \mathbb{N}$ – власні значення відповідно матриць $P + \lambda_i A$, $i \geq 2$. Тоді якщо $\text{rang}(P + \lambda_1 A - \lambda_1 E) = q$, $\lambda_1 \geq 3$, то для фіксованого $v \geq 3$ і для фіксованих векторів b_{20} і b_{21} (розв'язків системи (1.9)) існує не більше ніж $((v-1)n-q)$ -параметрична сім'я розв'язків системи (1.16).

Доведення. При $v < \lambda_1$

$$\det(P + vA - vE) \neq 0$$

і

$$b_{v0} = (P + vA - vE)^{-1} D'_{v1}.$$

Тоді система (1.16) має $(v-2)n$ -параметричну сім'ю розв'язків з параметрами $b_{31}^i, \dots, b_{v1}^i$, $i = \overline{1, n}$. Якщо ж $v = \lambda_1$, то, виходячи з побудови (1.16), можна вибрати $b_{\lambda_1 1}^i$, $i = \overline{1, n}$ так, щоб виконувалась умова

$$\text{rang}(P + \lambda_1 A - \lambda_1 E, D'_{\lambda_1 1}) = q. \quad (1.19)$$

Тоді при $v \geq \lambda_1$ система (1.16) має не більше ніж $((v-1)n-q)$ -параметричну сім'ю розв'язків, у якій $(v-3)n$ -параметрів – це компоненти

векторів $b_{31}, \dots, b_{\lambda_1-1,1}, b_{\lambda_1+1,1}, \dots, b_{v1}$, $n - q$ параметрів – компонент вектора $b_{\lambda_1,0}$ і r компонент вектора $b_{\lambda_1,1}$ ($0 \leq r \leq n$). Разом не більше ніж $((v - 1)n - q)$ параметрів.

Теорему доведено.

Теорема 1.9. Нехай $\lambda_i \in \mathbb{N}$ – власні значення матриць $P + \lambda_i A$ кратностей k_i відповідно, де $i = \overline{1, p}$, $\sigma_p = \sum_{i=1}^p k_i$, $1 \leq \sigma_p \leq n$, а $\lambda_j \notin \mathbb{N}$, $j = \overline{\sigma_p, n}$, – власні значення відповідно матриць $P + \lambda_j A$. Нехай також для матриць $P + \lambda_i A$, $i = \overline{1, p}$ виконується умова

$$\begin{cases} rang(P + \lambda_i A - \lambda_i E) = q_i, \\ rang(P + \lambda_i A - \lambda_i E, D'_{\lambda_i 1}) = q_i, \\ i = \overline{1, p}. \end{cases} \quad (*)$$

Тоді для фіксованого $v \geq 3$ і фіксованих векторів b_{20} і b_{21} (розв'язків системи (1.9)) існує не більше ніж $[(v - 1)n - p - \sum_{i=1}^p q_i]$ -параметрична сім'я розв'язків системи (1.16).

Доведення. При $v = \lambda_i$, $i = \overline{1, p}$, $1 \leq \sum_{i=1}^p k_i \leq n$ справедливі твердження теореми 1.8 лише з тією різницею, що замість умови (1.19) повинні виконуватись умови (*). Тоді існує не більше ніж $[(v - 1)n - p - \sum_{i=1}^p q_i]$ -параметрична сім'я розв'язків системи (1.16) з такими ж параметрами, що і в попередній теоремі.

Теорему доведено.

Теорема 1.10. Нехай $\lambda_1 \in \mathbb{N}$, $\lambda_1 \geq 3$ – власне значення матриці $P + \lambda_1 A$. Нехай також матриця $P + \lambda_1 A - \lambda_1 E$ є нульовою, і при цьому $D'_{\lambda_1 1} = 0$. Тоді

для фіксованих векторів b_{20} та b_{21} (розв'язків системи (1.9)) і для фіксованого $\nu \geq 3$ існує не більше ніж $(\nu - 1)n$ -параметрична сім'я розв'язків системи (1.16).

Доведення. З леми 2 випливає, що всі власні значення нульової матриці $P + \lambda_1 A - \lambda_1 E$ рівні між собою, а отже для будь-якого $\nu \neq \lambda_1$ $\det(P + \nu A - \nu E) \neq 0$, і коефіцієнти визначаються так:

$$b_{\nu 0} = (P + \nu A - \nu E)^{-1} D'_{\nu 1}, \nu \geq 3.$$

При $\nu = \lambda_1$ маємо векторне рівняння:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{\lambda_1 0}^1 \\ b_{\lambda_1 0}^2 \\ \vdots \\ b_{\lambda_1 0}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

А отже, при $\nu < \lambda_1$ існує $(\nu - 2)n$ -параметрична сім'я розв'язків системи (1.16) з параметрами $b_{31}^i, \dots, b_{\nu 1}^i$, $i = \overline{1, n}$, а при $\nu \geq \lambda_1$ існує $(\nu - 1)n$ -параметрична сім'я розв'язків системи (1.16) з параметрами $b_{31}^i, \dots, b_{\nu 1}^i$, $i = \overline{1, n}$, і $b_{\lambda_1 0}^i$, $i = \overline{1, n}$.

Теорему доведено.

Розглянемо тепер випадок системи (1.17).

Теорема 1.11. Нехай матриця A має власне значення $\lambda = 1$. Тоді для кожного фіксованого $\nu \geq 3$ і фіксованих векторів b_{20} та b_{21} (розв'язків системи (1.9)) існує не більше ніж $(\nu - 2)(n + 1)$ -параметрична сім'я розв'язків системи (1.17).

Доведення. За побудовою системи (1.17) для фіксованого $\nu \geq 3$ завжди можна підібрати параметри $b_{\nu 0}^i$, $i = \overline{1, n}$ так, щоб виконувалась умова

$$\begin{cases} \text{rang}(A - E) = n - 1, \\ \text{rang}(A - E, D''_{v1}) = n - 1. \end{cases}$$

Тоді для фіксованих векторів b_{20} та b_{21} і фіксованого $v \geq 3$ існує не більше ніж $(v - 2)(n + 1)$ -параметрична сім'я розв'язків системи (1.17), у якій параметрами є k_j компонент векторів b_{j0}^i , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{3, v}$ ($0 \leq k_j \leq n$) і $v - 2$ параметра вигляду b_{j1}^i , $j = \overline{3, v}$ (для фіксованого $i = \overline{1, n}$).

Теорему доведено.

Теорема 1.12. Нехай матриця A має власне значення $\lambda = 1$ кратності k . Тоді для фіксованого $v \geq 3$ і фіксованих векторів b_{20} та b_{21} (розв'язків системи (1.9)) існує не більше ніж $(v - 2)(2n - q)$ -параметрична сім'я розв'язків системи (1.17), де $q = \text{rang}(A - E)$.

Доведення. За побудовою системи (1.17) для фіксованого $v \geq 3$ завжди можна підібрати b_{v0}^i , $i = \overline{1, n}$ так, щоб виконувалась умова

$$\begin{cases} \text{rang}(A - E) = q, \\ \text{rang}(A - E, D''_{v1}) = q. \end{cases}$$

Тоді для фіксованих векторів b_{20} та b_{21} (розв'язків системи (1.9)) і фіксованого $v \geq 3$ існує не більше ніж $(v - 2)(2n - q)$ -параметрична сім'я розв'язків системи (1.17), у якій параметрами є k_j компонент векторів b_{j0}^i , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{3, v}$ ($0 \leq k_j \leq n$) і по $(n - q)$ компонент векторів b_{j1}^i , $j = \overline{3, v}$.

Теорему доведено.

Повернемося тепер до знаходження решти коефіцієнтів формального ряду (1.6). Продовжимо прирівнювати коефіцієнти при однакових степенях t та $\ln t$ в системі (1.8).

$$\begin{aligned}
t^2 \ln t | 2b_{22}^i &= 2b_{22}^1 \times [2A_{02l_1 0}^i (2b_{20}^1 + b_{21}^1) + A_{0l_1+l_2 0}^i (2b_{20}^2 + b_{21}^2) + \dots + \\
&\quad A_{0l_1+l_n 0}^i (2b_{20}^n + b_{21}^n) + A_{0l_1 1}^i] + \dots + \\
2b_{22}^n &\times [2A_{02l_n 0}^i (2b_{20}^n + b_{21}^n) + A_{0l_1+l_n 0}^i (2b_{20}^1 + b_{21}^1) + \dots + \\
&\quad A_{0l_{n-1}+l_n 0}^i (2b_{20}^{n-1} + b_{21}^{n-1}) + A_{0l_n 1}^i] + D_{22}^i, \\
t^3 \ln t | 2b_{32}^i &= 2b_{32}^1 \times [2A_{02l_1 0}^i (2b_{20}^1 + b_{21}^1) + A_{0l_1+l_2 0}^i (2b_{20}^2 + b_{21}^2) + \dots + \\
&\quad A_{0l_1+l_n 0}^i (2b_{20}^n + b_{21}^n) + A_{0l_1 1}^i] + \dots + \\
2b_{32}^n &\times [2A_{02l_n 0}^i (2b_{20}^n + b_{21}^n) + A_{0l_1+l_n 0}^i (2b_{20}^1 + b_{21}^1) + \dots + \\
&\quad A_{0l_{n-1}+l_n 0}^i (2b_{20}^{n-1} + b_{21}^{n-1}) + A_{0l_n 1}^i] + D_{32}^i, \\
&\dots
\end{aligned} \tag{1.20}$$

$$\begin{aligned}
t^\nu \ln t | 2b_{\nu 2}^i &= 2b_{\nu 2}^1 \times [2A_{02l_1 0}^i (2b_{20}^1 + b_{21}^1) + A_{0l_1+l_2 0}^i (2b_{20}^2 + b_{21}^2) + \dots + \\
&\quad A_{0l_1+l_n 0}^i (2b_{20}^n + b_{21}^n) + A_{0l_1 1}^i] + \dots + \\
2b_{\nu 2}^n &\times [2A_{02l_n 0}^i (2b_{20}^n + b_{21}^n) + A_{0l_1+l_n 0}^i (2b_{20}^1 + b_{21}^1) + \dots + \\
&\quad A_{0l_{n-1}+l_n 0}^i (2b_{20}^{n-1} + b_{21}^{n-1}) + A_{0l_n 1}^i] + D_{\nu 2}^i, \\
&\dots \\
t^\nu \ln^{(\eta-1)} t | 2b_{\nu \eta}^i &= \eta b_{\nu \eta}^1 \times [2A_{02l_1 0}^i (2b_{20}^1 + b_{21}^1) + A_{0l_1+l_2 0}^i (2b_{20}^2 + b_{21}^2) + \dots + \\
&\quad A_{0l_1+l_n 0}^i (2b_{20}^n + b_{21}^n) + A_{0l_1 1}^i] + \dots + \\
\eta b_{\nu \eta}^n &\times [2A_{02l_n 0}^i (2b_{20}^n + b_{21}^n) + A_{0l_1+l_n 0}^i (2b_{20}^1 + b_{21}^1) + \dots + \\
&\quad A_{0l_{n-1}+l_n 0}^i (2b_{20}^{n-1} + b_{21}^{n-1}) + A_{0l_n 1}^i] + D_{\nu \eta}^i,
\end{aligned}$$

де $D_{\nu \eta}^i = D_{\nu \eta}^i(A_{plr}^i, b_{\alpha \beta}^i)$, $\alpha = \overline{2, \nu}$, $\beta = \overline{0, \eta - 1}$, $\nu \geq 2$, $\eta \geq 2$, $i = \overline{1, n}$, $p = (p_1, \dots, p_n)$, $l = (l_1, \dots, l_n)$ – вже відомі функції коефіцієнтів A_{plr}^i ($2 \leq |p| +$

$|l| \leq \nu$) розкладів функцій F_s і $b_{\alpha\beta}^i$, які визначаються на попередніх кроках прирівнювання коефіцієнтів при степенях t та $\ln t$.

Перепишемо (1.20) у матричній формі:

$$\eta(A - E)b_{\nu\eta} = D_{\nu\eta}, \quad (1.21)$$

де $\nu \geq 2$, $\eta \geq 2$, $b_{\nu\eta} = (b_{\nu\eta}^1, \dots, b_{\nu\eta}^n)^T$, $D_{\nu\eta} = (D_{\nu\eta}^1, \dots, D_{\nu\eta}^n)^T$, $A = (a_{ij})$,

$$a_{ij} = A_{0l_j1}^i + 2A_{02l_j1}^i(2b_{20}^j + b_{21}^j) + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^n A_{0l_s+l_j0}^i(2b_{20}^s + b_{21}^s).$$

Ми отримали, що коефіцієнти $b_{\nu\eta}^i$, $i = \overline{1, n}$, $\nu \geq 2$, $\eta \geq 2$ рядів (1.6) повинні задовольняти систему (1.21).

Як і у випадку з доведенням теорем 1.4 – 1.12 можливі два випадки:

- 1) якщо матриця A не має власного значення, що дорівнює 1, то з точністю до знайдених параметрів система (1.21) має однозначний розв'язок, при цьому

$$b_{\nu\eta} = \frac{1}{\eta}(A - E)^{-1}D_{\nu\eta};$$

- 2) якщо матриця A має власне значення, що дорівнює 1, то дослідження проводиться аналогічно доведенню теорем 1.11 – 1.12.

Зауваження. Може трапитись так, що розв'язок $y_i = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} b_{mk}^i t^m (\ln t)^k$ не містить членів з $t \ln t$, тоді отримаємо формальні розв'язки у вигляді степеневих рядів. Так може трапитись у тому, і тільки у тому випадку, коли $b_{mk}^i = 0$, $\forall k = \overline{1, \infty}$, $m = \overline{2, \infty}$, $i = \overline{1, n}$. Якщо ж $b_{m0} =$

0, $\forall m = \overline{2, \infty}$, отримаємо розв'язок у вигляді ряду $y_i = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} b_{mk}^i t^m (\ln t)^k$.

РОЗДІЛ 2

Виділення системи, що може бути розв'язана відносно похідної

§ 2.1 Виділення системи, що може бути розв'язана відносно похідної

Виконаємо перетворення використовуючи метод, описаний в [6] та [26], в системі (1.3) для подальшого дослідження її розв'язків.

За рахунок підбору параметрів оберемо таке натуральне $N > 1$, щоб $D_{N,N+2} = 0$, тобто $b_{N,N+2} = 0$. Для цього фіксованого N виконаємо в системі (1.3) заміну невідомих функцій та їхніх похідних за формулами:

$$y_i = \sum_{m=2}^N \sum_{k=1}^{N+1} b_{mk}^i t^m \ln^k t + \sum_{m=2}^N b_{m0}^i t^m + t^{N+\varepsilon} Y_i, i = \overline{1, n}, \quad (2.1)$$

$$\dot{y}_i = \sum_{m=2}^N t^{m-1} \left[m b_{m0}^i + \sum_{k=1}^{N+1} b_{mk}^i (m \ln^k t + k \ln^{k-1} t) \right] + t^{N+\varepsilon-1} S_i, \quad (2.2)$$

$$i = \overline{1, n},$$

де $\varepsilon \in (0, 1)$, а Y_i та S_i – нові невідомі функції від t . Введемо для них вектори

$$S = (S_1, \dots, S_n)^T,$$

$$Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T.$$

У результаті заміни (2.1) та (2.2) система (1.4) набуває вигляду

$$t^{N+\varepsilon} R(t, t^\varepsilon, t^{1-\varepsilon}, Y, S) = 0, \quad (2.3)$$

де

$$R = (A - E)S + PY + D_{N,N+2} t^{-\varepsilon} \ln^{1-\varepsilon} t + T(t, t^\varepsilon, t^{1-\varepsilon}, Y, S),$$

і вектор-функція T голоморфна в точці $(0,0,0,0,0)$, а її розклад в цій точці не містить вільних та лінійних членів. Розділимо (2.3) на $t^{N+\varepsilon}$

$$R(t, t^\varepsilon, t^{1-\varepsilon}, Y, S) = 0 \quad (2.4)$$

і до отриманої системи (2.4) застосуємо теорему про існування неявної голоморфної функції. Оскільки:

- 1) R голоморфна в точці $(0, 0, 0, 0, 0)$;
- 2) $R(0, 0, 0, 0, 0) = 0$, тому що за умовою $D_{N, N+2} = 0$;
- 3) $\frac{DR}{DS}(0, 0, 0, 0, 0) = \det(A - E) \neq 0$, якщо матриця A не має власного значення, що дорівнює 1,

то система (2.4) може бути однозначно розв'язана відносно S , тобто

$$S = \omega(t, t^\varepsilon, t^{1-\varepsilon}, Y),$$

де вектор-функція ω голоморфна в точці $(0, 0, 0, 0)$ і $\omega(0, 0, 0, 0) = 0$. Тоді функція ω має вигляд

$$\omega = (A - E)^{-1}(PY + T_1(t, t^\varepsilon, t^{1-\varepsilon}, Y)), \quad (2.5)$$

де вектор-функція T_1 голоморфна в точці $(0, 0, 0, 0)$, а її розклад в околі цієї точки не містить вільних та лінійних членів.

Тепер з'ясуємо, як пов'язані між собою змінні Y_i та S_i . Для цього продиференціюємо y_i , $i = \overline{1, n}$, в заміні (2.1):

$$\begin{aligned} \dot{y}_i = \sum_{m=2}^N t^{m-1} \left[m b_{m0}^i + \sum_{k=1}^{N+1} b_{mk}^i (m \ln^k t + k \ln^{k-1} t) \right] + \\ (N + \varepsilon) t^{N+\varepsilon-1} Y_i + t^{N+\varepsilon} \dot{Y}_i, \\ i = \overline{1, n} \end{aligned} \quad (2.7)$$

і прирівняємо (2.7) та (2.2)

$$t^{N+\varepsilon-1} S_i = (N + \varepsilon) t^{N+\varepsilon-1} Y_i + t^{N+\varepsilon} \dot{Y}_i,$$

$$i = \overline{1, n}.$$

Тоді

$$t\dot{Y} = S - (N + \varepsilon)Y. \quad (2.8)$$

Підставимо (2.5) в (2.8)

$$\begin{aligned} t\dot{Y} &= (A - E)^{-1}(PY + T_1) - (N + \varepsilon)Y, \\ t\dot{Y} &= [(A - E)^{-1}P - (N + \varepsilon)E]Y + (A - E)^{-1}T_1, \\ t\dot{Y} &= GY + T_2(t, t^\varepsilon, t^{1-\varepsilon}, Y), \end{aligned} \quad (2.9)$$

де

$$\begin{aligned} G &= (A - E)^{-1}P - (N + \varepsilon)E, \\ T_2(t, t^\varepsilon, t^{1-\varepsilon}, Y) &= (A - E)^{-1}T_1(t, t^\varepsilon, t^{1-\varepsilon}, Y). \end{aligned}$$

Таким чином, ми показали, що якщо матриця A не має власного значення, що дорівнює 1, і $D_{N, N+2} = 0$, то система (1.3) зводиться до системи (2.9).

РОЗДІЛ 3

Асимптотична поведінка розв'язків системи (1.3) при $t \rightarrow +0$

§ 3.1 Асимптотична поведінка розв'язків системи (1.3) при $t \rightarrow +0$

Введемо в системі (2.9) заміну невідомої функції шляхом невідродженого перетворення

$$Y = Ku,$$

$$\dot{Y} = K\dot{u},$$

де K – деяка невідроджена матриця розмірності $n \times n$, $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ – нова невідома вектор-функція від t . Шляхом невідродженого перетворення перейдемо до матриці лінійного наближення

$$K^{-1}tK\dot{u} = K^{-1}GKu + K^{-1}T_3(t, t^\varepsilon, t^{1-\varepsilon}, Ku),$$

де вектор-функція T_3 – голоморфна в точці $(0, 0, 0, 0)$, розклад якої в околі цієї точки не містить вільних та лінійних членів, отримана з T_2 шляхом заміни Y на Ku .

Позначимо $K^{-1}GK$ через Λ , а $K^{-1}T_3$ перепишемо у вигляді її розклад

$$K^{-1}T_3(t, t^\varepsilon, t^{1-\varepsilon}, Ku) = \sum_{|k|+|j|=2}^{\infty} H_{kj} u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n} (t^\varepsilon)^{j_1} (t^{1-\varepsilon})^{j_2},$$

$$|k| = k_1 + \dots + k_n,$$

$$|j| = j_1 + j_2.$$

В результаті отримаємо систему

$$t\dot{u} = \Lambda u + \sum_{|k|+|j|=2}^{\infty} H_{kj} u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n} (t^\varepsilon)^{j_1} (t^{1-\varepsilon})^{j_2}. \quad (3.1)$$

Дослідимо асимптотичну поведінку розв'язків системи (3.1) при $t \rightarrow +0$ в залежності від вигляду матриці Λ .

§ 3.2 Асимптотична поведінка розв'язків системи (3.1) при $t \rightarrow +0$ у випадку діагональної матриці Λ

Нехай Λ має вигляд

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Для дослідження асимптотичної поведінки розв'язків системи (3.1) при $t \rightarrow +0$ застосуємо метод кривих та поверхонь без контакту разом з топологічним принципом Важевського.

Розпишемо (3.1) більш детально

$$\begin{cases} t\dot{u}_i = \lambda_i u_i + \sum_{|k|+|j|=2}^{\infty} H_{kj}^i u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n} (t^\varepsilon)^{j_1} (t^{1-\varepsilon})^{j_2}, \\ i = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Візьмемо поверхню

$$\begin{cases} u_1^2 = \delta_1^2 t^{2\alpha_1} \\ \dots \\ u_n^2 = \delta_n^2 t^{2\alpha_n} \end{cases}, \quad (3.2)$$

де $\delta_i > 0$ – малі, $0 < \alpha_i < \varepsilon$, $\alpha_i \neq \lambda_i$, $i = \overline{1, n}$, і знайдемо вектор нормалі $\overline{N}$ до цієї поверхні у точці $(t, u_1, \dots, u_n)$, $t > 0$

$$\frac{\overline{N}_i}{2} = (0, \dots, u_i, \dots, 0, -\alpha_i \delta_i^2 t^{2\alpha_i-1}), i = \overline{1, n}.$$

Розглянемо скалярний добуток вектора поля напрямків $\bar{T}$ системи (3.1) в точці $(t, u_1, \dots, u_n)$, $t > 0$ і $\bar{N}$

$$\left(t\bar{T}, \frac{\bar{N}_1}{2}\right) = \lambda_1 u_1^2 + \sum_{|k|+|j|=2}^{\infty} H_{kj}^1 u_1^{k_1+1} \dots u_n^{k_n} (t^\varepsilon)^{j_1} (t^{1-\varepsilon})^{j_2} - \alpha_1 \delta_1^2 t^{2\alpha_1},$$

...

$$\left(t\bar{T}, \frac{\bar{N}_n}{2}\right) = \lambda_n u_n^2 + \sum_{|k|+|j|=2}^{\infty} H_{kj}^n u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n+1} (t^\varepsilon)^{j_1} (t^{1-\varepsilon})^{j_2} - \alpha_n \delta_n^2 t^{2\alpha_n}.$$

За умовою методу кривих та поверхонь без контакту змінна $t \rightarrow +0$

$$\left(t\bar{T}, \frac{\bar{N}_i}{2}\right) = (\lambda_i - \alpha_i) \delta_i^2 t^{2\alpha_i} + o(t^{\alpha_i-\varepsilon}), i = \overline{1, n}, t \rightarrow +0 \quad (3.3)$$

Визначимо, за яких α_i $o(t^{\alpha_i-\varepsilon})$ швидше прямує до нуля.

$$\alpha_i + \varepsilon > 2\alpha_i \Rightarrow 0 < \alpha_i < \varepsilon, i = \overline{1, n}. \quad (3.4)$$

Якщо виконується умова (3.4), то $o(t^{\alpha_i-\varepsilon})$ прямують до нуля швидше при $t \rightarrow +0$, ніж $(\lambda_i - \alpha_i) \delta_i^2 t^{2\alpha_i}$, $i = \overline{1, n}$, і тому не визначають знак скалярного добутку.

Через кожну точку поверхні (3.3) (окрім особливих точок) за теоремою Пікара – Коші проходить єдина інтегральна крива системи (3.1). Оскільки $(\bar{N}, \bar{T}) = |\bar{N}| |\bar{T}| \cos(\bar{N} \wedge \bar{T})$, то зрозуміло, що якщо скалярний добуток дорівнює нулю, то інтегральна крива є дотичною до поверхні, і в такому випадку не можна нічого сказати про те, чи є точка дотику точкою входу або виходу. Якщо ж $(\bar{N}, \bar{T}) > 0$ ($(\bar{N}, \bar{T}) < 0$) при зменшенні t , отримуємо точку строгого входу (виходу) інтегральної кривої в область (з області), обмежену поверхнею (3.2). Позначимо через Ω_e і Ω_{se} множини точок виходу і точок строгого виходу відповідно, а через ${}_e\Omega$ і ${}_{se}\Omega$ – точки входу і відповідно строгого входу. Тут можливі три варіанти:

- 1) всі правильні точки поверхні є точками строгого виходу ($\partial\Omega = \Omega_{se}$);
- 2) всі правильні точки поверхні є точками строгого входу ($\partial\Omega = {}_{se}\Omega$);
- 3) на поверхні є як точки строгого входу, так і точки строгого виходу.

Розглянемо перший випадок. Нехай

$$\Omega: \begin{cases} 0 < t < \Delta \\ u_1^2 < \delta_1^2 t^{2\alpha_1} \\ \dots \\ u_n^2 < \delta_n^2 t^{2\alpha_n} \end{cases}$$

– область, обмежена кусково-гладкою поверхнею $\partial\Omega \cup \partial\Omega_0$, $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \dots \cup \partial\Omega_n$, де

$$\partial\Omega_0: \begin{cases} t = \Delta \\ u_1^2 \leq \delta_1^2 t^{2\alpha_1} \\ \dots \\ u_n^2 \leq \delta_n^2 t^{2\alpha_n} \end{cases}, \partial\Omega_i: \begin{cases} 0 < t \leq \Delta \\ u_1^2 \leq \delta_1^2 t^{2\alpha_1} \\ \dots \\ u_i^2 = \delta_i^2 t^{2\alpha_i} \\ \dots \\ u_n^2 \leq \delta_n^2 t^{2\alpha_n} \end{cases}, \quad i = \overline{1, n}$$

і всі $\partial\Omega_i$, $i = \overline{0, n}$ – гладкі поверхні.

Нехай через точку $P \in \partial\Omega_0$ проходить інтегральна крива, що виходить через $\partial\Omega_1$. Тоді за теоремою про неперервну залежність розв'язків системи від початкових умов існує такий окіл точки P , що всі інтегральні криві, які проходять через цей окіл, вийдуть з області Ω через $\partial\Omega_1$. Позначимо через M множину всіх таких точок разом з їхніми околами. За побудовою M є відкритим. Розглянемо інтегральну криву, що проходить через довільну точку $Q \in \partial M$. Ця крива не може вийти з області Ω через $\partial\Omega_1$, оскільки тоді вона б належала M . Припустимо, що вона виходить з Ω через $\partial\Omega_2$. Але тоді існує такий окіл точки Q , що всі інтегральні криві, які проходять через цей окіл, виходять через $\partial\Omega_2$, і при цьому в будь-якому околі точки Q є точки з M . Отримали суперечність. Це означає, що інтегральна крива, яка проходить через точку Q , залишається в області Ω . А отже, існує хоча б один розв'язок системи (3.1).

У другому випадку всі інтегральні криві, що входять в область Ω через поверхню $\partial\Omega$, не виходять з неї. А отже, існує безліч інтегральних кривих, що залишаються в області Ω при $t \rightarrow +0$.

Розглянемо третій випадок. Для визначеності будемо вважати, що

$$\Omega_{se} = \partial\Omega_1 \cup \dots \cup \partial\Omega_k,$$

$${}_{se}\Omega = \partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_{k+1} \cup \dots \cup \partial\Omega_n.$$

Застосуємо топологічний принцип Важевського. Нехай H – підмножина в $\Omega \cup \partial\Omega$, а $\Pi = \Omega_{se} \cap H$. Треба показати, що $\Omega_{se} = \Omega_e$, і Π є ретрактором для Ω_{se} , але не для H , тобто:

- 1) існує неперервне відображення $\Omega_{se} \rightarrow \Pi$, яке залишає точки Π нерухомими;
- 2) H не можна неперервно відобразити на Π , залишаючи точки Π нерухомими.

Тоді, відповідно до принципу Важевського, на $H \setminus \Pi$ знайдеться точка, через яку проходить інтегральна крива, що залишається в Ω при $t \rightarrow +0$ на максимальному інтервалі свого існування.

Розглянемо область

$$\Omega: \begin{cases} 0 < t < \Delta \\ u_1^2 < \delta_1^2 t^{2\alpha_1} \\ \dots \\ u_n^2 < \delta_n^2 t^{2\alpha_n} \end{cases}, \quad \Omega_{se}: \begin{cases} 0 < t < \Delta \\ u_1^2 = \delta_1^2 t^{2\alpha_1} \\ \dots \\ u_p^2 = \delta_p^2 t^{2\alpha_p} \\ u_{p+1}^2 < \delta_{p+1}^2 t^{2\alpha_{p+1}} \\ \dots \\ u_n^2 < \delta_n^2 t^{2\alpha_n} \end{cases}.$$

Покажемо, що існує таке $H \subset \Omega \cup \partial\Omega$, що задовольняє умови принципу. Побудуємо множину H таким чином:

$$H = \{(t, u_1, \dots, u_n): t = t', u_i^2 \leq \delta_i^2 t'^{2\alpha_i}, i = \overline{1, p}, u_j^2 < \delta_j^2 t'^{2\alpha_j}, j = \overline{p+1, n}\},$$

де t' – константа з $(0, \Delta)$, достатньо близька до Δ . Очевидно, що $H \subset \Omega \cup \partial\Omega$.
Тоді

$$\Pi = \{(t, u_1, \dots, u_n): t = t', u_i^2 = \delta_i^2 t'^{2\alpha_i}, i = \overline{1, p}, u_j^2 < \delta_j^2 t'^{2\alpha_j}, j = \overline{p+1, n}\}.$$

Зауважимо, що $\Pi \subset H$ і $\Pi \subset \Omega_{se}$.

Для доведення твердження 1 достатньо побудувати хоча б одне таке неперервне відображення $\pi: \Omega_{se} \rightarrow \Pi$, що

$$\forall P \in \Omega_{se} \pi(P) \in \Pi,$$

$$\forall Q \in \Pi \pi(Q) = Q.$$

Побудуємо його так:

$$\pi: P(t, u_1(t), \dots, u_n(t)) \rightarrow R(t', u_1(t'), \dots, u_n(t')) \in \Pi.$$

Тоді π буде ретракцією Ω_{se} на Π .

Твердження 2 доведемо методом від супротивного. Припустимо, що існує таке неперервне відображення $\pi_0: H \rightarrow \Pi$, що

$$\begin{aligned} \forall P \in \Omega_{se} \pi_0(P) &\in \Pi, \\ \forall Q \in \Pi \pi_0(Q) &= Q. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Тоді множина

$$A = \{(t, u_1, \dots, u_n): t = t', u_i^2 = \delta_i^2 t'^{2\alpha_i}, i = \overline{1, p}, u_j^2 = 0, j = \overline{p+1, n}\}$$

неперервно відобразиться на $\pi_0(A) \subset \Pi$. Позначимо через $[\pi_0(A)]_0$ множину

$$[\pi_0(A)]_0 = \{u^0: u_i^0 = u_i, i = \overline{1, p}, u_j^0 = 0, j = \overline{p+1, n}\} \forall u \in \pi_0(A).$$

Відображення $[\pi_0]_0$ є неперервним як суперпозиція неперервного за припущенням відображення π_0 та неперервного перетворення координат. Тут можливі три варіанти:

- а) $\exists P_1, P_2 \in A \setminus \partial A: [\pi_0(P_1)]_0 \in A \setminus \partial A, P_2 \notin [\pi_0(A)]_0$;
- б) $(A \setminus \partial A) \cap [\pi_0(A)]_0 = \emptyset$;
- в) $A \subset [\pi_0(A)]_0$.

Покажемо, що всі три варіанти є неможливими.

Для того щоб показати, що випадки а) і б) є неможливими, будемо стягувати ∂A в точку $P \in A \setminus \partial A$ шляхом неперервної деформації. Позначимо через $\partial A_t, t \in T$ проміжний стан ∂A для такої деформації. Тоді $[\pi_0(\partial A_t)]_0 = (\partial A_t)_0$ буде неперервно стягуватись у точку $[\pi_0(P)]_0$.

За побудовою

$$\forall R \in \partial A, \pi_0(R) = [\pi_0(R)]_0, [\pi_0(R)]_0 = R. \quad (3.6)$$

- а) Нехай $P = P_1$. Тоді $(\partial A_t)_0$ стягується в точку $[\pi_0(P_1)]_0 \in A \setminus \partial A$. З (3.6) та неперервності $[\pi_0]_0$ випливає, що коли t послідовно набуває усіх значень з множини T , $(\partial A_t)_0$ проходить послідовно через кожен точку множини A , у тому числі і через точку P_2 , що неможливо, оскільки $P_2 \notin [\pi_0(A)]_0$.
- б) $(A \setminus \partial A) \cap [\pi_0(A)]_0 = \emptyset$. Це означає, що знайдеться таке $t_0 \in T$, що $(\partial A_{t_0})_0$ пройде через нескінченно віддалену точку. З іншого боку, якщо в якості топологічного простору взяти множину A з заданою на ній тривіальною топологією, то відомо, що неперервний образ компактного топологічного простору теж буде компактим. Властивістю компактності в $\mathbb{R}^n$ володіє будь-яка замкнена обмежена множина. Тому множина $[\pi_0(A)]_0$ є обмеженою, і $\forall t \in T$ $(\partial A_t)_0$ – теж обмежена множина, тобто не може проходити через нескінченно віддалену точку. А отже випадок б) є неможливим.

с) З визначення множин Π , A та $[\pi_0(A)]_0$ випливає, що, окрім точок множини ∂A , спільних точок у A та $[\pi_0(A)]_0$ немає. А тому випадок с) теж є неможливим.

Ми показали, що не можна побудувати таке неперервне відображення $\pi_0: H \rightarrow \Pi$, для якого виконується умова (3.5) а отже існує точка, через яку проходить інтегральна крива, що залишається в області Ω при зменшенні t на максимальному інтервалі свого існування.

З отриманих результатів можна сформулювати теореми про асимптотичну поведінку розв'язків системи (3.1).

Теорема 3.1. Нехай $N > 1$, $N \in \mathbb{N}$: $D_{N,N+2} = 0$. Якщо власні значення матриці Λ , λ_i , $i = \overline{1, n}$ – від'ємні, то існує хоча б один розв'язок системи (3.1), що разом зі своєю похідною при $t \rightarrow +0$ володіє такою асимптотикою:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_i = \sum_{m=2}^N \sum_{k=0}^{N+1} b_{mk}^i t^m \ln^k t + o(t^{N+\alpha_i}), \\ \dot{y}_i = \sum_{m=2}^N m b_{m0}^i t^{m-1} + \sum_{m=2}^N \sum_{k=1}^{N+1} b_{mk}^i t^{m-1} \ln^{k-1} t (m \ln t + k) + \\ + o(t^{N+\alpha_i-1}), 0 < \alpha_i < \varepsilon < 1, \\ i = \overline{1, n}. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Доведення випливає з методу кривих та поверхонь без контакту разом з топологічним принципом Важевського у випадку, коли усі правильні точки поверхні є точками строгого виходу.

Теорема 3.2. Нехай $N > 1$, $N \in \mathbb{N}$: $D_{N,N+2} = 0$. Якщо власні значення матриці Λ , λ_i , $i = \overline{1, n}$ – додатні, то існує нескінченна множина розв'язків системи (3.1), що разом зі своїми похідними при $t \rightarrow +0$ володіють асимптотикою (3.7).

Доведення випливає з методу кривих та поверхонь без контакту разом з топологічним принципом Важевського у випадку, коли усі правильні точки поверхні є точками строгого входу.

Теорема 3.3. Нехай $N > 1$, $N \in \mathbb{N}$: $D_{N,N+2} = 0$. Якщо власні значення матриці Λ , λ_i , $i = \overline{1, n}$ такі, що $\prod_{i=1}^n \lambda_i < 0$, то існує хоча б один розв'язок системи (3.1), що разом зі своєю похідною при $t \rightarrow +0$ володіє асимптотикою (3.7).

Наступні теореми застосовуються у випадку, коли $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda_0$.

Теорема 3.4. Нехай $N > 1$, $N \in \mathbb{N}$: $D_{N,N+2} = 0$. Якщо у матриці Λ власне значення $\lambda_0 > 0$, то існує нескінченна множина розв'язків системи (3.1), що разом зі своїми похідними при $t \rightarrow +0$ володіють асимптотикою (3.7).

Теорема 3.5. Нехай $N > 1$, $N \in \mathbb{N}$: $D_{N,N+2} = 0$. Якщо у матриці Λ власне значення $\lambda_0 < 0$, то існує хоча б один розв'язок системи (3.1), що разом зі своєю похідною при $t \rightarrow +0$ володіє асимптотикою (3.7).

Теорема 3.6. Нехай $N > 1$, $N \in \mathbb{N}$: $D_{N,N+2} = 0$. Якщо власні значення матриці Λ такі, що $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$, $p < n$ і $\lambda_i > 0$, $i = \overline{p+1, n}$, то існує нескінченна множина розв'язків системи (3.1), що разом зі своїми похідними при $t \rightarrow +0$ володіють асимптотикою (3.7). Якщо ж $\lambda_i < 0$, $i = \overline{p+1, n}$, то існує хоча б один розв'язок системи (3.1), що разом зі своєю похідною при $t \rightarrow +0$ володіє асимптотикою (3.7).

ВИСНОВКИ

У роботі було розглянуто систему звичайних диференціальних рівнянь типу Бріо та Буке, не розв'язаних відносно похідних, що має вигляд:

$$\begin{cases} t\dot{y}_1 = p_{11}y_1 + \dots + p_{1n}y_n + F_1(t, y_1, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n), \\ \dots \\ t\dot{y}_n = p_{n1}y_1 + \dots + p_{nn}y_n + F_n(t, y_1, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n), \end{cases} \quad (1)$$

де $t \in \mathbb{R}$ – незалежна змінна, $y_s = y_s(t)$, $s = \overline{1, n}$ – невідомі функції, $p_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = \overline{1, n}$, $F_q = F_q(t, y_1, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n)$, $q = \overline{1, n}$ – голоморфні в точці $(0, 0, \dots, 0)$ функції, розклад яких в околі цієї точки в збіжні степеневі ряди не містить вільних та лінійних членів.

У першому розділі було описано пошук формальних розв'язків системи (1) у вигляді рядів

$$\begin{cases} y_i = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} b_{mk}^i t^m (\ln t)^k = \sum_{m=2}^{\infty} b_{m0}^i t^m + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{mk}^i t^m (\ln t)^k, \\ i = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (2)$$

що задовольняють умову

$$y_k(t) \rightarrow 0, \dot{y}_k(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +0, k = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Використовуючи метод невизначених коефіцієнтів після підстановки (2) в (1) отримано, що коефіцієнти ряду (2) b_{20}^i і b_{21}^i , $i = \overline{1, n}$ знаходяться з відповідної системи рівнянь другого порядку. Припускаючи, що ця система може бути розв'язана відносно b_{20}^i та b_{21}^i для її довільного фіксованого розв'язку отримано, що коефіцієнти $b_{v\eta}^i$, $i = \overline{1, n}$, $v \in \mathbb{N}$, $v \geq 3$, $\eta = \overline{0, 1}$ рядів (2) визначаються з системи:

$$(P + \nu A - \nu E)b_{\nu 0} + (A - E)b_{\nu 1} = D_{\nu 1}, \quad (4)$$

де

$$b_{\nu 0} = \begin{bmatrix} b_{\nu 0}^1 \\ \vdots \\ b_{\nu 0}^n \end{bmatrix}, b_{\nu 1} = \begin{bmatrix} b_{\nu 1}^1 \\ \vdots \\ b_{\nu 1}^n \end{bmatrix}, D_{\nu 1} = \begin{bmatrix} D_{\nu 1}^1 \\ \vdots \\ D_{\nu 1}^n \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$a_{ij} = A_{0l_j 1}^i + 2A_{0l_j 2}^i(2b_{20}^j + b_{21}^j) + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^n A_{0l_s + l_j 0}^i(2b_{20}^s + b_{21}^s).$$

Коефіцієнти $b_{\nu \eta}^i$, $i = \overline{1, n}$, $\nu, \eta \in \mathbb{N}$, $\nu \geq 2$, $\eta \geq 2$ визначаються з системи:

$$\eta(A - E)b_{\nu \eta} = D_{\nu \eta}, \quad (5)$$

де $D_{\nu \eta} = (D_{\nu \eta}^1, \dots, D_{\nu \eta}^n)^T$, $D_{\nu \eta}^i = D_{\nu \eta}^i(A_{plr}^i, b_{\alpha \beta}^i)$, $\alpha = \overline{2, \nu}$, $\beta = \overline{0, \eta - 1}$, $\nu \geq 2$, $\eta \geq 2$, $i = \overline{1, n}$, $p = (p_1, \dots, p_n)$, $l = (l_1, \dots, l_n)$ – вже відомі функції коефіцієнтів A_{plr}^i ($2 \leq |p| + |l| \leq \nu$) розкладів функцій F_s і $b_{\alpha \beta}^i$, які визначаються на попередніх кроках прирівнювання коефіцієнтів при степенях t та $\ln t$.

Доведено теореми про існування та кількість розв'язків системи (4) у випадку коли матриця A не має власного значення, що дорівнює одиниці, і у випадку коли матриця $P + \nu A$ не має власного значення, що дорівнює $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geq 3$.

У випадку, коли умови вище вказаних теорем не виконуються, немає принципової різниці, який з векторів b_{20} або b_{21} вважати параметром.

У другому розділі досліджено питання про виділення з (1) системи, що може бути розв'язана відносно похідної. Для довільного натурального фіксованого $N > 1$ у системі (1) виконується заміна невідомих функцій та їхніх похідних за формулами:

$$y_i = \sum_{m=2}^N \sum_{k=1}^{N+1} b_{mk}^i t^m \ln^k t + \sum_{m=2}^N b_{m0}^i t^m + t^{N+\varepsilon} Y_i, i = \overline{1, n}, \quad (6)$$

$$\dot{y}_i = \sum_{m=2}^N t^{m-1} \left[m b_{m0}^i + \sum_{k=1}^{N+1} b_{mk}^i (m \ln^k t + k \ln^{k-1} t) \right] + t^{N+\varepsilon-1} S_i, \quad (7)$$

$$i = \overline{1, n},$$

де $Y_i = Y_i(t)$ та $S_i = S_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ – нові невідомі функції, ε – довільне число з інтервалу $(0, 1)$. У результаті заміни та враховуючи, що N обирається так, щоб $D_{N, N+2} = 0$, система (1) зводиться до системи вигляду

$$R(t, t^\varepsilon, t^{1-\varepsilon}, Y, S) = 0, \quad (8)$$

де

$$R = (A - E)S + PY + D_{N, N+2} t^{-\varepsilon} \ln^{1-\varepsilon} t + T(t, t^\varepsilon, t^{1-\varepsilon}, Y, S),$$

і вектор-функція T голоморфна в точці $(0, 0, 0, 0, 0)$, а її розклад в цій точці не містить вільних та лінійних членів. Якщо $\det(A - E) \neq 0$, то система (8) може бути однозначно розв'язана відносно S , тобто

$$S = \omega(t, t^\varepsilon, t^{1-\varepsilon}, Y),$$

де вектор-функція ω голоморфна в точці $(0, 0, 0, 0)$ і $\omega(0, 0, 0, 0) = 0$.

З'ясувавши, як пов'язані між собою Y_i та S_i , $i = \overline{1, n}$, було показано, що за умови $D_{N, N+2} = 0$, система (1) зводиться до системи, що може бути розв'язана відносно похідної

$$t\dot{Y} = GY + T_2(t, t^\varepsilon, t^{1-\varepsilon}, Y), \quad (9)$$

де

$$G = (A - E)^{-1}P - (N + \varepsilon)E,$$

$$T_2(t, t^\varepsilon, t^{1-\varepsilon}, Y) = (A - E)^{-1}T_1(t, t^\varepsilon, t^{1-\varepsilon}, Y),$$

де вектор-функція T_2 голоморфна в точці $(0, 0, 0, 0)$, а її розклад в околі цієї точки не містить вільних та лінійних членів.

У третьому розділі досліджено асимптотичну поведінку розв'язків системи (1) при $t \rightarrow +0$. У випадку $\det(A - E) \neq 0$ виконавши заміну невідомої функції $Y = Ku$, де K – невироджена матриця розмірності $n \times n$, $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ – нова невідома вектор-функція від t , отримано, що система (1) приводиться до вигляду:

$$t\dot{u} = \Lambda u + \sum_{|k|+|j|=2}^{\infty} H_{kj} u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n} (t^\varepsilon)^{j_1} (t^{1-\varepsilon})^{j_2}, \quad (10)$$

де $|k| = \sum_{i=1}^n k_i$, $|j| = j_1 + j_2$, Λ – діагональна матриця, тобто

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Застосувавши до системи (10) метод кривих та поверхонь без контакту разом з топологічним принципом Важевського були доведені теореми про асимптотичну поведінку розв'язків системи (1) та їхніх похідних при $t \rightarrow +0$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Андреев А.Ф. Особые точки дифференциальных уравнений. – Минск, «Высшая школа», 1979. – 136 с.
2. Бабилова Е.Н., Самкова Г.Е. О некоторых неголоморфных решениях полуявных систем обыкновенных дифференциальных уравнений типа Брио и Буке. / Міжнародна конференція «Диференціальні рівняння та їх застосування», присвячена 70-річчю від дня народження доктора фізико-математичних наук, професора, лауреата Державної премії України в галузі науки і техніки Д.І. Мартинюка – 6 - 8 червня 2012, Кам'янець-Подільський, - с. 10.
3. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. – М, «Наука», 1966.
4. Вазов В. Асимптотическое разложение решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М. :Мир, 1968.
5. Галина Самкова. Об асимптотическом поведении некоторых решений полуявных систем обыкновенных дифференциальных уравнений типа Брио и Буке. / International V.YA/ Skorobohatko mathematical conference – September 19 – 23, 2011, Drohobych, Ukraine, - p.180.
6. Грабовская Р. Г. Диблик Й. Асимптотика систем дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных. Деп. в ВИНТИ, №1786.-78 ДЕП.-49с.
7. Григорьева В. Е. Самкова Г. Е. Исследование свойств решений некоторых полуявных систем типа Брио и Буке. / Тринадцата міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука – 13-15 травня 2010 року, матеріали конференції, Київ – 2010, С. 122.

8. Грудко Э.И. О голоморфных решениях уравнений $x^n \frac{dy}{dx} = B(x, y)$. //БССР. 1964. – VIII, №2. – с.81 – 84.
9. Димитриев О.М., Самкова Г.Е. Об асимптотическом поведении не голоморфных решений полуявных систем типа Брио и Буке второго порядка. Современные методы нелинейного анализа. Тезисы докладов. Воронеж, 1995, с. 33 – 34.
10. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений.- Минск,1972. – 662 с.
11. Еругин Н.П. Проблема Римана. – Минск, «Наука и Техника», 1982. – 336 с.
12. Куклес И.С. Об аналитических решениях уравнений Брио и Буке. // Труды Узбекского Университета. Новая серия. 1956, выпуск 65, с. 17 – 29 .
13. Мячин В.Ф. О системе двух уравнений Брио и Буке.// ДАН СССР, 1957, т. 114, №3, с. 479 – 482.
14. Навроцкий С.С., Самкова Г.Е. Асимптотическое поведение решений некоторых полуявных дифференциальных систем. / Международная летняя математическая школа памяти В.А. Плотникова – 15 – 22 июня 2013, Одесса, Украина, - с. 79.
15. Самкова Г.Е. О разрешимости и асимптотическом поведении решений некоторых полуявных дифференциальных систем. Reports of enlarged session of the seminar of L.N. Vekua Institute of applied mathematics. Tbilisi, 1992, v.7, N.3, p.85-88.
16. Самкова Г.Е. Асимптотика некоторых решений полуявной системы типа Брио и Буке. "Асимптотичні та якісні методи в теорії нелінійних коливань". Міжнародна конференція “Боголюбівські читання”. Тези доповідей, 1997, Київ, с. 151.
17. Соколова О.О. Існування формальних розв’язків напів’явних систем диференціальних рівнянь типу Брио та Буке. / Міжнародна конференція

молодих математиків – 3-6 червня 2015 року, матеріали конференції, Київ – 2015, С. 168.

18. Фроммер М. Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер//УМН, 1941 . – вып.9. – с.212 – 253.
19. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М. Мир. – 1970. – 720с.
20. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1964. – с. 477.
21. Чечик В.А. Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью//Тр.Моск.Матем.общества. 1959. – 8,с. 155 – 198.
22. Bendixon J. Sur les courbes définies par des equations differentielles // Acta Mathematica 1901. – 24. – С.1 – 88.
23. Briot Ch. et Bouquet J. Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des equations differentielles //Journal de l'ecole polytechnique. Paris. – 1856. – 21,cah.36. – с.133 – 198.
24. Bungartz P.Uber singulare Stellen analytischer Differentialgleichungen mit holomorph einmündenden Integralen.Doht.Dissertation.Bonn. – 1969.
25. Campbell St.,Retzold L.Canonical forms and solvable singular systems of differential equations //SIAM J.Algebra and Discrete Methods. – 1983. – №4 – с. 517 – 521.
26. Diblic J. On the an asymptotic behavior of solutions of a certain system of quasilinear differential equations not solved with respect to derivatives //Ricerche Math. Univ. Parma. – 1987. – №13. – с. 413–419.
27. Hartman P.,Wintner A. On the asymptotic behavior of the solutions of a nonlinear differential equation //American Journal of Math. – 1946/– 68,№2 – с.301 – 308.

28. Jwano M. On an n -parameter family of solutions of a nonlinear n -systems with an irregular type singularity // *Ann. Math pura ed Appl.* – 1985. – №140. – c.57 – 145.
29. K. Mikhailenko, G. Samkova. The analytical solutions existence of the differential equations system in the domain with the special point on the boundary. The Fourth International Workshop-2009 Constructive methods for non-linear boundary value problems. Eger, Hungary, 2009. (4 July, 2009 organized by Institute of Mathematics, University of Miskolc, Hungary; Institute of Mathematics and Informatics of the Eszterházy Károly College, Eger and Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Czech Republic in cooperation with Miskolc Regional Committee of the Hungarian Academy of Sciences).
30. Wazewski T., Une methode topologique de l'examen du phenomene asymptotique reletivement aux equations differentielles ordinaries.- *Atti della academia nazionale dei Lincei. Rendiconti.* 1947, т. 3, №3-4, p.210-215.