

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова  
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій  
Кафедра методів математичної фізики

## Дипломна робота

бакалавра

на тему: «**Антиплоська задача теорії пружності для  
двошарової прямокутної області з дефектом**»

«Antiplane problem of the theory of elasticity for a two-layer rectangular region with a defect»

Виконав: студент денної форми навчання  
спеціальності 113 Прикладна математика  
Чернобровкін Артем Валерійович

Керівник: к. ф.-м. н., доц. Журавльова З. Ю.

Рецензент: к. ф.-м. н., доц. Фесенко Г.О.

Рекомендовано до захисту:  
Протокол засідання кафедри  
№ \_\_\_\_ від «\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ р.  
Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № \_\_\_\_\_  
Протокол № \_\_\_\_ від «\_\_\_\_» \_\_\_\_ р.  
Оцінка \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_  
Голова ЕК

Одеса — 2021 р.

# ЗМІСТ

<b>Вступ</b>		3
<b>1 Антиплоска задача теорії пружності для двошарової прямокутної області з межфазною тріщиною</b>		5
1.1	Постановка задачі . . . . .	5
1.2	Зведення задачі до одновимірної . . . . .	7
1.3	Обернення інтегрального перетворення . . . . .	10
1.4	Перевірка крайових умов . . . . .	11
1.5	Підсумовування слабо-збіжних частин рядів. . . . .	12
1.5.1	Підсумовування слабо-збіжних частин $W_1$ . . . . .	13
1.5.2	Підсумовування слабо-збіжних частин $\tau_{yz}^1$ . . . . .	16
1.5.3	Підсумовування слабо-збіжних частин $W_2$ . . . . .	17
1.5.4	Підсумовування слабо-збіжних частин $\tau_{yz}^2$ . . . . .	20
1.6	Сінгулярне інтегро-диференціальне рівняння рівняння (СІДР)	22
1.7	Коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) . . . . .	25
1.8	<b>Аналіз числових розрахунків</b> . . . . .	26
1.8.1	КІН при зміні довжини тріщини . . . . .	26
1.8.2	КІН при зміні довжини тріщини та розміру першого шару . . . . .	29
<b>Висновки</b>		31
<b>Список літератури</b>		32

## ВСТУП

### Актуальність

Інженерні проблеми визначення міцності конструкцій потребують адекватних та простих математичних моделей, за допомогою яких можна підраховувати величини напружень та їх розподіл усередині області.

Реальні конструкції досить часто складаються з декількох матеріалів, тому задачі теорії пружності для шаруватих тіл є надзвичайно актуальними.

Також слід зауважити, що особливим класом задач є задачі з різними дефектами. Зокрема, виокремлюють два види дефектів: тріщина або включення.

У даній роботі розглянуто модельну задачу для двошарової прямокутної області, що послаблена на місці стику тріщиною. Слід зауважити, що такого роду дефекти можуть з'явитися впродовж тривалого впливу різних природних умов: вітер, вода, механічна дія.

Цю задачу розв'язано за допомогою методу інтегральних перетворень. Використання рекурентних співвідношень для визначення сталих одного шару через сталі іншого дозволяє у подальшому розв'язувати задачу для області, що поділена на  $N$  шарів. Також слід відзначити, що у випадку дефекту треба побудувати сингулярне інтегро-диференціальне рівняння.

### Мета

Для двошарової прямокутної області досліджено розподіл напружень у залежності від співвідношення модулів пружності шарів та геометричних параметрів області.

Також треба розглянути різні види навантажень та характеристик матеріалу у дефекті.

Обчислити коефіцієнти інтенсивності напружень в залежності від довжини тріщини.

### Об'єкт дослідження

Антиплоска задача теорії пружності, що послаблена міжфазною тріщиною.

### Список опублікованих праць за темою дипломної роботи

- 1) Журавльова З.Ю., Чернобровкін А.В. Антиплоска задача теорії пружності для двошарової прямокутної області. //Інформатика, математика, автоматика ІМА :: 2020, Матеріали міжнародної науково-технічної конференції студентів та молодих вчених, Суми, Сумський державний університет, 2020– 214-215 с.
- 2) Журавльова З.Ю., Чернобровкін А.В. Антиплоска задача теорії пружності для двошарової прямокутної області з міжфазною тріщиною. // Інформатика, математика, автоматика ІМА :: 2021, Матеріали міжнародної науково-технічної конференції студентів та молодих вчених, Суми, Сумський державний університет, 2021– 200-201 с.
- 3) Журавльова З.Ю., Чернобровкін А.В. Антиплоска задача теорії пружності для прямокутної області з горизонтальним дефектом. // Інформатика, інформаційні системи та технології: тези доповідей вісімнадцятої всеукраїнської конференції студентів і молодих науковців. – Одеса. – 2021. – 137-138 с.
- 4) Журавльова З.Ю., Чернобровкін А.В. Антиплоска задача теорії пружності для двошарової прямокутної області з горизонтальним дефектом у нижньому шарі. // II Всеукраїнська науково-практична конференція студентів та молодих вчених "Математика та математичне моделювання у сучасному технічному університеті - Покровськ. - 2021 - 51-53 с.
- 5) Журавльова З.Ю., Чернобровкін А.В. Антиплоска задача теорії пружності для прямокутної області з вертикальним дефектом // Priority directions of science and technology development. Proceedings of the 8th International scientific and practical conference. SPC "Sci-conf.com.ua". Kyiv, Ukraine. 2021. Pp. 319-322.
- 6) Журавльова З.Ю., Чернобровкін А.В. Антиплоска задача теорії пружності для двошарової прямокутної області з дефектом. // Матеріали 77-ї звітної студентської наукової конференції Одеського національного університету імені І.І. Мечникова-Одеса -ОНУ - 2021

## РОЗДІЛ 1

# АНТИПЛОСКА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ДВОШАРОВОЇ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ З МЕЖФАЗНОЮ ТРІЩИНОЮ

## 1.1. Постановка задачі

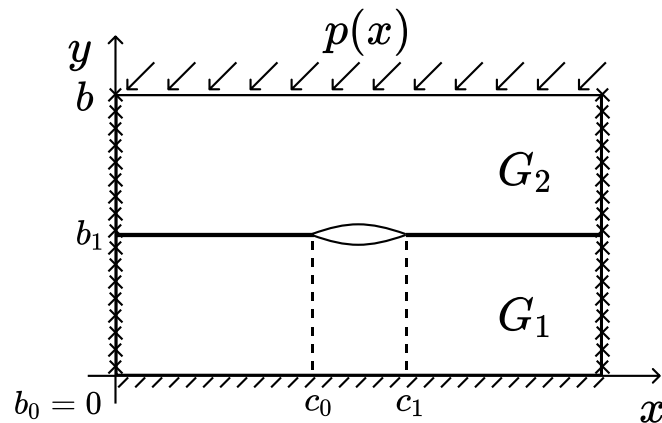


Рис. 1.1. Геометрія та координатна система прямокутної області

Розглядається область (Рис.1.1) ( $G_1, G_2$  — модулі пружності першого та другого шару відповідно), яка займає область, що описується у декартовій системі координат співвідношеннями  $0 < x < a, 0 < y < b$ , що знаходиться у стані антипоскої деформації. Дана область поділена на два різномірних шари по вісі  $y$ . Нехай краї  $x = 0, x = a$  нерухомо закріплені.

$$W_k \Big|_{x=0} = 0, \quad W_k \Big|_{x=a} = 0, \quad b_{k-1} < y < b_k, \quad k = 1, 2 \quad (1.1)$$

де  $W_k(x, y)$  — переміщення відносно вісі  $z$  у  $k$ -му шарі,  $b_0 = 0, b_2 = b$ .

Грань  $y = 0$  знаходиться в умовах гладкого контакту, на грань  $y = b$  діє навантаження інтенсивності  $p(x)$

$$\tau_{yz}^1 \Big|_{y=0} = 0, \quad \tau_{yz}^2 \Big|_{y=b} = p(x), \quad 0 < x < a \quad (1.2)$$

де  $\tau_{yz}^1(x,y), \tau_{yz}^2(x,y)$ — дотичні напруження першого та другого шарів відповідно.

Між шарами виконуються умови спряження та умови на тріщину:

$$W_1 \Big|_{y=b_1-0} - W_2 \Big|_{y=b_1+0} = \chi(x),$$

$$0 < x < a \quad (1.3)$$

$$\tau_{yz}^1 \Big|_{y=b_1-0} - \tau_{yz}^2 \Big|_{y=b_1+0} = 0$$

де:

$$\chi(x) = \begin{cases} \neq 0, & x \in [c_0; c_1] \\ 0, & x \in [0; c_0] \cup (c_1; a] \end{cases}$$

Потрібно знайти переміщення та напруження кожного з шарів, що задовольняють умовам (1.1)—(1.3) та рівняння рівноваги

$$\frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_k}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad b_{k-1} < y < b_k \quad (1.4)$$

Запишемо крайову задачу

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_k}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad b_{k-1} < y < b_k \\ \\ W_k \Big|_{x=0} = 0, \quad W_k \Big|_{x=a} = 0 \quad b_{k-1} < y < b_k \\ \\ \tau_{yz}^1 \Big|_{y=0} = 0, \quad \tau_{yz}^2 \Big|_{y=b} = p(x), \quad 0 < x < a, \quad b_{k-1} < y < b_k \end{array} \right. \quad (1.5)$$

де:

$$\tau_{yz}^1 \Big|_{y=0} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial W_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \tau_{yz}^2 \Big|_{y=b} = p(x) \Leftrightarrow \frac{\partial W_2}{\partial y} \Big|_{y=b} = \frac{p(x)}{G_2} \quad (1.6)$$

Умови спряження:

$$W_1 \Big|_{y=b_1-0} = W_2 \Big|_{y=b_1+0} + \chi(x), \quad 0 < x < a \quad (1.7)$$

$$\tau_{yz}^1 \Big|_{y=b_1-0} = \tau_{yz}^2 \Big|_{y=b_1+0}$$

де:

$$\tau_{yz}^1 \Big|_{y=b_1-0} = \tau_{yz}^2 \Big|_{y=b_1+0} \Leftrightarrow G_1 \frac{\partial W_1}{\partial y} \Big|_{y=b_1-0} = G_2 \frac{\partial W_2}{\partial y} \Big|_{y=b_1+0} \quad (1.8)$$

$G_k$  — модулі пружності  $k$ -го шару,  $k = 1, 2$

## 1.2. Зведення задачі до одновимірної

Вхідну задачу зведемо до одновимірної застосуємо скінченне інтегральне *sin* -перетворення Фур'є за змінною  $x$ :

$$W_{\lambda,k}(y) = \int_0^a W_k(x,y) \sin \alpha_n x \, dx \quad (1.9)$$

$$p_\alpha = \int_0^a p(x) \sin \alpha_n x \, dx \quad (1.10)$$

З формулою обернення:

$$W_k(x,y) = \frac{a}{2} \sum_{n=0}^{\infty} W_{\alpha_n,k}(y) \sin \alpha_n x \quad (1.11)$$

Запишемо граничні умови у просторі трансформант:

$$W'_{\alpha_n,1} \Big|_{y=0} = \int_0^a \frac{\partial W_1}{\partial y} \Big|_{y=0} \sin \alpha_n x \, dx \quad (1.12)$$

$$W'_{\alpha_n,2} \Big|_{y=b} = \int_0^a \frac{\partial W_2}{\partial y} \Big|_{y=b} \sin \alpha_n x \, dx \quad (1.13)$$

Запишемо навантаження у просторі трансформант:

$$\frac{p_{\alpha_n}}{G_2} = \int_0^a \frac{p(x)}{G_2} \sin \alpha_n x \, dx \quad (1.14)$$

Запишемо умови спряження у просторі трансформант:

$$W_{\alpha_n,1} \Big|_{y=b_1-0} = \int_0^a W_1 \Big|_{y=b_1-0} \sin \alpha_n x \, dx \quad (1.15)$$

$$W_{\alpha_n,2} \Big|_{y=b_1+0} = \int_0^a W_2 \Big|_{y=b_1+0} \sin \alpha_n x \, dx \quad (1.16)$$

$$\chi_{\alpha_n} = \int_0^a \chi(x) \sin \alpha_n x \, dx \quad (1.17)$$

$$G_1 W'_{\alpha_n,1} \Big|_{y=b_1-0} = G_1 \int_0^a \frac{\partial W_1}{\partial y} \Big|_{y=b_1-0} \sin \alpha_n x \, dx \quad (1.18)$$

$$G_2 W'_{\alpha_n,2} \Big|_{y=b_1+0} = G_2 \int_0^a \frac{\partial W_2}{\partial y} \Big|_{y=b_1+0} \sin \alpha_n x \, dx \quad (1.19)$$

Запишемо крайову задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} W''_{\alpha_n,k}(y) - \alpha_n^2 W_{\alpha_n,k}(y) = 0 \\ W'_{\alpha_n,1} \Big|_{y=0} = 0, \quad W'_{\alpha_n,2} \Big|_{y=b} = \frac{p\alpha_n}{G_2} \\ W_{\alpha_n,1} \Big|_{y=b_1-0} = W_{\alpha_n,2} \Big|_{y=b_1+0} + \chi_{\alpha_n}(x) \\ G_1 W'_{\alpha_n,1} \Big|_{y=b_1-0} = G_2 W'_{\alpha_n,2} \Big|_{y=b_1+0} \end{array} \right. \quad (1.20)$$

де  $\alpha_n$  — параметр інтегрального перетворення,  $G_1, G_2$  — модулі пружності першого та другого шару відповідно.

Загальні розв'язки (1.20) тоді будуть знайдені у вигляді:

$$\begin{aligned} W_{\alpha_n,k}(y) &= A_k e^{\alpha_n y} + B_k e^{-\alpha_n y} \\ W'_{\alpha_n,k}(y) &= \alpha_n (A_k e^{\alpha_n y} - B_k e^{-\alpha_n y}) \end{aligned} \quad (1.21)$$

де  $A_k, B_k$  — невідомі сталі.

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 e^{\alpha_n b_1} + B_1 e^{-\alpha_n b_1} = A_2 e^{\alpha_n b_1} + B_2 e^{-\alpha_n b_1} + \chi_{\alpha_n}(x) \\ G_1 (A_1 e^{\alpha_n b_1} - B_1 e^{-\alpha_n b_1}) = G_2 (A_2 e^{\alpha_n b_1} - B_2 e^{-\alpha_n b_1}) \end{array} \right. \quad (1.22)$$

З умов спряження (1.22) виражемо  $A_2, B_2$  через  $A_1, B_1$  [2] :

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{(A_1 G_1 e^{2\alpha_n b_1} - B_1 G_1 + G_2 (A_1 e^{2\alpha_n b_1} + B_1 - \chi_{\alpha_n} e^{\alpha_n b_1})) e^{-2\alpha_n b_1}}{2G_2} \\ B_2 &= \frac{-A_1 G_1 e^{2\alpha_n b_1} + B_1 G_1 + G_2 (A_1 e^{2\alpha_n b_1} + B_1 - \chi_{\alpha_n} e^{\alpha_n b_1})}{2G_2} \end{aligned} \quad (1.23)$$

Невідомі сталі першого шару знайдено з крайових умов задачі (1.20).

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{G_2\alpha\chi e^{3\alpha b_1} - G_2\alpha\chi e^{\alpha(2b+b_1)} - 2p_\alpha e^{\alpha(b+2b_1)}}{\alpha(G_1 e^{2\alpha b} + G_1 e^{2\alpha b_1} - G_2 e^{2\alpha b} + G_2 e^{2\alpha b_1} - (G_1 e^{2\alpha b} + G_1 e^{2\alpha b_1} + G_2 e^{2\alpha b} - G_2 e^{2\alpha b_1})e^{2\alpha b_1})} \\ B_1 &= \frac{G_2\alpha\chi e^{3\alpha b_1} - G_2\alpha\chi e^{\alpha(2b+b_1)} - 2p_\alpha e^{\alpha(b+2b_1)}}{\alpha(G_1 e^{2\alpha b} + G_1 e^{2\alpha b_1} - G_2 e^{2\alpha b} + G_2 e^{2\alpha b_1} - (G_1 e^{2\alpha b} + G_1 e^{2\alpha b_1} + G_2 e^{2\alpha b} - G_2 e^{2\alpha b_1})e^{2\alpha b_1})} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Підставимо  $A_1, B_1, A_2, B_2$  у  $W_2, W_2'$  з системи (1.20) та використовуємо крайові умови системи (1.20). Отримаємо розв'язок у просторі трансформант:

$$W_{\alpha_n,1} = -\frac{\alpha_n \chi_{\alpha_n} G_2 [-E^1 + E^2] - 2p_{\alpha_n} E^3}{\alpha_n [G^- E^4 + G^+ E^5]} \quad (1.25)$$

$$W_{\alpha_n,2} = -\frac{G_1 G_2 \alpha_n \chi_{\alpha_n} (E^6 + E^7) + p_{\alpha_n} (-G^+ E^3 + G^- E^8)}{\alpha_n G_2 [G^- E^4 + G^+ E^5]}$$

де:

$$\begin{aligned} E^1 &= e^{-\alpha_n(b_1+y)} + e^{-\alpha_n(b_1-y)} \\ E^2 &= e^{-\alpha_n(2b-b_1+y)} + e^{-\alpha_n(2b-b_1-y)} \\ E^3 &= e^{-\alpha_n(b+y)} + e^{-\alpha_n(b-y)} \\ E^4 &= -e^{-2\alpha_n(b-b_1)} + e^{-2\alpha_n b_1} \\ E^5 &= 1 - e^{-2\alpha_n b} \\ E^6 &= -e^{-\alpha(b_1+y)} + e^{-\alpha(-b_1+y)} \\ E^7 &= -e^{-\alpha(2b+b_1-y)} + e^{-\alpha(2b-b_1-y)} \\ E^8 &= e^{-\alpha(b+2b_1-y)} + e^{-\alpha(b-2b_1+y)} \\ G^- &= G_1 - G_2; \\ G^+ &= G_1 + G_2; \end{aligned}$$

### 1.3. Обернення інтегрального перетворення

Знайдені розв'язки у просторі трансформант обернено за формулою (1.11). Отримаємо:

$$W_1(x,y) = -\frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n \chi_{\alpha_n} G_2 [-E^1 + E^2] - 2p_{\alpha_n} E^3}{\alpha_n [G^- E^4 + G^+ E^5]} \sin \alpha_n x \quad (1.26)$$

$$W_2(x,y) = -\frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_1 G_2 \alpha_n \chi_{\alpha_n} (E^6 + E^7) + p_{\alpha_n} (-G^+ E^3 + G^- E^8)}{\alpha_n G_2 [G^- E^4 + G^+ E^5]} \sin \alpha_n x \quad (1.27)$$

Враховуючи (1.14) та (1.17), формули (1.26) та (1.27) можна переписати у наступному вигляді:

$$W_1(x,y) = -\frac{2}{a} \int_0^a \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\alpha_n \chi(\xi) G_2 [-E^1 + E^2] - 2p(\xi) E^3}{\alpha_n [G^- E^4 + G^+ E^5]} \right] \Omega(x,\xi) d\xi \quad (1.28)$$

$$W_2(x,y) = -\frac{2}{a} \int_0^a \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{G^* \alpha_n \chi(\xi) (E^6 + E^7) + p(\xi) (G^- E^8 - G^+ E^3)}{\alpha_n G_2 [G^- E^4 + G^+ E^5]} \right] \Omega(x,\xi) d\xi \quad (1.29)$$

де:  $\Omega(x,\xi) = \sin \alpha_n x \cdot \sin \alpha_n \xi$ ,  $G^* = G_1 \cdot G_2$

## 1.4. Перевірка крайових умов

Слід відзначити, що при перевірці однорідних крайових умов не виникло ніяких труднощів, тому розглянемо випадок неоднорідної крайової умови для переміщення  $W_2$ .

$$\left. \frac{\partial W_2}{\partial y} \right|_{y=b} = \frac{p(x)}{G_2},$$

де

$$\left. \frac{\partial W_2}{\partial y} \right|_{y=b} = \frac{2}{a} \int_0^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(\xi) \sin(\alpha_n x) \sin(\alpha_n \xi)}{G_2} d\xi$$

Для того, щоб перевірити дану неоднорідну крайову умову слід зробити деякі перетворення:

Зміна порядку інтегрування та підсумовування

$$\frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^a p(\xi) \sin(\alpha_n \xi) d\xi \right] \sin(\alpha_n x)$$

Продовжимо навантаження  $p(x)$  у вихідній задачі непарних чином для того, щоб перевірити неоднорідність граничної умови, тому що немає матеріалу на  $-a < x < 0$ . І для розширеної  $p(x)$  використовуємо розвинення в ряд Фур'є. Вибір навантажень здійснюємо таким чином, щоб  $p(0) = 0$ , в іншому випадку буде розрив першого роду.

## 1.5. Підсумовування слабо-збіжних частин рядів.

Розглянемо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)$ , що є слабо-збіжним. Для відокремлення його слабо-збіжної частини використовується наступна методика [3], а саме:

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)$  розбивається на два доданки  $\sum_{n=1}^{\infty} a(n) = \sum_{n=0}^A a(n) + \sum_{n=A}^{\infty} a(n)$ .

В другому отриманому ряді функція замінюється своїм асимптотичним зображенням при  $n \rightarrow \infty$ , після чого додається та віднімається доданок

$\sum_{n=0}^A \tilde{a}(n)$ , де  $\tilde{a}(n)$ - асимптотичне зображення функції  $a(n)$ . Отже:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}(n) + \sum_{n=0}^A (a(n) - \tilde{a}(n)), \quad A \rightarrow \infty \quad (1.30)$$

Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}(n)$ , що входить у це подання можна підсумувати за допомогою наступних формул [4]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} \sin nx = \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cosh t - \cos x} \quad (1.31)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} \cos nx = \frac{\operatorname{sh} t}{2(\operatorname{ch} t - \cos x)} - \frac{1}{2} \quad (1.32)$$

Інтергуючи формулу (1.31), отримаємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-nt} \cos nx = -\frac{1}{2} \ln(\operatorname{ch} t - \cos x) \quad (1.33)$$

### 1.5.1. Підсумовування слабко-збіжних частин $W_1$

Передусім зробимо деякі перетворення, тобто розіб'ємо ряд на дві суми:

$$W_1(x,y) = -\frac{2}{a} \int_0^a \chi(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_2[-E^1 + E^2]}{G^-E^4 + G^+E^5} \Omega(x,\xi) d\xi + \\ + \frac{4}{a} \int_0^a p(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E^3}{\alpha_n(G^-E^4 + G^+E^5)} \Omega(x,\xi) d\xi \quad (1.34)$$

Розглянемо окремо ці ряди:

$$-\frac{2}{a} \int_0^a \chi(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_2[-E^1 + E^2]}{G^-E^4 - G^+E^5} \Omega(x,\xi) d\xi$$

Використовуючи формулу (1.32) отримаємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha_n (\xi - x) e^{-\alpha_n(b_1+y)} (-1) = -\frac{\text{sh } t_0}{2(\text{ch } t_0 - \cos x_0)} + \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha_n (\xi - x) e^{-\alpha_n(b_1-y)} (-1) = -\frac{\text{sh } t_1}{2(\text{ch } t_1 - \cos x_0)} + \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha_n (\xi - x) e^{-\alpha_n(2b-b_1+y)} = \frac{\text{sh } t_2}{2(\text{ch } t_2 - \cos x_0)} - \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha_n (\xi - x) e^{-\alpha_n(2b-b_1-y)} = \frac{\text{sh } t_3}{2(\text{ch } t_3 - \cos x_0)} - \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha_n (\xi + x) e^{-\alpha_n(b_1+y)} = \frac{\text{sh } t_0}{2(\text{ch } t_0 - \cos x_1)} - \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha_n (\xi + x) e^{-\alpha_n(b_1-y)} = \frac{\text{sh } t_1}{2(\text{ch } t_1 - \cos x_1)} - \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha_n (\xi + x) e^{-\alpha_n(2b-b_1+y)} (-1) = -\frac{\text{sh } t_3}{2(\text{ch } t_3 - \cos x_1)} + \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha_n (\xi + x) e^{-\alpha_n(2b-b_1-y)} (-1) = -\frac{\text{sh } t_4}{2(\text{ch } t_4 - \cos x_0)} + \frac{1}{2}$$

Де:

$$t_0 = \frac{\pi}{a}(b_1 + y); \quad t_2 = \frac{\pi}{a}(2b - b_1 + y); \quad x_0 = \frac{\pi}{a}(\xi - x);$$

$$t_1 = \frac{\pi}{a}(b_1 - y); \quad t_3 = \frac{\pi}{a}(2b - b_1 - y); \quad x_1 = \frac{\pi}{a}(\xi + x);$$

Тоді асимптотичне зображення для першого доданка  $W_1$  матиме вигляд:

$$\sum_{n=0}^A \tilde{a}(n) = \sum_{\varkappa=0}^7 \Upsilon^1 C_{\varkappa}$$

тут і далі:

$$\Upsilon^1 = \frac{G_2}{4G^+}$$

$$C_0 = -\frac{\text{sh } t_0}{\text{ch } t_0 - \cos x_0}$$

$$C_1 = -\frac{\text{sh } t_1}{\text{ch } t_1 - \cos x_0}$$

$$C_2 = \frac{\text{sh } t_2}{\text{ch } t_2 - \cos x_0}$$

$$C_3 = \frac{\text{sh } t_3}{\text{ch } t_3 - \cos x_0}$$

$$C_4 = \frac{\text{sh } t_0}{\text{ch } t_0 - \cos x_1}$$

$$C_5 = \frac{\text{sh } t_1}{\text{ch } t_1 - \cos x_1}$$

$$C_6 = -\frac{\text{sh } t_2}{\text{ch } t_2 - \cos x_1}$$

$$C_7 = -\frac{\text{sh } t_3}{\text{ch } t_3 - \cos x_0}$$

Тоді перший доданок  $W_1$  прийме вигляд:

$$-\frac{2}{a} \int_0^a \chi(\xi) \left[ \Upsilon^1 \sum_{\varkappa=0}^7 C_{\varkappa} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^A \Xi(x, \xi) [Q_1 - Q_2] \right] d\xi \quad (1.35)$$

тут і далі:

$$\Xi(x, \xi) = \cos \alpha_n(\xi - x) - \cos \alpha_n(\xi + x)$$

$$Q_1 = \frac{G_2[-E^1 + E^2]}{G^- E^4 + G^+ E^5}$$

$$Q_2 = \frac{G_2[-E^1 + E^2]}{G^+}$$

$$\frac{4}{a} \int_0^a p(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E^3}{\alpha_n (G^- E^4 + G^+ E^5)} \Omega(x, \xi) d\xi$$

Використовуюя формулу (1.33) отримаємо:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \cos \alpha_n (\xi - x) e^{-\alpha_n (b+y)} &= -\frac{a}{2\pi} \ln (\operatorname{ch} t_4 - \cos x_0) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \cos \alpha_n (\xi - x) e^{-\alpha_n (b-y)} &= -\frac{a}{2\pi} \ln (\operatorname{ch} t_5 - \cos x_0) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \cos \alpha_n (\xi + x) e^{-\alpha_n (b+y)} (-1) &= \frac{a}{2\pi} \ln (\operatorname{ch} t_4 - \cos x_1) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \cos \alpha_n (\xi + x) e^{-\alpha_n (b-y)} (-1) &= \frac{a}{2\pi} \ln (\operatorname{ch} t_5 - \cos x_1) \end{aligned}$$

Де:

$$t_4 = \frac{\pi}{a}(b+y); \quad t_5 = \frac{\pi}{a}(b-y); \quad x_0 = \frac{\pi}{a}(\xi-x) \quad x_1 = \frac{\pi}{a}(\xi+x)$$

Тоді асимптотичне зображення для другого доданка  $W_1$  матиме вигляд:

$$\sum_{n=0}^A \tilde{a}(n) = \sum_{\varkappa=8}^{11} \Upsilon C_{\varkappa}$$

де

$$\Upsilon^2 = \frac{a}{4\pi G^+}$$

$$C_8 = -\ln (\operatorname{ch} t_4 - \cos x_0)$$

$$C_{10} = \ln (\operatorname{ch} t_4 - \cos x_1)$$

$$C_9 = -\ln (\operatorname{ch} t_5 - \cos x_0)$$

$$C_{11} = \ln (\operatorname{ch} t_5 - \cos x_1)$$

Тоді другий доданок  $W_1$  прийме вигляд:

$$\frac{4}{a} \int_0^a p(\xi) \left[ \Upsilon^2 \sum_{\varkappa=8}^{11} C_{\varkappa} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^A \Xi(x, \xi) [Q_3 - Q_4] \right] d\xi \quad (1.36)$$

тут і далі:

$$Q_3 = \frac{E^3}{\alpha_n (G^- E^4 + G^+ E^5)}$$

$$Q_4 = \frac{E^3}{\alpha_n G^+}$$

Тоді  $W_1$  прийме вигляд:

$$W_1 = -\frac{2}{a} \int_0^a \chi(\xi) \left[ \Upsilon^1 \sum_{\varkappa=0}^7 C_{\varkappa} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^A \Xi(x, \xi) [Q_1 - Q_2] \right] d\xi + \\ + \frac{4}{a} \int_0^a p(\xi) \left[ \Upsilon^2 \sum_{\varkappa=8}^{11} C_{\varkappa} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^A \Xi(x, \xi) [Q_3 - Q_4] \right] d\xi \quad (1.37)$$

### 1.5.2. Підсумовування слабко-збіжних частин $\tau_{yz}^1$

$$\tau_{yz}^1 = G_1 \left[ -\frac{2}{a} \int_0^a \chi(\xi) \left[ \Upsilon^1 \frac{\alpha}{2} \sum_{\varkappa=0}^7 C'_{\varkappa} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^A \Xi(x, \xi) [Q'_1 - Q'_2] \right] d\xi + \right. \\ \left. + \frac{4}{a} \int_0^a p(\xi) \left[ \Upsilon^2 \alpha \sum_{\varkappa=8}^{11} C'_{\varkappa} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^A \Xi(x, \xi) [Q'_3 - Q'_4] \right] d\xi \right] \quad (1.38)$$

$$C'_0 = -\frac{1 - \operatorname{ch} t_0 \cos x_0}{(\operatorname{ch} t_0 - \cos x_0)^2}$$

$$C'_1 = -\frac{-1 + \operatorname{ch} t_1 \cos x_0}{(\operatorname{ch} t_1 - \cos x_0)^2}$$

$$C'_2 = \frac{1 - \operatorname{ch} t_2 \cos x_0}{(\operatorname{ch} t_2 - \cos x_0)^2}$$

$$C'_3 = -\frac{1 - \operatorname{ch} t_3 \cos x_0}{(\operatorname{ch} t_3 - \cos x_0)^2}$$

$$C'_4 = \frac{1 - \operatorname{ch} t_0 \cos x_1}{(\operatorname{ch} t_0 - \cos x_1)^2}$$

$$C'_5 = -\frac{1 - \operatorname{ch} t_1 \cos x_1}{(\operatorname{ch} t_1 - \cos x_1)^2}$$

$$Q'_1 = \frac{G_2[-E^{1'} + E^{2'}]}{G^- E^4 + G^+ E^5}$$

$$Q'_2 = \frac{G_2[-E^{1'} + E^{2'}]}{G^+}$$

$$C'_6 = -\frac{1 - \operatorname{ch} t_2 \cos x_1}{(\operatorname{ch} t_2 - \cos x_1)^2}$$

$$C'_7 = \frac{1 - \operatorname{ch} t_3 \cos x_1}{(\operatorname{ch} t_3 - \cos x_1)^2}$$

$$C'_8 = -\frac{\operatorname{sh} t_4}{\operatorname{ch} t_4 - \cos x_0}$$

$$C'_9 = \frac{\operatorname{sh} t_5}{\operatorname{ch} t_5 - \cos x_0}$$

$$C'_{10} = \frac{\operatorname{sh} t_4}{\operatorname{ch} t_4 - \cos x_1}$$

$$C'_{11} = -\frac{\operatorname{sh} t_5}{\operatorname{ch} t_5 - \cos x_1}$$

$$Q'_3 = \frac{E^{3'}}{\alpha_n(G^- E^4 + G^+ E^5)}$$

$$Q'_4 = \frac{E^{3'}}{\alpha_n G^+}$$

$$E^{1'} = \alpha_n(-e^{-\alpha_n(b_1+y)} + e^{-\alpha_n(b_1-y)})$$

$$E^{2'} = \alpha_n(-e^{-\alpha_n(2b-b_1+y)} + e^{-\alpha_n(2b-b_1-y)})$$

$$E^{3'} = \alpha_n(-e^{-\alpha_n(b+y)} + e^{-\alpha_n(b-y)})$$

### 1.5.3. Підсумовування слабко-збіжних частин $W_2$

Передусім зробимо деякі перетворення, тобто розіб'ємо ряд на дві суми:

$$W_2(x, y) = -\frac{2}{a} \int_0^a \chi(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{G_1(E^6 + E^7)}{G^- E^4 + G^+ E^5} \right] \Omega(x, \xi) d\xi - \\ - \frac{2}{a} \int_0^a p(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{G^- E^8 - G^+ E^3}{\alpha_n G_2 [G^- E^4 + G^+ E^5]} \right] \Omega(x, \xi) d\xi \quad (1.39)$$

Розглянемо окремо ці ряди:

$$-\frac{2}{a} \int_0^a \chi(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{G_1(E^6 + E^7)}{G^- E^4 + G^+ E^5} \right] \Omega(x, \xi) d\xi$$

Використовуючи формулу (1.32) отримаємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha_n (\xi - x) e^{-\alpha_n (b_1 + y)} = -\frac{\text{sh } \vartheta_0}{2(\text{ch } \vartheta_0 - \cos x_0)} + \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha_n (\xi - x) e^{-\alpha_n (-b_1 + y)} = \frac{\text{sh } \vartheta_1}{2(\text{ch } \vartheta_1 - \cos x_0)} - \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha_n (\xi - x) e^{-\alpha_n (2b + b_1 - y)} = -\frac{\text{sh } \vartheta_2}{2(\text{ch } \vartheta_2 - \cos x_0)} + \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha_n (\xi - x) e^{-\alpha_n (2b - b_1 - y)} = \frac{\text{sh } \vartheta_3}{2(\text{ch } \vartheta_3 - \cos x_0)} - \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha_n (\xi + x) e^{-\alpha_n (b_1 + y)} = \frac{\text{sh } \vartheta_0}{2(\text{ch } \vartheta_0 - \cos x_1)} - \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha_n (\xi + x) e^{-\alpha_n (-b_1 + y)} = -\frac{\text{sh } \vartheta_1}{2(\text{ch } \vartheta_1 - \cos x_1)} + \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha_n (\xi + x) e^{-\alpha_n (2b + b_1 - y)} = \frac{\text{sh } \vartheta_2}{2(\text{ch } \vartheta_2 - \cos x_1)} - \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha_n (\xi + x) e^{-\alpha_n (2b - b_1 - y)} = -\frac{\text{sh } \vartheta_3}{2(\text{ch } \vartheta_3 - \cos x_1)} + \frac{1}{2}$$

Де:

$$\vartheta_0 = \frac{\pi}{a}(b_1 + y); \quad \vartheta_2 = \frac{\pi}{a}(2b + b_1 - y); \quad x_0 = \frac{\pi}{a}(\xi - x);$$

$$\vartheta_1 = \frac{\pi}{a}(-b_1 + y); \quad \vartheta_3 = \frac{\pi}{a}(2b - b_1 - y); \quad x_1 = \frac{\pi}{a}(\xi + x);$$

Тоді асимптотичне зображення для першого доданка  $W_2$  матиме вигляд:

$$\sum_{n=0}^A \tilde{a}(n) = \sum_{\varsigma=0}^7 \Upsilon^3 D_{\varsigma}$$

$$\Upsilon^3 = \frac{G_1}{G^+}$$

$$D_0 = -\frac{\text{sh } \vartheta_0}{2(\text{ch } \vartheta_0 - \cos x_0)}$$

$$D_4 = \frac{\text{sh } \vartheta_0}{2(\text{ch } \vartheta_0 - \cos x_1)}$$

$$D_1 = \frac{\text{sh } \vartheta_1}{2(\text{ch } \vartheta_1 - \cos x_0)}$$

$$D_5 = -\frac{\text{sh } \vartheta_1}{2(\text{ch } \vartheta_1 - \cos x_1)}$$

$$D_2 = -\frac{\text{sh } \vartheta_2}{2(\text{ch } \vartheta_2 - \cos x_0)}$$

$$D_6 = \frac{\text{sh } \vartheta_2}{2(\text{ch } \vartheta_2 - \cos x_1)}$$

$$D_3 = \frac{\text{sh } \vartheta_3}{2(\text{ch } \vartheta_3 - \cos x_0)}$$

$$D_7 = -\frac{\text{sh } \vartheta_3}{2(\text{ch } \vartheta_3 - \cos x_1)}$$

Тоді перший доданок  $W_2$  прийме вигляд:

$$-\frac{2}{a} \int_0^a \chi(\xi) \left[ \Upsilon^3 \sum_{\varsigma=0}^7 D_{\varsigma} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^A \Xi(x, \xi) [Q_5 - Q_6] \right] d\xi \quad (1.40)$$

тут і далі:

$$Q_5 = \frac{G_1(E^6 + E^7)}{G^- E^4 + G^+ E^5}$$

$$Q_6 = \frac{G_1(E^6 + E^7)}{G^+}$$

$$-\frac{2}{a} \int_0^a p(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{G^- E^8 - G^+ E^3}{\alpha_n G_2 [G^- E^4 + G^+ E^5]} \right] \Omega(x, \xi) d\xi$$

Використовуюя формулу (1.31) отримаємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \cos \alpha_n (\xi - x) e^{-\alpha_n (b+2b_1-y)} = -\frac{a}{2\pi} \ln (\text{ch } \vartheta_4 - \cos x_0)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \cos \alpha_n (\xi - x) e^{-\alpha_n (b-2b_1+y)} = -\frac{a}{2\pi} \ln (\text{ch } \vartheta_5 - \cos x_0)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \cos \alpha_n (\xi - x) e^{-\alpha_n (b+y)} = \frac{a}{2\pi} \ln (\text{ch } \vartheta_6 - \cos x_0)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \cos \alpha_n (\xi - x) e^{-\alpha_n (b-y)} = \frac{a}{2\pi} \ln (\text{ch } \vartheta_7 - \cos x_0)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \cos \alpha_n (\xi + x) e^{-\alpha_n (b+2b_1-y)} &= \frac{a}{2\pi} \ln (\operatorname{ch} \vartheta_4 - \cos x_1) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \cos \alpha_n (\xi + x) e^{-\alpha_n (b-2b_1+y)} &= \frac{a}{2\pi} \ln (\operatorname{ch} \vartheta_5 - \cos x_1) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \cos \alpha_n (\xi + x) e^{-\alpha_n (b+y)} &= -\frac{a}{2\pi} \ln (\operatorname{ch} \vartheta_6 - \cos x_1) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \cos \alpha_n (\xi + x) e^{-\alpha_n (b-y)} &= -\frac{a}{2\pi} \ln (\operatorname{ch} \vartheta_7 - \cos x_1) \end{aligned}$$

Де:

$$\begin{aligned} \vartheta_4 &= \frac{\pi}{a}(b + 2b_1 - y); & \vartheta_6 &= \frac{\pi}{a}(b + y); & x_0 &= \frac{\pi}{a}(\xi - x); \\ \vartheta_5 &= \frac{\pi}{a}(b - 2b_1 + y); & \vartheta_7 &= \frac{\pi}{a}(b - y); & x_1 &= \frac{\pi}{a}(\xi + x); \end{aligned}$$

Тоді асимптотичне зображення для другого доданка  $W_2$  матиме вигляд:

$$\sum_{n=0}^A \tilde{a}(n) = \Upsilon^4 \Psi$$

де

$$\begin{aligned} \Upsilon^4 &= \frac{a}{4\pi G_2 G^+} \\ D_8 &= -\ln (\operatorname{ch} \vartheta_4 - \cos x_0) \\ D_9 &= -\ln (\operatorname{ch} \vartheta_5 - \cos x_0) \\ D_{10} &= \ln (\operatorname{ch} \vartheta_6 - \cos x_0) \\ D_{11} &= \ln (\operatorname{ch} \vartheta_7 - \cos x_0) \\ D_{12} &= \ln (\operatorname{ch} \vartheta_4 - \cos x_1) \\ D_{13} &= \ln (\operatorname{ch} \vartheta_5 - \cos x_1) \\ D_{14} &= -\ln (\operatorname{ch} \vartheta_6 - \cos x_1) \\ D_{15} &= -\ln (\operatorname{ch} \vartheta_7 - \cos x_1) \\ \Psi &= G^-(D_8 + D_9 + D_{12} + D_{13}) - G^+(D_{10} + D_{11} + D_{14} + D_{15}) \end{aligned}$$

Тоді другий доданок  $W_2$  прийме вигляд:

$$-\frac{2}{a} \int_0^a p(\xi) \left[ \Upsilon^4 \Psi + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^A \Xi(x, \xi) [Q_7 - Q_8] \right] d\xi \quad (1.41)$$

тут і далі:

$$Q_7 = \frac{G^- E^8 - G^+ E^3}{\alpha_n G_2 [G^- E^4 + G^+ E^5]}$$

$$Q_8 = \frac{G^- E^8 - G^+ E^3}{\alpha_n G_2 G^+}$$

Тоді  $W_2$  прийме вигляд:

$$W_2 = -\frac{2}{a} \int_0^a \chi(\xi) \left[ \Upsilon^3 \sum_{\varsigma=0}^7 D_\varsigma + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^A \Xi(x, \xi) [Q_5 - Q_6] \right] d\xi - \\ - \frac{2}{a} \int_0^a p(\xi) \left[ \Upsilon^4 \Psi + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^A \Xi(x, \xi) [Q_7 - Q_8] \right] d\xi \quad (1.42)$$

#### 1.5.4. Підсумовування слабко-збіжних частин $\tau_{yz}^2$

$$\tau_{yz}^2 = G_2 \left[ -\frac{2}{a} \int_0^a \chi(\xi) \left[ \Upsilon^3 \frac{\alpha}{2} \sum_{\varsigma=0}^7 D'_\varsigma + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^A \Xi(x, \xi) [Q'_5 - Q'_6] \right] d\xi + \right. \\ \left. + \frac{2}{a} \int_0^a p(\xi) \left[ \Upsilon^4 \alpha \Psi' + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^A \Xi(x, \xi) [Q'_7 - Q'_8] \right] d\xi \right] \quad (1.43)$$

$$\Psi' = G^-(D'_8 + D'_9 + D'_{12} + D'_{13}) - G^+(D'_{10} + D'_{11} + D'_{14} + D'_{15})$$

$$D'_0 = \frac{1 + \operatorname{ch} \vartheta_0 \cos x_0}{(\operatorname{ch} \vartheta_0 - \cos x_0)^2}$$

$$D'_1 = -\frac{1 + \operatorname{ch} \vartheta_1 \cos x_0}{(\operatorname{ch} \vartheta_1 - \cos x_0)^2}$$

$$D'_2 = -\frac{1 + \operatorname{ch} \vartheta_2 \cos x_0}{(\operatorname{ch} \vartheta_2 - \cos x_0)^2}$$

$$D'_3 = \frac{1 + \operatorname{ch} \vartheta_3 \cos x_0}{(\operatorname{ch} \vartheta_3 - \cos x_0)}$$

$$D'_4 = -\frac{1 + \operatorname{ch} \vartheta_0 \cos x_1}{(\operatorname{ch} \vartheta_0 - \cos x_1)^2}$$

$$D'_5 = \frac{1 + \operatorname{ch} \vartheta_1 \cos x_1}{(\operatorname{ch} \vartheta_1 - \cos x_1)^2}$$

$$D'_6 = \frac{1 + \operatorname{ch} \vartheta_2 \cos x_1}{(\operatorname{ch} \vartheta_2 - \cos x_1)^2}$$

$$D'_7 = -\frac{+\operatorname{ch} \vartheta_3 \cos x_1}{(\operatorname{ch} \vartheta_3 - \cos x_1)^2}$$

$$Q'_5 = \frac{G_1(E^{6'} + E^{7'})}{G^- E^4 + G^+ E^5}$$

$$Q'_6 = \frac{G_1(E^{6'} + E^{7'})}{G^+}$$

$$D'_8 = \frac{\operatorname{sh} \vartheta_4}{\operatorname{ch} \vartheta_4 - \cos x_0}$$

$$D'_9 = -\frac{\operatorname{sh} \vartheta_5}{\operatorname{ch} \vartheta_5 - \cos x_0}$$

$$D'_{10} = \frac{\operatorname{sh} \vartheta_6}{\operatorname{ch} \vartheta_6 - \cos x_0}$$

$$D'_{11} = -\frac{\operatorname{sh} \vartheta_7}{\operatorname{ch} \vartheta_7 - \cos x_0}$$

$$D'_{12} = -\frac{\operatorname{sh} \vartheta_4}{\operatorname{ch} \vartheta_4 - \cos x_1}$$

$$D'_{13} = \frac{\operatorname{sh} \vartheta_5}{\operatorname{ch} \vartheta_5 - \cos x_1}$$

$$D'_{14} = -\frac{\operatorname{sh} \vartheta_6}{\operatorname{ch} \vartheta_6 - \cos x_1}$$

$$D'_{15} = \frac{\operatorname{sh} \vartheta_7}{\operatorname{ch} \vartheta_7 - \cos x_1}$$

$$Q'_7 = \frac{G^- E^{8'} - G^+ E^{3'}}{\alpha_n G_2 [G^- E^4 + G^+ E^5]}$$

$$Q'_8 = \frac{G^- E^{8'} - G^+ E^{3'}}{\alpha_n G_2 G^+}$$

$$E^{6'} = \alpha_n (e^{-\alpha_n(b_1+y)} - e^{-\alpha_n(-b_1+y)})$$

$$E^{7'} = \alpha_n (-e^{-\alpha_n(2b+b_1-y)} + e^{-\alpha_n(2b-b_1-y)})$$

$$E^{8'} = \alpha_n (e^{-\alpha_n(b+2b_1-y)} - e^{-\alpha_n(b-2b_1+y)})$$

$$E^{3'} = \alpha_n (-e^{-\alpha_n(b+y)} + e^{-\alpha_n(b-y)})$$

## 1.6. Сінгулярне інтегро-диференціальне рівняння рівняння (СІДР)

У формулі (1.38) при розрахування була вивлена особливість, коли  $y = b_1$  та  $x = \xi$ . Застосуємо *перші чудові границі*:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\frac{x^2}{2}} = 1$$

до формули (1.38):

$$\lim_{t_1, x_0 \rightarrow 0} \frac{1 - \operatorname{ch} t_1 \cos x_0}{(\operatorname{ch} t_1 - \cos x_0)^2} \approx \frac{2(t_1^2 x_0^2 - t_1^2 + x_0^2)}{(t_1^2 + x_0^2)^2} \approx [t_1 \rightarrow 0] \approx -\frac{2}{x_0^2}$$

Тобто ми отримали такий результат:

$$C_1'^* \approx -\frac{2}{x_0^2} \quad (1.44)$$

Та формула (1.38) набуває вигляд:

$$C_1' = -\frac{1 - \operatorname{ch} t_1 \cos x_0}{(\operatorname{ch} t_1 - \cos x_0)^2} \pm C_1'^* = -\frac{1 - \operatorname{ch} t_1 \cos x_0}{(\operatorname{ch} t_1 - \cos x_0)^2} \pm \left(-\frac{2}{x_0^2}\right) \quad (1.45)$$

Пошук  $\chi(x)$  буде проводитись з припущення, що берега тріщини вільні від навантаження, тобто  $\tau_{yz}^1 \Big|_{y=b_1} = 0$  і отримаємо:

$$-\frac{G_1 \alpha \Upsilon^1}{a} \frac{d^2}{dx^2} \int_{c_0}^{c_1} \ln \frac{1}{|\xi^* - x^*|} \chi(x^*) d\xi + \int_{c_0}^{c_1} \chi(\xi^*) f(\xi^*, x^*) d\xi^* = r(x^*), c_0 < x^* < c_1 \quad (1.46)$$

Помножимо 1.46 на коефіцієнт  $\frac{a}{G_1}$ . Введемо наступну константу:  $\varrho = -\alpha \Upsilon^1$ .

Отримаємо:

$$\varrho \frac{d^2}{dx^2} \int_{c_0}^{c_1} \ln \frac{1}{|\xi^* - x^*|} \chi(x^*) d\xi + \int_{c_0}^{c_1} \chi(\xi^*) f(\xi^*, x^*) d\xi^* = r(x^*), c_0 < x^* < c_1 \quad (1.47)$$

де:

$$f(\xi^*, x^*) = - \left[ \Upsilon^1 \alpha \sum_{z=0}^7 C_z' + \sum_{n=1}^A \Xi(x, \xi) [Q_1' - Q_2'] d\xi^* \right]$$

$$r(x^*) = 4 \int_0^a p(\xi^*) \left[ \Upsilon^2 \alpha \sum_{\varkappa=8}^{11} C'_{\varkappa} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^A \Xi(\xi^*, x^*) [Q'_3 - Q'_4] \right] d\xi$$

Виконується заміна змінних  $\xi = \frac{2\xi^* - (c_0 + c_1)}{c_1 - c_0}$ ,  $x = \frac{2x^* - (c_0 + c_1)}{c_1 - c_0}$ , для переходу до інтервалів інтегрування  $[-1; 1]$ . У результаті СІДР (1.47) приймає наступний вигляд:

$$\varrho \frac{d^2}{dx^2} \int_{c_0}^{c_1} \ln \frac{1}{|\xi - x|} \tilde{\chi}(x) d\xi + \int_{c_0}^{c_1} \tilde{\chi}(\xi) \tilde{f}(\xi, x) d\xi^* = \tilde{r}(x), \quad -1 < x < 1 \quad (1.48)$$

де:

$$\tilde{\chi}(\xi) = \chi \left( \frac{(c_1 - c_0)\xi + (c_1 + c_0)}{2} \right),$$

$$\tilde{r}(x) = \frac{(c_1 - c_0)}{2} r \left( \frac{(c_1 - c_0)x + (c_1 + c_0)}{2} \right).$$

$$\tilde{f}(\xi, x) = \frac{(c_1 - c_0)^2}{4} f \left( \frac{(c_1 - c_0)\xi + (c_1 + c_0)}{2}, \frac{(c_1 - c_0)x + (c_1 + c_0)}{2} \right)$$

СІДР (1.48) розв'язується методом ортогональних поліномів [6], що дозволяє враховувати дійсний порядок особливості розв'язку на кінцях інтервалу інтегрування. Згідно з методом [5], функцію  $\tilde{\chi}(\xi)$  розвинуто у ряд за поліномами Чебишева другого роду:

$$\tilde{\chi}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} F_l \sqrt{1 - \xi^2} U_l(\xi), \quad \xi \in [-1; 1] \quad (1.49)$$

де:

$U_k$  – поліноми Чебишева другого роду.

$F_k$ - поки невідомі сталі.

Враховуючи (1.49), (1.48) матиме вигляд:

$$\varrho \frac{d^2}{dx^2} \int_{c_0}^{c_1} \sum_{l=0}^{\infty} F_l \sqrt{1 - \xi^2} U_l(\xi) \ln \frac{1}{|\xi - x|} + \int_{-1}^1 \sum_{l=0}^{\infty} F_l \sqrt{1 - \xi^2} U_l(\xi) \tilde{f}(\xi, x) d\xi = \tilde{r}(x) \quad (1.50)$$

Змінемо порядок інтегрування ту сумування і отримаємо:

$$\varrho \sum_{l=0}^{\infty} F_l \frac{d^2}{dx^2} \int_{c_0}^{c_1} \sqrt{1 - \xi^2} U_l(\xi) \ln \frac{1}{|\xi - x|} + \sum_{l=0}^{\infty} F_l \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \xi^2} U_l(\xi) \tilde{f}(\xi, x) d\xi = \tilde{r}(x) \quad (1.51)$$

Використовуюя спектральне відношення [6][с.108 Таблица 1. №24]:

$$\frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x - \xi|} \sqrt{1 - \xi^2} U_l(\xi) d\xi = -\pi(l + 1) U_k(x) \quad (1.52)$$

В результаті отримаємо наступний вигляд формули (1.51):

$$\varrho \sum_{l=0}^{\infty} F_l(-\pi(l + 1) U_l(\xi)) + \sum_{l=0}^{\infty} F_l \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \xi^2} U_l(\xi) \tilde{f}(\xi, x) d\xi = \tilde{r}(x) \quad (1.53)$$

Обидві частини (1.53) множимо на  $U_m(x) \sqrt{1 - x^2}$  та інтегруємо за змінною  $x$  на проміжку  $[-1; 1]$

Отримаємо такий результат:

$$\varrho \sum_{l=0}^{\infty} F_l(-\pi(l + 1)) \Phi_{l,m} + \sum_{l=0}^{\infty} F_l D_{l,m} = \check{r}_m, m \in [0; \infty) \quad (1.54)$$

де:

$$\Phi_{l,m} = \int_{-1}^1 U_m(x) U_l(x) \sqrt{1 - x^2} dx$$

$$\check{r} = \int_{-1}^1 \tilde{r} U_m(x) \sqrt{1 - x^2} dx$$

$$D_{l,m} = \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} U_m(x) dx \int_{-1}^1 U_l(x) \sqrt{1 - \xi^2} \tilde{f}(\xi, x) d\xi$$

$$\|U_l\|^2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Враховуючи, що: } \Phi_{l,m} = \begin{cases} \|U_m(x)\|^2, & m = l \\ 0, & m \neq l \end{cases}$$

отримаємо наступний вигляд формули (1.54):

$$\varrho F_m(-\pi(l + 1)) \|U_m(x)\|^2 + \sum_{l=0}^{\infty} F_l D_{l,m} = \check{r}_m, m \in [0; \infty) \quad (1.55)$$

$$\text{де: } \|U_m(x)\|^2 = \frac{\pi}{2}$$

Побудуємо графік функції стрибка:

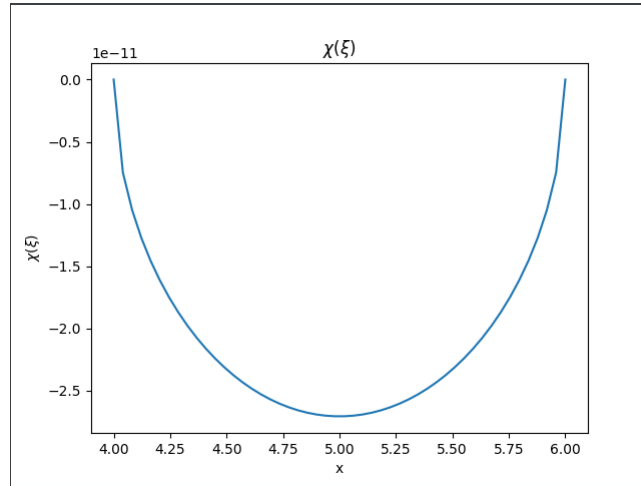


Рис. 1.2. Функція стрибка  $\chi(\xi)$  у тріщині

## 1.7. Коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН)

КІН обчислюється за формулою:

$$K_{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm 1 \pm 0} \sqrt{\pi(c_1 - c_0)(\pm x - 1)} \tau_{yz} \quad (1.56)$$

У формулу (1.56) підставляється зображення (1.51) зі спектральним співвідношенням

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x - \xi|} \sqrt{1 - \xi^2} U_l(\xi) d\xi = \\ = \frac{|x| U_m(x)}{\sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x^2 - 1} U'_m(x) - 0.5(l + 1) U_m(x) \end{aligned}$$

та отримаємо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm 1 \pm 0} \sqrt{\pi(c_1 - c_0)(\pm x - 1)} \left( \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x - \xi|} \sqrt{1 - \xi^2} U_l(\xi) d\xi \right) = \\ = \sqrt{\pi(c_1 - c_0)} (\pm 1)^l (l + 1) \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1.57) \end{aligned}$$

В результаті отримаємо розрахункові формули для обчислення КІН:

$$K_- = \sum_{l=0}^{\infty} F_k \frac{\sqrt{\pi(c_1 - c_0)}(-1)^l(l+1)}{\sqrt{2}}, K_+ = \sum_{l=0}^{\infty} F_k \frac{\sqrt{\pi(c_1 - c_0)}(l+1)}{\sqrt{2}}$$

## 1.8. Аналіз числових розрахунків

### 1.8.1. КІН при зміні довжини тріщини

Розглянемо динаміку зміни коефіцієнтів інтенсивності напружень при зміні довжини тріщини.

Розрахунки проводилися з такими параметрами:

- $a = 10$
- $b = 10$
- $b_1 = 5$
- $G_1 = 8.0 \cdot 10^{10}$  — сталь вуглецева
- $G_2 = 4.0 \cdot 10^{10}$  — бронза марганцева
- $p_1(\xi) = \frac{2\xi}{a} - \frac{4\xi(\xi - \frac{a}{2})}{a^2}$  — навантаження на область
- $p_2(\xi) = 4 \cos(\alpha\xi) + 12 \sin(\alpha\xi) \sin(\alpha\xi)$  — навантаження на область
- $p_3(\xi) = \sin \frac{\pi}{a} \xi$  — навантаження на область
- $p_4(\xi) = 0$  — навантаження на область
- $\zeta_1(\xi) = 0$  — навантаження на тріщину
- $\zeta_2(\xi) = 1$  — навантаження на тріщину

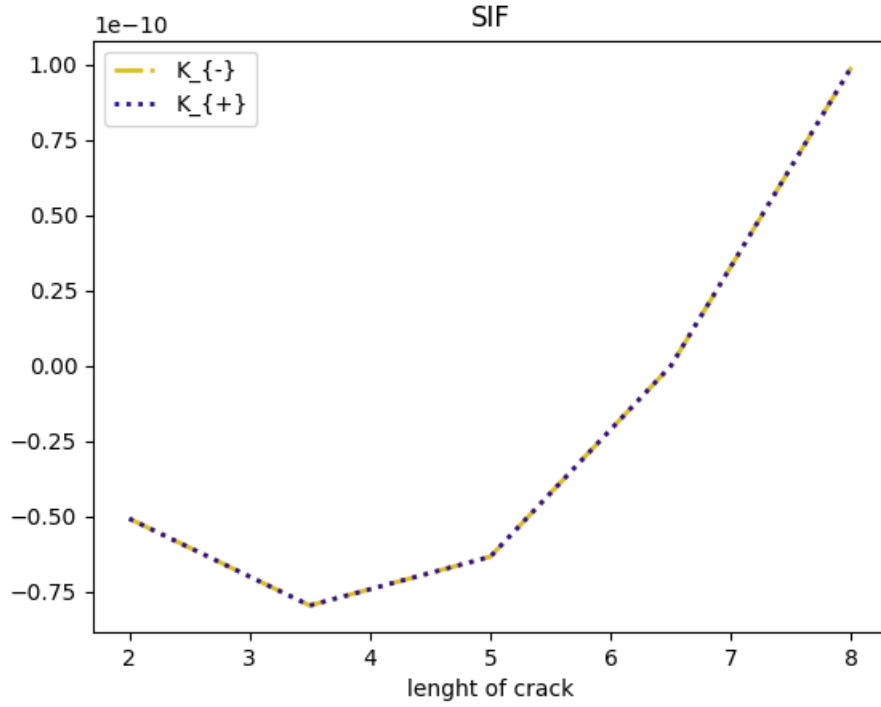


Рис. 1.3. Залежність КІН від довжини тріщини ,  $p(\xi) = p_1(\xi)$  ,  $\zeta(\xi) = \zeta_1(\xi)$

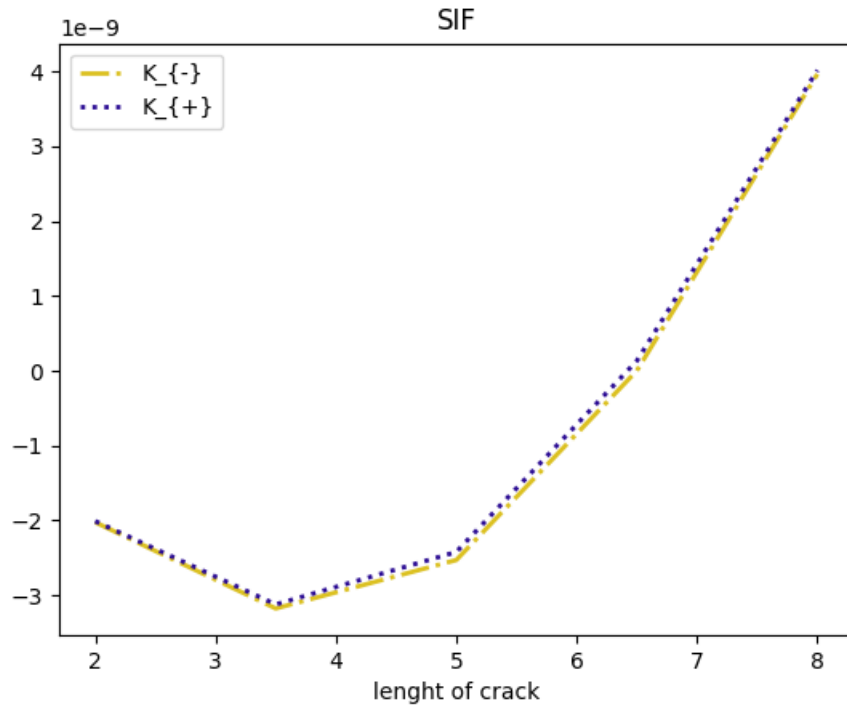


Рис. 1.4. Залежність КІН від довжини тріщини ,  $p(\xi) = p_2(\xi)$  ,  $\zeta(\xi) = \zeta_1(\xi)$

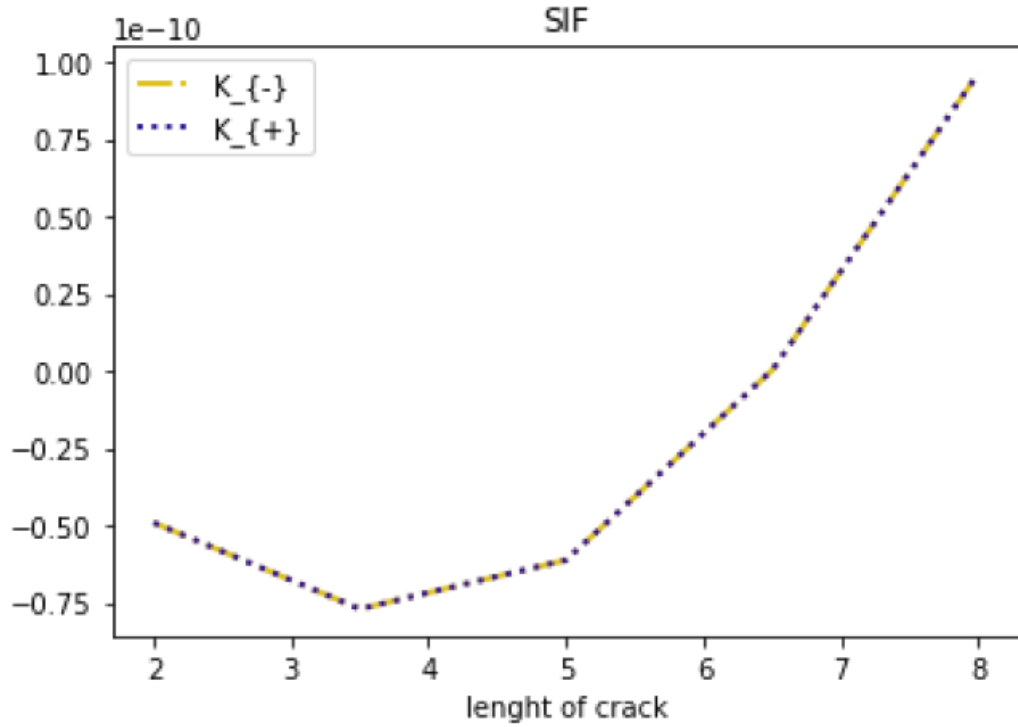


Рис. 1.5. Залежність КІН від довжини тріщини ,  $p(\xi) = p_3(\xi)$  ,  $\zeta(\xi) = \zeta_1(\xi)$

Аналізуючи подані графіки можемо зробити висновок, що КІН зменшується, коли довжина тріщини менше за 50% області, а потім стрімко зростає.

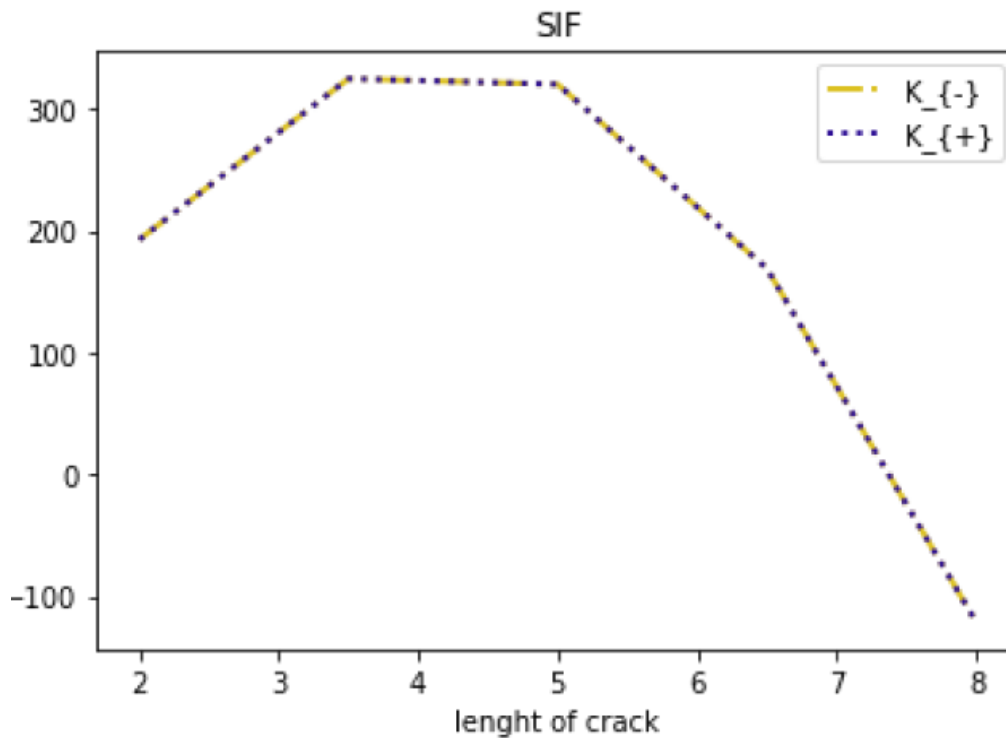


Рис. 1.6. Залежність КІН від довжини тріщини ,  $p(\xi) = p_4(\xi)$  ,  $\zeta(\xi) = \zeta_2(\xi)$

Аналізуючи поданий графік можемо зробити висновок, що коли навантаження діє безпосередньо на тріщину, то КІН зменшується, коли довжина тріщини більша за 50% області.

### 1.8.2. КІН при зміні довжини тріщини та розміру першого шару

Розглянемо динаміку зміни коефіцієнтів інтенсивності напружень при зміні довжини тріщини.

Розглянемо ситуацію, коли перший шар більший за другий

Розрахунки проводилися з такими параметрами:

- $a = 10$
- $b = 10$
- $b_1 = 7.5$
- $G_1 = 8.0 \cdot 10^{10}$  — сталь вуглецева
- $G_2 = 4.0 \cdot 10^{10}$  — бронза марганцева
- $p_1(\xi) = \frac{2\xi}{a} - \frac{4\xi(\xi - \frac{a}{2})}{a^2}$  — навантаження на область

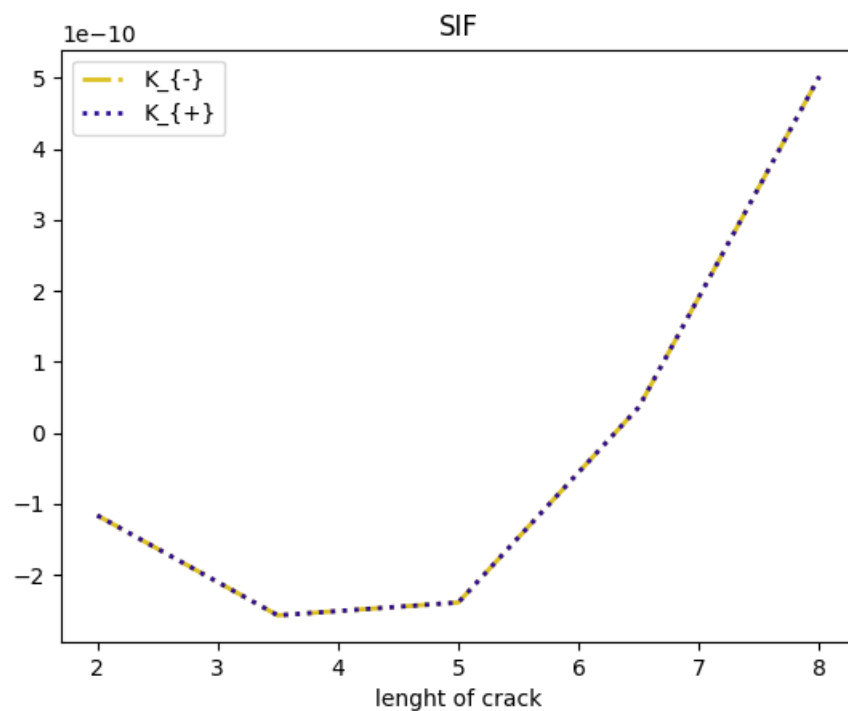


Рис. 1.7. Залежність КІН від довжини тріщини,  $p(\xi) = p_1(\xi)$ ,  $\zeta(\xi) = \zeta_1(\xi)$

Аналізуючи поданий графік можемо зробити висновок, що КІН зменшується, коли довжина тріщини менше за 50% області, а потім стрімко зростає. Також слід зауважити, що функція, якою представлено навантаження на область не спливає на показник росту КІН.

Розглянемо ситуація, коли перший шар менший за другий  
Розрахунки проводилися з такими параметрами:

- $a = 10$
- $b = 10$
- $b_1 = 2.5$
- $G_1 = 8.0 \cdot 10^{10}$  — сталь вуглецева
- $G_2 = 4.0 \cdot 10^{10}$  — бронза марганцева
- $p_1(\xi) = \frac{2\xi}{a} - \frac{4\xi(\xi - \frac{a}{2})}{a^2}$  — навантаження на область

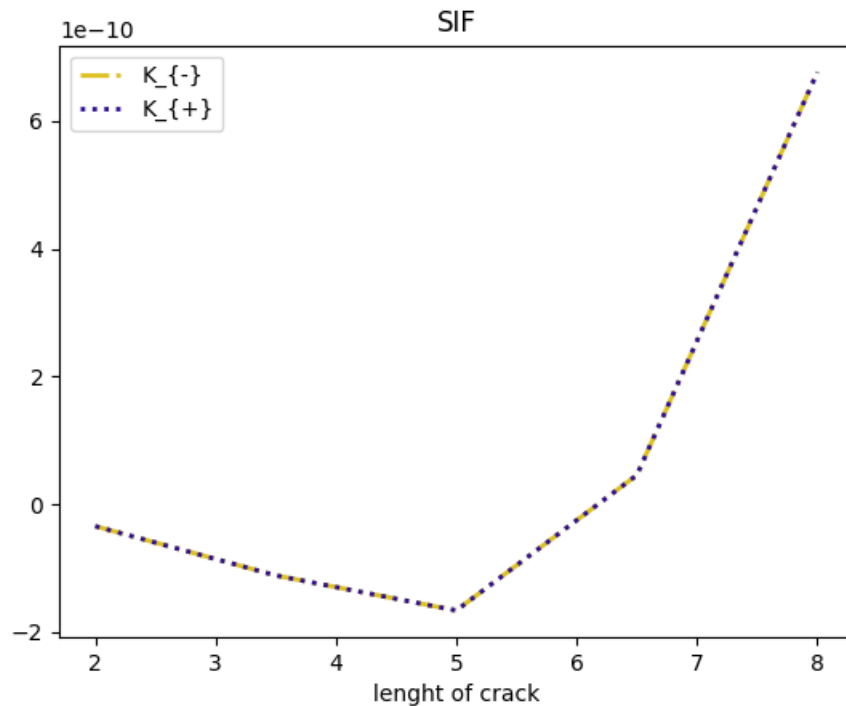


Рис. 1.8. Залежність КІН від довжини тріщини ,  $p(\xi) = p_1(\xi)$  ,  $\zeta(\xi) = \zeta_1(\xi)$

Аналізуючи поданий графік можемо зробити висновок, що КІН зменшується, коли довжина тріщини менше за 50% області, а потім стрімко зростає.

## ВИСНОВКИ

Досліджена антиплоска задача для двошарової прямокутної області з міжфазним дефектом під впливом різних видів навантажень, що задано по вісі  $y$ .

- 1) Побудован розв'язок антиплоскої задачі теорії пружності для прямокутної зони з використанням апарату інтегральних перетворень.
- 2) Досліджено поведінку напружень всередині прямокутної зони для різного співвідношення сторін. Встановлено, що найбільші напруження досягаються, коли довжина прямокутника більша за його ширину.
- 3) Досліджено зміну напружень при зміні матеріалів.
- 4) Проаналізовані коефіцієнти інтенсивності напружень стосовно довжини тріщини.
- 5) Даний підхід може бути розповсюджено на випадок  $N$  шарів.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Попов Г. Я., Реут В. В., Вайсфельд Н. Д. Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень. — Одеса: Астропринт, 2005. — 184 с.
2. Попов Г. Я. Избранные труды.— Одесса: Издательско-полиграфический дом ВМВ, 2007.— 1100с.
3. N. D. Vaysfel'd, Z. Yu. Zhuravlova On one new approach to the solving of an elasticity mixed plane problem for the semi-strip // Acta Mechanica, 2015. DOI: 10.1007/s00707-015-1452-x
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.— 1100 с.
5. Попов Г. Я., В. В. Реут, М. Г. Моїсеєв, Н. Д. Вайсфельд. Рівняння математичної фізики. Метод ортогональний многочленів: навчальний посібник — Одеса: Астропринт, 2010,— 120с.
6. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов разрезов тонких включений и подкреплений. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы,— 1982.— 344 с.
7. Вайсфельд Н. Д., Журавльова З. Ю., Реут В. В. Плоскі мішані задачі теорії пружності для півнескінченної смуги: наукова монографія — Одеса: Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2019. — 149 с.
8. Краснов А. М. Рівняння математичної фізики/ Краснов А. М., Процеров Ю. С., Реут В. В. —М.:Наука, 1997. — 14-15.
9. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. — М.: Высшая школа, 1970. — 712 с.
10. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972. — 736 с.