Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра математичного та комп'ютерного моделювання

Дипломна робота

бакалавра

на тему: **«Метод Ньютона для спектральної задачі симетричної матриці»**

«Newton's method for the spectral problem of the symmetric matrix»

Виконала: студентка денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Гук Аліна Григорівна

Керівник: к. ф.-м. н., доц. Вербіцький В. В.
Рецензент: к. ф.-м. н., доц. Васильєв О.Б.

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ___ від «_____» ________ р.
Завідувач кафедри
_____________ __________________

Захищено на засіданні ЕК № _______
Протокол № _____ від «_____» _____ р.
Оцінка ________ / ________ / ________
Голова ЕК
_____________ ______________________

Одеса — 2022 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Якщо відомо досить добре наближення до розвязання рівняння $F(x) = 0$, то ефективним методом підвищення точності наближення є метод Ньютона. Багато тверджень про збіжність методу Ньютона походять від відомих результатів Л.В. Канторовича[2], який переніс метод Ньютона на нелінійні операторні рівняння в банахових просторах. Застосування методу Ньютона до спектральних задач має багаторічну історію. Не претендуючи на повноту огляду, відзначимо деякі етапи. У монографії Дж. Х. Уілкінсона[10] досліджено застосування методу Ньютона для знаходження коренів характеристичного рівняння $det(A - \lambda I) = 0$, які є власними значеннями матриці A. У монографії Фаддєєва Д.К. та Фаддєєвої В.М.[7] метод Ньютона застосовний для уточнення окремого власного значення і його власного вектора, перша компонента якого не є зникаюче малою на відміну від інших, так що порушення спільності можна вважати її рівної одиниці. Отримано нелінійне рівняння відносно власного значення. До цього рівняння застосовується метод Ньютон. У статті В. Н. Кублановської[4] побудовано алгоритм знаходження комплексно-сполучених власних значень та власних векторів дійсної матриці в дійсній арифметиці. Для обчислення дійсної і уявної частини власного значення методом Ньютона знаходять корені нелінійних рівнянь. Зазначимо, що у всіх вищезгаданих випадках, метод Ньютона застосовувався до скалярних нелінійних рівнянь для уточнення власного значення. У монографії Л. Коллатца[3] описано дещо інший підхід. Задача про власні значення $Ax = \lambda Bx$ (A, B — задані матриці розмірності $n \times n$) зведена до пошуку коренів нелінійної системи з $n + 1$ рівнянь:

$$\begin{cases} Ax - \lambda Bx = 0, \\ x_n - 1 = 0. \end{cases} \tag{0.1}$$

Стверджується, що метод Ньютона є дуже ефективним під час пошуку коренів системи (0.1). Для доказу збіжності методу Ньютона для системи (0.1) пропонується використовувати теорему про збіжність методу Ньютона для нелінійного операторного рівняння в банаховому просторі. Однак, на практиці довести виконання умов цієї теореми складно. Так, там же доказ збіжності методу Ньютона наведено лише для числового прикладу з матрицями розміру 3×3. Причому у доказі використовуються оцінки, отримані на підставі величин знайдених у процесі обчислень. Інших доказів збіжності методу Ньютона для систем виду (0.1) автори не виявили. Нами запропоновано простий доказ збіжності методу Ньютона для системи виду (0.1), яке ґрунтується на відомій теоремі про збіжність методу Ньютона для системи нелінійних рівнянь.

Обєкт дослідження роботи — спектральна задача для симетричної матриці.

Предмет дослідження роботи — числові методи обчислення власних значень та векторів симетричної матриці.

Мета роботи — дослідити можливість використання методу Ньютона для обчислення власних значень та векторів симетричної матриці.

Задля досягнення мети роботи треба: модифікувати метод Ньютона для обчислення власних значень та векторів симетричної матриці; довести збіжність методу; порівняти запропонований метод з відомими методами; провести обчислювальний експеримент.

РОЗДІЛ 1

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо задачу на власні значення

$$Ax = \lambda x, \quad \text{де}$$

$$A = A^T \in R^n$$

$\{x^0, \lambda^0\}$ — початкове наближення до деякої власної пари з простим власним значенням.

Зазвичай для уточнення власної пари використовується зворотна ітерація з відношенням Релея.
Треба дослідити можливість застосування методу Ньютона для уточнення власної пари.

РОЗДІЛ 2

СИМЕТРИЧНА ПРОБЛЕМА ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ

Власні значення матриці $A \in C^{n\times n}$ — це n коренів її *характеристичного багаточлена*

$$p_n(\lambda) = \det(A - \lambda I). \tag{2.1}$$

Множину всіх коренів називають *спектром* і позначають $\lambda(A)$. Якщо $\lambda \in \lambda(A)$, то ненульовий вектор $x \in C^n$, що задовольняє рівнянню

$$Ax = \lambda x,$$

називають *власним вектором.*

Алгебраїчна кратність власного значення λ — це кратність кореня λ характеристичного багаточлена (2.1)

Геометричною кратністю власного значення λ називається число лінійно незалежних власних векторів, йому відповідних.

Лема 2.1. (Лема Гершгоріна). *Усі власні значення комплексної матриці $A \in C^{n\times n}$ знаходяться в об'єднанні кіл з центрами в точках a_{ii} і радіусами*

$$r_{ii} = \sum_{j=1\,(j\neq i)}^{n} |a_{ij}|, \quad i = \overline{1,n}.$$

Доведення. Нехай $\{\lambda, x\}$ — власна пара матриці A і

$$|x_i| = \max_j |x_j|.$$

Тоді

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = \lambda x_i,$$

або

$$(\lambda - a_{ii})x_i = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{i,i-1}x_{i-1} + a_{i,i+1}x_{i+1} + \cdots + a_{in}x_n.$$

Звідси
$$|\lambda - a_{ii}| \le \sum_{j=1\,(j\neq i)}^{n} |a_{ij}|, \quad i = \overline{1,n}.$$
□

Лема Гершгоріна дає, як правило, завищені оцінки меж спектру.

Власний вектор визначає одновимірний підпростір, інваріантне по відношенню до множення зліва на матрицю A. В загальному випадку підпростір $S \subseteq C^n$, що має властивість
$$x \in S \Rightarrow Ax \in S,$$
називають інваріантним підпростором матриці A.

Лема 2.2. *Нехай* $X \in C^{n\times k}$, $B \in C^{k\times k}$ $(k \le n)$*. Якщо*
$$AX = XB,$$
то підпростір $S = \mathrm{range}(X)$ *є інваріантним. До того ж якщо матриця* X *має повний стовпцевий ранг, то* $\lambda(B) \subseteq \lambda(A)$*.*

Доведення. Якщо $x \in S = \mathrm{range}(X)$, то існує такий вектор $y \in C^k$, що $x = Xy$. Тоді
$$Ax = AXy = XBy = Xz \in S = \mathrm{range}(X).$$
Нехай $\lambda \in \lambda(B)$. Тоді існує такий вектор $y \neq 0$, що $By = \lambda y$. Тоді
$$AXy = XBy = \lambda Xy$$
і оскільки матриця X повного стовпцевого ранга, вектор Xy відмінний від нуля. Таким чином, $\{\lambda, Xy\}$ — власна пара матриці A. □

Зазначимо, що, якщо квадратна матриця X з попередньої леми є невиродженою, то $\lambda(B) = \lambda(A)$ і кажуть, что матриці A і $B = X^{-1}AX$ подібні. В цьому випадку X називають перетворенням подібності. Таким чином, перетворення подібності зберігає власні значення матриці.

Чимало алгоритмів обчислення власних значень використовують розбиття вихідної задачі на ряд задач меншого розміру. Наступний результат є основою таких перетворень.

Лема 2.3. *Якщо матриця $T \in C^{n\times n}$ представима у блочному вигляді*

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix}$$

то $\lambda(T) = \lambda(T_{11}) \cup \lambda(T_{22})$.

Доведення. Нехай

$$Tx = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

де $x_1 \in C^p$ і $x_2 \in C^q$. Якщо $x_2 \neq 0$, то $T_{22}x_2 = \lambda x_2$ і $\lambda \in \lambda(T_{22})$. Якщо $x_2 = 0$, то $T_{11}x_1 = \lambda x_1$ і $\lambda \in \lambda(T_{11})$. Отже, $\lambda(T) \in \lambda(T_{11}) \cup \lambda(T_{22})$. Але, оскільки множини $\lambda(T)$ і $\lambda(T_{11}) \cup \lambda(T_{22})$ мають однакове число елементів, ці дві множини рівні. □

Лема 2.4. *Якщо матриці $A \in C^{n\times n}$, $X \in C^{n\times p}$, $B \in C^{p\times p}$ ($p < n$) задовольняють умовам*

$$AX = XB, \quad \mathrm{rank}(X) = p, \tag{2.2}$$

то існує унітарна матриця $Q \in C^{n\times n}$ така, що

$$Q^T A Q = T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix},$$

де $\lambda(T_{11}) = \lambda(A) \cap \lambda(B)$.

Доведення. Нехай

$$X = Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q \in C^{n\times n}, R \in C^{p\times p}$$

є QR-розклад матриці X. Підставляючи його в (2.2) і перетворюючи отриманий вираз, маємо

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} B,$$

де

$$Q^T AQ = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$$

З невиродженості матриці R і рівнянь $T_{21}R = 0$, $T_{11}R = RB$ випливає, що $T_{21} = 0$ і $\lambda(T_{11}) = \lambda(B)$. Кінцевий результат отримуємо, скориставшись лемою 2.3, згідно з якою $\lambda(A) = \lambda(T) = \lambda(T_{11}) \cup \lambda(T_{22})$. □

Лема 2.4 твердить, що довільна квадратна матриця може бути приведена до блочно-трикутної форми, якщо відомо одне з її інваріантних підпросторів.

Теорема 2.1. (Розклад Шура). *Для будь-якої матриці $A \in C^{n\times n}$ існує така унітарна матриця $Q \in C^{n\times n}$, що*

$$Q^H AQ = T = D + N,$$

де $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ і $N \in C^{n\times n}$ є строго верхня трикутна матриця. Більш того, матрицю Q можно обрати так, що власні значення λ_i будуть розташовані у будь-якому заданому порядку.

Доведення. Теорему доведемо за індукцією. Теорема вірна при $n = 1$. Припустимо, що теорема вірна для всіх матриць порядку $n - 1$ чи менше. Якщо $Ax = \lambda x$ $(x \neq 0)$ то, згідно з лемою 2.4 (при $B = (\lambda)$), існує така унітарна матриця U, що

$$U^H A U = \begin{bmatrix} \lambda & w^H \\ 0 & C \end{bmatrix}.$$

За припущенням індукції знайдеться така унітарна матриця $\widetilde{U} \in C^{(n-1)\times(n-1)}$, що матриця $\widetilde{U}^H C \widetilde{U}$ — верхня трикутна. Отже, якщо $Q = U\mathrm{diag}(1,\widetilde{U})$, то матриця $Q^H A Q$ — верхня трикутна. □

Теорема 2.2. (Разклад Жордана). *Якщо $A \in C^{n\times n}$, то існує така невроджена матриця $X \in C^{n\times n}$, що*

$$X^{-1} A X = \mathrm{diag}(J_1, \ldots, J_k),$$

де

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in C^{m_i \times m_i}$$

і $m_1 + \cdots + m_k = n$.

Доведення. Див., наприклад, [8]. □

Блоки J_i називають жордановими. Число и разміри жорданових блоків, пов'язаних з кожним власним значенням, визначаються однозначно. Їхнє розміщення вздовж діагоналі неоднозначне.

Дійсний розклад Шура являє собою блокову верхню трикутну матрицю з діагональними блоками розміру 1×1 і 2×2.

Теорема 2.3. (Дійсний розклад Шура). *Для будь-якої дійсної матриці*

$A \in R^{n\times n}$ існує така ортогональна матриця $Q \in R^{n\times n}$, що

$$Q^T AQ = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{11} & \dots & R_{1m} \\ 0 & R_{22} & \dots & R_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R_{mm} \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

де кожен блок R_{ii} — або 1×1–матриця, або 2×2–матриця, має комплексно-спряжені власні значення.

Доведення. Комплексні власні значення матриці A повинні входити до $\lambda(A)$ комплексно-спряженими парами, бо характеристичний багаточлен $\det(A-\lambda I)$ має дійсні коефіцієнти. Нехай k — число комплексно-спряжених пар в $\lambda(A)$. Якщо $k = 0$, то доведення теореми можно побудувати так само, як доводилася теорема 2.1 з використанням леми 2.4, враховуючи, що коефіцієнти та власні значення матриці A дійсні.

Припустимо тепер, що $k \geq 1$. Якщо $\lambda = \gamma + i\mu \in \lambda(A)$ і $\mu \neq 0$, то в R^n існують такі вектори y і z ($z \neq 0$), що

$$A(y + iz) = (\gamma + i\mu)(y + iz).$$

Прирівнюючи дійсні та уявні частини, отримаємо

$$A[y,z] = [y,z] \begin{bmatrix} \gamma & \mu \\ -\mu & \gamma \end{bmatrix}.$$

Значить, вектори y і z утворюють двовимірний дійсний інваріантний підпростір матриці A. З леми 2.4 випливає, що існує така ортогональна матриця $U \in R^{n\times n}$, що

$$U^T AU = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix},$$

де $\lambda(T_{11}) = \{\lambda, \overline{\lambda}\}$. Згідно припущення індукції, існує така ортогональна матриця $\widetilde{U}$, що матриця $\widetilde{U}^T T_{22} \widetilde{U}$ має потрібну структуру. Вважаючи $Q = U\mathrm{diag}(I_2,\widetilde{U})$, отримуємо потрібний розклад. $\square$

Теорема 2.3 показує, що будь-яка дійсна матриця ортогонально подібна до деякої верхньої майже трикутної матриці. Дійсні та уявні частини комплексних власних значень можуть бути легко знайдені з діагональних блоків розміру 2×2.

Теорема 2.4. (Теорема про спектральний розклад). *Для будь-якої дійсної симетричної матриці $A \in R^{n\times n}$ існує така ортогональна матриця $Q \in R^{n\times n}$, що*

$$Q^T AQ = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n). \tag{2.4}$$

Доведення. Доказ теореми випливає з теореми 2.3. Дійсно, оскільки матриця A симетрична, то в розкладі (2.3) теореми 2.3 матриця $Q^T AQ$ також симетрична, а це означає, і диагональна. $\square$

З теореми 2.4 випливає, що дійсна симетрична матриця розміру $n \times n$ має n дійсних власних значень і n власних векторів, з яких можна побудувати ортонормований базис простору R^n.

Помножуючи (2.4) зліва на Q, а справа на Q^T, отримаємо

$$A = Q\Lambda Q^T = \lambda_1 q_1 q_1^T + \lambda_2 q_2 q_2^T + \cdots + \lambda_n q_n q_n^T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i H_i, \tag{2.5}$$

де $H_i = q_i q_i^T$ — ортогональний проєктор на одномірне власний підпростір власного вектора q_i. Якщо власному значенню λ відповідає кілька власних векторів (тобто власне значення кратне), то ці вектори визначаються неоднозначно. У той же час, підпростір, натягнутий на ці власні вектори визначається однозначно. Тому, для кратного власного значення λ визначимо ортогональний проєктор на його власний підпростір

$$H_\lambda = \sum_{\lambda_j=\lambda} H_j.$$

Тепер з (2.5) отримаємо розклад

$$A = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j H_{\lambda_j}, \tag{2.6}$$

де всі λ_j ($j = \overline{1,m}$) відмінні. Разклад (2.6) називають спектральним розкладом симетричною дійсної матриці A. Зауважимо також, що для симетричної матриці алгебраїчна та геометрична кратності власного значення збігаються.

Оскільки, згідно з попередньою теоремою, всі власні значення дійсні симетричної матриці дійсні, то з леми Гершгоріна можна вивести таке слідство.

Наслідок 2.1. *Усі власні значення дійсної симетричної матриці $A \in R^{n \times n}$ лежать в об'єднанні проміжків*

$$[a_{ii} - r_{ii}, a_{ii} + r_{ii}],\ \textit{де}\ r_{ii} = \sum_{j=1\,(j \neq i)}^{n} |a_{ij}|, \quad i = \overline{1,n}.$$

Приклад 2.1. Матриця

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

має власні значення $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = 4$. Власному значенню λ_1 відповідають власний вектор $q_1 = 1/2[1, -1, -1, 1]^T$ та ортогональний проєктор

$$H_{\lambda_1} = q_1 q_1^T = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Власному значенню λ_4 відповідає власний вектор

$$q_4 = 1/2[1{,}1{,}1{,}1]^T$$

та ортогональний проєктор

$$H_{\lambda_4} = q_4 q_4^T = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Власному значенню $\lambda = 2$ (кратності 2) відповідають два власного вектора. Їх можна визначити по-різному. Наприклад,

$$q_2 = 1/2[1, -1{,}1, -1]^T \quad \text{и} \quad q_3 = 1/2[1{,}1, -1, -1]^T$$

або

$$q_2 = 1/\sqrt{2}[1{,}0{,}0, -1]^T \quad \text{и} \quad q_3 = 1/\sqrt{2}[0{,}1, -1{,}0]^T.$$

Легко перевірити, що в обох випадках ортогональний проєктор на власний підпростір власного значення $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ визначається однозначно

$$H_\lambda = q_2 q_2^T + q_3 q_3^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Доведемо наступну лему.

Лема 2.5. *Для симетричної матриці $A \in R^{n\times n}$ та довільного вектора $x \neq 0$*

$$\min_\sigma ||Ax - \sigma x||_2 = ||Ax - \rho(x)x||_2,$$

де $\rho(x) = \frac{x^T Ax}{x^T x}$ називається відношенням Релея матриці A.

Доведення. Дійсно, функція

$$f(\sigma) = ||Ax - \sigma x||_2^2 = x^T A^2 x - 2\sigma x^T Ax + \sigma^2 x^T x$$

досягає свого мінімуму в точці $\sigma = \frac{x^T Ax}{x^T x}$ □

З леми можна зробити наступний висновок. Якщо $x \neq 0$ є наближенням до деякого власного вектора симетричної матриці A, то найкраще наближення до відповідного власного значення, яке можна обчислити знаючи вектор x, дає відношення Релея $\rho(x)$.

Нехай $\{q_i\}_{i=1}^n$ — ортонормований базис R^n складений із власних векторів матриці A. Тоді будь-який вектор $x \in R^n$ можна представити у вигляді

$$x = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \cdots + \alpha_n q_n.$$

Отже,

$$\rho(x) = \frac{x^T Ax}{x^T x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2}{\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i^2}.$$

Звідси одразу випливає, що

$$\lambda_{min} \leq \frac{x^T A x}{x^T x} \leq \lambda_{max} \quad \forall x \in R^n \setminus 0.$$

РОЗДІЛ 3

СТЕПЕНЕВИЙ МЕТОД ДЛЯ СИМЕТРИЧНОЇ ПРОБЛЕМИ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ

Степеневий метод та зворотна ітерація

Припустимо, що максимальне за модулем власне значення симетричної дійсної матриці $A \in R^{n\times n}$ відокремлено, тобто,

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|.$$

У цьому випадку степеневий метод дозволяє знайти максимальне по модулю власне значення λ_1 та відповідний власний вектор q_1.

Побудуємо наступний ітераційний процес. Нехай y_0 — початкове наближення до власного вектора q_1. По теоремі 2.4 про спектральний розклад симетричної матриці власні вектори матриці A утворюють ортонормований базис простору $R^{n\times n}$. Розкладемо y_0 за цим базисом,

$$y_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i, \tag{3.1}$$

де $\alpha_i = q_i^T y_0$. Припустимо, що $\alpha_1 \neq 0$. Нормуємо вектор y_0,

$$x_0 = \frac{y_0}{||y_0||_2}.$$

Помножимо матрицю A на вектор x_0,

$$y_1 = Ax_0 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i q_i}{\left|\left|\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i q_i\right|\right|_2}.$$

Нормуємо вектор y_1,

$$x_1 = \frac{y_1}{||y_1||_2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i q_i}{\left|\left|\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i q_i\right|\right|_2}.$$

Після k ітерацій отримуємо

$$x_k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k q_i}{\left|\left|\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k q_i\right|\right|_2}, \tag{3.2}$$

$$y_{k+1} = Ax_k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^{k+1} q_i}{\left|\left|\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k q_i\right|\right|_2}. \tag{3.3}$$

Припустимо

$$\lambda^{(k+1)} = y_{k+1}^T x_k.$$

Покажемо, що $\lambda^{(k+1)} \to \lambda_1$ при $k \to \infty$. »з (3.2) і (3.3) отримуємо

$$\lambda^{(k+1)} = y_{k+1}^T x_k = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^{k+1} q_i\right)^T \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k q_i\right)}{\left|\left|\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k q_i\right|\right|_2^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i^{2k+1}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i^{2k}} =$$

$$= \frac{\lambda_1 + \frac{\alpha_2^2 \lambda_2}{\alpha_1^2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k} + \cdots + \frac{\alpha_n^2 \lambda_n}{\alpha_1^2}\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{2k}}{1 + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k} + \cdots + \frac{\alpha_n^2}{\alpha_1^2}\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{2k}} = \frac{\lambda_1 + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k}\right)}{1 + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k}\right)}.$$

Звідси

$$\lambda^{(k+1)} - \lambda_1 = O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k}\right). \tag{3.4}$$

Покажемо тепер, що $x_k \to q_1$ при $k \to \infty$. дійсно,

$$x_k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k q_i}{\left\| \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k q_i \right\|_2} = \frac{\alpha_1 \lambda_1^k q_1 + \alpha_2 \lambda_2^k q_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^k q_n}{|\alpha_1|\, |\lambda_1|^k \sqrt{1 + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k}\right)}} =$$

$$= \frac{\pm q_1 + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k}\right)}{\sqrt{1 + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k}\right)}}.$$

Звідси

$$x_k - q_1 = O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k}\right). \tag{3.5}$$

Зауважимо, що швидкість збіжності власного значення вдвічі більше, ніж власного вектора.

Запишемо алгоритм степеневого методу.

Степеневий метод

1. $x_0 = y_0/||y_0||_2$
2. $For\ k = 0{,}1, \ldots\ Until\ Convergence\ Do$
3. $\quad y_{k+1} = A x_k$
4. $\quad \lambda^{(k+1)} = y_{k+1}^T x_k$
5. $\quad x_{k+1} = y_{k+1}/||y_{k+1}||_2$
6. $End\ Do$

Тестом на збіжність може бути одна з умов,

$$\left|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\right| \le \varepsilon \left|\lambda^{(k+1)}\right|, \tag{3.6}$$

або

$$\left| \max_{(x_k)_i \neq 0} \frac{(y_{k+1})_i}{(x_k)_i} - \min_{(x_k)_i \neq 0} \frac{(y_{k+1})_i}{(x_k)_i} \right| \le \varepsilon \left| \max_{(x_k)_i \neq 0} \frac{(y_{k+1})_i}{(x_k)_i} \right|. \tag{3.7}$$

Зауважимо, крок 3. алгоритму 3.1 потребує $O(n^2)$ арифметичних дій, всі інші кроки — $O(n)$ арифметичних дій.

Розглянемо тепер метод зворотної ітерації. Припустимо, що найменше за модулем власне значення дійсної симетричної матриці $A \in R^{n\times n}$ відокремлено, тобто,

$$|\lambda_1| \geq \cdots \geq |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n|. \tag{3.8}$$

Зауважимо, що якщо $\{\lambda,x\}$ — власна пара матриці A, то $\{1/\lambda,x\}$ — власна пара зворотної матриці A^{-1}. Зрозуміло, що $1/\lambda_n$ — максимальне за модулем власне значення матриці A^{-1}. Тому для знаходження $1/\lambda_n$ можна застосувати степеневий метод для матриці A^{-1}. В цьому випадку при $k \to \infty$

$$\lambda^{(k+1)} \to \frac{1}{\lambda_n}, \quad x_k \to q_n.$$

Таким чином, зворотна ітерація дозволяє обчислити найменше за модулем власне значення матриці (і відповідний власний вектор), якщо воно відокремлено від інших власних значень.

Запишемо алгоритм зворотної ітерації.

Зворотня ітерація

1. $x_0 = y_0/||y_0||_2$
2. $For\ k = 0,1,\ldots\ Until\ Convergence\ Do$
3. $\quad y_{k+1} = A^{-1}x_k$
4. $\quad \lambda^{(k+1)} = y_{k+1}^T x_k$
5. $\quad x_{k+1} = y_{k+1}/||y_{k+1}||_2$
6. $End\ Do$

Крок 3. алгоритму зворотної ітерації зводиться до розв'язання системи $Ay_{k+1} = x_k$. для розвязання цієї системи потрібно $O(n^3)$ арифметичних процесів. Однак, якщо відомо деякий розклад матриці A (наприклад, LU-розклад), то цей крок вимагатиме тільки $O(n^2)$ арифметичних дій. Інші кроки алгоритму вимагають лише $O(n)$ арифметичних дій.

Зауваження 3.1. Встановлюючи збіжність степеневого методу, ми припускали (див. (3.1)), що коефіцієнт α_1 у розкладі за власними векторами початкового наближення y_0 відмінний від нуля. Навіть якщо це не так, то, внаслідок округлень при виконанні арифметичних операцій, на деякій ітерації k коефіцієнт α_1 в розкладі y_k буде відмінний від нуля.

Використання зсувів

Нехай $A \in R^{n\times n}$ і $\sigma \in R$. Якщо $\{\lambda, x\}$ — власна пара матриці A, то $\{\lambda - \sigma, x\}$ є власною парою матриці $A - \sigma I$. Дійсне число σ називається зсувом.

Спочатку розглянемо використання зсуву збільшення швидкості збіжності зворотної ітерації. Оскільки зворотна ітерація – це степеневий метод для зворотної матриці A^{-1}, то

$$\lambda^{(k+1)} - \frac{1}{\lambda_n} = O\left(\left(\frac{\frac{1}{\lambda_{n-1}}}{\frac{1}{\lambda_n}}\right)^{2k}\right) = O\left(\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\right)^{2k}\right).$$

Звідси випливає, що швидкість збіжності залежить від малості величини $|\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}|$. Остання залежить від відстані між $|\lambda_{n-1}|$ і $|\lambda_n|$, тобто, від відокремлення найменшого за модулем власного значення, і від малості $|\lambda_n|$. Тому зсув σ обирають так, щоб найменше за модулем власне значення $\widetilde{\lambda}_n = \lambda_n - \sigma$ матриці $A - \sigma I$ було якомога ближче до нуля. Таким чином, для збільшення швидкості збіжності зворотної ітерації зсув σ треба вибирати якомога ближче до шуканого власного значення λ_n. Якщо $\widetilde{x}$ — наближення до деякого власного вектора симетричної матриці, то з леми 2.5 з випливає, що найкращим наближенням до відповідного власного значення дає відношення Релея

$$\rho(\widetilde{x}) = \frac{\widetilde{x}^T A \widetilde{x}}{\widetilde{x}^T \widetilde{x}}.$$

Вищесказане лежить в основі наступного алгоритму.

Алгоритм 3.1. Зворотня ітерація зі зсувом Релея

1. $x_0 = y_0/||y_0||_2$
2. $For\ k = 0{,}1, \ldots\ Until\ Convergence\ Do$
3. $\quad \sigma_{k+1} = x_k^T A x_k$
4. $\quad y_{k+1} = (A - \sigma_{k+1} I)^{-1} x_k$
5. $\quad x_{k+1} = y_{k+1}/||y_{k+1}||_2$

6. *End Do*

Як тесту на збіжність можна використовувати умову (3.7).

Зауважимо, что крок 3. алгоритму потребує $O(n^3)$ арифметичних дій, бо щоразу треба розв'язувати систему лінійних рівнянь алгебри з новою матрицею.

Розглянемо тепер використання зсуву для обчислення власних значень матриці степеневим методом (зворотною ітерацією) відмінних від максимальних (мінімальних) за модулем. Очевидно, що зворотна ітерація, обчислюючи мінімальне за модулем власне значення матриці $A - \sigma I$, фактично буде обчислювати власне значення матриці A найближче до σ.

Визначивши межі спектру матриці A (наприклад, по лемі Гершгоріна), можна так вибрати зсув σ, щоб степеневий метод або зворотна ітерація фактично обчислювали найменше (найбільше) власне значення матриці A. Дійсно (див. рис. 6.1) , якщо $\sigma \leq \lambda_{min}(A)$, то всі власні значення матриці $A - \sigma I$ позитивні, найменшому власному значенню матриці A відповідає мінімальне (мінімальне за модулем) власне значення матриці $A - \sigma I$, а максимальному власному значенню матриці A — максимальне (максимальне за модулем) власне значення матриці $A - \sigma I$. Якщо ж $\sigma \geq \lambda_{max}(A)$, то всі власні значення матриці $A - \sigma I$ негативні, найменшому власному значенню матриці A відповідає мінімальне (максимальне за модулем) власне значення матриці $A - \sigma I$, а максимальному власному значенню матриці A — максимальне (мінімальне за модулем) власне значення матриці $A - \sigma I$.

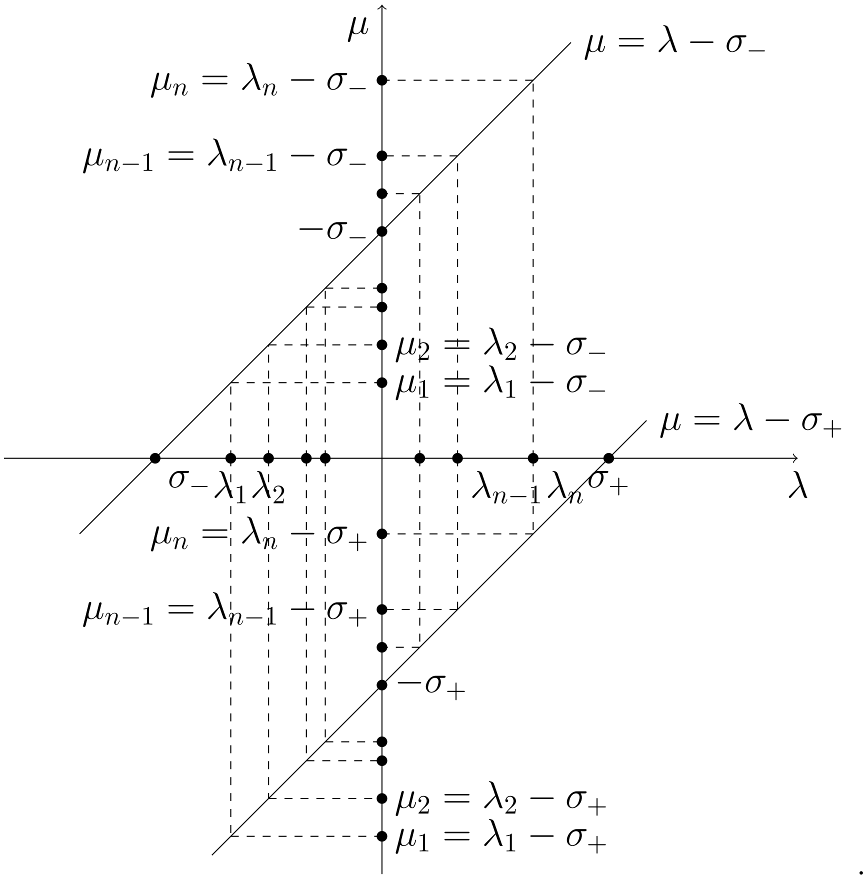

Рис. 3.1. Власні значення μ матриці $A - \sigma I$

РОЗДІЛ 4

КЛАСИЧНИЙ МЕТОД НЬЮТОНА

Класичний метод Ньютона вводиться для рівняння

$$F(x) = 0, \tag{4.1}$$

де $F : R^n \to R^n$ — гладке відображення. Нехай $x^k \in R^n$ — поточне наближення до шуканого розвязку $\overline{x}$ рівняння (4.1); тоді поблизу x^k рівняння можна апроксимувати його лінеаризацією

$$F(x^k) + F'(x^k)(x - x^k) = 0. \tag{4.2}$$

Це і є ітераційне рівняння *методу Ньютона.*

Алгоритм 4.1. Вибираємо $x^0 \in R^n$ і вважаємо $k = 0$.

1) Обчислюємо $x^{k+1} \in R^n$ як розв'язок рівняння (4.2)
2) Збільшуємо номер кроку k на 1 та переходимо до п.1.

Ітераційну схему методу Ньютона часто записують як

$$x^{k+1} = x^k - (F'(x^k))^{-1}F(x^k), k = 0,1,\ldots, \tag{4.3}$$

хоча, зрозуміло, повне звернення матриці $F'(x^k)$ при реалізації методу зовсім не потрібно.

Теорема 4.1. *Нехай відображення $F : R^n \to R^n$ диференційовано в деякій околі точки $\overline{x} \in R^n$, причому його похідна безперервна у цій точці. Нехай $\overline{x}$ є розв'язком рівняння (4.1), причому* $\det F'(\overline{x}) \neq 0$.

Тоді будь-яке початкове наближення $x^0 \in R^n$, досить близьке к $\overline{x}$, коректно визначає траєкторію алгоритму 4.1, яка сходиться до $\overline{x}$. Швидкість збіжності надлінійна, а якщо похідна F безперервна по Липшицу в околі точки $\overline{x}$, то квадратична.

Доведення. Відповідно до теореми про мале збурення невиродженої матриці знайдуться околі U точки $\overline{x}$ і число $M > 0$ такі, що

$$\det F'(x) \neq 0, \quad \|(F'(x))^{-1}\| \leqslant M \quad \forall x \in U. \tag{4.4}$$

Зокрема, для $x^k \in U$ рівняння (4.2) має єдинний розвязок x^{k+1}, тобто ітерація алгоритму 1 з такої точки x^k коректно визначена.

Крім того, в силу (4.3), (4.4) та теореми про середнє окіл U можна вибрати так, що якщо $x^k \in U$, то

$$\begin{aligned} |x^{k+1} - \overline{x}| = |x^k - \overline{x} - (F'(x^k) - F(\overline{x}))| \leqslant \\ \leqslant \|(F'(x^k)^{-1}\| |F(x^k) - F(\overline{x}) - F'(x^k)(x^k - \overline{x})| \leqslant \\ \leqslant M \sup_{t\in[0,1]} \|F'(tx^k + (1-t)\overline{x}) - F'(x^k)\| |x^k - \overline{x}|. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Зауважимо, що

$$\sup_{t\in[0,1]} \|F'(tx^k + (1-t)\overline{x}) - F'(x^k)\| \to 0 \quad (x^k \to \overline{x}),$$

тому з (4.5) випливає, що для кожного $q \in (0,1)$ знайдеться число $\delta > 0$ таке, що $B(\overline{x}, \delta) \subset U$ і якщо $x^k \in B(\overline{x}, \delta)$, то

$$|x^{k+1} - \overline{x}| \leqslant q|x^k - \overline{x}|;$$

зокрема, $x^{k+1} \in B(\overline{x}, \delta)$. Таким чином, по-перше, будь-яке початкове наближення x^0, досить близьке до $\overline{x}$ коректно визначає траєкторію алгоритму 1, а по-друге, ця траєкторія сходиться до $\overline{x}$, із надлінійною швидкістю.

Нарешті, якщо похідна F безперервна за Липшицем на U з константою $L > 0$, то з (4.6) маємо: якщо $x^k \in U$, то

$$|x^{k+1} - \overline{x}| \leqslant ML|x^k - \overline{x}|^2, \tag{4.6}$$

що дає квадратичну швидкість збіжності. $\square$

Тут і в інших теоремах про методи ньютоновського типу для квадратичної оцінки швидкості збіжності замість безперервності похідної F за Липшицем достатньо припускати виконаним більш слабкої умови

$$\|F'(x) - F'(\overline{x})\| \leqslant L|x - \overline{x}| \quad \forall x \in V,$$

де V — окіл точки $\overline{x}$, а $L > 0$ — деяка константа. Проте, за традицією, майже скрізь нижче в цьому контексті будемо припускати липшицеву безперервність похідної на околі розвязку.

Іноді у виразі для $F'(\cdot)$ можна апріорі виділити члени, які звертаються в нуль у точці $\overline{x}$; особливо часто це трапляється, коли відомий аналітичний вираз для $F'(\cdot)$. Такі члени розумно відразу вважати рівними нулю, замінюючи $F'(\cdot)$ відповідним апроксимуючим відображенням $F : R^n \to R(n,n)$, та розглядати *усічений метод Ньютона,* який можна записати у вигляді ітераційної схеми

$$x^{k+1} = x^k - (F(x^k))^{-1} F(x^k), \quad k = 0,1,\ldots \tag{4.7}$$

Наслідок 4.1. *Нехай виконані умови теореми 4.1. Тоді для будь-якого відображення $F : R^n \to R(n,n)$ такого, що*

$$\|F(x) - F'(\overline{x})\| \to 0 \quad (x \to \overline{x}),$$

будь-яке початкове наближення $x^0 \in R^n$, досить близьке до $\overline{x}$, коректно визначає траєкторію методу (4.7), яка сходиться до $\overline{x}$. Швидкість збіжності надлінійна, а якщо похідна F безперервна по Липшицу на околі точки $\overline{x}$ і існують окіл V точки $\overline{x}$ і число $N > 0$ такі, що

$$\|F(x) - F'(\overline{x})\| \leqslant N|x - \overline{x}| \quad \forall x \in V,$$

то квадратична.

[1, стр. 81]

РОЗДІЛ 5

МЕТОД НЬЮТОНА ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ

Власні значення та відповідні власні вектори симетричної матриці $A \in R^{n\times n}$ є корінням наступної нелінійної системи:

$$\begin{cases} Ax - \lambda x = 0, \\ \frac{1}{2}(1 - x^T x) = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Тут останнє рівняння системи є умовою нормування власного вектора. Систему запишемо в наступному вигляді, припустивши

$$F\left(\begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} Ax - \lambda x \\ \frac{1}{2}(1 - x^T x) \end{bmatrix}. \tag{5.2}$$

Похідна відображення F легко обчислюється:

$$F'\left(\begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} A - \lambda I & -x \\ -x^T & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.3}$$

Визначимо наступний ітераційний процес:

$$\begin{bmatrix} x^{k+1} \\ \lambda^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^k \\ \lambda^k \end{bmatrix} - \left(F'\left(\begin{bmatrix} x^k \\ \lambda^k \end{bmatrix}\right)\right)^{-1} F\left(\begin{bmatrix} x^k \\ \lambda^k \end{bmatrix}\right), k = 0,1,\ldots. \tag{5.4}$$

Теорема 5.1. *Нехай $\overline{\lambda}$ — просте власне значення, $\overline{x}$ — відповідний власний вектор дійсної симетричної матриці A. Тоді для будь-яких початкових наближень $[x^0,\lambda^0]^T$, досить близьких до $[\overline{x},\overline{\lambda}]^T$, метод Ньютона визначає послідовність, що сходиться до $[\overline{x},\overline{\lambda}]^T$ із квадратичною швидкістю.*

Доведення. Покажемо, що для відображення F ітераційного процесу виконуються всі умови теореми 5.1.

Справді, відображення F безперервно диференційовано, а його похідна безперервна по Липшицу в околі $[\overline{x},\overline{\lambda}]^T$. Доведемо, що

$$\det F'\left(\begin{bmatrix}\overline{x}\\ \overline{\lambda}\end{bmatrix}\right) \neq 0.$$

Достатньо показати, що система

$$\begin{bmatrix} A-\overline{\lambda}I & -\overline{x} \\ -\overline{x}^T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

має лише тривіальний розвязок. Помножуючи перше рівняння системи зліва на x^T і враховуючи останнє рівняння, одержуємо

$$x^TAx - \overline{\lambda}x^Tx = 0.$$

Якщо припустити, що $x \neq 00$, то

$$\overline{\lambda} = \frac{x^TAx}{x^Tx}$$

і $x = \alpha\overline{x}$ $(\alpha \neq 0))$, бо $\overline{\lambda}$ — просте власне значення. Але тоді з останнього рівняння системи $\alpha\overline{x}^T\overline{x} = 0$.Що неможливо. Значить, $x = 0$. З урахуванням цього, перше рівняння системи набуває вигляду

$$-\lambda\overline{x} = 0.$$

Значить, $\lambda = 0$. Теорема доказана. □

Нехай λ^0, x^0 — деякі наближення до шуканої власної пари $\overline{\lambda}$, $\overline{x}$ симетричної матриці A. Тоді, k–й крок методу Ньютона зручно записати так:

1) знаходимо розвязок $[y^k,\mu^k]^T$ системи

$$\begin{bmatrix} A-\lambda^k I & -x^k \\ -(x^k)^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^k \\ \mu^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax^k-\lambda^k x^k \\ \frac{1}{2}(1-(x^k)^T x^k) \end{bmatrix}; \tag{5.6}$$

2) припускаємо

$$\begin{cases} x^{k+1} = x^k - y^k, \\ \lambda^{k+1} = \lambda^k - \mu^k. \end{cases}$$

Зазначимо деякі особливості методу Ньютона. Права частина рівняння містить нев'язку $r^k = (A-\lambda^k)x^k$, яка є найкращою обчислювальною мірою точності (λ^k,x^k) як власної пари матриці A, та нев'язку рівняння нормування власного вектора. Тому умову завершення ітераційного процесу зручно визначити так:

$$||r^k|| \leq \epsilon, \tag{5.7}$$

де ϵ — потрібна точність обчислень. Метод Ньютона за обчислювальними витратами порівняємо із зворотною ітерацією з відношенням Релея, k-й крок якої має вигляд

1. $\rho^k = (x^k)^T A x^k$,
2. $(A-\rho^k)y^{k+1} = x^k$,
3. $x^{k+1} = y^{k+1}/||y^{k+1}||_2$.

Справді, на кожній ітерації головні обчислювальні витрати методів пов'язані з розвязком системи, матриця якої змінюється з допомогою зсуву λ^k або ρ^k. Метод Ньютона може бути кращим за зворотну ітерацію з ставленням Релея в наступному випадку. Якщо власне значення обчислено зворотною ітерацією з великою точністю, то матриця $A-\rho^k I$ стає виродженою в машинній арифметиці та обчислення слід перервати. Може статися, що відповідний власний вектор ще не обчислений із заданою точністю. Як доведено вище, матриця системи невироджена, навіть якщо λ^k збігається з власним значенням. Тому, обчислення методом Ньютона можна продовжувати задля досягнення необхідної точності власного вектора навіть якщо власне значення вже точно обчислено.

РОЗДІЛ 6

ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

Скінченно-різницева апроксимація спектральної задачі для оператора Лапласа в одиничному прямокутнику з однорідними умовами Діріхле є задачею на власні значення для симетричної матриці A. Усі власні значення матриці A різні. Мінімальне власне значення та відповідний йому власний вектор визначаються таким чином:

$$\lambda_h = \frac{8}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2},$$
$$\varphi_h(x_i,y_i) = 2\sin(\pi x_i)\sin(\pi y_i), \quad x_i = ih,\, y_j = jh,\, i,j = 1,\ldots,N-1.$$

Тут ціле число N визначає параметр $h = 1/N$ рівномірної сітки на одиничному прямокутнику.

Обчислення проводилися в пакеті MATLAB. Мінімальне власне значення та відповідний власний вектор матриці A розміру $10^5 \times 10^5 (N = 101)$ обчислювалися методом Ньютона та зворотної ітерації з відношенням Релея. Для визначення початкових наближень λ^0 і x^0 виконувався один крок зворотної ітерації для початкового вектора $y^0 = [1,\ldots,1]^T$. Результати обчислень представлені у таблицях 1 та 2. Зазначимо наступне. За три кроки зворотної ітерації з відношенням Релея матриця $A - \rho^h I$ стає виродженою в машинній арифметиці та обчислення припиняються. У методі Ньютона число обумовленості матриці системи не зростає при наближенні до власного значення та обчислення можна продовжувати для досягнення більшої точності.

Табл. 6.1. Зворотня ітерація з відношенням Релея.

k	$\|\|r^k\|\|_2$	$\lambda_h - \rho^k$	$\|\|\varphi_h - x^k\|\|_2$	$cond(A - \rho^k I)$
1	12.2	-0.901	2.00	9.04e+04
2	0.0895	-9.64e-05	1.33e-09	8.46e+08
3	1.06e-07	-1.42e-14	*	6.08e+16

Табл. 6.2. Метод Ньютона.

k	$\|\|r^k\|\|_2$	$\lambda_h - \lambda^k$	$\|\|\varphi_h - x^k\|\|_2$	$cond\left(\begin{bmatrix} A - \lambda^k I & -x^k \\ -(x^k)^T & 0 \end{bmatrix}\right)$
1	14.2	0.0874	0.0125	6.83e+05
2	0.900	5.04e-04	7.801e-05	8.47e+04
3	0.00108	3.88e-08	3.05e-09	8.16e+04
4	3.93e-08	-3.55e-14	1.84e-15	8.16e+04
5	4.25e-12	-7.11e-15	1.77e-15	8.16e+04

ВИСНОВКИ

Запропоновано використати метод Ньютона для обчислення власних значень та векторів симетричної матриці.

Доведено збіжності методу Ньютона в околі простого власного значення симетричної матриці.

Метод Ньютона та метод зворотної ітерації з відношенням Релея потребують на одну ітерацію майже однакові обчислювальнимі витрати. І хоча зворотна ітерація збігається швидше, метод Ньютона дозволяє обчислити власну пару з більшою точністю.

За матеріалами досліджень опублікована стаття у фаховому журналі [9].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Измаилов А. Ф., Солодов М. В. Численные методы оптимизации: Учеб. пособие. / А. Ф. Измаилов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 304 с.
2. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. / Л. В. Канторович — М.: Наука, 1977.
3. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. / Л. Коллатц— М.:Мир, 1969.
4. Кублановская В. Н. Метод Ньютона для определения собственных значений и собственных векторов матрицы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1972, том 12, номер 6, 1371–1380.
5. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений / Б. Парлетт — М.: Мир,1983. — 384 с.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем. Учебное пособие. / А. А. Самарский. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983. — 616 с.
7. Фаддеев Д. К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. / Д. К. Фаддеев — М.: ФИЗМАТГИЗ, 1963.
8. Хорн Р., Джексон Ч. Матричный анализ. Пер. с англ. / Р. Хорн. — М.: Мир, 1989. — 666 с.
9. Verbitskyi V. V., Huk A. G. Newton's method for the eigenvalue problem of a symmetric matrix / V. V. Verbitskyi — Odesa: Odesa I. I. Mechnikov National Univ. scientific journal, 2020. — 75 с.
10. Wilkinson J. H. The algebraic eigenvalue problem. / J. H. Wilkinson — New York: Oxford Univ. press, 1965.

ДОДАТОК А. КОД ПРОГРАМИ

```
function n_ri4

  N=40;
 A=initA(N);

  n=size(A,1)
  eigs(A,1,'SM')
  lambda1_h=8*N*N*sin(pi/2/N)*sin(pi/2/N)
  y=rand(n,1);
  x0=y/norm(y,2);
  for i=1:3
    y1=A\x0;
    lambda0=1/(y1'*x0)
    x0=y1/norm(y1,2);
  endfor
  x00=x0;
  lambda00=lambda0;
  printf('Метод Ньютона\n');
  for i=1:7
    B=[A-lambda0*eye(n,n),-x0;
       -x0',0];
    b1=A*x0-lambda0*x0;
    condB=cond(B)
    norm_rez=norm(b1,2)
    b=[b1;(1-x0'*x0)/2];

    z=B\b;
    x0=x0-z(1:n);
    lambda0=lambda0-z(n+1)
  endfor
```

```
  x0=x00;
  %lambda0=lambda00;
  printf('Простая итерация со сдвигом\n');
  for i=1:5
   lambda0=x0'*A*x0
   B=A-lambda0*eye(n,n);
   condB=cond(B)
   norm_rez=norm(B*x0,2)
    y=B\x0;
    x0=y/sqrt(y'*y);

  endfor

endfunction

function [A]=initA(N)
 % Разностный оператор Лапласа в квадрате
  h=1/N;
  n=N-1;
  v(1:n*n)=4/h/h;
  v1(1:n*n-1)=-1/h/h;
  for i=1:n-1
    v1(i*n)=0;
  end
  v2(1:n*(n-1))=-1/h/h;
  A=diag(v)+diag(v1,1)+diag(v1,-1)+diag(v2,n)+diag(v2,-n);
endfunction
```