

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра оптимального керування і економічної кібернетики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Порівняльна характеристика багатокрокових методів»

«Comparative characteristics of multi-term methods»

Виконав: здобувач денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Освітня програма «Прикладна математика»
Скуріхін Олександр В'ячеславович

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Яровий А. Т. _____

Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. Васильєв О. Б.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від _____ 2025 р.

Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № _____

Протокол № ____ від _____ 2025 р.

Оцінка _____ / _____ / _____

Голова ЕК

Одеса — 2025 р.

ЗМІСТ

Вступ	3
1 Загальні відомості	5
1.1 р-кроковий метод	7
2 Теоретичні положення модифікованого р-крокового методу	8
3 Результати роботи алгоритмів на тестових функціях	19
Висновки	51
Список літератури	52
ДОДАТОК А	53

ВСТУП

Оптимізаційні методи є невід'ємною частиною сучасної прикладної математики, інформатики та інженерії, оскільки багато задач у науці й техніці формуються як задачі знаходження мінімуму (або максимуму) функції. У чисельній оптимізації особливу увагу приділяють методам безумовної оптимізації, які не потребують додаткових обмежень на розв'язок. Важливу роль серед них відіграють багатокрокові методи, що використовують інформацію з кількох попередніх ітерацій для побудови напрямку пошуку.

У даній роботі розглядається узагальнений p -кроковий метод оптимізації, в якому p визначає кількість попередніх кроків (або доданків), що беруть участь у формуванні нового напрямку. При $p = 2$ цей метод збігається з відомим методом спряжених градієнтів, який широко застосовується для розв'язання задач квадратичної оптимізації та задач великої розмірності.

Окрім базового p -крокового методу, у роботі також запропоновано модифікований варіант цього алгоритму. Основна увага приділяється теоретичному аналізу цієї модифікації, а також практичному дослідженню її ефективності порівняно з класичним підходом.

Для перевірки властивостей та продуктивності розглянутих алгоритмів проведено чисельні експерименти на відомих тестових функціях оптимізації при різних початкових точках та різних значеннях параметра p . Це дозволяє оцінити вплив кількості попередніх кроків на швидкість збіжності, точність та стабільність методів.

Метою дипломної роботи є дослідження та порівняння узагальненого p -крокового методу і його модифікації, а також формулювання практичних висновків щодо їх використання в залежності від структури задачі та обраного значення p .

Актуальність теми полягає в необхідності раціонального вибору оптимізаційного методу залежно від особливостей задачі, що розв'язується. Адже від цього напряму залежить не лише точність кінцевого результату, а й загальні витрати обчислювальних ресурсів. Проведений аналіз дозволяє на-

дати практичні рекомендації щодо вибору оптимального методу в тих чи інших умовах.

РОЗДІЛ 1

ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

У загальному випадку задача оптимізації полягає у визначенні екстремального значення деякої функції на допустимій множині, яка визначається набором обмежень. У випадку відсутності обмежень маємо задачу безумовної оптимізації.

Чисельні методи безумовної оптимізації різняться або вибором напрямку спуску, або способом руху вздовж напрямку спуску. Методи спуску мають таку процедуру побудови послідовності $\{x^k\}$. За початкову точку обирається, взагалі кажучи, довільна точка $x^0 \in R^n$. Послідовні наближення знаходимо за алгоритмом:

$$x^{k+1} = x^k + \beta_k s^k, \quad (1.1)$$

де s^k - напрямок спуску, β_k - величина кроку руху вздовж s^k .

У залежності від максимального порядку похідної від цільової функції, що бере участь в утворенні s^k , розрізняють методи нульового, першого та другого порядків.

Щодо побудови цих напрямків s^k розроблено різні підходи, які і визначають подальшу класифікацію методів. Зокрема, ті методи, які при побудові напрямків спуску використовують лише інформацію поточної ітерації, тобто для $(k+1)$ -го наближення використовується тільки k -е наближення, називають однокроковими. Якщо використовується додатково інформація попереднього кроку, тобто для $(k+1)$ -го наближення використовуються $(k-1)$ -е і k -е наближення, то двокроковим і т. д. Класичним двокроковим методом є метод спряжених градієнтів.

Розглянемо задачу

$$\phi(x) \rightarrow \min, x \in R^n, \quad (1.2)$$

де $\phi(x) : R^n \rightarrow R^1$ є нерерервно диференційованою функцією. Позначимо

її градієнт через $\phi'(x) = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x}$.

Метод спряжених градієнтів має такий загальний вигляд:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \beta_k s^k, \quad k = 0, 1, \dots, \\ s^k &= \begin{cases} -\phi'(x^k), & k = 0, \\ -\phi'(x^k) + \gamma_{k-1} s^{k-1}, & k = 1, 2, \dots \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3)$$

де $x^0, x^1, \dots, x^k, \dots$ - послідовні наближення, $s^0, s^1, \dots, s^k, \dots$ - напрямки спуску, β_k - величина кроку вздовж напрямку спуску, γ_{k-1} - числовий параметр.

Одним із можливих варіантів вибору кроку β_k є розв'язування задачі одновимірної мінімізації:

$$\beta_k: \min_{\beta \geq 0} \phi(x^k + \beta s^k) \quad (1.4)$$

Практичні дослідження доводять, що якість розв'язку вихідної задачі (1.2) та швидкість збіжності алгоритму суттєво залежать від якості розв'язку одновимірної задачі (1.4).

Різновиди методу (1.3) визначаються способом обчислення параметру γ_{k-1} , зокрема:

$$\begin{aligned} \circ \gamma_{k-1} &= \frac{\|\phi'(x^k)\|^2}{\|\phi'(x^{k-1})\|^2} \quad (\text{метод Флетчера-Рівза}); \\ \circ \gamma_{k-1} &= \frac{(\phi'(x^k), \phi'(x^k) - \phi'(x^{k-1}))}{\|\phi'(x^{k-1})\|^2} \quad (\text{метод Полака - Ріб'єра - Поляка}) \end{aligned}$$

та інші. Тут і далі $\|\cdot\|$ означає евклідову норму вектора, а $(\cdot, \cdot)$ - скалярний добуток векторів.

Метод спряжених градієнтів вважається досить ефективним для задач великого виміру. Він у більшій мірі порівняно із однокроковими градієнтними методами враховує геометричні властивості цільової функції. Недоліком методу є чутливість до похибок обчислень, особливо при великій кількості змінних.

Зважаючи на переваги двокрокових методів перед однокроковими, можна очікувати, що врахування інформації, отриманої не тільки на попередньому, $(k-1)$ -му, кроці, а й на $(k-2)$ -му, $\dots$, $(k-(p-1))$ -му дозволить побудувати ще більш ефективний алгоритм.

1.1 p -кроковий метод

У роботі [4] було розглянуто узагальнений p -кроковий метод:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \beta_k s^k, \quad k = 0, 1, \dots, \\ s^k &= \begin{cases} -\phi'(x^k), & k = 0, \\ -\phi'(x^k) + \gamma_{k-1}s^{k-1} + \dots + \gamma_{k-(p-1)}s^{k-(p-1)}, & k = 1, 2, 3 \dots \end{cases} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Крок β_k визначається з умови (1.4), а параметри γ_{k-i} за формулою:

$$\gamma_{k-i} = \frac{(\phi'(x^k), \phi'(x^{k-i+1}) - \phi'(x^{k-i}))}{\|\phi'(x^{k-i})\|^2}$$

У згаданій роботі були описані властивості цього алгоритму у випадку квадратичної цільової функції та показано, що цей метод відноситься до методів спряжених напрямків.

Метою даної роботи є модифікація алгоритму (1.5) та їх порівняння.

РОЗДІЛ 2

ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ МОДИФІКОВАНОГО Р-КРОКОВОГО МЕТОДУ

Отже, повернемося до задачі нелінійного програмування (1.2). Для її розв'язання пропонується такий алгоритм:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \beta_k s^k, \quad k = 0, 1, \dots \\ s^0 &= -\phi'(x^0), \quad s^k = -H_k \phi'(x^k) + \gamma_1^k s^{k-1} + \gamma_2^k s^{k-2} + \dots + \gamma_{p-1}^k s^{k-(p-1)} \end{aligned} \quad (2.1)$$

де $x^0, x^1, \dots, x^k$ - послідовні наближення, β_k і γ_j^m - числові параметри. Параметр β_k визначатиметься з умови (1.4). Матриця H_k розраховується за рекурентною формулою:

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\Delta x^k (\Delta x^k)^T}{(\Delta x^k, \Delta g^k)} - \frac{H_k \Delta g^k (\Delta g^k)^T H_k^T}{(H_k \Delta g^k, \Delta g^k)} \quad (2.2)$$

$$\text{де } \Delta x^k = x^{k+1} - x^k, \quad \Delta g^k = \frac{\partial \phi(x^{k+1})}{\partial x} - \frac{\partial \phi(x^k)}{\partial x}$$

На початку ітераційного процесу за H_0 можна взяти довільну симетричну додатно визначену матрицю, але на практиці (як і у нашому випадку) часто береться одинична матриця, тобто $H_0 = I$.

Цей спосіб побудови матриць відомий як алгоритм Девідона - Флетчера - Пауелла (ДФП). Матриця H_k , отримана за допомогою методу ДФП є симетричною та строго додатньо визначеною.

Означення 2.1. [3] Розглянемо симетричну та додатно визначену матрицю A ($A > 0$). Вектори s' і s'' називаються *спряженими* відносно матриці A , якщо вони відмінні від нуля і $(As', s'') = 0$.

Означення 2.2. [3] Вектори $s^0, s^1, \dots, s^k$ називаються *взаємно спряженими* відносно матриці A , якщо всі вони відмінні від нуля і $(As^i, s^j) = 0$, $i = \overline{0, k}, j = \overline{0, k}, i \neq j$.

Розглянемо властивості методу (2.1) за умови, що цільова функція

$\phi(x)$ є квадратичною, тобто

$$\phi(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c \quad (2.3)$$

де $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, $c = \text{const}$

Побудуємо систему взаємно спряжених напрямків за правилом (2.1). Для цього обидві частини скалярно домножимо на вектор As^{k-1} :

$$\begin{aligned} (s^k, As^{k-1}) = 0 &= (-H_k \phi'(x^k) + \gamma_1^k s^{k-1} + \gamma_2^k s^{k-2} + \dots + \gamma_{p-1}^k s^{k-(p-1)}, As^{k-1}) = \\ &= (-H_k \phi'(x^k), As^{k-1}) + \gamma_1^k (s^{k-1}, As^{k-1}) + \gamma_2^k (s^{k-2}, As^{k-1}) + \dots + \\ &\quad + \gamma_{p-1}^k (s^{k-(p-1)}, As^{k-1}) \end{aligned}$$

Звідси, з урахуванням взаємної спряженості векторів, отримаємо:

$$\gamma_1^k = \frac{(H_k \phi'(x^k), As^{k-1})}{(s^{k-1}, As^{k-1})} \quad (2.4)$$

Знаменник у (2.4) не дорівнює нулю, згідно означення додатно визначеної матриці A .

Аналогічно отримаємо:

$$\gamma_i^k = \frac{(H_k \phi'(x^k), As^{k-i})}{(s^{k-i}, As^{k-i})} \quad i = 2, 3, \dots, (p-1) \quad (2.5)$$

Теорема 2.1. Для квадратичної (диференційовної) функції $\phi(x)$ (2.3) послідовність $\{x^k\}$, що побудована за (2.1), (1.4), (2.4), (2.5), така, що

$$(\phi'(x^{k+1}), s^k) = 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.6)$$

Доведення. Враховуючи (2.1), отримаємо $Ax^{k+1} = Ax^k + \beta_k As^k$; а з (2.3) маємо: $\phi'(x) = Ax + b$. Таким чином отримаємо:

$$\phi'(x^{k+1}) = \phi'(x^k) + \beta_k As^k \quad (2.7)$$

З умови (1.4) та з необхідної умови мінімуму випливає, що при $\beta_k > 0$:

$$\left. \frac{d}{d\beta} \phi(x^k + \beta s^k) \right|_{\beta=\beta_k} = 0,$$

а при $\beta_k = 0$ з необхідної умови мінімуму функції на відрізку ($\beta \geq 0$):

$$\left. \frac{d}{d\beta} \phi(x^k + \beta s^k) \right|_{\beta=0} \geq 0.$$

Якщо $\beta_k > 0$, то

$$0 = \left. \frac{d}{d\beta} \phi(x^k + \beta s^k) \right|_{\beta=\beta_k} = (\phi'(x^k + \beta_k s^k), s^k) = (\phi'(x^{k+1}), s^k).$$

Отже, $(\phi'(x^{k+1}), s^k) = 0$.

Доведення того, що співвідношення (2.6) справедливе і при $\beta_k = 0$, проведемо за індукцією. Якщо $\beta_0 = 0$, то з $x^1 = x^0$ і $s^0 = -\phi'(x^0)$ отримаємо:

$$0 \leq \left. \frac{d}{d\beta} \phi(x^0 + \beta s^0) \right|_{\beta=0} = (\phi'(x^1), s^0) = (\phi'(x^0), -\phi'(x^0)) = -\|\phi'(x^0)\|^2 \leq 0,$$

звідки слідує рівність $(\phi'(x^1), s^0) = 0$.

Нехай справедлива рівність $(\phi'(x^k), s^{k-1}) = 0$. Доведемо, що справедливо $(\phi'(x^{k+1}), s^k) = 0$ при $\beta_k = 0$. Так як при $\beta_k = 0$ $x^{k+1} = x^k$, то враховуючи (2.1):

$$\begin{aligned} 0 \leq \left. \frac{d}{d\beta} \phi(x^k + \beta s^k) \right|_{\beta=0} &= (\phi'(x^{k+1}), s^k) = (\phi'(x^k), s^k) = \\ &= (\phi'(x^k), -H_k \phi'(x^k) + \gamma_1^k s^{k-1} + \gamma_2^k s^{k-2} + \dots + \gamma_{p-1}^k s^{k-(p-1)}) = \\ &= -(\phi'(x^k), H_k \phi'(x^k)) + \gamma_1^k (\phi'(x^k), s^{k-1}) + \gamma_2^k (\phi'(x^k), s^{k-2}) + \dots + \\ &\quad + \gamma_{p-1}^k (\phi'(x^k), s^{k-(p-1)}) \end{aligned}$$

Враховуючи припущення індукції і (2.7) для $i > 1$ отримаємо:

$$\begin{aligned} (\phi'(x^k), s^{k-i}) &= (\phi'(x^{k-1}) + \beta_{k-1}As^{k-1}, s^{k-i}) = (\phi'(x^{k-1}), s^{k-i}) + \\ &+ \beta_{k-1}(As^{k-1}, s^{k-i}) = (\phi'(x^{k-1}), s^{k-i}) = \dots = (\phi'(x^{(k-i+1)}), s^{k-i}) = \\ &= (\phi'(x^{(k-i+1)}), s^{(k-i+1)-1}) = 0 \end{aligned}$$

В результаті отримали, враховуючи додатну означеність матриці H_k ,

$$0 \leq (\phi'(x^{k+1}), s^k) = -(\phi'(x^k), H_k\phi'(x^k)) \leq 0$$

звідси $(\phi'(x^{k+1}), s^k) = 0$. Теорему доведено.

З цієї теореми, як наслідок, та, враховуючи симетричність матриці H_k , випливає рівність:

$$(\phi'(x^k), s^k) = -(H_k\phi'(x^k), \phi'(x^k)) \quad (2.8)$$

Відомо [3], що для квадратичної функції (2.3) розв'язком задачі одновимірної мінімізації (1.4) є:

$$\beta_k = -\frac{(\phi'(x^k), s^k)}{(As^k, s^k)} \quad (2.9)$$

Із рівняння (2.7), та з урахуванням, що $\beta_k \neq 0$, отримаємо:

$$As^k = \frac{\phi'(x^{k+1}) - \phi'(x^k)}{\beta_k} \quad (2.10)$$

Ми побудували систему спряжених напрямків за правилом (2.1) для випадку квадратичних функцій. Сформулюємо тепер модифікований p -кроковий метод для неквадратичних функцій. Для цього перетворимо формулу (2.5) так, щоб до неї не входила матриця A , використовуючи (2.10), (2.6) і (2.8):

$$\begin{aligned}\gamma_i^k &= \frac{(H_k \phi'(x^k), As^{k-i})}{(s^{k-i}, As^{k-i})} = \frac{(H_k \phi'(x^k), \phi'(x^{k-i+1}) - \phi'(x^{k-i}))}{(s^{k-i}, \phi'(x^{k-i+1}) - \phi'(x^{k-i}))} = \\ &= \frac{(H_k \phi'(x^k), \phi'(x^{k-i+1}) - \phi'(x^{k-i}))}{(H_{k-i} \phi'(x^{k-i}), \phi'(x^{k-i}))} \quad (2.11)\end{aligned}$$

Тепер наведемо деякі допоміжні означення та теореми, які будуть використанні при доведенні збіжності методу.

Отже, розглядається задача мінімізації функції $\phi(x)$ на деякій множині X . Процес побудови послідовності точок $\{x^k\}$ будемо називати *релаксаційним*, якщо

$$x^k \in X \text{ і } \phi(x^{k+1}) \leq \phi(x^k) \quad (k = 0, 1, \dots)$$

Означення 2.3. [3] Множина $X \subseteq R^n$ називається *опуклою*, якщо разом з будь-якими двома своїми точками x і y вона містить і відрізок $[x, y]$, що з'єднує ці точки, тобто $[x, y] \subset X$, де

$$[x, y] = \{z \in R^n \mid z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \alpha \in [0; 1]\}$$

Означення 2.4. [5] Функцію $\phi(x)$, визначену на опуклій множині X , називають *опуклою*, якщо для будь-яких $x, y \in X$ та всіх $\alpha \in [0; 1]$ виконується нерівність:

$$\phi(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha \phi(x) + (1 - \alpha)\phi(y) \quad (2.12)$$

Означення 2.5. [5] Функція $\phi(x)$, визначена та диференційована на деякій множині X , належить класу $C^{1,1}(X)$, якщо існує така константа $L > 0$, що для довільних $x, y \in X$ таких, що $[x, y] \subset X$, виконується нерівність:

$$\|\phi'(x) - \phi'(y)\| \leq L\|x - y\| \quad (2.13)$$

Далі будемо припускати, що цільова функція $\phi(x)$ та допустима множина X є опуклими.

Лема 2.1. [5] Якщо числова послідовність $\{\mu_k\}$ є такою, що

$$\mu_k - \mu_{k+1} \geq \tau_k \mu_k^2, \quad \mu_k > 0, \tau_k \geq 0, \quad (k = 0, 1, \dots),$$

тоді

$$\mu_k \leq \mu_0 \left[1 + \mu_0 \sum_{k=0}^{m-1} \right]^{-1} \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

Далі розглянемо деякі теореми про оцінки, знову ж таки в припущенні, що цільова функція $\phi(x)$ та допустима множина X є опуклими. Позначимо:

$$x^* = \arg \min \{ \phi(x) : x \in X \}, \quad X^* = \{x^* \in X\},$$

$$\mu_k = \phi(x^k) - \phi(x^*), \quad \rho(x_k, X^*) = \|x^k - p_k^*\|,$$

де p_k^* - проєкція точки x^k на множину X^* .

З опуклості функції $\phi(x)$ випливає нерівність:

$$0 \leq \mu_k \leq (\phi'(x^k), x^k - p_k^*) \quad (2.14)$$

В основі більшості подальших досліджень швидкості збіжності релаксаційних методів мінімізації лежить така теорема про оцінку.

Теорема 2.2. [5] Якщо

- 1) функція $\phi(x)$ є опуклою і диференційованою на опуклій і замкнутій множині X ;
- 2) множина X^* непорожня;
- 3) послідовність наближень x^k релаксаційна,

то має місце оцінка:

$$\phi(x^m) - \phi(x^*) \leq \mu_0 \left[1 + \mu_0 \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\phi(x^k) - \phi(x^{k+1})}{(\phi'(x^k), x^k - p_k^*)^2} \right]^{-1} \quad (2.15)$$

Доведення. Використовуючи нерівність для μ_k (2.14), отримуємо:

$$\begin{aligned}\mu_k - \mu_{k+1} &= \phi(x^k) - \phi(x^{k+1}) = \\ &= \frac{\phi(x^k) - \phi(x^{k+1})}{(\phi'(x^k), x^k - p_k^*)^2} (\phi'(x^k), x^k - p_k^*)^2 \geq \frac{\phi(x^k) - \phi(x^{k+1})}{(\phi'(x^k), x^k - p_k^*)^2} \mu_k^2\end{aligned}$$

звідси, застосовуючи до отриманої нерівності лему 2.1, приходимо до оцінки (2.15).

Теорема 2.3. [5] *Якщо*

- 1) $X = R^n$;
- 2) опукла функція $\phi(x)$ диференційована;
- 3) множина $X^0 = \{x : \phi(x) \leq \phi(x^0)\}$ обмежена:
 $\text{diam } X^0 = \eta(x^0) = \eta < \infty$, де $\text{diam } X^0 = \sup_{x', x'' \in X^0} \|x' - x''\|$;
- 4) послідовність точок $\{x^k\}$ релаксаційна;

тоді справедлива оцінка:

$$\phi(x^m) - \phi(x^*) \leq \mu_0 \left[1 + \mu_0 \frac{1}{\eta^2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\phi(x^k) - \phi(x^{k+1})}{\|\phi'(x^k)\|^2} \right], \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.16)$$

де $\mu_0 = \phi(x^0) - \phi(x^*)$.

Випишемо також основне співвідношення, яке гарантує спадання функції $\phi(x)$, якому повинна задовільняти величина β_k , обчислена у результаті вирішення задачі одновимірної мінімізації (1.4) [5]:

$$\phi(x^k + \beta_k s^k) \leq (1 - \lambda_k) \phi(x^k) + \lambda_k \omega_k, \quad (2.17)$$

де

$$\omega_k = \inf_{\beta \geq 0} \phi(x^k + \beta s^k),$$

а число $\lambda_k \in (0; 1]$ характеризує точність обчислення точки одновимірного мінімуму функції $\psi(\beta) = \phi(x^k + \beta s^k)$ і з (2.17) отримуємо

$$\lambda_k \leq \frac{\phi(x^k) - \phi(x^{k+1})}{\phi(x^k) - \omega_k}$$

Позначимо через α_k величину косинуса кута між напрямками градієнта $\phi'(x^k)$ і напрямком спуску s^k з цієї ж точки:

$$\alpha_k = \frac{(\phi'(x^k), s^k)}{\|\phi'(x^k)\| \|s^k\|} \quad (2.18)$$

$\alpha_k > 0$, так як це є необхідною умовою вибору напрямку спуску.

Лема 2.2. [5] Якщо обмежена знизу функція $\phi(x)$ належить до класу $C^{1,1}(R^n)$, а послідовність $\{x^k\}$ будується за формулою $x^{k+1} = x^k + \beta_k s^k$ і задовільняє умові (2.17), то справедлива нерівність:

$$\phi(x^k) - \phi(x^{k+1}) \geq \frac{1}{2L} \lambda_k \alpha_k^2 \|\phi'(x^k)\|^2$$

Множину $X^* = \{x^* : \phi'(x^*) = 0\}$ будемо називати *множиною стаціонарних точок*. Також визначимо множини $X_0 = \{x : \phi(x) \leq \phi(x^0)\}$ та $X_0^* = X^* \cap X_0$.

Для деякого числа $\varepsilon > 0$ визначимо множину

$$U_\varepsilon = \{x : \rho(x, X_0^*) \leq \varepsilon\},$$

де

$$\rho(x, X_0^*) = \inf_{x^* \in X_0^*} \|x - x^*\|^2$$

Сформулюємо умову, яка гарантує збіжність релаксаційної послідовності: для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх $x^k \in X_0 \setminus U_\varepsilon$ буде

$$\|\phi'(x^k)\| \geq \delta. \quad (2.19)$$

Припущення 2.1. Відносно функції $\phi(x)$ будемо припускати, що

- 1) $\phi(x) \in C^{1,1}(R^n)$;
- 2) $X_0^* \neq \emptyset$;
- 3) $\phi(x)$ обмежена знизу на множині X_0 .

Відносно послідовності $\{x^k\}$ будемо припускати, що

- 1) x^0 - будь-яка точка;
- 2) $x^{k+1} = x^k + \beta_k s^k$, $k = 0, 1, \dots$;

- 3) $\alpha_k \geq \alpha > 0$, $k = 0, 1, \dots$;
 4) виконується умова (2.17) при $0 < \lambda \leq \lambda_k \leq 1$, $k = 0, 1, \dots$.

Теорема 2.4. [5] Якщо виконуються припущення 2.1 та умова (2.19), то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x^k, X_0^*) = 0 \quad (2.20)$$

Перейдемо до оцінок швидкості збіжності методів спуску для вирішення задач безумовної оптимізації опуклих функцій. Ці оцінки для опуклих функцій вдається побудувати при достатньо жорсткій умові обмеженості множини X_0 . В цьому випадку виконуються припущення 2) і 3) відносно функції $\phi(x)$ із припущення 2.1 та умова (2.19).

Теорема 2.5. [5] Нехай

- 1) опукла функція $\phi(x)$ належить класу $C^{1,1}(R^n)$;
 2) $\text{diam } X_0 = \eta < \infty$;
 3) послідовність $\{x^k\}$ будується за формулою $x^{k+1} = x^k + \beta_k s^k$;
 4) $\alpha_k > 0$, $k = 0, 1, \dots$.

Якщо виконується умова (2.17), тоді

$$\phi(x^m) - \phi(x^*) \leq \mu_0 \left[1 + C\mu_0 \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k \alpha_k^2 \right]^{-1}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.21)$$

для будь-якого $0 < C \leq \frac{1}{2L\eta^2}$.

Враховуючи нерівність (2.21), видно, що найбільш точні оцінки виникають при α_k і λ_k близьких до одиниці. Однак, це потребує високої точності обчислення градієнта функції $\phi(x)$ у точках x^k , високої точності при вирішенні задачі одновимірної мінімізації (1.4), що часто знижує ефективність обраного процесу мінімізації.

Припустимо тепер, що при виборі напрямку спуску виконується нерівність $\alpha_k \geq \alpha > 0$, а точність обчислення β_k є такою, що $0 < \lambda \leq \lambda_k < 1$. Тоді у цьому випадку із співвідношення (2.21) впливає оцінка вигляду

$$\phi(x^m) - \phi(x^*) < \frac{2L\eta^2}{\alpha^2\lambda} \frac{1}{m} = \bar{C} \frac{1}{m}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Перейдемо до розгляду питання про збіжність методу (2.1), (2.5).

Припустимо, що норма матриць H_k рівномірно обмежена зверху, тобто $\|H_k\| \leq \zeta$, $k = 0, 1, \dots$, а всі власні числа цих матриць обмежені знизу числом $\nu > 0$. Тоді для будь-якого x буде виконуватися нерівність:

$$(H_k x, x) \geq \nu_k(x, x) \geq \nu_k \|x\|^2, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.22)$$

де ν_k - найменше власне число матриці H_k .

Також припустимо, що:

$$|\gamma_i^k| \leq C_i \frac{\|\phi'(x^k)\|}{\|s^{k-i}\|} \quad k = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots \quad (2.23)$$

для деяких $C_i > 0$.

З (2.1) маємо:

$$s^k = -H_k \phi'(x^k) + \gamma_1^k s^{k-1} + \gamma_2^k s^{k-2} + \dots + \gamma_{p-1}^k s^{k-(p-1)}$$

тоді

$$\|s^k\| \leq \|H_k\| \|\phi'(x^k)\| + |\gamma_1^k| \|s^{k-1}\| + |\gamma_2^k| \|s^{k-2}\| + \dots + |\gamma_{p-1}^k| \|s^{k-(p-1)}\|$$

З урахуванням (2.23) і обмеженості норми матриці H_k отримуємо:

$$\begin{aligned} \|s^k\| &\leq \|H_k\| \|\phi'(x^k)\| + C_1 \|\phi'(x^k)\| + C_2 \|\phi'(x^k)\| + \dots + C_{p-1} \|\phi'(x^k)\| = \\ &= \|\phi'(x^k)\| (\|H_k\| + C_1 + C_2 + \dots + C_{p-1}) \leq \|\phi'(x^k)\| (\zeta + C_1 + C_2 + \dots + C_{p-1}) = \\ &= C \|\phi'(x^k)\| \end{aligned}$$

Звідси отримуємо:

$$\|s^k\|^2 \leq C^2 \|\phi'(x^k)\|^2 \quad (2.24)$$

Далі, використовуючи (2.8), (2.24) та властивість матриці H_k (2.22)

маємо:

$$\begin{aligned}\alpha_k^2 &= \frac{(\phi'(x^k), s^k)^2}{\|s^k\|^2 \|\phi'(x^k)\|^2} = \frac{(H_k \phi'(x^k), \phi'(x^k))^2}{\|s^k\|^2 \|\phi'(x^k)\|^2} \geq \frac{(H_k \phi'(x^k), \phi'(x^k))^2}{C^2 \|\phi'(x^k)\|^2 \|\phi'(x^k)\|^2} \geq \\ &\geq \frac{\nu_k^2 \|\phi'(x^k)\|^2 \|\phi'(x^k)\|^2}{C^2 \|\phi'(x^k)\|^4} = \frac{\nu_k^2 \|\phi'(x^k)\|^4}{C^2 \|\phi'(x^k)\|^4} = \frac{\nu_k^2}{C^2}\end{aligned}\tag{2.25}$$

Отже, отримали, що $\alpha_k > 0$. Тоді для методу (2.1), (2.5) виконуються умови теореми 2.4, з якої випливає збіжність алгоритму.

З теореми 2.5 можна отримати оцінки швидкості збіжності методу (2.1), (2.5):

$$\phi(x^m) - \phi(x^*) \leq \mu_0 \left[1 + K \mu_0 \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k \alpha_k^2 \right]^{-1}, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

для будь-якого $0 < K \leq \frac{1}{2L\eta^2}$.

При виборі напрямку спуску із (2.25) виконується нерівність $\alpha_k^2 \geq \frac{\nu_k^2}{C^2} \geq \frac{\nu^2}{C^2}$. Припустимо тепер, що точність обчислення β_k є такою, що $0 < \lambda \leq \lambda_k < 1$. Тоді

$$\phi(x^m) - \phi(x^*) \leq \frac{1}{K\lambda} \left[\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k^2 \right]^{-1} = \overline{K} \left[\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k^2 \right]^{-1} \leq \overline{K} \frac{1}{\frac{\nu^2}{C^2} m} = \overline{K} \frac{C^2}{\nu^2 m}$$

Остатотню отримаємо таку оцінку швидкості збіжності методу (2.1), (2.5):

$$\phi(x^m) - \phi(x^*) \leq \overline{C} \frac{1}{m}\tag{2.26}$$

$$\text{де } \overline{C} = \overline{K} \frac{C^2}{\nu^2} = \frac{1}{K\lambda} \frac{C^2}{\nu^2}$$

РОЗДІЛ 3

РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ АЛГОРИТМІВ НА ТЕСТОВИХ ФУНКЦІЯХ

Для аналізу роботи описаного модифікованого p -крокового методу (2.1) був проведений чисельний експеримент, у якому результати роботи запропонованого алгоритму порівнювалися із результатами роботи p -крокового методу (1.5). Для кожної тестової функції [1, 2] оптимізація проводилася при різних початкових точках та при значеннях $p = 2$, $p = 3$ і $p = 4$.

Обчислення проводились із точністю $\varepsilon = 10^{-6}$ за допомогою мови програмування Python. Задача одновимірної мінімізації (1.4) розв'язувалась за допомогою вбудованого методу `minimize_scalar()` із модуля `scipy.optimize`, який є частиною бібліотеки **Scipy**. Похідні функцій знаходились аналітично. Критерій зупинки процесу обчислень полягав у одночасному виконанні трьох умов:

$$\begin{aligned}\phi(x^{k-1}) - \phi(x^k) &< \varepsilon(1 + |\phi(x^k)|), \\ \|x^{k-1} - x^k\| &< \sqrt{\varepsilon}(1 + \|x^k\|), \\ \|\phi'(x^k)\| &\leq \sqrt[3]{\varepsilon}(1 + |\phi(x^k)|)\end{aligned}$$

Для більш ефективного порівняння результати обчислень для кожної початкової точки відповідної тестової функції зведені у таблиці та проілюстровані графічно. На графіках вісь абсцис показує кількість ітерацій (відповідних наближень), а вісь ординат - логарифм відхилення значення цільової функції у k -тій точці від оптимального.

Задача 1. Кількість змінних $n = 2$

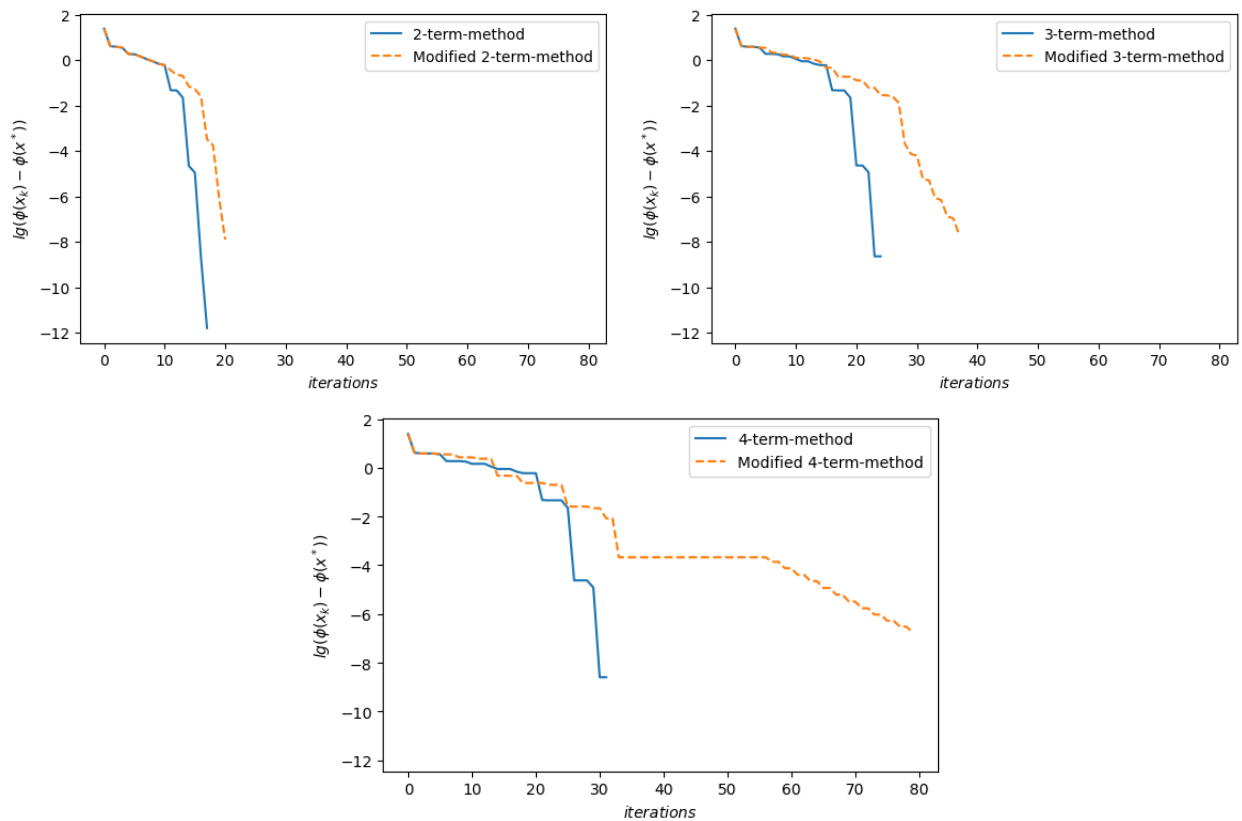
$$\phi(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \rightarrow \min$$

Функція є погано обумовленою, яристою. Точний розв'язок $x^* = (1; 1)^T$, значення функції в цій точці $\phi(x^*) = 0$.

Таблиця 3.1

Результати обчислень

x_0	$\phi(x_0)$	Кількість доданків p	Метод мінімізації	$\bar{x}$ - отриманий розв'язок	$\phi(\bar{x})$	Кількість ітерацій
$(-1.2; 1.0)^T$	24.2	2	Звичайний	(0.999999, 0.999997)	$1.61e^{-12}$	17
			Модифікований	(0.999889, 0.999777)	$1.25e^{-8}$	20
		3	Звичайний	(1.000009, 1.000013)	$2.29e^{-9}$	24
			Модифікований	(1.000139, 1.00028)	$1.97e^{-8}$	37
		4	Звичайний	(1.000009, 1.000014)	$2.55e^{-9}$	31
			Модифікований	(0.999588, 0.999185)	$1.78e^{-7}$	79

Рис. 3.1. Графіки збіжності методів для $p = 2$, $p = 3$ і $p = 4$ (нижній)

Таблиця 3.2

Результати обчислень						
x_0	$\phi(x_0)$	Кількість доданків p	Метод мінімізації	$\bar{x}$ - отриманий розв'язок	$\phi(\bar{x})$	Кількість ітерацій
$(3; -5)^T$	19604.0	2	Звичайний	$(0.9999997, 0.99999934)$	$4.41e^{-13}$	14
			Модифікований	$(0.9999997, 0.99999934)$	$4.41e^{-13}$	14
		3	Звичайний	$(0.9999997, 0.99999934)$	$4.39e^{-13}$	20
			Модифікований	$(1.00016726, 1.00033726)$	$2.87e^{-8}$	27
		4	Звичайний	$(0.9999997, 0.99999934)$	$4.37e^{-13}$	26
			Модифікований	$(1.00131063, 1.00262793)$	$1.72e^{-6}$	207

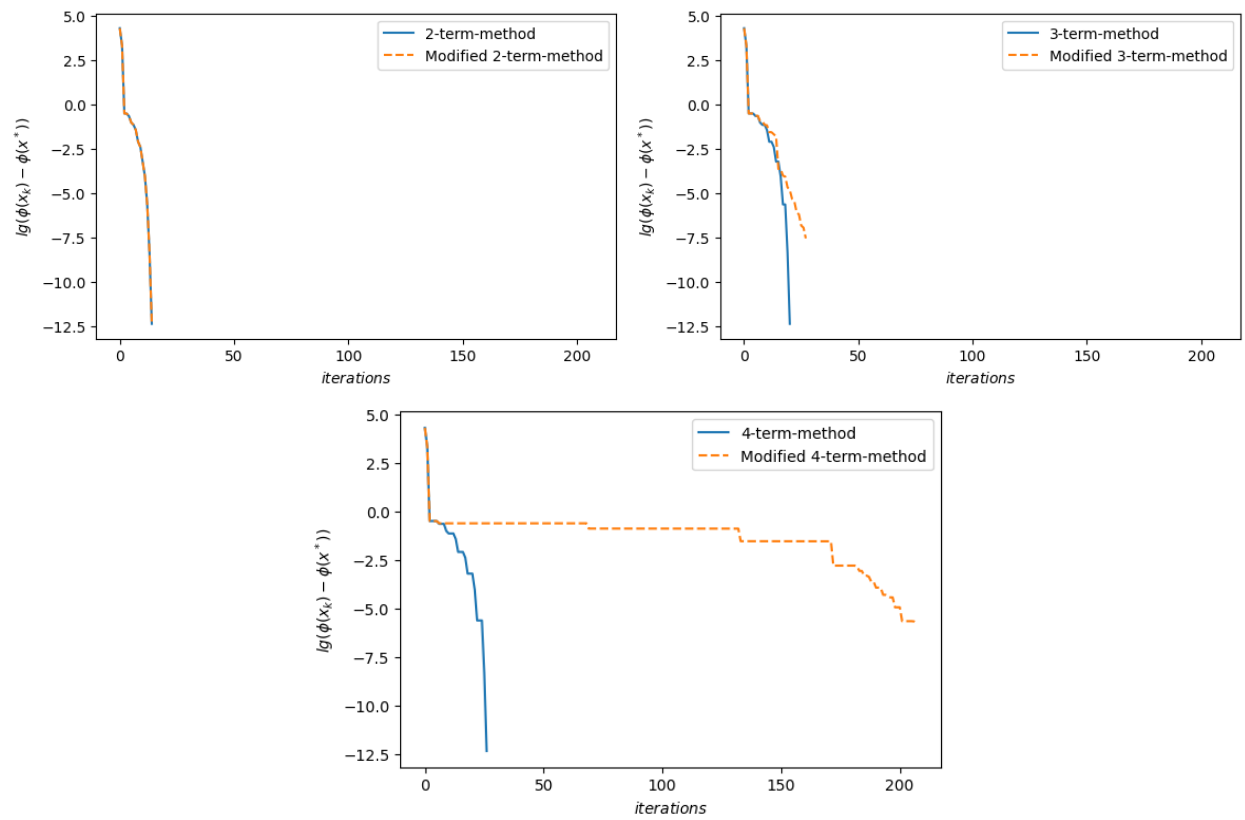
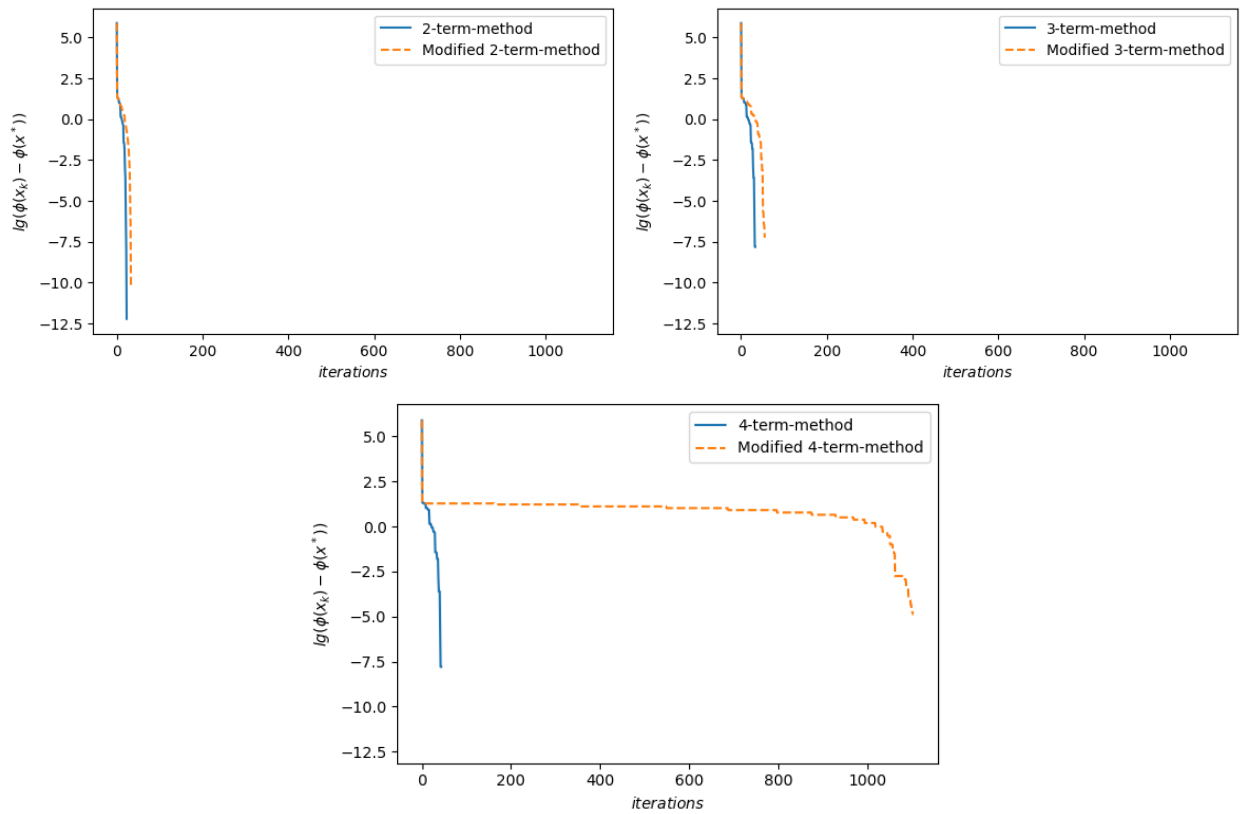


Рис. 3.2. Графіки збіжності методів для $p = 2$, $p = 3$ і $p = 4$ (нижній)

Таблиця 3.3

Результати обчислень						
x_0	$\phi(x_0)$	Кількість доданків p	Метод мінімізації	$\bar{x}$ - отриманий розв'язок	$\phi(\bar{x})$	Кількість ітерацій
$(10; 12)^T$	774481	2	Звичайний	(1.00000023, 1.00000039)	$5.83e^{-13}$	23
			Модифікований	(1.00000055, 1.00001046)	$6.00e^{-11}$	33
		3	Звичайний	(0.99988396, 0.99976423)	$1.48e^{-8}$	33
			Модифікований	(1.00020706, 1.00040312)	$5.51e^{-8}$	55
		4	Звичайний	(0.99987911, 0.99975443)	$1.61e^{-8}$	43
			Модифікований	(1.00367026, 1.00734867)	$1.35e^{-5}$	1103

Рис. 3.3. Графіки збіжності методів для $p = 2$, $p = 3$ і $p = 4$ (нижній)

Задача 2. Кількість змінних $n = 2$

$$\phi(x) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \rightarrow \min$$

Точний розв'язок $x^* = (1; 1)^T$, значення функції в цій точці $\phi(x^*) = 0$.

Таблиця 3.4

Результати обчислень						
x_0	$\phi(x_0)$	Кількість доданків p	Метод мінімізації	$\bar{x}$ - отриманий розв'язок	$\phi(\bar{x})$	Кількість ітерацій
$(-1.2; 1)^T$	5.0336	2	Звичайний	(1.00000001, 1.00000002)	$1.20e^{-16}$	6
			Модифікований	(1.00000001, 1.00000002)	$1.20e^{-16}$	6
		3	Звичайний	(1.00137952, 1.003077)	$2.00e^{-6}$	6
			Модифікований	(1.00120748, 1.00283348)	$1.63e^{-6}$	7
		4	Звичайний	(1.00137952, 1.00307701)	$2.00e^{-6}$	7
			Модифікований	(0.99263751, 0.9810636)	$7.24e^{-5}$	16

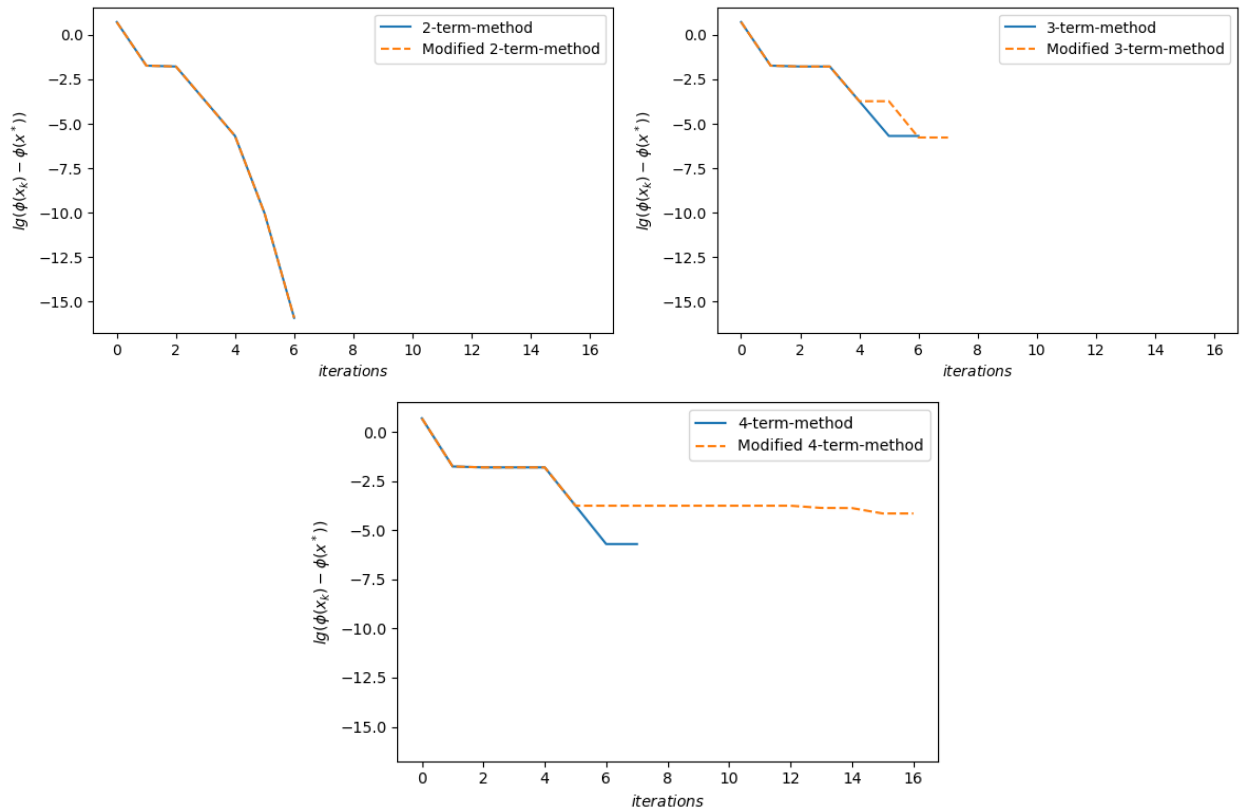
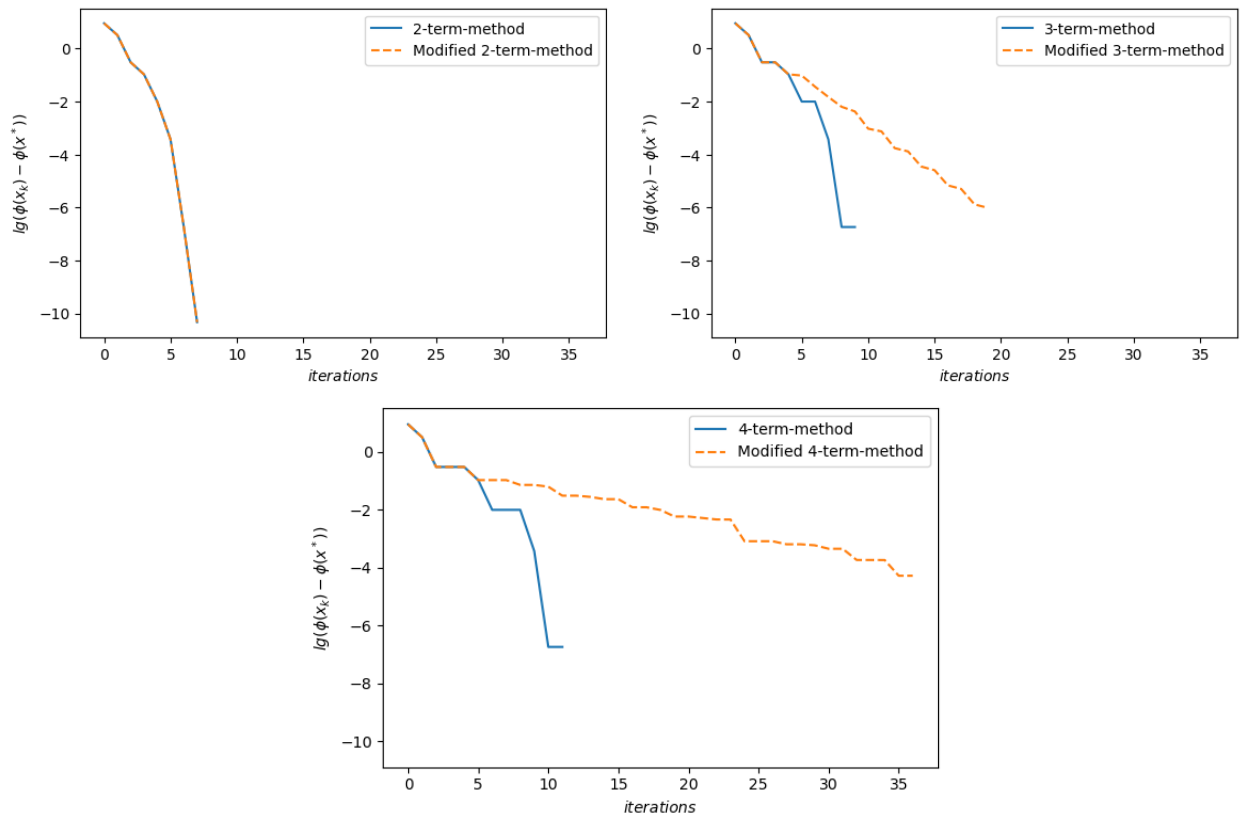


Рис. 3.4. Графіки збіжності методів для $p = 2$, $p = 3$ і $p = 4$ (нижній)

Таблиця 3.5

Результати обчислень						
x_0	$\phi(x_0)$	Кількість доданків p	Метод мінімізації	$\bar{x}$ - отриманий розв'язок	$\phi(\bar{x})$	Кількість ітерацій
$(1; -2)^T$	9.0	2	Звичайний	(1.00000671, 1.00001501)	$4.75e^{-11}$	7
			Модифікований	(1.00000671, 1.00001501)	$4.75e^{-11}$	6
		3	Звичайний	(0.99990728, 1.00023414)	$1.85e^{-7}$	9
			Модифікований	(0.9992766, 0.99922835)	$9.78e^{-7}$	19
		4	Звичайний	(0.99990728, 1.00023414)	$1.85e^{-7}$	11
			Модифікований	(1.00641389, 1.01632644)	$5.31e^{-5}$	36

Рис. 3.5. Графіки збіжності методів для $p = 2$, $p = 3$ і $p = 4$ (нижній)

Таблиця 3.6

Результати обчислень						
x_0	$\phi(x_0)$	Кількість доданків p	Метод мінімізації	$\bar{x}$ - отриманий розв'язок	$\phi(\bar{x})$	Кількість ітерацій
$(10; -5)^T$	11106.0	2	Звичайний	$(1.00000001, 1.00000002)$	$6.15e^{-17}$	7
			Модифікований	$(1.00000001, 1.00000002)$	$6.13e^{-17}$	6
		3	Звичайний	$(0.99999279, 1.)$	$2.60e^{-10}$	9
			Модифікований	$(1.00098015, 1.00107815)$	$1.74e^{-6}$	15
		4	Звичайний	$(0.99999279, 1.)$	$2.60e^{-10}$	11
			Модифікований	$(0.99567103, 0.99138994)$	$1.87e^{-5}$	56

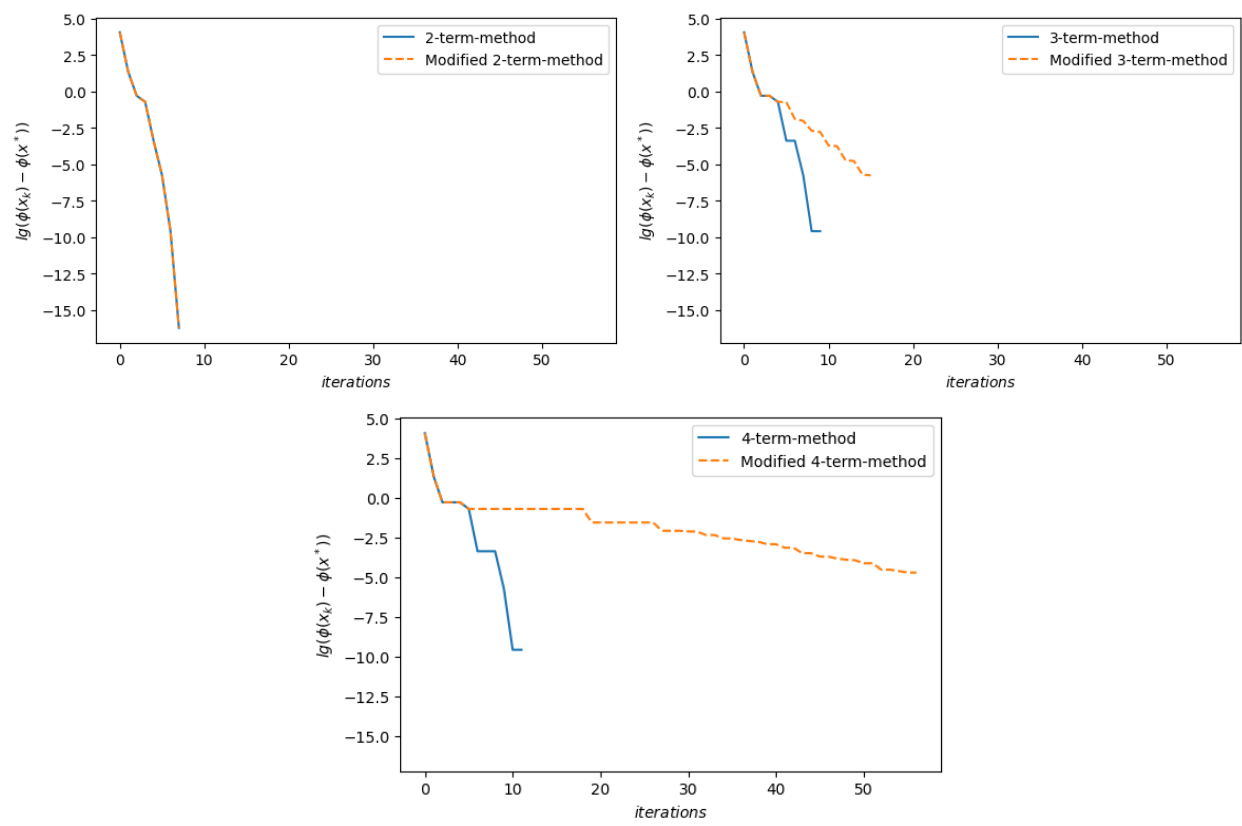


Рис. 3.6. Графіки збіжності методів для $p = 2$, $p = 3$ і $p = 4$ (нижній)

Задача 3. Кількість змінних $n = 2$

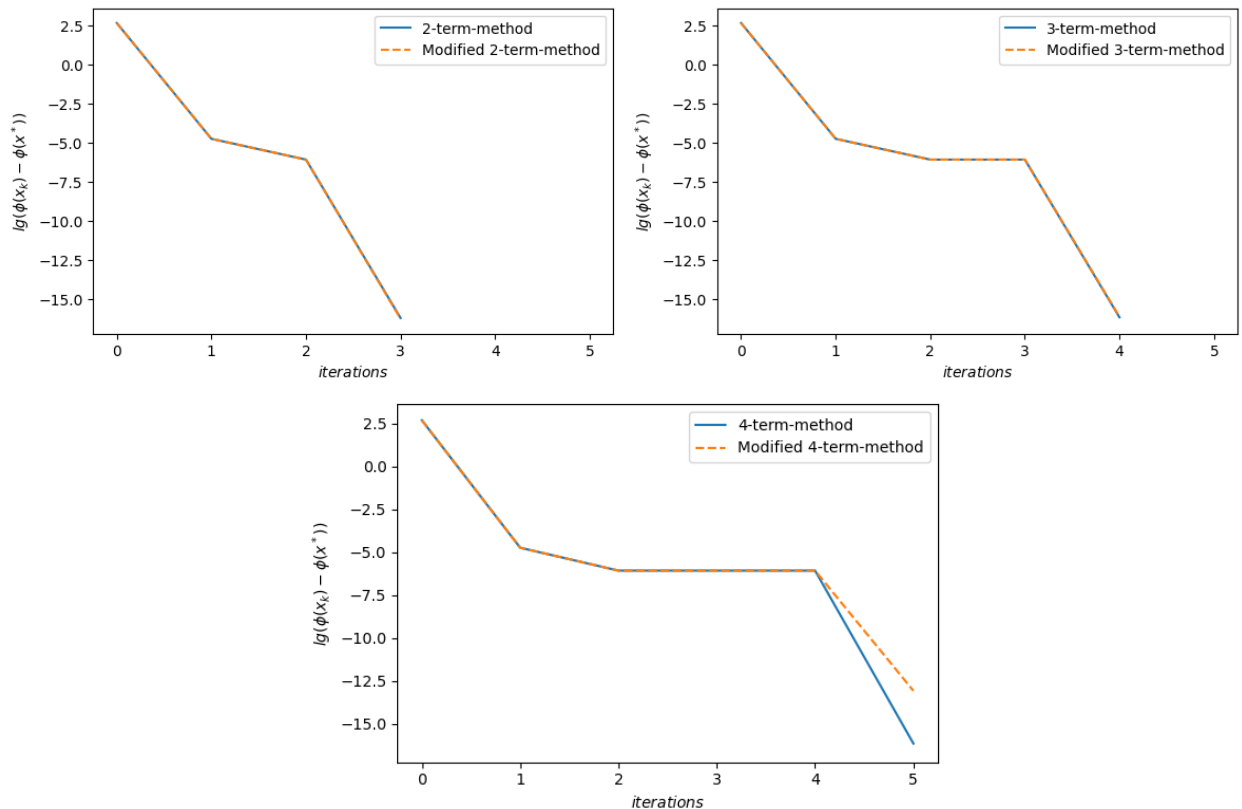
$$\phi(x) = (x_2 - x_1^2)^2 + 100(1 - x_1)^2 \rightarrow \min$$

Ця задача відрізняється від попередньої великим коефіцієнтом при другому доданку. Точний розв'язок $x^* = (1; 1)^T$, значення функції в цій точці $\phi(x^*) = 0$.

Таблиця 3.7

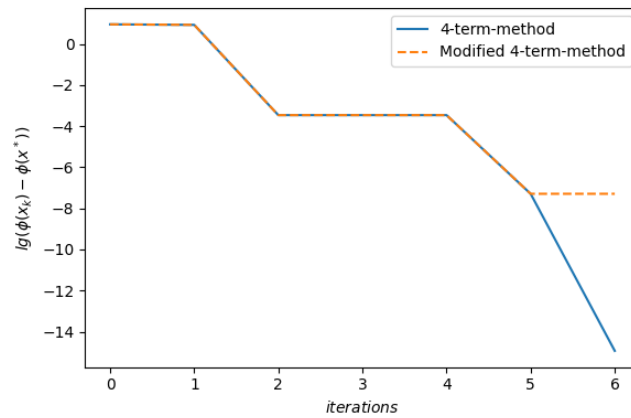
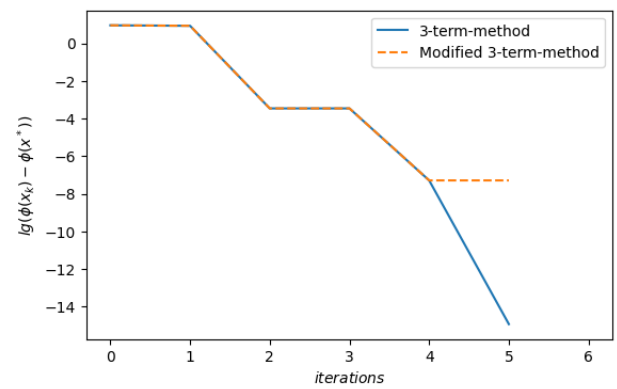
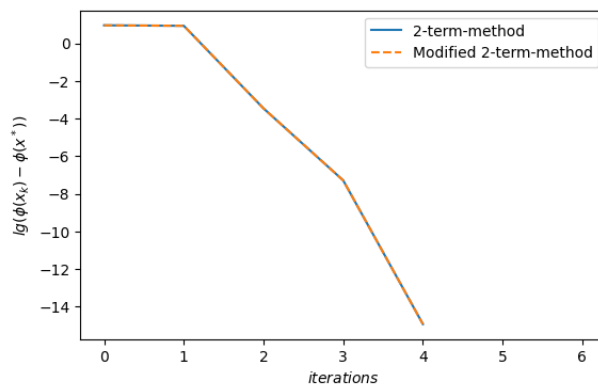
Результати обчислень

x_0	$\phi(x_0)$	Кількість доданків p	Метод мінімізації	$\bar{x}$ - отриманий розв'язок	$\phi(\bar{x})$	Кількість ітерацій
$(-1.2; 1)^T$	484.1936	2	Звичайний	$(1., 0.99999999)$	$5.98e^{-17}$	3
			Модифікований	$(1., 0.99999999)$	$5.29e^{-17}$	3
		3	Звичайний	$(1., 0.99999999)$	$6.66e^{-17}$	4
			Модифікований	$(1., 0.99999999)$	$7.32e^{-17}$	4
		4	Звичайний	$(1., 0.99999999)$	$7.37e^{-17}$	5
			Модифікований	$(1., 0.99999971)$	$8.63e^{-14}$	5

Рис. 3.7. Графіки збіжності методів для $p = 2$, $p = 3$ і $p = 4$ (нижній)

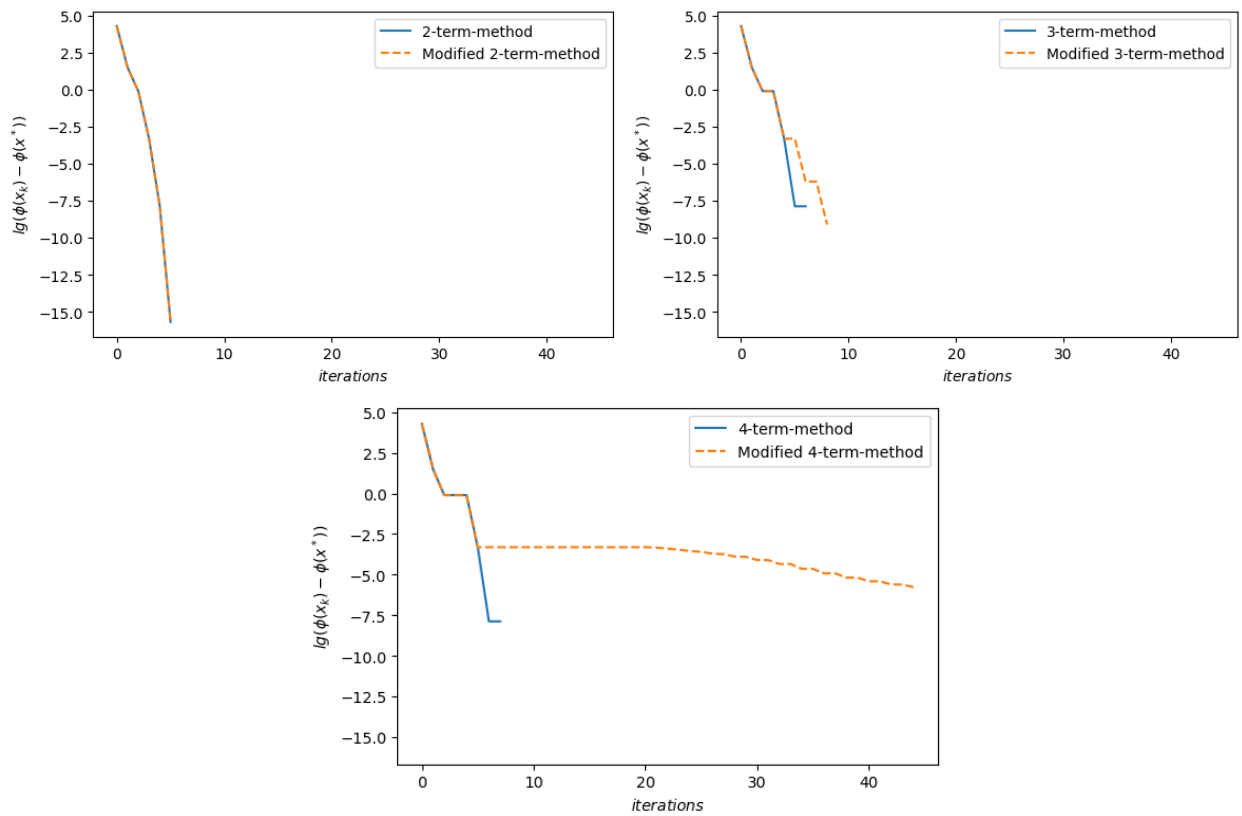
Таблиця 3.8

Результати обчислень						
x_0	$\phi(x_0)$	Кількість доданків p	Метод мінімізації	$\bar{x}$ - отриманий розв'язок	$\phi(\bar{x})$	Кількість ітерацій
$(1; -2)^T$	9.0	2	Звичайний	$(1., 1.)$	$1.17e^{-15}$	4
			Модифікований	$(1., 1.)$	$1.17e^{-15}$	4
		3	Звичайний	$(1., 1.)$	$1.17e^{-15}$	5
			Модифікований	$(0.99999491, 0.99976924)$	$5.12e^{-8}$	5
		4	Звичайний	$(1., 1.)$	$1.17e^{-15}$	6
			Модифікований	$(0.99999465, 0.99976933)$	$5.12e^{-8}$	6

Рис. 3.8. Графіки збіжності методів для $p = 2$, $p = 3$ і $p = 4$ (нижній)

Таблиця 3.9

Результати обчислень						
x_0	$\phi(x_0)$	Кількість доданків p	Метод мінімізації	$\bar{x}$ - отриманий розв'язок	$\phi(\bar{x})$	Кількість ітерацій
$(10; -5)^T$	19125.0	2	Звичайний	$(1., 1.00000001)$	$2.13e^{-16}$	5
			Модифікований	$(1., 1.00000001)$	$2.17e^{-16}$	5
		3	Звичайний	$(0.9999892, 1.00001981)$	$1.34e^{-8}$	6
			Модифікований	$(0.99999899, 0.99997176)$	$7.89e^{-10}$	8
		4	Звичайний	$(0.9999892, 1.00001981)$	$1.34e^{-8}$	7
			Модифікований	$(0.99994194, 0.99870619)$	$1.72e^{-6}$	44

Рис. 3.9. Графіки збіжності методів для $p = 2$, $p = 3$ і $p = 4$ (нижній)

Задача 4. Кількість змінних $n = 2$

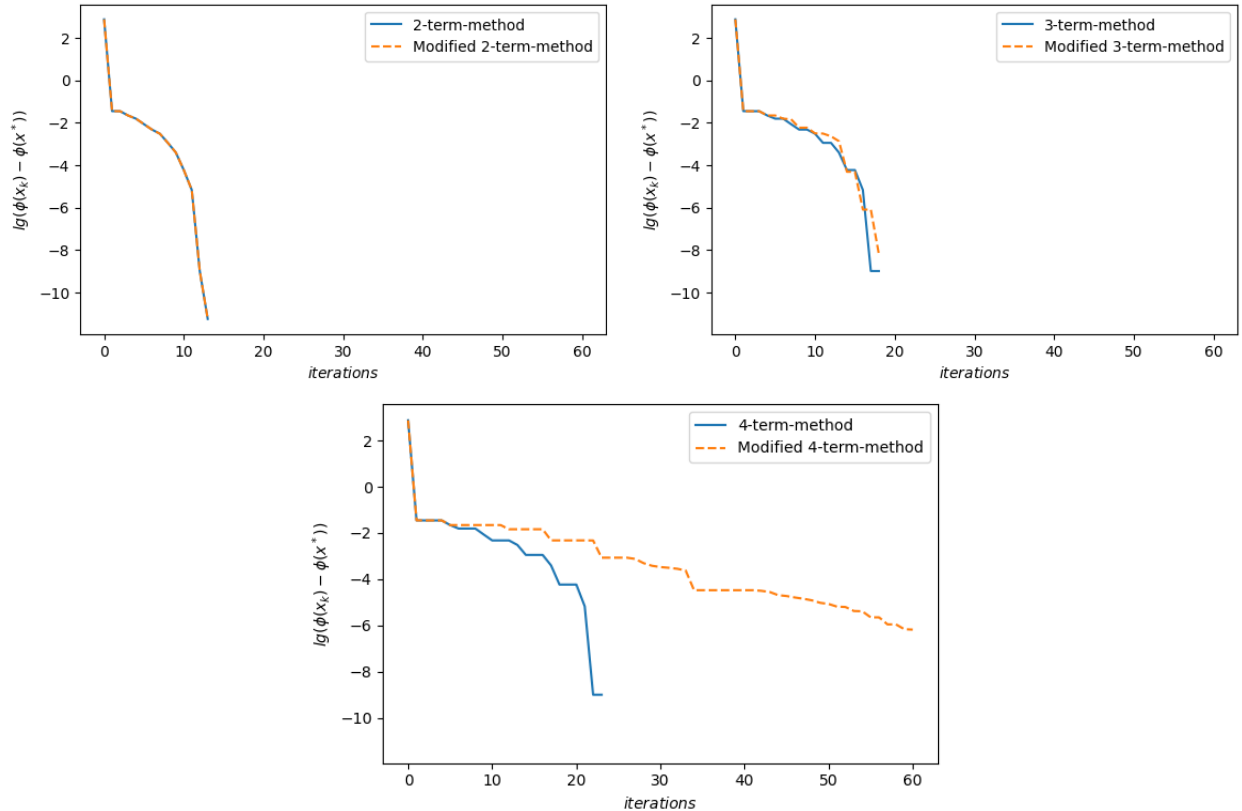
$$\phi(x) = 100(x_2 - x_1^3)^2 + (1 - x_1)^2 \rightarrow \min$$

Точний розв'язок $x^* = (1; 1)^T$, значення функції в цій точці $\phi(x^*) = 0$.

Таблиця 3.10

Результати обчислень

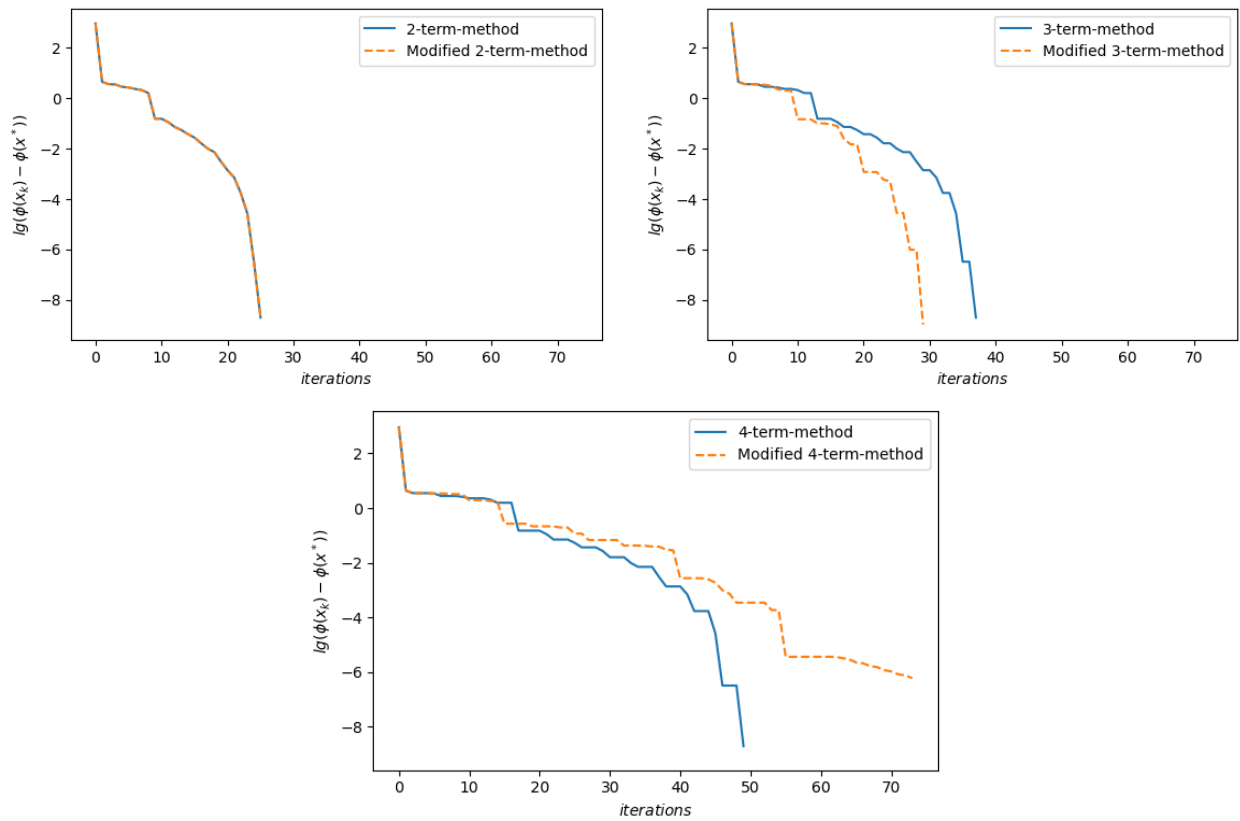
x_0	$\phi(x_0)$	Кількість доданків p	Метод мінімізації	$\bar{x}$ - отриманий розв'язок	$\phi(\bar{x})$	Кількість ітерацій
$(-1.2; 1)^T$	749.0384	2	Звичайний	(0.99999766, 0.99999294)	$5.59e^{-12}$	13
			Модифікований	(0.99999766, 0.99999294)	$5.59e^{-12}$	13
		3	Звичайний	(1.0000018, 1.00000221)	$1.02e^{-9}$	18
			Модифікований	(1.00007974, 1.00023764)	$6.61e^{-9}$	18
		4	Звичайний	(1.0000018, 1.00000223)	$1.00e^{-9}$	23
			Модифікований	(0.99919165, 0.99758479)	$6.60e^{-7}$	60

Рис. 3.10. Графіки збіжності методів для $p = 2$, $p = 3$ і $p = 4$ (нижній)

Таблиця 3.11

Результати обчислень

x_0	$\phi(x_0)$	Кількість доданків p	Метод мінімізації	$\bar{x}$ - отриманий розв'язок	$\phi(\bar{x})$	Кількість ітерацій
$(1; -2)^T$	900.0	2	Звичайний	(0.99997082, 0.99990914)	$1.95e^{-9}$	25
			Модифікований	(0.99997082, 0.99990914)	$1.95e^{-9}$	25
		3	Звичайний	(0.99997078, 0.99990901)	$1.96e^{-9}$	37
			Модифікований	(0.99996973, 0.99991027)	$1.03e^{-9}$	29
		4	Звичайний	(0.99997073, 0.99990886)	$1.97e^{-9}$	49
			Модифікований	(1.00076749, 1.00231666)	$6.04e^{-7}$	73

Рис. 3.11. Графіки збіжності методів для $p = 2$, $p = 3$ і $p = 4$ (нижній)

Таблиця 3.12

Результати обчислень						
x_0	$\phi(x_0)$	Кількість доданків p	Метод мінімізації	$\bar{x}$ - отриманий розв'язок	$\phi(\bar{x})$	Кількість ітерацій
$(10; 12)^T$	97614481.0	2	Звичайний	(1.00004507, 1.00013582)	$2.07e^{-9}$	42
			Модифікований	(1.00000314, 1.00001018)	$6.92e^{-11}$	40
		3	Звичайний	(1.00001114, 1.00003309)	$2.54e^{-10}$	31
			Модифікований	(1.00003498, 1.00010706)	$1.67e^{-9}$	188
		4	Звичайний	(0.99999175, 0.99997553)	$1.97e^{-9}$	54
			Модифікований	зациклюється у точці (2.2387, 11.202017)	$1.57e^0$	1000

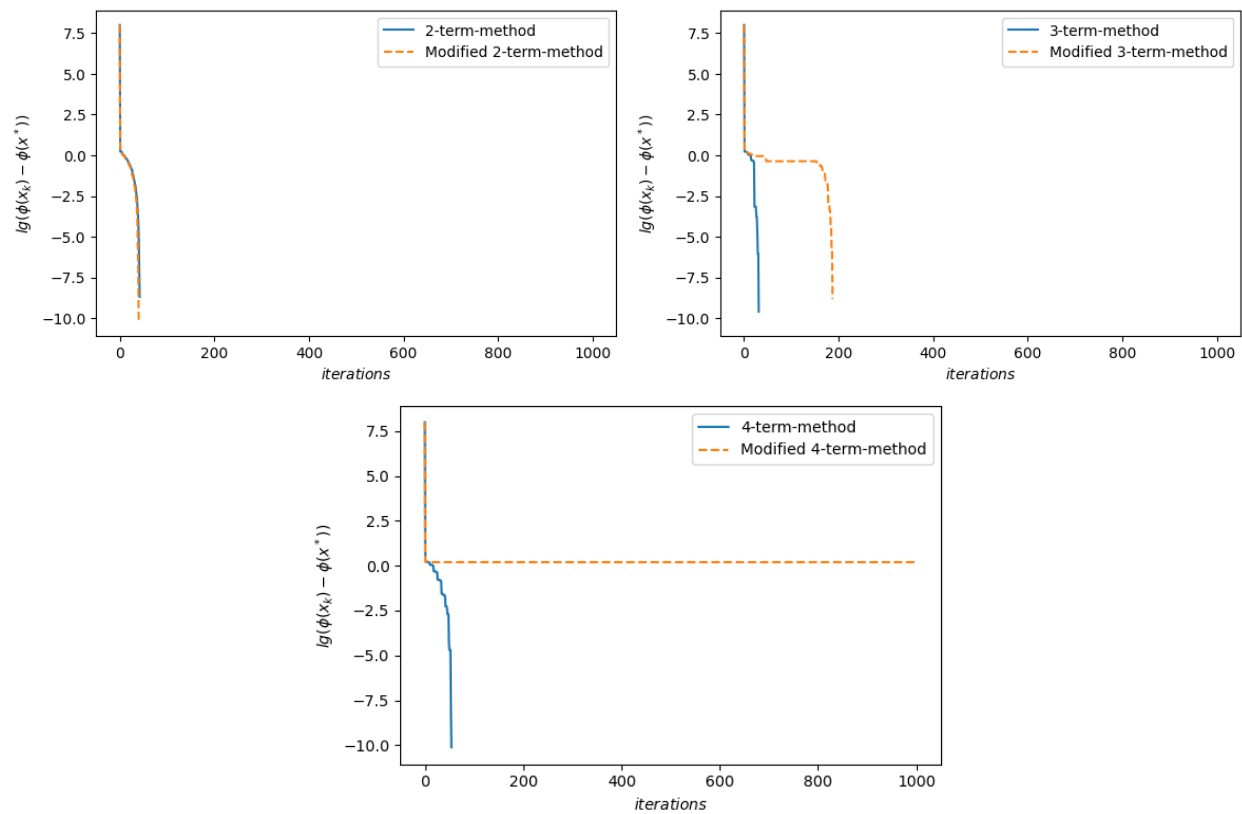


Рис. 3.12. Графіки збіжності методів для $p = 2$, $p = 3$ і $p = 4$ (нижній)

Задача 5. Кількість змінних $n = 2$

$$\phi(x) = [1,5 - x_1 (1 - x_2)]^2 + [2,25 - x_1 (1 - x_2^2)]^2 + [2,625 - x_1 (1 - x_2^3)]^2 \rightarrow \min$$

Точний розв’язок $x^* = (3; 0.5)^T$, значення функції в цій точці $\phi(x^*) = 0$.

Таблиця 3.13

Результати обчислень						
x_0	$\phi(x_0)$	Кількість доданків p	Метод мінімізації	$\bar{x}$ - отриманий розв’язок	$\phi(\bar{x})$	Кількість ітерацій
$(0; 0)^T$	14.203125	2	Звичайний	(2.99999344, 0.49999824)	$7.29e^{-12}$	8
			Модифікований	(2.99999344, 0.49999824)	$7.29e^{-12}$	8
		3	Звичайний	(2.99999344, 0.49999824)	$7.29e^{-12}$	11
			Модифікований	(2.99856631, 0.49954527)	$5.55e^{-7}$	15
		4	Звичайний	(2.99999344, 0.49999824)	$7.29e^{-12}$	14
			Модифікований	(2.99535534, 0.49878611)	$3.55e^{-6}$	42

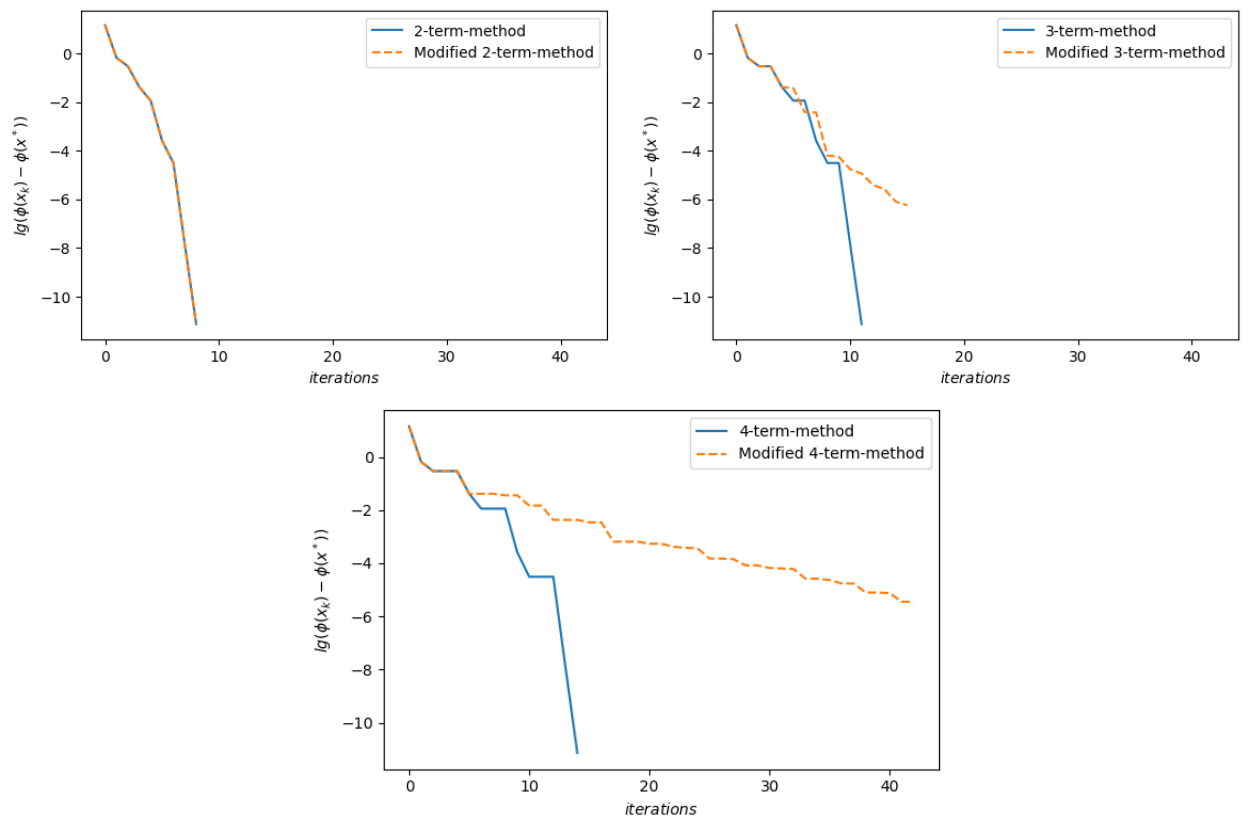
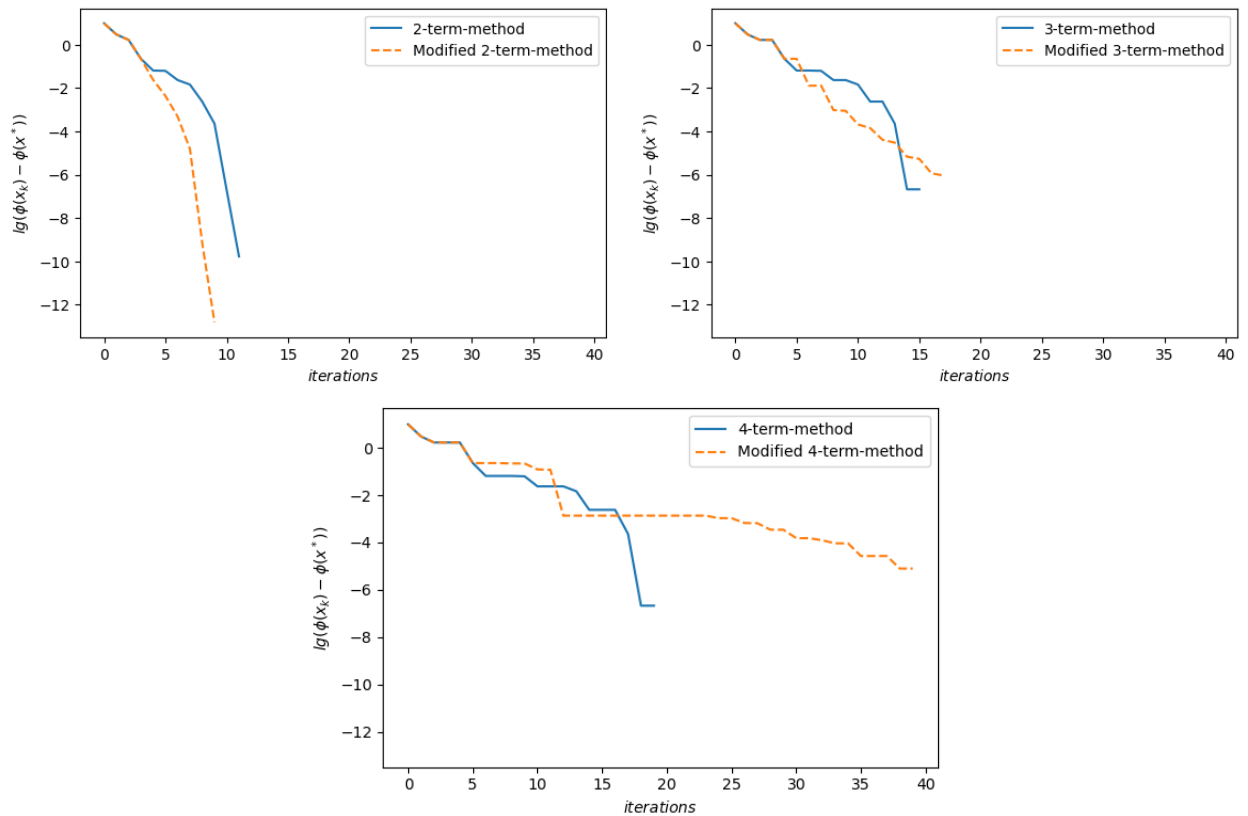


Рис. 3.13. Графіки збіжності методів для $p = 2$, $p = 3$ і $p = 4$ (нижній)

Таблиця 3.14

Результати обчислень

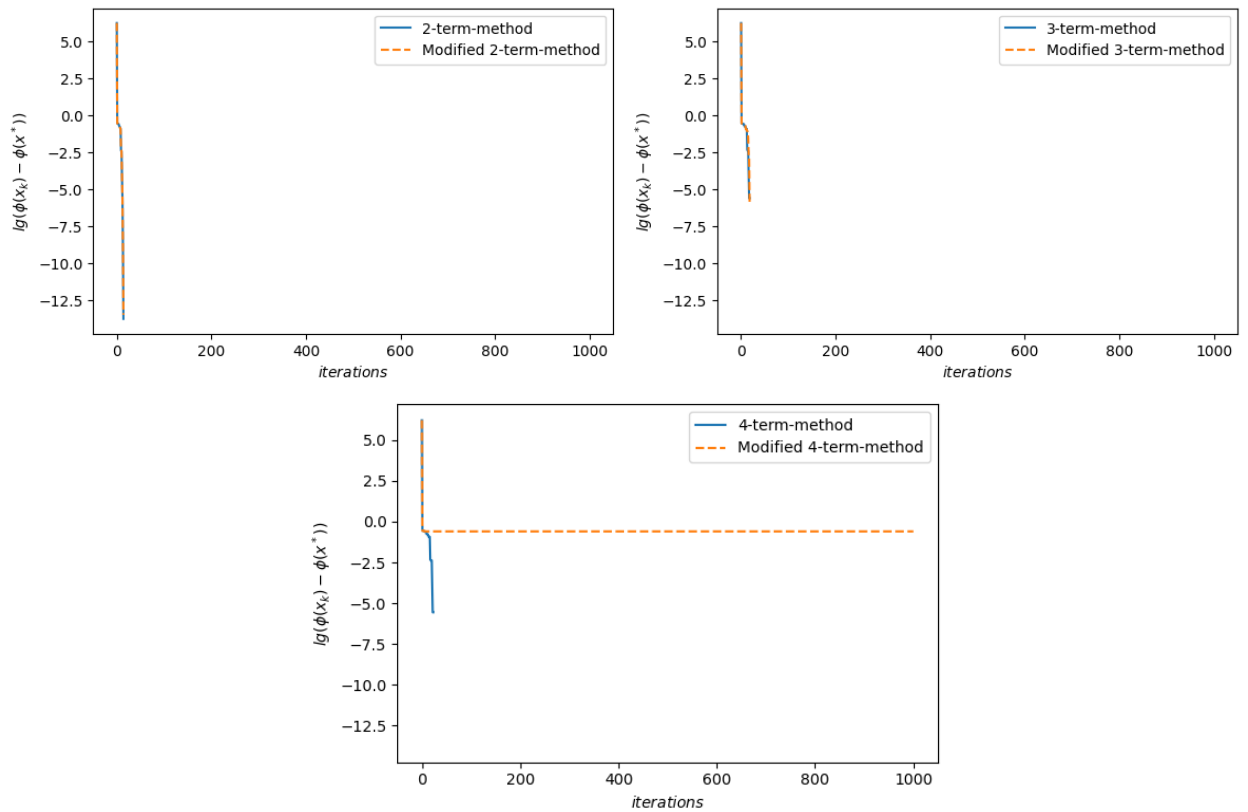
x_0	$\phi(x_0)$	Кількість доданків p	Метод мінімізації	$\bar{x}$ - отриманий розв'язок	$\phi(\bar{x})$	Кількість ітерацій
$(1; 0.8)^T$	9.828869	2	Звичайний	(3.00001321, 0.50000575)	$1.69e^{-10}$	11
			Модифікований	(3.00000098, 0.50000025)	$1.56e^{-13}$	9
		3	Звичайний	(3.00105771, 0.50022463)	$2.11e^{-7}$	15
			Модифікований	(2.99802612, 0.49962125)	$9.09e^{-7}$	17
		4	Звичайний	(3.00105991, 0.50022508)	$2.12e^{-7}$	19
			Модифікований	(3.0070136, 0.5017882)	$7.88e^{-6}$	39

Рис. 3.14. Графіки збіжності методів для $p = 2$, $p = 3$ і $p = 4$ (нижній)

Таблиця 3.15

Результати обчислень

x_0	$\phi(x_0)$	Кількість доданків p	Метод мінімізації	$\bar{x}$ - отриманий розв'язок	$\phi(\bar{x})$	Кількість ітерацій
$(10; -5)^T$	1643099.203125	2	Звичайний	$(2.99999973, 0.49999992)$	$1.77e^{-14}$	14
			Модифікований	$(2.99999964, 0.49999989)$	$3.33e^{-14}$	14
		3	Звичайний	$(2.99680986, 0.49901809)$	$2.46e^{-6}$	18
			Модифікований	$(2.99800072, 0.49968617)$	$1.41e^{-6}$	19
		4	Звичайний	$(2.99663181, 0.49896068)$	$2.77e^{-6}$	23
			Модифікований	заціклюється у точці $(7.614337, 0.855756)$	$2.54e^{-1}$	1000

Рис. 3.15. Графіки збіжності методів для $p = 2$, $p = 3$ і $p = 4$ (нижній)

Задача 6. Кількість змінних $n = 4$

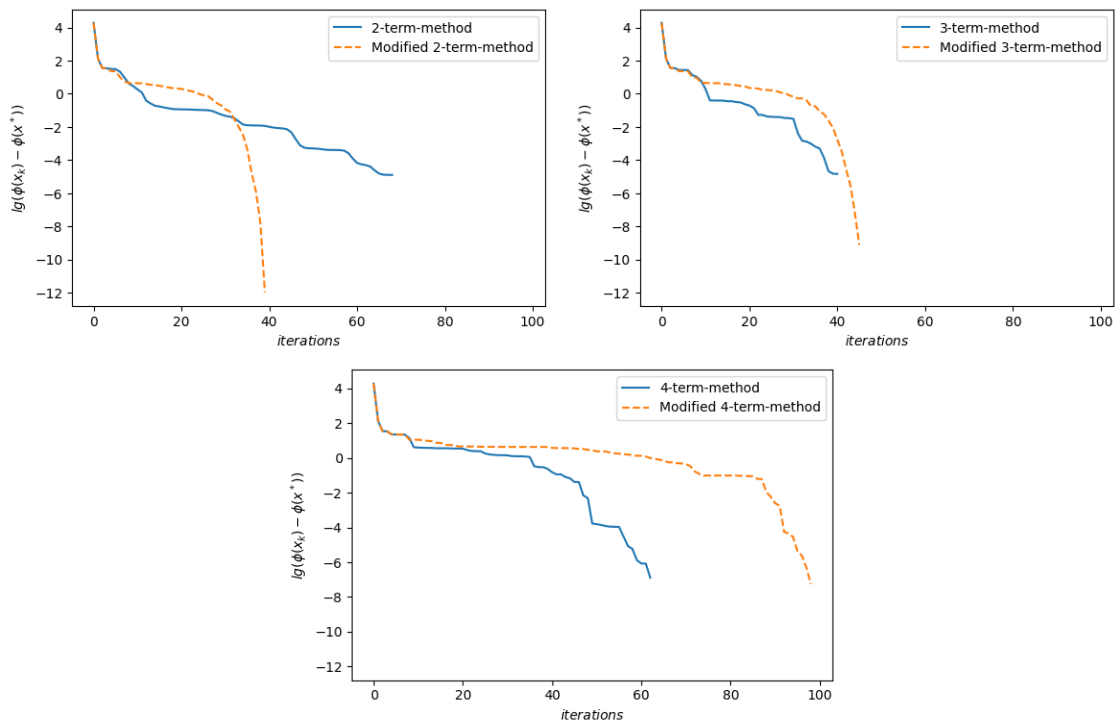
$$\min \phi(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 + 90(x_4 - x_3^2)^2 + (1 - x_3)^2 + 10.1\{(x_2 - 1)^2 + (x_4 - 1)^2\} + 19.8(x_2 - 1)(x_4 - 1)$$

Точний розв'язок - $x^* = (1; 1; 1; 1)^T$, значення функції в цій точці $\phi(x^*) = 0$.

Таблиця 3.16

Результати обчислень

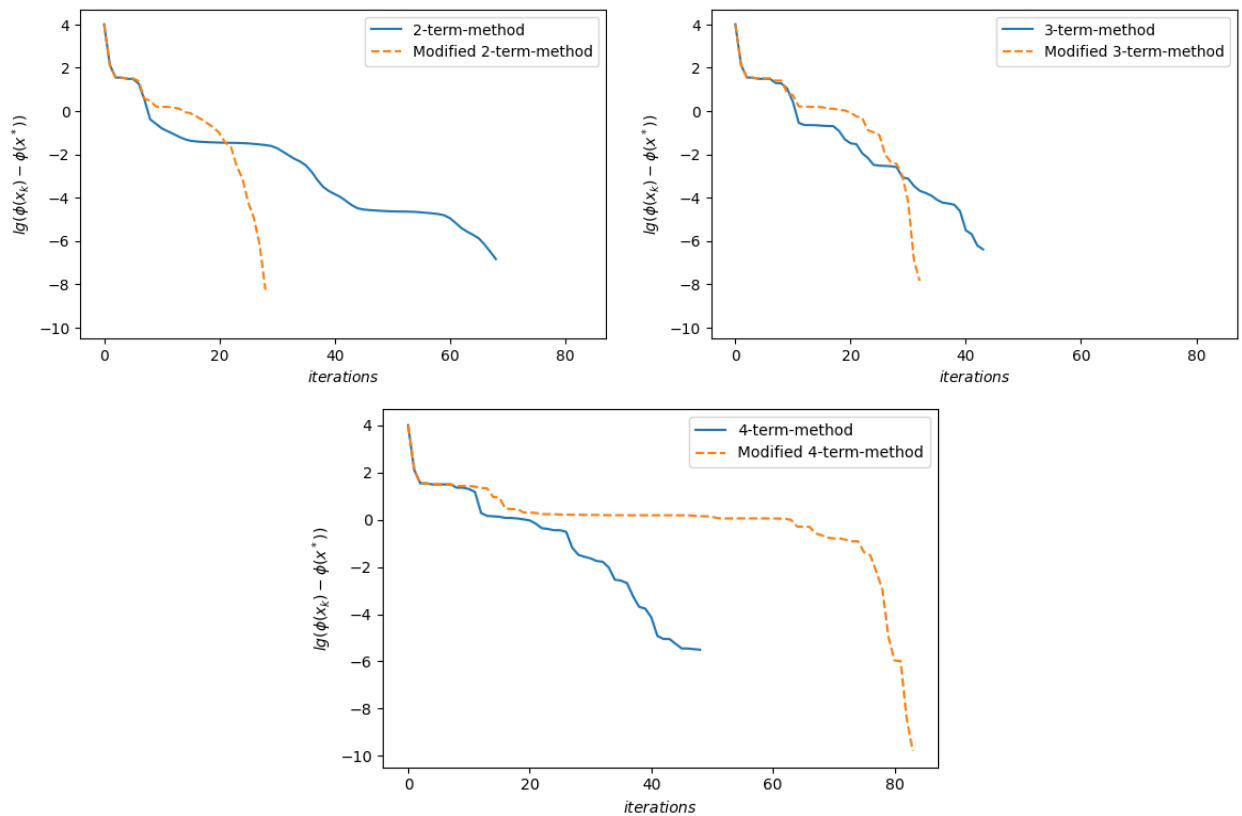
x_0	$\phi(x_0)$	Кількість доданків p	Метод мінімізації	$\bar{x}$ - отриманий розв'язок	$\phi(\bar{x})$	Кількість ітерацій
$(-3; -1; -3; -1)^T$	19192.0	2	Звичайний	(1.00188638, 1.00378105, 0.99814611, 0.99630346)	$1.27e^{-5}$	68
			Модифікований	(0.99999967, 0.99999937, 1.00000022, 1.00000052)	$1.04e^{-12}$	39
		3	Звичайний	(0.99801241, 0.99601356, 1.00201725, 1.00404651)	$1.45e^{-5}$	40
			Модифікований	(0.99999701, 0.99999605, 1.00000377, 1.00000853)	$7.53e^{-10}$	45
		4	Звичайний	(1.0001421, 1.00028714, 0.99989745, 0.99979857)	$1.30e^{-7}$	62
			Модифікований	(1.0000975, 1.0001951, 0.99991246, 0.99980908)	$5.49e^{-8}$	98

Рис. 3.16. Графіки збіжності методів для $p = 2$, $p = 3$ і $p = 4$ (нижній)

Таблиця 3.17

Результати обчислень

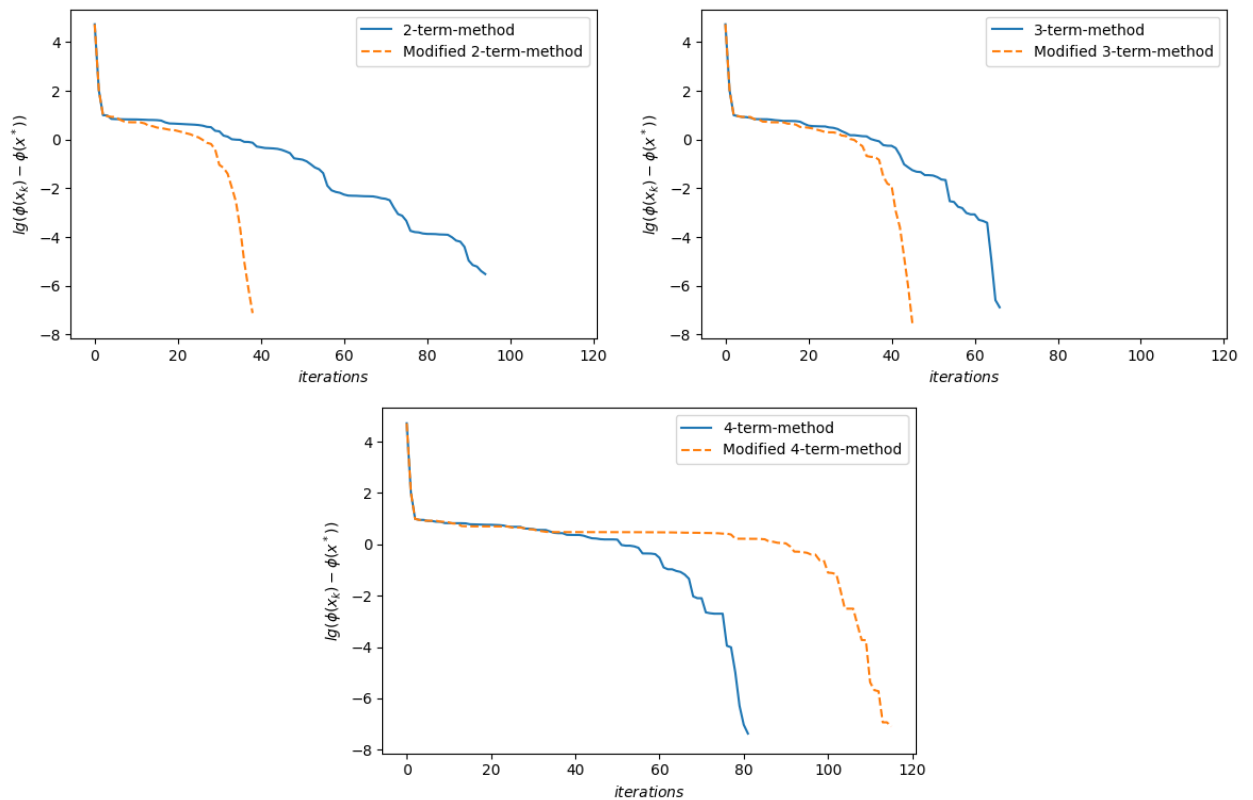
x_0	$\phi(x_0)$	Кількість доданків p	Метод мінімізації	$\bar{x}$ - отриманий розв'язок	$\phi(\bar{x})$	Кількість ітерацій
$(3; -1; 0; 1)^T$	10135.4	2	Звичайний	(0.99989053, 0.99979361, 1.00006398, 1.0001142)	$1.44e^{-7}$	68
			Модифікований	(1.00003519, 1.00006992, 0.9999634, 0.9999246)	$5.45e^{-9}$	28
		3	Звичайний	(1.00033435, 1.00067146, 0.99966934, 0.99933281)	$4.04e^{-7}$	43
			Модифікований	(0.99997653, 0.99994523, 1.00002289, 1.00005388)	$1.43e^{-8}$	32
		4	Звичайний	(0.99907075, 0.99814552, 1.00092105, 1.00185868)	$3.11e^{-6}$	48
			Модифікований	(0.99999444, 0.99998899, 1.00000572, 1.00001073)	$1.58e^{-10}$	83

Рис. 3.17. Графіки збіжності методів для $p = 2$, $p = 3$ і $p = 4$ (нижній)

Таблиця 3.18

Результати обчислень

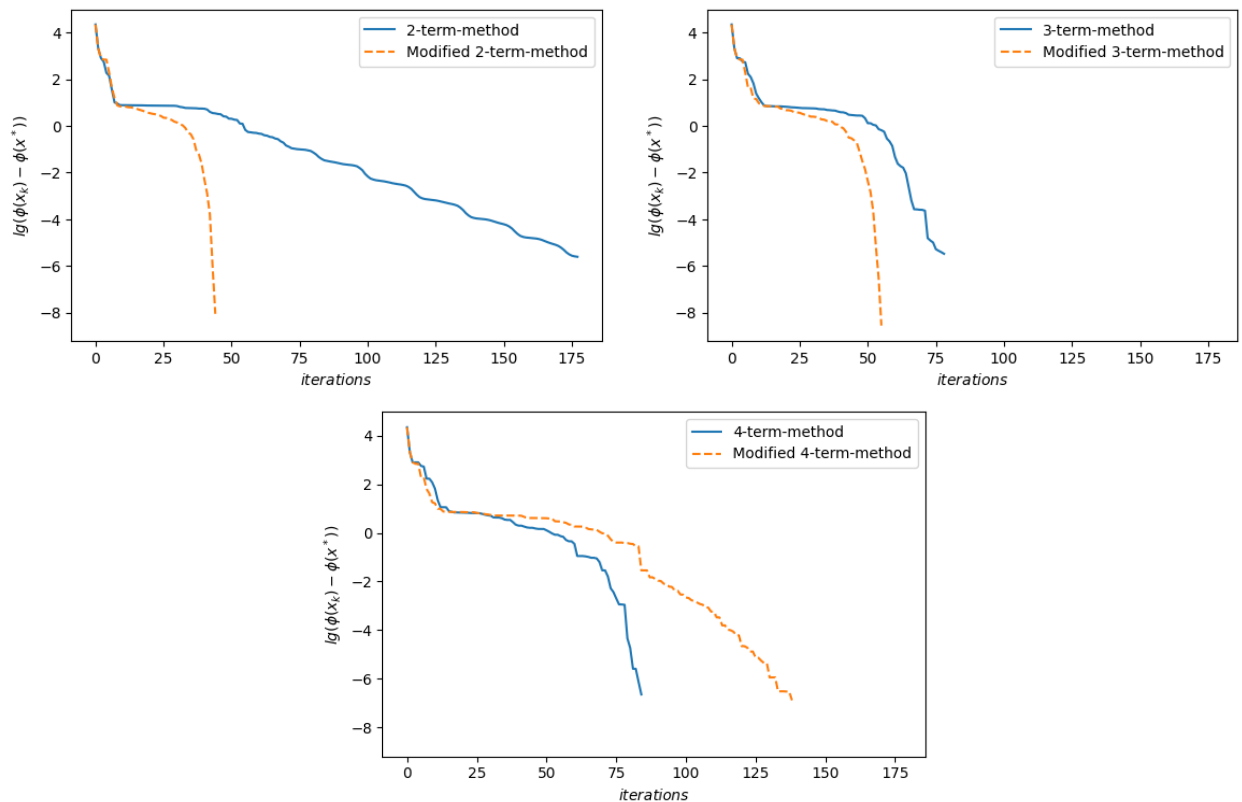
x_0	$\phi(x_0)$	Кількість доданків p	Метод мінімізації	$\bar{x}$ - отриманий розв'язок	$\phi(\bar{x})$	Кількість ітерацій
$(0; 1; -5; 1)^T$	51977.0	2	Звичайний	(0.9991571, 0.9982978, 1.00090885, 1.00183656)	$3.03e^{-6}$	94
			Модифікований	(0.99989038, 0.99978239, 1.00007897, 1.00015315)	$7.59e^{-8}$	38
		3	Звичайний	(1.00014976, 1.00030213, 0.99981921, 0.9996431)	$1.31e^{-7}$	66
			Модифікований	(1.00001143, 1.00000633, 0.99999761, 0.99999946)	$2.94e^{-8}$	45
		4	Звичайний	(1.0000478, 1.00007898, 0.99997449, 0.9999407)	$4.26e^{-8}$	81
			Модифікований	(0.99998908, 0.99998399, 1.00005248, 1.00009252)	$7.99e^{-8}$	115

Рис. 3.18. Графіки збіжності методів для $p = 2$, $p = 3$ і $p = 4$ (нижній)

Таблиця 3.19

Результати обчислень

x_0	$\phi(x_0)$	Кількість доданків p	Метод мінімізації	$\bar{x}$ - отриманий розв'язок	$\phi(\bar{x})$	Кількість ітерацій
$(0; 3; 5; 10)^T$	22381.9	2	Звичайний	(1.00083117, 1.0016505, 0.99918992, 0.99838703)	$2.45e^{-6}$	177
			Модифікований	(1.0000438, 1.000091, 0.99995596, 0.99990968)	$8.75e^{-9}$	44
		3	Звичайний	(0.99911196, 0.99822488, 1.00096313, 1.00191598)	$3.29e^{-6}$	78
			Модифікований	(1.00002561, 1.0000514, 0.99997813, 0.99995435)	$2.74e^{-9}$	55
		4	Звичайний	(0.99992246, 0.9998565, 1.00000322, 1.00000208)	$2.23e^{-7}$	84
			Модифікований	(1.00000222, 0.99998979, 1.0000549, 1.00011133)	$1.28e^{-7}$	138

Рис. 3.19. Графіки збіжності методів для $p = 2$, $p = 3$ і $p = 4$ (нижній)

Задача 7 функція Пауелла. Кількість змінних $n = 4$

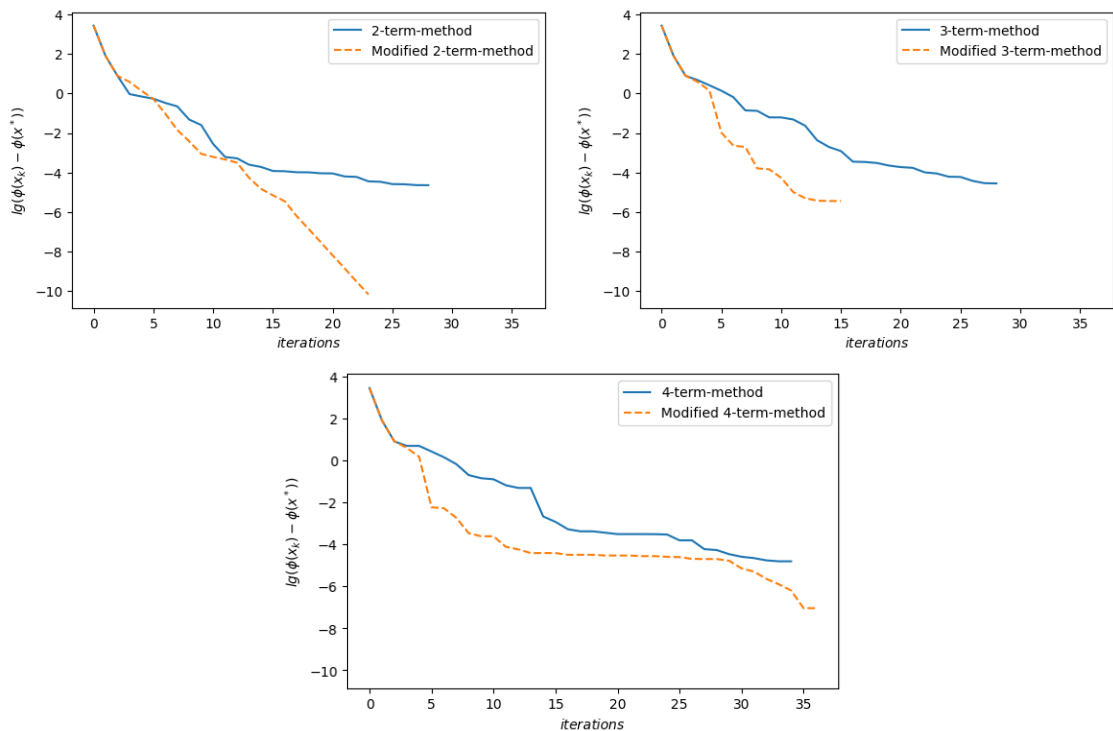
$$\phi(x) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4 \rightarrow \min$$

Точний розв'язок $x^* = (0; 0; 0; 0)^T$, значення функції в цій точці $\phi(x^*) = 0$.

Таблиця 3.20

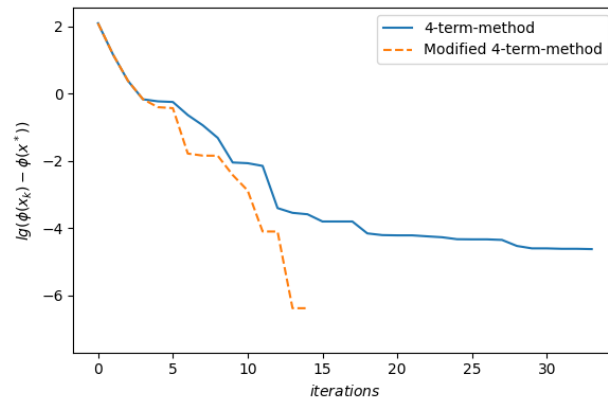
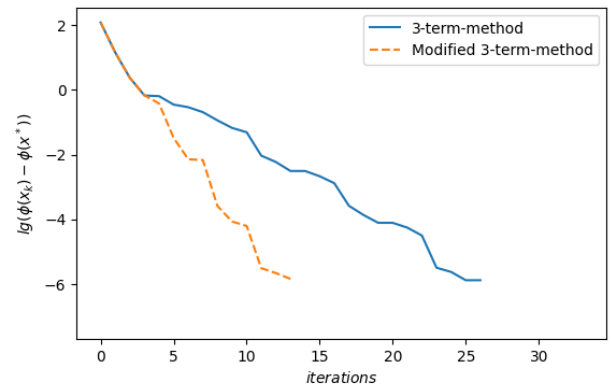
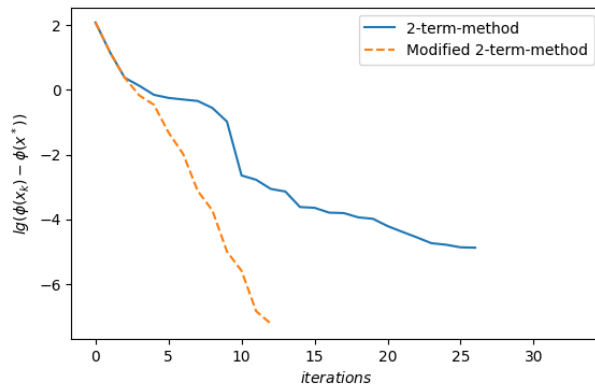
Результати обчислень

x_0	$\phi(x_0)$	Кількість доданків p	Метод мінімізації	$\bar{x}$ - отриманий розв'язок	$\phi(\bar{x})$	Кількість ітерацій
$(-3; -1; 0; 1)^T$	2735.0	2	Звичайний	$(-0.05468635, 0.00542489, -0.03003665, -0.03038472)$	$2.27e^{-5}$	28
			Модифікований	$(-0.00038721, 0.00003909, 0.00100463, 0.00100493)$	$6.64e^{-11}$	23
		3	Звичайний	$(-0.00706836, 0.00072886, 0.02910787, 0.02887439)$	$2.79e^{-5}$	28
			Модифікований	$(0.03669156, -0.00367823, 0.01451759, 0.014533)$	$3.57e^{-6}$	15
		4	Звичайний	$(-0.0088695, 0.0009204, 0.02314784, 0.02332522)$	$1.53e^{-5}$	34
			Модифікований	$(-0.00616193, 0.00064231, -0.00544204, -0.00546804)$	$8.93e^{-8}$	36

Рис. 3.20. Графіки збіжності методів для $p = 2$, $p = 3$ і $p = 4$ (нижній)

Таблиця 3.21

Результати обчислень						
x_0	$\phi(x_0)$	Кількість доданків p	Метод мінімізації	$\bar{x}$ - отриманий розв'язок	$\phi(\bar{x})$	Кількість ітерацій
$(1; 1; 1; 1)^T$	122.0	2	Звичайний	$(-0.00477742, 0.00046825, -0.02770333, -0.02801322)$	$1.32e^{-5}$	26
			Модифікований	$(-0.00537318, 0.00053584, 0.00333259, 0.00333253)$	$5.91e^{-8}$	12
		3	Звичайний	$(0.02852263, -0.00284551, 0.0113815, 0.01141071)$	$1.30e^{-6}$	26
			Модифікований	$(-0.00884299, 0.00087017, 0.01004582, 0.0100089)$	$1.43e^{-6}$	13
		4	Звичайний	$(-0.05795064, 0.00579758, -0.02083545, -0.02101444)$	$2.39e^{-5}$	33
			Модифікований	$(-0.00292663, 0.00029415, -0.01197976, -0.01194416)$	$4.19e^{-7}$	14

Рис. 3.21. Графіки збіжності методів для $p = 2$, $p = 3$ і $p = 4$ (нижній)

Таблиця 3.22

Результати обчислень						
x_0	$\phi(x_0)$	Кількість доданків p	Метод мінімізації	$\bar{x}$ - отриманий розв'язок	$\phi(\bar{x})$	Кількість ітерацій
$(-0.5; 3; 4.5; -1)^T$	2318.125	2	Звичайний	(0.0324276, -0.00321244, 0.01714279, 0.0175121)	$3.25e^{-6}$	20
			Модифікований	(0.00322878, -0.00032231, -0.00532662, -0.00532693)	$6.50e^{-8}$	12
		3	Звичайний	(-0.09006641, 0.00899491, -0.04404306, -0.04486496)	$1.34e^{-4}$	25
			Модифікований	(0.00143262, -0.00014319, 0.00133569, 0.00133364)	$8.41e^{-11}$	30
		4	Звичайний	(-0.05598129, 0.00561431, -0.02094136, -0.02110171)	$2.00e^{-5}$	43
			Модифікований	(0.05834536, -0.00581977, 0.02952995, 0.03026499)	$2.67e^{-5}$	21

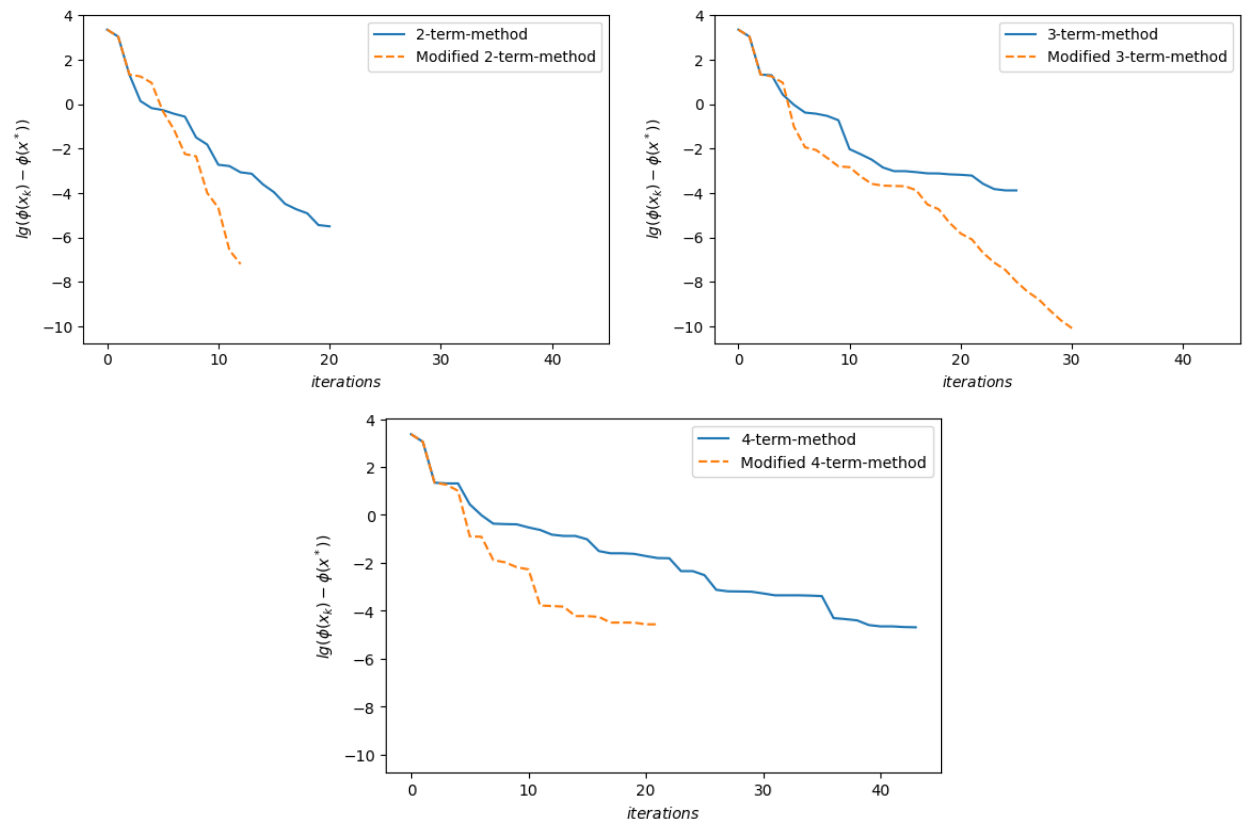
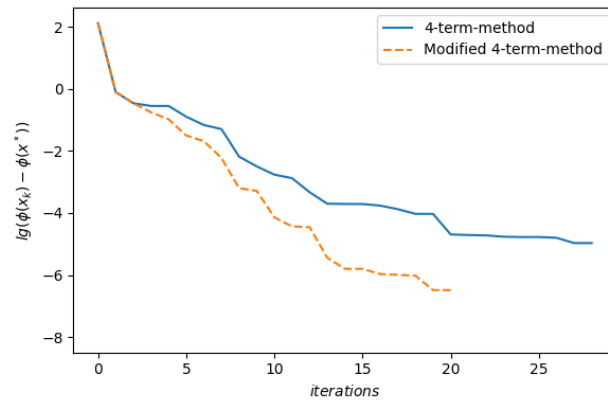
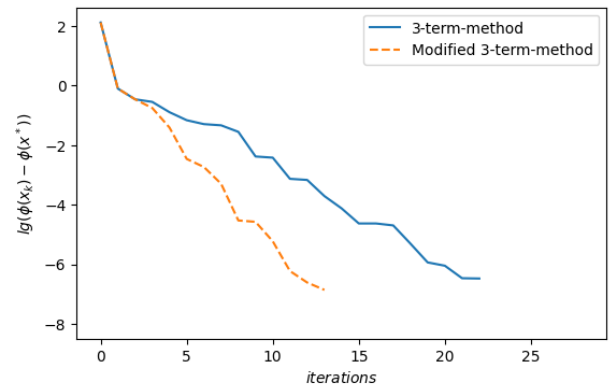
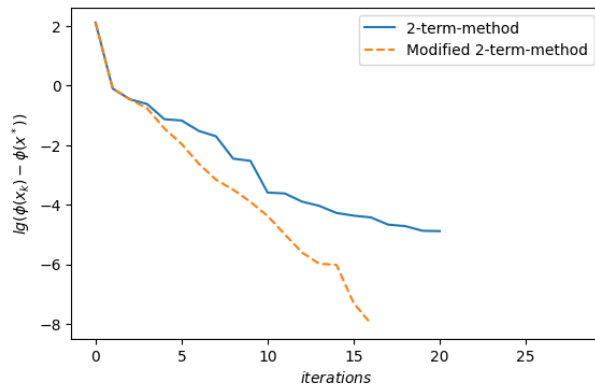


Рис. 3.22. Графіки збіжності методів для $p = 2$, $p = 3$ і $p = 4$ (нижній)

Таблиця 3.23

Результати обчислень						
x_0	$\phi(x_0)$	Кількість доданків p	Метод мінімізації	$\bar{x}$ - отриманий розв'язок	$\phi(\bar{x})$	Кількість ітерацій
$(1; 1; 0; 0)^T$	132.0	2	Звичайний	$(-0.04317197, 0.0043198, -0.02734788, -0.02717457)$	$1.29e^{-5}$	20
			Модифікований	$(-0.00850125, 0.00085054, -0.00384524, -0.00384985)$	$1.01e^{-8}$	16
		3	Звичайний	$(0.01391427, -0.00142911, 0.00270377, 0.00263333)$	$3.31e^{-7}$	22
			Модифікований	$(0.01051444, -0.00105802, -0.00015256, -0.00012099)$	$1.37e^{-7}$	13
		4	Звичайний	$(-0.00161131, 0.00013922, 0.02461655, 0.02436899)$	$1.07e^{-5}$	28
			Модифікований	$(-0.01645501, 0.00165078, -0.00378801, -0.00368848)$	$3.25e^{-7}$	20

Рис. 3.23. Графіки збіжності методів для $p = 2$, $p = 3$ і $p = 4$ (нижній)

Задача 8 Кількість змінних $n = 2$

$$\phi(x) = (x_1 x_2)^2 (1 - x_1)^2 [1 - x_1 - x_2 (1 - x_1)^5]^2 \rightarrow \min$$

Функція має декілька точок мінімуму:

$$x_1^* = (1; \infty)^T, x_2^* = (0; \infty)^T, x_3^* = (\infty; 0)^T$$

де ∞ - мається на увазі необмежене значення (тобто будь-яке число із $\mathbb{R}$).

Значення функції в цих точках $\phi(x_i^*) = 0$.

Таблиця 3.24

Результати обчислень

x_0	$\phi(x_0)$	Кількість доданків p	Метод мінімізації	$\bar{x}$ - отриманий розв'язок	$\phi(\bar{x})$	Кількість ітерацій
$(-1.2; 1)^T$	16964.511495	2	Звичайний	(1.00000031, -1.52931231)	$2.08e^{-26}$	2
			Модифікований	(1.00000031, -1.52931231)	$2.08e^{-26}$	2
		3	Звичайний	(1.00000031, -1.52931231)	$2.08e^{-26}$	2
			Модифікований	(1.00000031, -1.52931231)	$2.08e^{-26}$	2
		4	Звичайний	(1.00000031, -1.52931231)	$2.08e^{-26}$	2
			Модифікований	(1.00000031, -1.52931231)	$2.08e^{-26}$	2

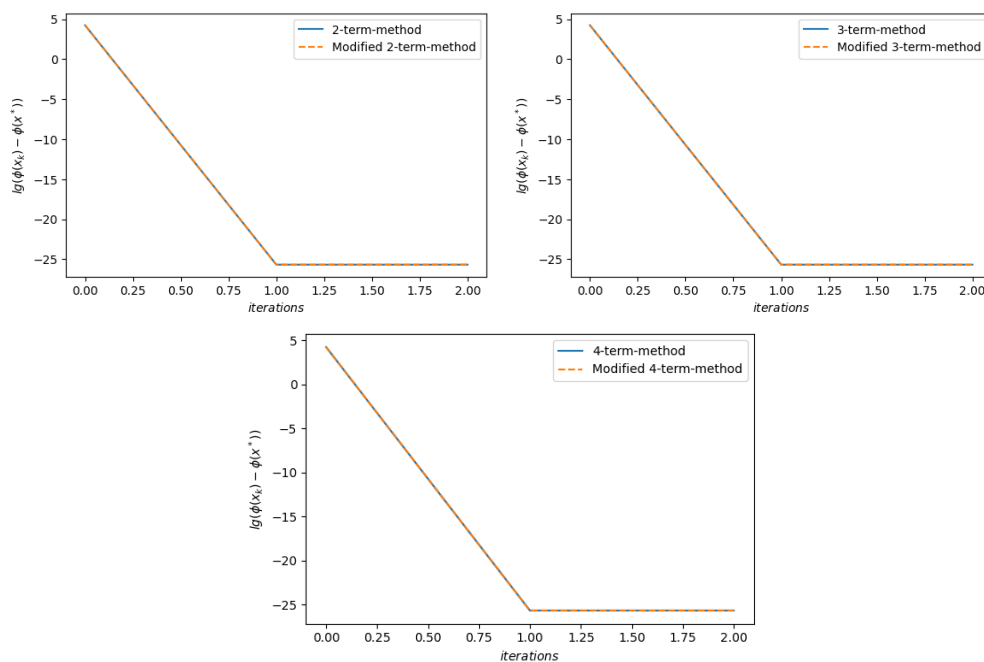


Рис. 3.24. Графіки збіжності методів для $p = 2$, $p = 3$ і $p = 4$ (нижній)

Задача 9 Функція Хіммельблау. Кількість змінних $n = 2$

$$\phi(x) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2 \rightarrow \min$$

Функція має чотири точки мінімуму:

$$\begin{aligned} x_1^* &= (3; 2)^T, & x_2^* &= (3.58443; -1.84813)^T, \\ x_3^* &= (-2.805118; 3.131312)^T, & x_4^* &= (-3.779310; -3.283186)^T \end{aligned}$$

Значення функції в цих точках $\phi(x_i^*) = 0$.

Таблиця 3.25

Результати обчислень

x_0	$\phi(x_0)$	Кількість доданків p	Метод мінімізації	$\bar{x}$ - отриманий розв'язок	$\phi(\bar{x})$	Кількість ітерацій
$(1; 1)^T$	106.0	2	Звичайний	$(3., 2.00000002)$	$5.40e^{-15}$	6
			Модифікований	$(3., 2.00000002)$	$5.51e^{-15}$	6
		3	Звичайний	$(3., 2.00000002)$	$5.96e^{-15}$	8
			Модифікований	$(3.00006734, 1.99994386)$	$1.46e^{-7}$	9
		4	Звичайний	$(3., 2.00000002)$	$6.48e^{-15}$	10
			Модифікований	$(2.99998427, 1.99978175)$	$8.87e^{-7}$	52

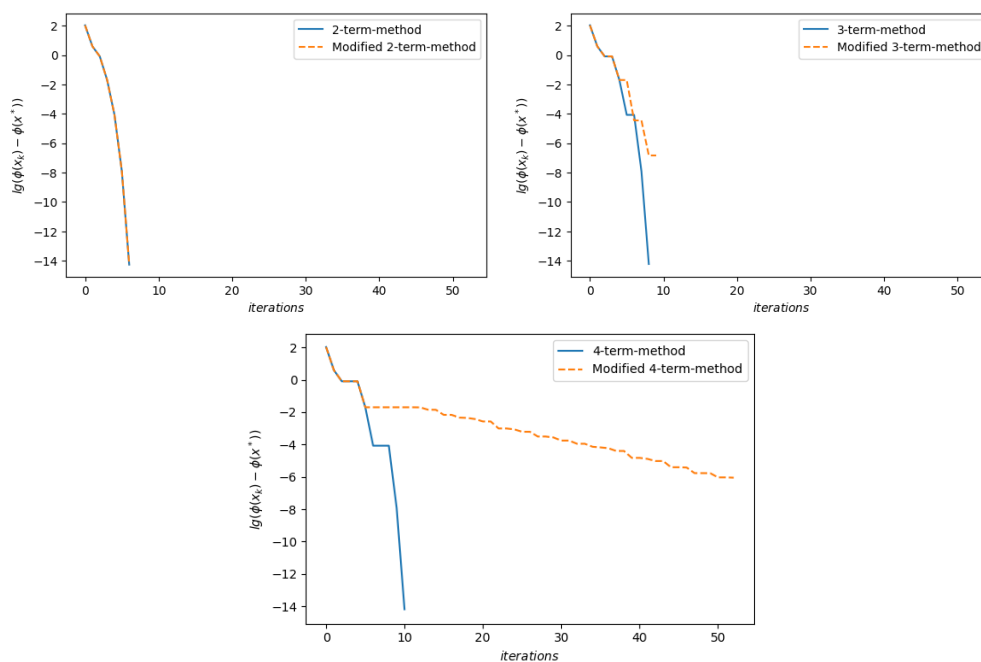


Рис. 3.25. Графіки збіжності методів для $p = 2$, $p = 3$ і $p = 4$ (нижній)

Таблиця 3.26

Результати обчислень						
x_0	$\phi(x_0)$	Кількість доданків p	Метод мінімізації	$\bar{x}$ - отриманий розв'язок	$\phi(\bar{x})$	Кількість ітерацій
$(0; 1)^T$	136.0	2	Звичайний	$(2.99999997, 2.00000026)$	$1.08e^{-12}$	7
			Модифікований	$(2.99999997, 2.00000026)$	$1.08e^{-12}$	7
		3	Звичайний	$(2.99994009, 1.99999171)$	$1.44e^{-7}$	9
			Модифікований	$(3.00011587, 1.99993751)$	$4.18e^{-7}$	22
		4	Звичайний	$(2.99994486, 1.99997195)$	$1.57e^{-11}$	11
			Модифікований	$(3.00017785, 1.99981008)$	$1.11e^{-6}$	70

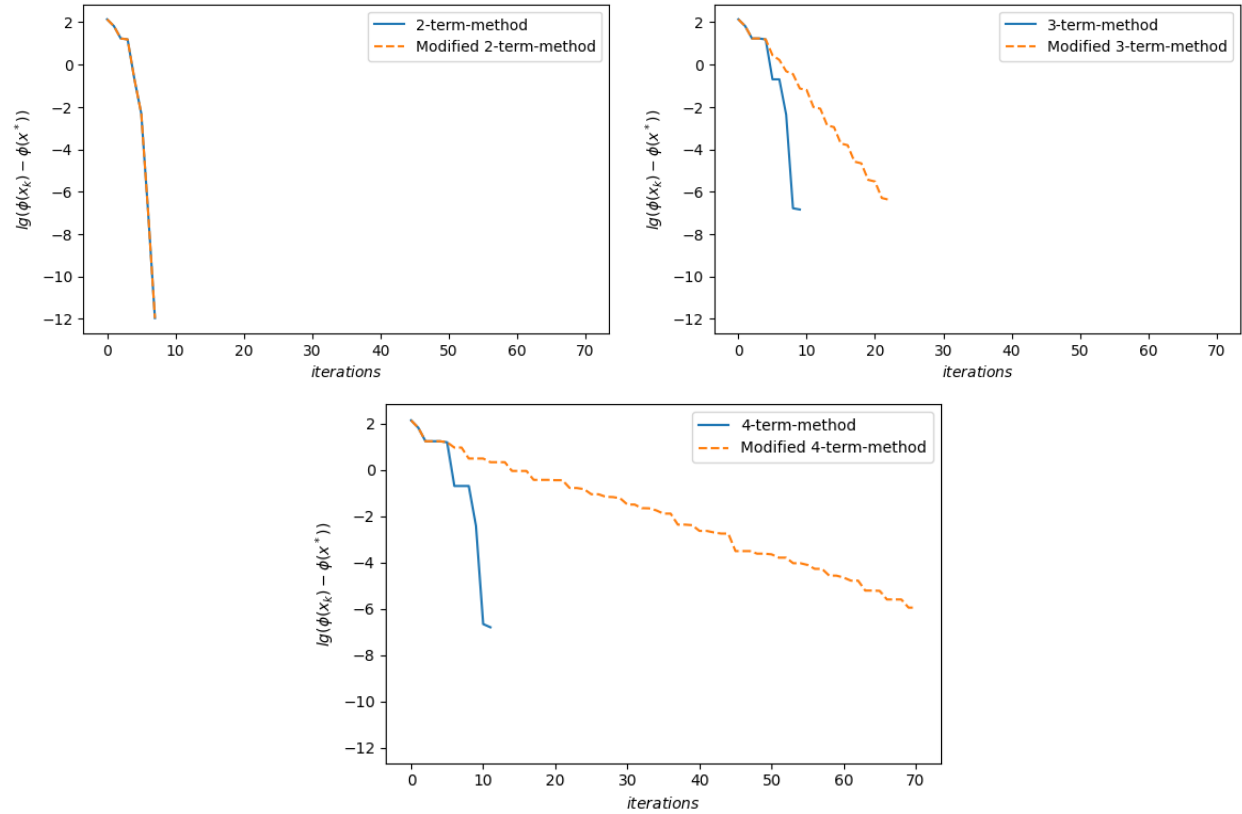


Рис. 3.26. Графіки збіжності методів для $p = 2$, $p = 3$ і $p = 4$ (нижній)

Задача 10. Кількість змінних $n = 3$

$$\phi(x) = 100 \left[x_3 - \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 \right]^2 + (1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2$$

Точний розв'язок $x^* = (1; 1; 1)^T$, значення функції в цій точці $\phi(x^*) = 0$.

Таблиця 3.27

Результати обчислень						
x_0	$\phi(x_0)$	Кількість доданків p	Метод мінімізації	$\bar{x}$ - отриманий розв'язок	$\phi(\bar{x})$	Кількість ітерацій
$(-1.2; 2; 0)^T$	8.4	2	Звичайний	(0.99451664, 0.99791944, 0.99244185)	$3.44e^{-5}$	209
			Модифікований	(0.99999907, 1.00000236, 1.00000141)	$6.50e^{-12}$	15
		3	Звичайний	(1.00010571, 0.99995555, 1.00006073)	$1.32e^{-8}$	24
			Модифікований	(1.00005401, 1.00005167, 1.00010095)	$7.83e^{-9}$	18
		4	Звичайний	(1.00078923, 1.00056039, 1.00133006)	$9.77e^{-7}$	45
			Модифікований	(1.00144359, 1.00042228, 1.00185213)	$2.28e^{-6}$	35

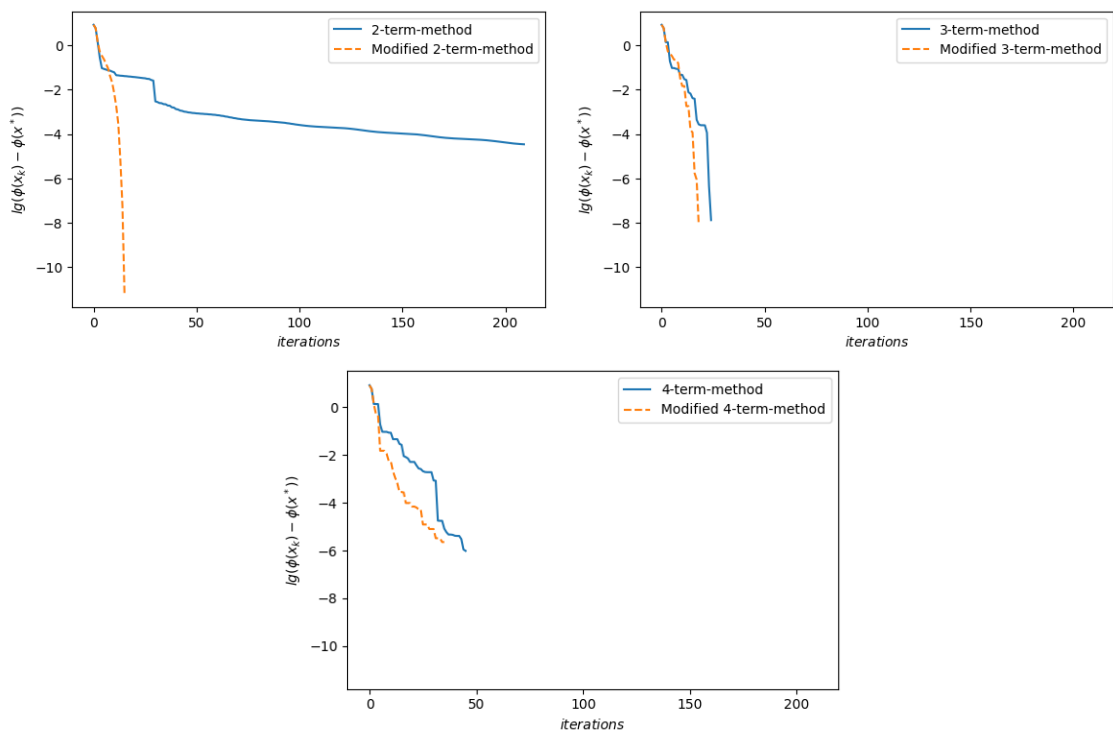


Рис. 3.27. Графіки збіжності методів для $p = 2$, $p = 3$ і $p = 4$ (нижній)

Таблиця 3.28

Результати обчислень						
x_0	$\phi(x_0)$	Кількість доданків p	Метод мінімізації	$\bar{x}$ - отриманий розв'язок	$\phi(\bar{x})$	Кількість ітерацій
$(2; 2; 2)^T$	402.0	2	Звичайний	(1.00000251, 1.00000251, 1.00000439)	$4.18e^{-10}$	10
			Модифікований	(1.00000251, 1.00000251, 1.00000439)	$5.18e^{-11}$	10
		3	Звичайний	(1.00000269, 1.00000269, 1.00000476)	$5.23e^{-11}$	14
			Модифікований	(1.00019422, 1.00019422, 1.00038979)	$7.56e^{-8}$	18
		4	Звичайний	(1.00000265, 1.00000265, 1.00000474)	$4.55e^{-11}$	18
			Модифікований	(1.00104488, 1.00104491, 1.00211213)	$2.23e^{-6}$	49

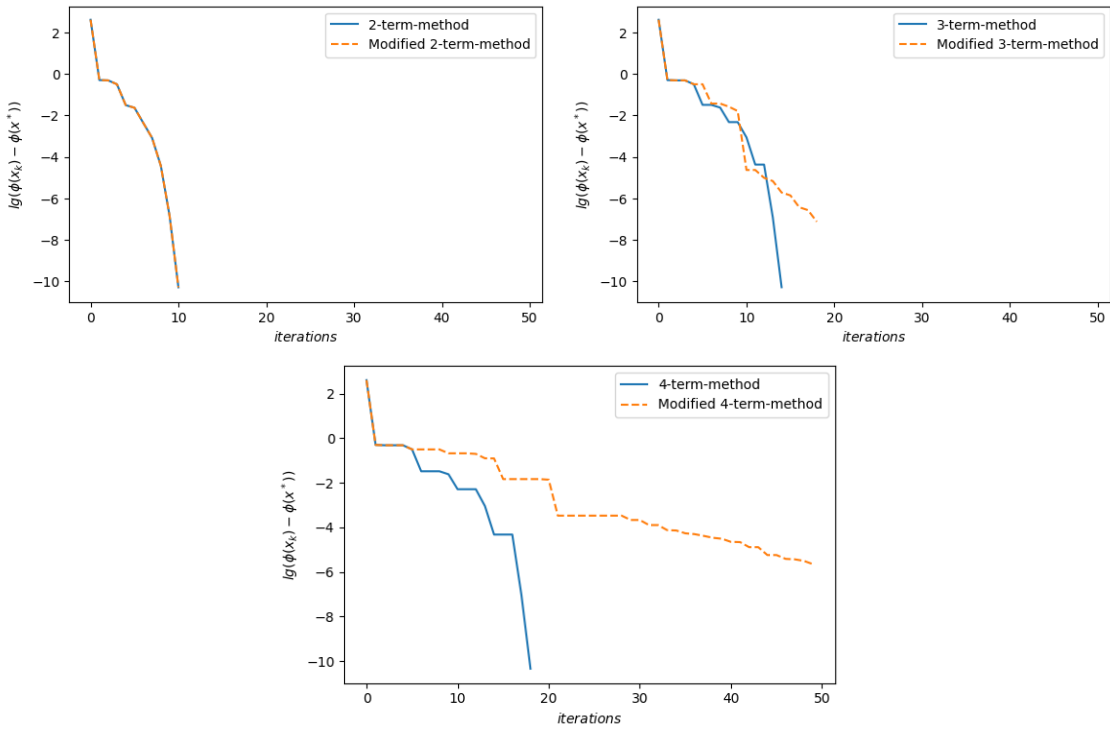
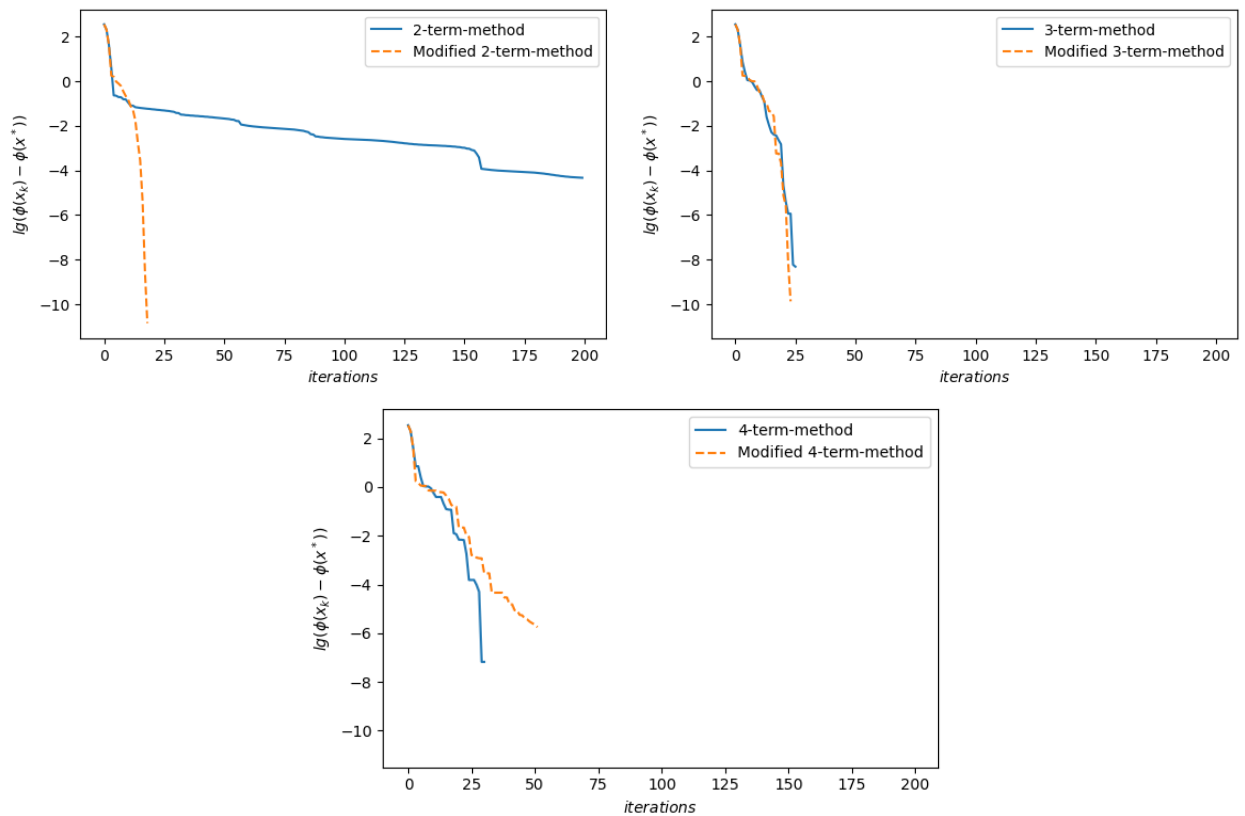


Рис. 3.28. Графіки збіжності методів для $p = 2$, $p = 3$ і $p = 4$ (нижній)

Таблиця 3.29

Результати обчислень

x_0	$\phi(x_0)$	Кількість доданків p	Метод мінімізації	$\bar{x}$ - отриманий розв'язок	$\phi(\bar{x})$	Кількість ітерацій
$(10; -10; 1.2)^T$	346.0	2	Звичайний	$(0.99613463, 0.99440005, 0.99051099)$	$4.65e^{-5}$	199
			Модифікований	$(0.99999823, 0.9999969, 0.99999526)$	$1.44e^{-11}$	18
		3	Звичайний	$(1.00004661, 0.99994823, 0.9999946)$	$4.86e^{-9}$	25
			Модифікований	$(0.99998968, 1.00000409, 0.99999412)$	$1.36e^{-10}$	23
		4	Звичайний	$(0.99999281, 0.99999793, 0.99996505)$	$6.61e^{-8}$	30
			Модифікований	$(1.00113128, 0.99930736, 1.00043169)$	$1.76e^{-6}$	51

Рис. 3.29. Графіки збіжності методів для $p = 2$, $p = 3$ і $p = 4$ (нижній)

Задача 11 Узагальнена функція Розенброка, кількість змінних n :

$$\phi(x) = \sum_{i=2}^n [100(x_i - x_{i-1}^2)^2 + (1 - x_{i-1})^2]$$

Точний розв'язок - $x^* = (1; \dots; 1)^T$, значення функції в цій точці $\phi(x^*) = 0$.

Таблиця 3.30

Результати обчислень для задачі 15 при $n = 8$:

x_0	$\phi(x_0)$	Кількість доданків p	Метод мінімізації	$\phi(\bar{x})$	Кількість ітерацій
$(2; 4, \dots, 2; 4)^T$	58831.0	2	Звичайний	$2.46e^{-6}$	154
			Модифікований	$6.74e^{-9}$	44
		3	Звичайний	$2.77e^{-6}$	61
			Модифікований	$9.95e^{-10}$	51
		4	Звичайний	$3.13e^{-8}$	53
			Модифікований	$3.41e^{-8}$	164

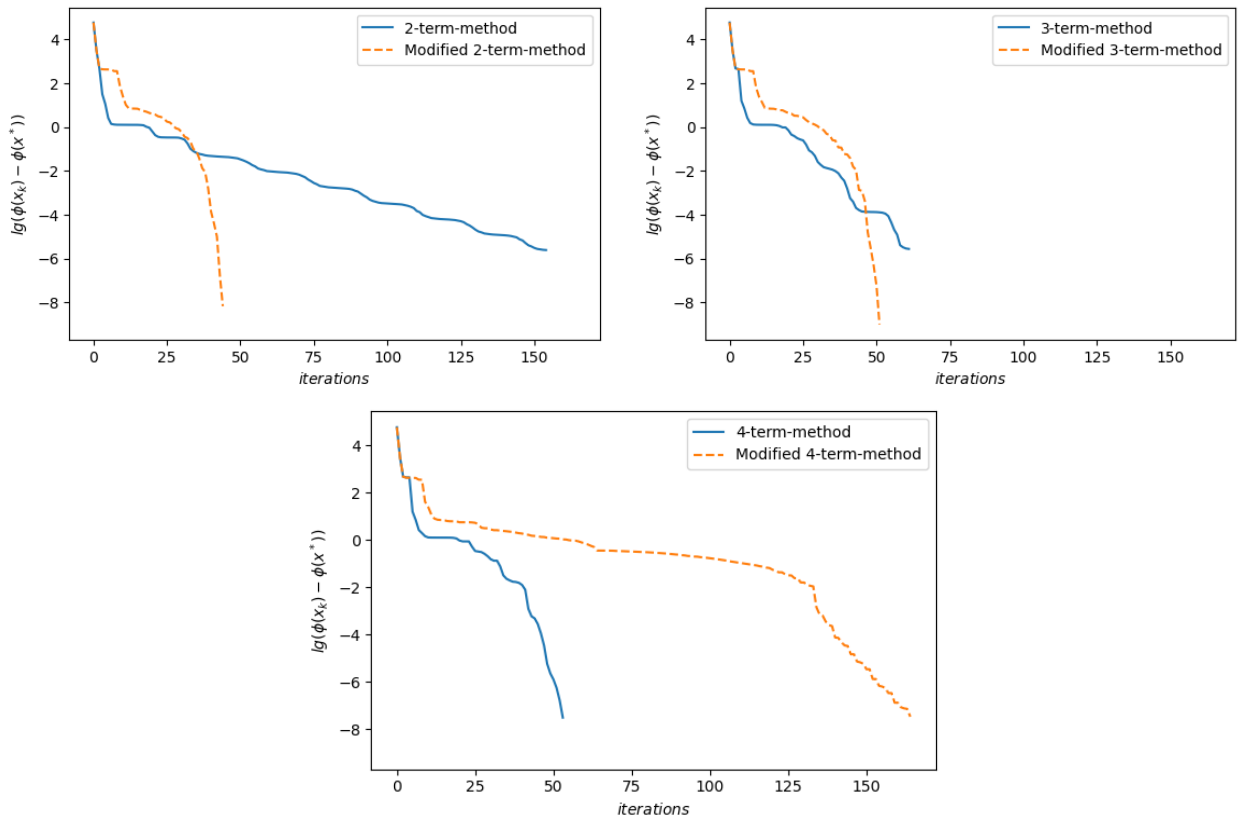


Рис. 3.30. Графіки збіжності методів для $p = 2$, $p = 3$ і $p = 4$ (нижній)

Таблиця 3.31

Результати обчислень для задачі 15 при $n = 20$:

x_0	$\phi(x_0)$	Кількість доданків p	Метод мінімізації	$\phi(\bar{x})$	Кількість ітерацій
$(-1.2; 1; \dots; -1.2, 1)^T$	4598.0	2	Звичайний	$1.69e^{-6}$	288
			Модифікований	$2.37e^{-8}$	96
		3	Звичайний	$1.57e^{-6}$	223
			Модифікований	$4.05e^{-9}$	99
		4	Звичайний	$2.91e^{-6}$	147
			Модифікований	$3.02e^{-8}$	115

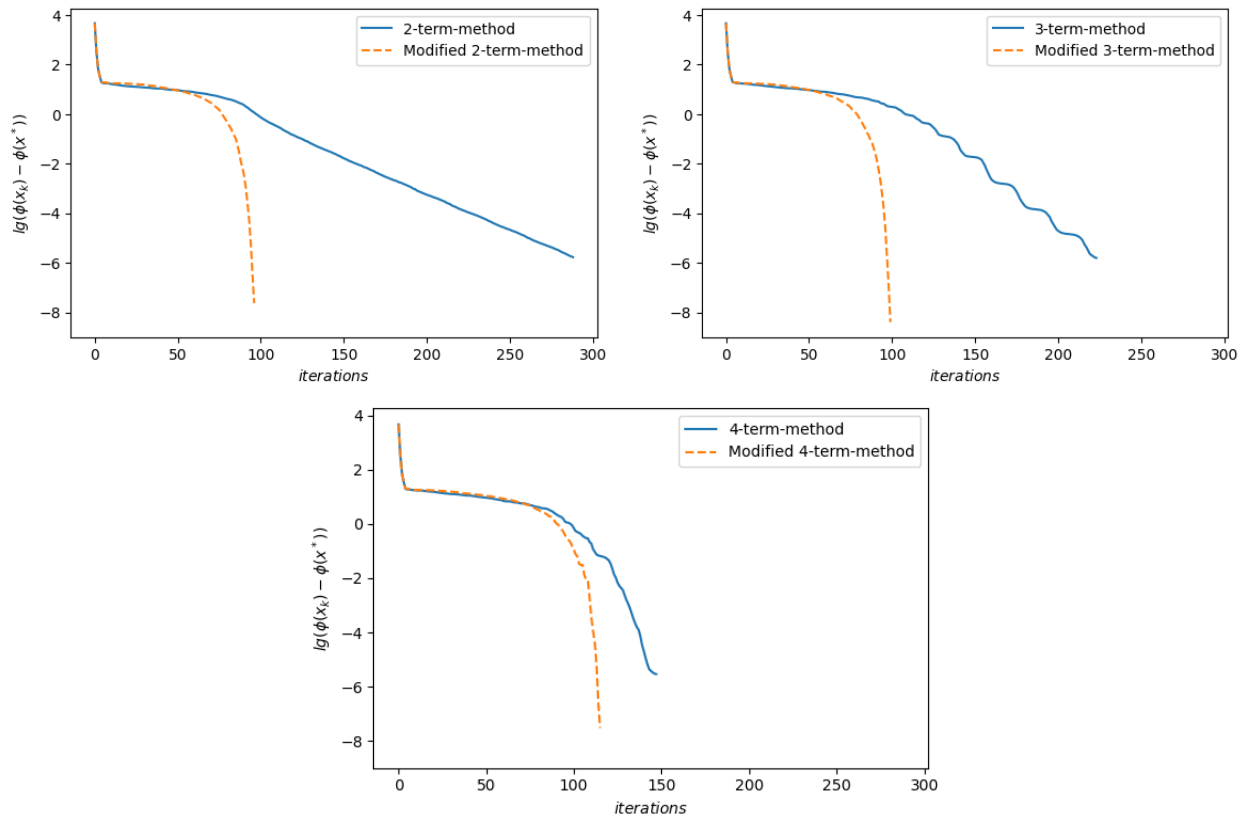


Рис. 3.31. Графіки збіжності методів для $p = 2$, $p = 3$ і $p = 4$ (нижній)

ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто узагальнений p -кроковий метод та запропоновано його модифікацію для задач безумовної оптимізації. Більш детально розглянуто теоретичні положення модифікованого методу.

У роботі порівнювалися ці методи шляхом чисельного експерименту на різних тестових функціях із різними початковими умовами та параметрами $p = 2$, $p = 3$ і $p = 4$. У результаті обчислювальних експериментів було продемонстровано, що для функцій при $n = 2$ змінних звичайний p -кроковий метод дає кращі результати, ніж модифікований, причому при збільшенні кроків (доданків) із $p = 2$ до $p = 3$ і $p = 4$ результати обох методів або не дуже змінюються, або стають гіршими, це проявляється у збільшенні кількості ітерацій та зменшення точності розв'язку.

Інша ситуація спостерігається при кількості змінних $n > 2$. У цих випадках модифікований метод на відповідних тестових функціях здебільшого показав кращі результати і з точки зору точності, і з точки зору кількості ітерацій. Щодо кількості кроків p , то при збільшенні до $p = 3$ або $p = 4$ звичайний p -кроковий метод на деяких тестових функціях дійсно дає кращі результати, проте, в цілому, для більшості функцій не спостерігається покращення результату. Стосовно модифікованого методу, то на всіх розглянутих відповідних функціях при збільшенні кількості кроків p результат залишається або майже незмінним, порівняно із $p = 2$, або, що для більшості випадків справедливо, стає гіршим.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Andrei N., An Unconstrained Optimization Test Functions Collection / N. Andrei // Advanced Modelling and Optimization. — 2008. — Vol. 10, No. 1. — P. 147-161.
URL: <https://camo.ici.ro/journal/vol10/v10a10.pdf>
2. Himmelblau D., Applied nonlinear programming. The University of Texas, Texas, Austin, Texas, 1975. — 536 p.
3. Жалдак М. І., Триус Ю. В. Основи теорії і методів оптимізації: навч. посіб. Черкаси: Брама-Україна, 2005. — 608 с.
4. Страхов Є. М., Яровий А. Т. Аналіз р-крокових методів мінімізації функцій багатьох змінних. Науковий журнал. Одеський національний університет імені І. І. Мечникова. Дослідження в математиці і механіці. - 2017. - Т. 22, вип. 1(29). - С. 70-80
5. Яровий А. Т., Страхов Є. М. Методи оптимізації : навч.-метод. посіб — Одеса : Освіта України, 2020. — 138 с.

ДОДАТОК А

Програмна реалізація розглянутих методів

Посилання на реалізацію розглянутих методів та порівняльний аналіз шляхом побудови графіків за допомогою мови програмування Python:

https://github.com/AlexSkur/Diplom_p_terms_methods/tree/main