

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І. І. МЕЧНИКОВА
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
КАФЕДРА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ І ЕКОНОМІЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ

МЕТОДИ ОБЧИСЛЕНЬ

Частина III

ЕЛЕКТРОННІ МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до лабораторних робіт
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
спеціальності F1 Прикладна математика

ОДЕСА
ОНУ
2026

УДК 519.651.3:519.652(076.5)
M545

Укладач:

В. В. Вербіцький, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри оптимального керування і економічної кібернетики.

Рецензенти:

В. В. Мороз, кандидат технічних наук, професор кафедри оптимального керування і економічної кібернетики Одеського національного університету імені І. І. Мечникова;

І. М. Шпінарева, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математичного забезпечення комп'ютерних систем Одеського національного університету імені І. І. Мечникова.

*Рекомендовано вченою радою факультету математики, фізики
та інформаційних технологій ОНУ імені І. І. Мечникова.
Протокол № 2 від 26 вересня 2025 р.*

M545 **Методи** обчислень [Електронний ресурс] : електрон. метод. вказівки до лаб. робіт для здобувачів першого (бакалавр.) рівня вищ. освіти спец. F1 Прикладна математика / уклад. В. В. Вербіцький. Одеса : Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2026. Ч. 3. 39 с. 0,5 МБ.

Методичні вказівки включають теми змістових модулів за дисципліною «Методи обчислень» щодо розв'язання задач аналізу, а саме: інтерполяція функцій багаточленами; інтерполяція функцій сплайнами; найкраще середньоквадратичне наближення функцій; наближення функцій методом найменших квадратів. До кожної теми додано необхідний теоретичний матеріал та завдання до лабораторних робіт.

УДК 519.651.3:519.652(076.5)

ЗМІСТ

Вступ	3
1 Інтерполяція функцій багаточленами	5
1.1 Інтерполяційний багаточлен Лагранжа	5
1.2 Інтерполяційний багаточлен Ньютона	8
1.3 Інтерполяція за вузлами Чебишева	11
1.4 Завдання до лабораторної роботи	13
2 Інтерполяція функцій сплайнами	15
2.1 Глобальний інтерполяційний кубічний сплайн	15
2.2 Базисний лінійний неперервний сплайн	17
2.3 Базисний ермітовий сплайн	19
2.4 Завдання до лабораторної роботи	22
3 Найкраще середньоквадратичне наближення функцій	24
3.1 Найкраще середньоквадратичне наближення функцій багаточленами	27
3.2 Найкраще середньоквадратичне наближення функцій ортогональними багаточленами	27
3.3 Найкраще середньоквадратичне наближення функцій сплайнами	28
3.4 Завдання до лабораторної роботи	29
4 Наближення функцій методом найменших квадратів	32
4.1 Наближення функцій лінійним методом найменших квадратів .	33
4.2 Приклади апроксимацій функцій що задаються таблично	34
4.3 Завдання до лабораторної роботи	36
Список рекомендованої літератури	38

ВСТУП

Методичні вказівки призначені для забезпечення виконання лабораторних робіт із дисципліни «Методи обчислень». Вони містять короткий виклад теоретичних положень, необхідних для засвоєння матеріалу, а також практичні завдання, спрямовані на формування навичок застосування чисельних методів для розв’язання задач аналізу. Розглянуто такі теми: інтерполяція функцій багаточленами; інтерполяція функцій сплайнами; найкраще середньоквадратичне наближення функцій; наближення функцій методом найменших квадратів.

Особливу увагу приділено побудові алгоритмів і реалізації методів з використанням програмного середовища GNU Octave, що дозволяє студентам ефективно досліджувати чисельні властивості методів і перевіряти їх точність на практичних прикладах.

Методичні вказівки розроблено для студентів спеціальності F1 — Прикладна математика, які здобувають перший (бакалаврський) рівень вищої освіти. Виконання лабораторних робіт сприяє глибшому розумінню основ чисельного аналізу, формуванню обчислювальної культури та розвитку навичок роботи з сучасними програмними засобами математичних розрахунків.

Передбачається, що лабораторні роботи виконуються паралельно з вивченням теоретичного матеріалу. Додатковий матеріал можна знайти у підручниках [1, 3, 5], а відповідні програмні продукти — за посиланнями [8–10].

1. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ БАГАТОЧЛЕНАМИ

1.1. Інтерполяційний багаточлен Лагранжа

Задача інтерполяції функції полягає в наступному. Нехай в деяких точках x_i відомі значення функції $y = f(x)$:

$$y_i = f(x_i), \quad i = \overline{0, n}.$$

Точки x_i називаються вузлами інтерполяції. Потрібно приблизно обчислити значення функції $y = f(x)$ в точці $\tilde{x}$, що знаходиться між вузлами інтерполяції і не збігається ні з одним з них.

Задачу інтерполяції вирішують наступним чином. Розглянемо функцію

$$y = g(x, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad (1.1)$$

Невідомі параметри α_i визначимо з умов збігу в вузлах інтерполяції цієї функції з функцією $y = f(x)$:

$$g(x_i, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = f(x_i), \quad i = \overline{0, n}. \quad (1.2)$$

Якщо відомий вид функції (1.1), то (1.2) — це система з $n + 1$ рівняння щодо невідомих параметрів $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$. У загальному випадку ця система нелінійна. Припустимо, що функція (1.1) має вигляд

$$g(x, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i(x), \quad (1.3)$$

де $\varphi_i(x)$ ($i = \overline{0, n}$) — відомі функції, лінійно незалежні на проміжку $[a, b]$, якому належать вузли інтерполяції. В цьому випадку система (1.2) набуває вигляду:

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i(x_j) = f(x_j), \quad j = \overline{0, n}. \quad (1.4)$$

Оскільки функції $\varphi_i(x)$ лінійно незалежні, то матриця системи лінійних алге-

браїчних рівнянь (1.4) не вироджена, а значить ця система однозначно розв'язна. Вирішивши систему (1.4), знаходимо значення параметрів $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$. Функція (1.1) повністю визначена. Цю функцію називають інтерполянтом (функцією що інтерполює) функції $y = f(x)$. Тепер можна покласти

$$f(\tilde{x}) \approx g(\tilde{x}, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Найбільш часто функцію інтерполюють, використовуючи багаточлени. В цьому випадку функція що інтерполює називається інтерполяційним многочленом,

$$\varphi_i(x) = x^i,$$

і система (1.4) набуває вигляду

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i x_j^i = f(x_j), \quad j = \overline{0, n}. \quad (1.5)$$

Визначником цієї системи є визначник Вандермонда

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}. \quad (1.6)$$

Оскільки визначник Вандермонда відмінний від нуля, то задача інтерполяції функції многочленами однозначно розв'язна.

Припустимо, для деякої функції потрібно побудувати інтерполяційний многочлен на проміжку $[0, 1]$. Оскільки для великих i функції $\varphi_i(x) = x^i$ на проміжку $[0, 1]$ майже лінійно залежні, то число обумовленості матриці (1.5) буде зростати зі зростанням числа вузлів інтерполяції. Цей окремий приклад показує, що недоцільно для побудови інтерполяційного многочлена використовувати многочлени великих ступенів.

Інтерполяційний многочлен можна побудувати не вирішуючи систему

(1.5). Так інтерполяційний многочлен можна записати в такий спосіб:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \varphi_i(x), \quad (1.7)$$

де

$$\varphi_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (1.8)$$

Очевидно, що функції $\varphi_i(x)$, являючись многочленами n -го ступеня, задовольняють умовам

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{0, n}. \quad (1.9)$$

Тому

$$L_n(x_i) = f(x_i), \quad i = \overline{0, n},$$

і $L_n(x)$ — інтерполяційний багаточлен n -го ступеня, який називають інтерполяційним многочленом Лагранжа.

Враховуючи вище викладене, цей інтерполяційний багаточлен єдиний. Функції (1.8) називаються базисними функціями інтерполяційного багаточлена Лагранжа.

Функція

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$$

називається залишковим членом інтерполяційного багаточлена $L_n(x)$. Надалі ми покажемо, що якщо $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$ і $L_n(x)$ — інтерполяційний багаточлен функції $f(x)$, який побудовано за $n+1$ вузлами, які належить проміжку $[a, b]$, то

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n), \quad (1.10)$$

де $\xi \in (a, b)$. Формула (1.10) дозволяє оцінити погрішність інтерполяції функції багаточленами.

1.2. Інтерполяційний багаточлен Ньютона

Введемо визначення поділених різниць. Значення функції в вузлі інтерполяції $f(x_i)$ називають поділеною різницею нульового порядку. Поділена різниця першого порядку визначається через поділені різниці нульового порядку, а поділена різниця другого порядку — через поділені різниці першого:

$$f(x_i; x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i},$$

$$f(x_i; x_j; x_k) = \frac{f(x_j; x_k) - f(x_i; x_j)}{x_k - x_i}.$$

Поділена різниця n -го порядку визначається через поділені різниці $(n-1)$ -го порядку:

$$f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+n}) = \frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}; \dots; x_{i+n}) - f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+n-1})}{x_{i+n} - x_i}.$$

Розглянемо деякі властивості поділених різниць.

Властивість 1.1 *Поділену різницю довільного порядку можна виразити через значення функції у вузлах інтерполяції.*

Доведення. Дійсно,

$$\begin{aligned} f(x_i; x_j) &= \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i} = \frac{f(x_i)}{x_i - x_j} + \frac{f(x_j)}{x_j - x_i}, \\ f(x_i; x_j; x_k) &= \frac{f(x_j; x_k) - f(x_i; x_j)}{x_k - x_i} = \\ &= \frac{1}{x_k - x_i} \left(\frac{f(x_j)}{x_j - x_k} + \frac{f(x_k)}{x_k - x_j} - \frac{f(x_i)}{x_i - x_j} - \frac{f(x_j)}{x_j - x_i} \right) = \\ &= \frac{f(x_i)}{(x_i - x_j)(x_i - x_k)} + \frac{f(x_j)}{(x_j - x_i)(x_j - x_k)} + \frac{f(x_k)}{(x_k - x_i)(x_k - x_j)}. \end{aligned}$$

Помітивши закономірність, запишемо

$$f(x_0; x_1; \dots; x_n) = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)}. \quad (1.11)$$

Припустимо, що формула (1.11) вірна для поділених різниць $(n-1)$ -го порядку. Скориставшись визначенням різниці n -го порядку через різниці $(n-1)$ -го порядку, легко показати, що формула (1.10) вірна і для поділених різниць n -го порядку.

Безпосередньо з формули (1.11) випливають такі дві властивості.

Властивість 1.2 *Поділена різниця є симетричною функцією своїх аргументів, тобто, не змінюється при будь-якій їхній перестановці.*

Властивість 1.3 *Поділена різниця є лінійною операцією, тобто,*

$$(c_1 f_1 + c_2 f_2)(x_0; x_1; \dots; x_n) = c_1 f_1(x_0; x_1; \dots; x_n) + c_2 f_2(x_0; x_1; \dots; x_n).$$

Використовуючи (1.11), отримуємо

$$\begin{aligned} R_n(x) &= f(x) - L_n(x) = f(x) - \sum_{i=0}^n f(x_i) \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \\ &= (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \times \\ &\times \left(\frac{f(x)}{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)} - \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{(x - x_i) \prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)} \right) = \\ &= f(x, x_0; x_1; \dots; x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n). \end{aligned}$$

Таким чином,

$$R_n(x) = f(x, x_0; x_1; \dots; x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n). \quad (1.12)$$

Ми отримали вираз для залишкового члена інтерполяційного багаточлена у формі з поділеною різницею.

Властивість 1.4 Поділена різниця і похідна функції пов'язані наступним чином:

$$f(x_0; x_1; \dots; x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad (1.13)$$

де $\xi \in (x_{\min}, x_{\max})$, $x_{\min} = \min\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $x_{\max} = \max\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

Доведення. Необхідне отримуємо, прирівнюючи праві частини виразів (1.10) і (1.12) залишкового члена інтерполяційного багаточлена.

Якщо відомі значення функції $f(x)$ в вузлах $x_0, x_1, \dots, x_n$, можна побудувати наступну таблицю поділених різниць:

$$\begin{array}{ccccccc} x_0 & f(x_0) & & & & & \\ x_1 & f(x_1) & f(x_0; x_1) & & & & \\ x_2 & f(x_2) & f(x_1; x_2) & f(x_0; x_1; x_2) & & & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & f(x_0; x_1; \dots; x_n) & \\ & \vdots & & f(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n) & & & \\ x_n & f(x_n) & f(x_{n-1}; x_n) & & & & \end{array}$$

Розглянемо тотожність

$$L_n(x) = L_0(x) + (L_1(x) - L_0(x)) + (L_2(x) - L_1(x)) + \dots + (L_n(x) - L_{n-1}(x)). \quad (1.14)$$

Відмітимо, що $L_0(x) = f(x_0)$, и $L_k(x) - L_{k-1}(x)$ ($k = \overline{1, n}$) — багаточлен ступеня k , який має k коренів $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$. Значить, його можна представити у вигляді

$$L_k(x) - L_{k-1}(x) = A(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1}), \quad (1.15)$$

де A — деяка константа. Тоді

$$f(x_k) - L_{k-1}(x_k) = L_k(x_k) - L_{k-1}(x_k) = A(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1}). \quad (1.16)$$

З іншого боку, використовуючи вираз (1.12) для залишкового члена інтерполяційного багаточлена у формі з поділеною різницею, отримуємо

$$\begin{aligned} R_{k-1}(x_k) &= f(x_k) - L_{k-1}(x_k) = \\ &= f(x_k; x_0; x_1; \dots; x_{k-1})(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1}). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Прирівнюючи останні вирази в ланцюжках рівностей (1.16) та (ref ii18), знаходимо, що константа

$$A = f(x_0; x_1; \dots; x_k).$$

Знаючи вираз константи A і підставляючи (1.15) в (1.14), отримуємо наступний запис інтерполяційного багаточлена

$$\begin{aligned} L_n(x) = & f(x_0) + f(x_0; x_1)(x - x_0) + f(x_0; x_1; x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \\ & + f(x_0; x_1; \dots; x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Цей інтерполяційний багаточлен називають інтерполяційним багаточленом Ньютона з поділеними різницями.

1.3. Інтерполяція за вузлами Чебишева

Нехай для функції $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$ побудовано інтерполяційний багаточлен $L_n(x)$ за вузлами $x_0, x_1, \dots, x_n$, що належать проміжку $[a, b]$. Як ми вже встановили, похибка інтерполяції визначається залишковим членом інтерполяційного багаточлена

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_n(x), \quad (1.19)$$

де

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Значить,

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \max_{[a,b]} |\omega_n(x)|. \quad (1.20)$$

Мінімізуємо праву частину оцінки (1.20) за рахунок вибору вузлів інтерполяції. Нагадаємо, що багаточлен

$$\bar{T}_{n+1}(t) = \frac{T_{n+1}(t)}{2^n}, \quad (1.21)$$

де $T_{n+1}(t)$ — багаточлен Чебишева, є багаточленом, що найменш ухиляється від нуля, тобто,

$$\max_{[-1,1]} |\overline{P}_{n+1}(t)| \geq \max_{[-1,1]} |\overline{T}_{n+1}(t)| = \frac{1}{2^n}, \quad (1.22)$$

де $\overline{P}_{n+1}(t) = t^{n+1} + \alpha_n t^n + \dots + \alpha_0$. Іншими словами, багаточлен $\overline{T}_{n+1}(t)$ на проміжку $[-1, 1]$ найменш відхиляється від нуля серед усіх багаточленів ступеня $n + 1$ зі старшим коефіцієнтом рівним одиниці.

Багаточлен Чебишева $T_{n+1}(t)$ на проміжку $[-1, 1]$ має $n + 1$ корень:

$$t_i = \cos \frac{(2i + 1)\pi}{2(n + 1)}, \quad i = \overline{0, n}. \quad (1.23)$$

Тому

$$\overline{T}_{n+1}(t) = (t - t_0)(t - t_1) \cdots (t - t_n).$$

Линійною заміною

$$x = \frac{1}{2}((b - a)t + (b + a)) \quad (1.24)$$

проміжок $[-1, 1]$ відображається на проміжок $[a, b]$. При цьому, кореням багаточлена Чебишева (1.23) відповідають точки

$$x_i = \frac{1}{2}((b - a)t_i + (b + a)). \quad (1.25)$$

Візьмемо ці точки в якості вузлів інтерполяції для побудови інтерполяційного багаточлена $L_n(x)$. Тоді

$$\begin{aligned} \omega_n(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) = \\ &= \frac{(b - a)^{n+1}}{2^{n+1}}(t - t_0)(t - t_1) \cdots (t - t_n) = \frac{(b - a)^{n+1}}{2^{n+1}} \overline{T}_{n+1}(t). \end{aligned}$$

Значить,

$$\max_{[a,b]} |\omega_n(x)| = \frac{(b - a)^{n+1}}{2^{n+1}} \max_{[-1,1]} |\overline{T}_{n+1}(t)| = \frac{(b - a)^{n+1}}{2^{2n+1}}.$$

Відмітимо, що якщо вузли інтерполяції вибрати інакше, то

$$\begin{aligned}\max_{[a,b]} |\omega_n(x)| &= \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}} \max_{[-1,1]} |(t-\tilde{t}_0)(t-\tilde{t}_1)\cdots(t-\tilde{t}_n)| = \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}} \max_{[-1,1]} |\bar{P}_{n+1}(t)| \geq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}} \max_{[-1,1]} |\bar{T}_{n+1}(t)| = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}.\end{aligned}$$

Отже, якщо вузли інтерполяції вибрати по вузлах Чебишева, то для похибки інтерполяції матиме місце оцінка

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!} \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|. \quad (1.26)$$

Таким чином, якщо є можливість вибрати вузли інтерполяції, то побудувавши їх по кореням багаточлена Чебишева ми мінімізуємо похибку інтерполяції.

1.4. Завдання до лабораторної роботи

Студенти повинні знати:

- Існування та єдиність розв'язання задачі інтерполювання функції багаточленами
- Інтерполяційні багаточлени Лагранжа та Ньютона.
- Інтерполяційний багаточлен Ерміта.
- Залишковий член інтерполяційного багаточлена.
- Інтерполювання за вузлами Чебишева.

Завдання

1. Для заданої функції $y = f(x)$ знайти інтерполяційний багаточлен ступеня n за її значеннями у вузлах рівномірної сітки проміжка $[a, b]$,

$$\omega_h = \{x_i = a + ih, i = \overline{0, n}, h = (b-a)/n\}.$$

Побудувати графіки заданої функції та її інтерполяційних багаточленів для різних n ($n = 3, 5, 10, 50$).

2. Для заданої функції $y = f(x)$ знайти інтерполяційний багаточлен ступеня n за її значеннями у $n + 1$ -му вузлі сітки Чебишева для проміжка $[a, b]$. Побудувати графіки заданої функції та її інтерполяційних багаточленів для різних n ($n = 3, 5, 10, 50$).

Для знаходження коефіцієнтів інтерполяційних багаточленів використати Octave-функцію *vander()*. Для обчислення значень інтерполяційного багаточлена використовувати Octave-функцію *polyval()*.

Варіанти завдань

Вар.	$y = f(x)$	$[a, b]$	Вар.	$y = f(x)$	$[a, b]$
1	$y = \cos(x)$	$[0, 2\pi]$	2	$y = \sin(x)$	$[0, 2\pi]$
3	$y = x + \cos(x)$	$[-\pi, \pi]$	4	$y = x + \sin(x)$	$[-\pi, \pi]$
5	$y = \ln(x) \cos(x)$	$[0.5, 4]$	6	$y = \ln(x) \sin(x)$	$[0.5, 4]$
7	$y = \frac{\cos(x)}{1+x^2}$	$[-\pi, \pi]$	8	$y = \frac{\sin(x)}{1+x^2}$	$[-\pi, \pi]$
9	$y = x \cos(x)$	$[-\pi, \pi]$	10	$y = x \sin(x)$	$[-\pi, \pi]$
11	$y = \frac{1}{1+\cos^2(x)}$	$[-\pi, \pi]$	12	$y = \frac{1}{1+\sin^2(x)}$	$[-\pi, \pi]$
13	$y = \frac{\cos(x)}{1+\cos^2(x)}$	$[-\pi, \pi]$	14	$y = \frac{\sin(x)}{1+\sin^2(x)}$	$[-\pi, \pi]$
15	$y = \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}$	$[-\pi, \pi]$	16	$y = \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$	$[-\pi, \pi]$

До звіту з виконання лабораторної роботи включити:

1. постановку задачі;
2. текст програми;
3. графіки заданих функцій та їх інтерполянтів;
4. висновки.

2. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ СПЛАЙНАМИ

Одним із способів інтерполяції функцій є інтерполювання за допомогою сплайнів. Сплайном називають кусочно-поліноміальну функцію. Слово "сплайн" (spline — англ.) означає гнучку лінійку, яка використовується для проведення гладких кривих через задані точки площини. Стійкість алгоритму обчислення сплайна і збіжність процесу інтерполяції сплайнами є головними перевагами сплайн-інтерполяції перед інтерполяцією багаточленами.

2.1. Глобальний інтерполяційний кубічний сплайн

Нехай відомі значення функції $f(x)$ в вузлах рівномірної сітки проміжку $[a, b]$

$$\omega_h = \{x_i : x_i = a + ih, i = \overline{0, n}, h = (b - a)/n\}.$$

Апроксимуємо функцію $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ глобальним інтерполяційним кубічним сплайном $s(x)$. На кожному сегменті $[x_{i-1}, x_i]$ сплайн $s(x)$ є многочленом третього ступеня. Тому, для побудови сплайна $s(x)$ необхідно визначити $4n$ параметрів. Параметри сплайна $s(x)$ визначимо з наступних умов. Вимагатимемо, щоб сплайн $s(x)$ збігався в вузлах сітки зі значеннями функції що інтерполюється,

$$s(x_i) = f(x_i), \quad i = \overline{0, n}, \quad (2.1)$$

і був безперервний на $[a, b]$ разом зі своїми першою і другою похідними. Оскільки сплайн — кусочно-поліноміальна функція, то досить забезпечити безперервність сплайна, його першої та другої похідних у внутрішніх вузлах сітки. Отримуємо $4n - 2$ умови. Відсутні дві умови можна визначити, наприклад, так:

$$s''(x_0) = s''(x_n) = 0. \quad (2.2)$$

Покажемо, що ці умови дозволяють визначити кубічний сплайн єдиним чином. На відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ сплайн $s(x)$ будемо шукати у вигляді кубічного багаточлена

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.3)$$

Очевидно, що

$$\begin{aligned}s'_i(x) &= b_i + c_i(x - x_i) + \frac{d_i}{2}(x - x_i)^2, \\ s''_i(x) &= c_i + d_i(x - x_i), \\ s'''_i(x) &= d_i,\end{aligned}$$

та

$$a_i = s_i(x_i), \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.4)$$

З (2.4), враховуючи (2.1), знаходимо, що

$$a_i = f(x_i), \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.5)$$

З умови безперервності сплайна $s(x)$ у внутрішніх вузлах сітки,

$$s_i(x_i) = s_{i+1}(x_i), \quad i = \overline{1, n-1}.$$

З огляду на (2.5), звідси отримуємо рівняння:

$$-hb_{i+1} + \frac{h^2}{2}c_{i+1} - \frac{h^3}{6}d_{i+1} = f(x_i) - f(x_{i+1}), \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (2.6)$$

Умова

$$s_1(x_0) = f(x_0)$$

породжує рівняння

$$-hb_1 + \frac{h^2}{2}c_1 - \frac{h^3}{6}d_1 = f(x_0) - f(x_1). \quad (2.7)$$

Умови безперервності першої похідної сплайна у внутрішніх вузлах сітки,

$$s'_i(x_i) = s'_{i+1}(x_i), \quad i = \overline{1, n-1},$$

зводяться до рівнянь

$$-hc_{i+1} + \frac{h^2}{2}d_{i+1} = b_i - b_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (2.8)$$

З умов безперервності другої похідної сплайна у внутрішніх вузлах сітки,

$$s''_i(x_i) = s''_{i+1}(x_i), \quad i = \overline{1, n-1},$$

знаходимо

$$-hd_{i+1} = c_i - c_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (2.9)$$

Умови (2.2) дають два рівняння

$$c_1 - hd_1 = 0, \quad (2.10)$$

$$c_n = 0. \quad (2.11)$$

Рівняння (2.5) — (2.11) утворюють систему з $4n$ рівнянь щодо $4n$ невідомих.

З рівнянь (2.6) і (2.7) знайдемо

$$b_i - b_{i+1} = \frac{1}{h}(2f(x_i) - f(x_{i-1}) - f(x_{i+1}) + \frac{h^2}{2}(c_i - c_{i+1}) - \frac{h^3}{6}(d_i - d_{i+1})), \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (2.12)$$

Підставляючи в (2.8) спочатку (2.12), а потім вирази для d_i ($i = \overline{1, n}$), знайдені з рівнянь (2.9) і (2.10), враховуючи (2.11) і ввівши позначення $c_0 = 0$, отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} c_{i-1} + 4c_i + c_{i+1} = 6 \frac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1}))}{h^2}, & i = \overline{1, n-1}, \\ c_0 = c_n = 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Матриця цієї системи симетрична трехдіагональна і позитивно визначена. Значить, ця система має єдиний розв'язок. Знаючи c_i , з рівностей (2.9) і (2.10) знайдемо d_i , а потім з рівностей (2.6) і (2.7) — параметри b_i ($i = \overline{1, n}$). Таким чином, коефіцієнти кубічних багаточленів (2.3) визначено, а значить визначено шуканий сплайн $s(x)$.

2.2. Базисний лінійний неперервний сплайн

Тепер розглянемо базисні сплайни. На проміжку $[a, b]$ визначимо сітку

$$\omega_h = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}.$$

Покладемо

$$h = \max_{1 \leq i \leq n} h_i.$$

де $h_i = x_i - x_{i-1}$. Для визначення лінійного сплайна, асоційованого з сіткою ω_h , необхідно $2n$ параметрів. Позначимо $S_{\omega_h}^{1,0}[a, b]$ простір лінійних безперервних на $[a, b]$ сплайнів, що визначаються сіткою ω_h . Сплайн $s(x) \in S_{\omega_h}^{1,0}[a, b]$ безперервний у внутрішніх вузлах x_i ($i = \overline{1, n-1}$) сітки ω_h , тобто, задовольняє $n - 1$ умові. Значить, для його визначення необхідний $n + 1$ параметр. Таким чином, розмірність простору $S_{\omega_h}^{1,0}[a, b]$ дорівнює $n + 1$. Очевидно, що функції

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})/h_i, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ -(x - x_{i+1})/h_{i+1}, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & x \in [a, b] \setminus [x_{i-1}, x_{i+1}], \end{cases} \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (2.14)$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} -(x - x_1)/h_1, & x \in [x_0, x_1], \\ 0, & x \in [x_1, b], \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} (x - x_{n-1})h_n, & x \in [x_{n-1}, x_n], \\ 0, & x \in [a, x_{n-1}], \end{cases} \quad (2.16)$$

лінійно незалежні лінійні безперервні сплайни (див. рис. 1.2). Значить $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$ — базис простору $S_{\omega_h}^{1,0}[a, b]$.

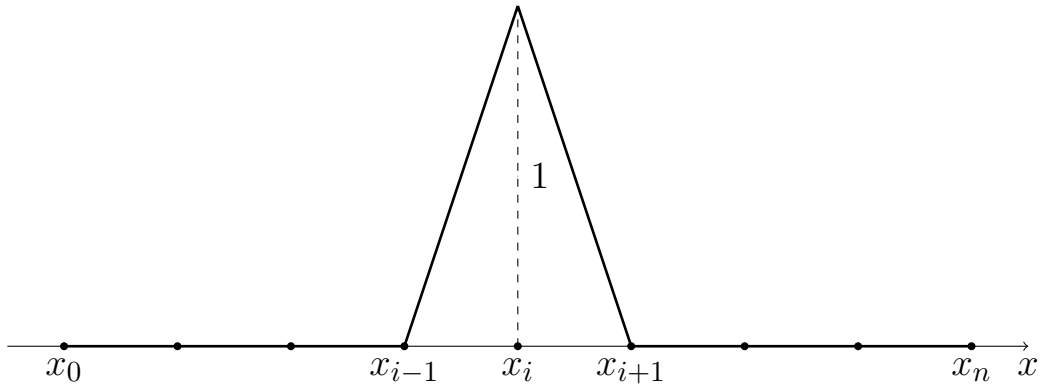


Рис. 2.1: Базисна функція $\varphi_i(x)$ простору $S_{\omega_h}^{1,0}[a, b]$

Очевидно, що

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{0, n}.$$

Тому, якщо відомі значення функції у вузлах сітки $f(x_i)$ ($i = \overline{0, n}$), то ліній-

ний безперервний сплайн

$$s(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \varphi_i(x)$$

є інтерполяційним сплайном функції $f(x)$, бо

$$s(x_i) = f(x_i), \quad i = \overline{0, n}.$$

Цей сплайн називається лінійним інтерполяційним сплайном Лагранжа.

2.3. Базисний ермітовий сплайн

Позначимо через $S_{\omega_h}^{3,1}[a, b]$ простір сплайнів третього ступеня безперервних на $[a, b]$ разом зі своєю першою похідною, які асоціюються з сіткою ω_h . Для визначення сплайна $s(x) \in S_{\omega_h}^{3,1}[a, b]$ необхідно $4n$ параметрів. Оскільки сплайн $s(x)$ має бути безперервний разом зі своєю першою похідною у внутрішніх вузлах сітки, тобто, повинен задовольняти $2n - 2$ умовам, то для його визначення необхідно $2n + 2$ параметра. Значить простір $S_{\omega_h}^{3,1}[a, b]$ має розмірність $2n + 2$.

На проміжку $[x_{i-1}, x_i]$ побудуємо інтерполяційний багаточлен Ерміта третього ступеня $\varphi_{i,-}(x)$, що задовольняє умовам:

$$\varphi_{i,-}(x_{i-1}) = 0, \quad \varphi'_{i,-}(x_{i-1}) = 0, \quad \varphi_{i,-}(x_i) = 1, \quad \varphi'_{i,-}(x_i) = 0.$$

Використовуючи таблицю поділених різниць

$$\begin{array}{cccc} x_{i-1} & 0 & & \\ x_{i-1} & 0 & 0 & \\ x_i & 1 & 1/h_i & 1/h_i^2 \\ x_i & 1 & 0 & -1/h_i^2 \end{array} \quad -2/h_i^3,$$

отримуємо

$$\varphi_{i,-}(x) = \frac{1}{h_i^2}(x - x_{i-1})^2 - \frac{2}{h_i^3}(x - x_{i-1})^2(x - x_i).$$

Аналогічно на проміжку $[x_i, x_{i+1}]$ побудуємо інтерполяційний багаточлен Ер-

міта третього ступеня

$$\varphi_{i,+}(x) = \frac{1}{h_{i+1}^2}(x - x_{i+1})^2 + \frac{2}{h_{i+1}^3}(x - x_{i+1})^2(x - x_i),$$

що задовольняє умовам:

$$\varphi_{i,+}(x_i) = 1, \quad \varphi'_{i,+}(x_i) = 0, \quad \varphi_{i,+}(x_{i+1}) = 0, \quad \varphi'_{i,+}(x_{i+1}) = 0.$$

Визначимо функції (див. рис. 1.3):

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \varphi_{i,-}(x), & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \varphi_{i,+}(x), & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & x \in [a, b] \setminus [x_{i-1}, x_{i+1}], \quad i = \overline{1, n-1}, \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \varphi_{0,+}(x), & x \in [x_0, x_1], \\ 0, & x \in [x_1, b], \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \varphi_{n,-}(x), & x \in [x_{n-1}, x_n], \\ 0, & x \in [a, x_{n-1}], \end{cases} \quad (2.19)$$

На проміжку $[x_{i-1}, x_i]$ побудуємо інтерполяційний багаточлен Ерміта тре-

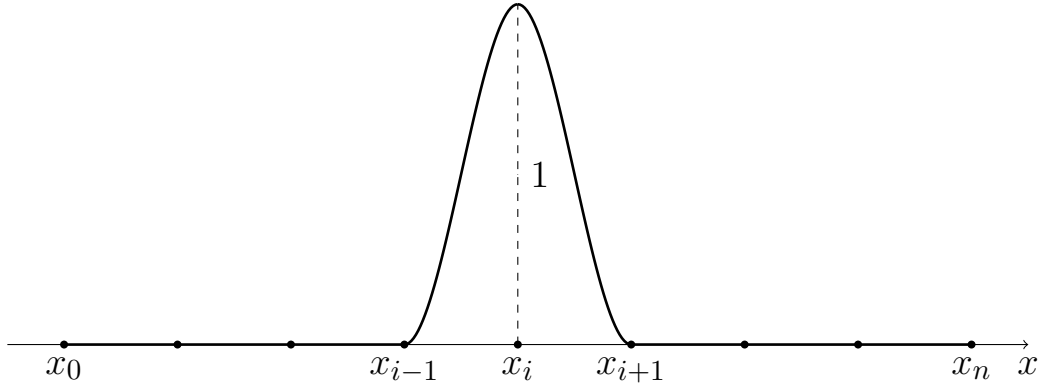


Рис. 2.2: Базисна функція $\varphi_i(x)$ простору $S_{\omega_h}^{3,1}[a, b]$

тього ступеня $\psi_{i,-}(x)$, що задовольняє умовам:

$$\psi_{i,-}(x_{i-1}) = 0, \quad \psi'_{i,-}(x_{i-1}) = 0, \quad \psi_{i,-}(x_i) = 0, \quad \psi'_{i,-}(x_i) = 1.$$

Використовуючи таблицю поділених різниць

$$\begin{array}{cccc} x_{i-1} & 0 & & \\ x_{i-1} & 0 & 0 & \\ x_i & 0 & 1 & 1/h_i \\ x_i & 0 & & 1/h_i^2, \end{array}$$

отримуємо

$$\psi_{i,-}(x) = \frac{1}{h_i^2}(x - x_{i-1})^2(x - x_i).$$

Аналогічно на проміжку $[x_i, x_{i+1}]$ побудуємо інтерполяційний багаточлен Ерміта третього ступеня

$$\psi_{i,+}(x) = \frac{1}{h_{i+1}^2}(x - x_{i+1})^2(x - x_i),$$

що задовольняє умовам:

$$\psi_{i,+}(x_i) = 0, \psi'_{i,+}(x_i) = 1, \psi_{i,+}(x_{i+1}) = 0, \psi'_{i,+}(x_{i+1}) = 0.$$

Визначимо функції (див. рис. 1.4):

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \psi_{i,-}(x), & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \psi_{i,+}(x), & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & x \in [a, b] \setminus [x_{i-1}, x_{i+1}], \end{cases} \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (2.20)$$

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \psi_{0,+}(x), & x \in [x_0, x_1], \\ 0, & x \in [x_1, b], \end{cases} \quad (2.21)$$

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \psi_{n,-}(x), & x \in [x_{n-1}, x_n], \\ 0, & x \in [a, x_{n-1}], \end{cases} \quad (2.22)$$

Очевидно, що функції $\varphi_i(x)$ і $\psi_i(x)$ ($i = \overline{0, n}$) лінійно незалежні та належать простору $S_{\omega_h}^{3,1}[a, b]$. Значить $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$ та $\{\psi_i(x)\}_{i=0}^n$ утворюють базис простору $S_{\omega_h}^{3,1}[a, b]$.

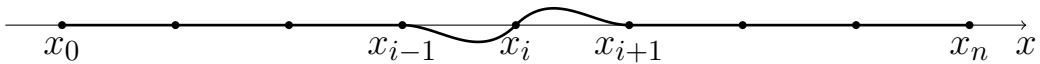


Рис. 2.3: Базисна функція $\psi_i(x)$ простору $S_{\omega_h}^{3,1}[a, b]$

Зауважимо, що

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \varphi'_i(x_j) = 0, \quad i, j = \overline{0, n},$$

$$\psi_i(x_j) = 0, \quad \psi'_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{0, n}.$$

Таким чином, якщо у вузлах сітки відомі значення функції $f(x_i)$ та її першої похідної $f'(x_i)$, сплайн

$$s(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \varphi_i(x) + \sum_{i=0}^n f'(x_i) \psi_i(x)$$

називається інтерполяційним сплайном Ерміта третього ступеня, бо

$$s(x_i) = f(x_i), \quad s'(x_i) = f'(x_i), \quad i = \overline{0, n}.$$

2.4. Завдання до лабораторної роботи

Студенти повинні знати:

- Глобальний інтерполяційний кубічний сплайн.
- Лінійний інтерполяційний сплайн Лагранжа.
- Інтерполяційний сплайн Ерміта 3-го ступеня.

Завдання

За допомогою пакета Octave виконати таке:

1. Для заданої функції $y = f(x)$, використовуючи рівномірну сітку

$$\omega_h = \{x_i : x_i = a + ih, i = \overline{0, n}, h = (b - a)/n\},$$

побудувати:

- глобальний інтерполяційний кубічний сплайн;
- лінійний інтерполяційний сплайн Лагранжа;
- інтерполяційний сплайн Ерміта 3-го ступеня.

2. Побудувати графіки заданої функції та побудованих інтерполяційних

сплайнів для різних n ($n = 3, 5, 10, 50$).

Варіанти завдань

Вар.	$y = f(x)$	$[a, b]$	Вар.	$y = f(x)$	$[a, b]$
1	$y = \cos(x)$	$[0, 2\pi]$	9	$y = \sin(x)$	$[0, 2\pi]$
2	$y = x + \cos(x)$	$[-\pi, \pi]$	10	$y = x + \sin(x)$	$[-\pi, \pi]$
3	$y = \ln(x) \cos(x)$	$[0.5, 4]$	11	$y = \ln(x) \sin(x)$	$[0.5, 4]$
4	$y = \frac{\cos(x)}{1+x^2}$	$[-\pi, \pi]$	12	$y = \frac{\sin(x)}{1+x^2}$	$[-\pi, \pi]$
5	$y = x \cos(x)$	$[-\pi, \pi]$	13	$y = x \sin(x)$	$[-\pi, \pi]$
6	$y = \frac{1}{1+\cos^2(x)}$	$[-\pi, \pi]$	14	$y = \frac{1}{1+\sin^2(x)}$	$[-\pi, \pi]$
7	$y = \frac{\cos(x)}{1+\cos^2(x)}$	$[-\pi, \pi]$	15	$y = \frac{\sin(x)}{1+\sin^2(x)}$	$[-\pi, \pi]$
8	$y = \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}$	$[-\pi, \pi]$	16	$y = \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$	$[-\pi, \pi]$

До звіту з виконання лабораторної роботи включити:

1. постановку задачі;
2. текст програми;
3. графіки заданих функцій та їх інтерполянтів;
4. висновки.

3. НАЙКРАЩЕ СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНЕ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

Розглянемо наступну задачу. Функцію $f(x) \in L_2(a, b)$ необхідно апроксимувати функцією

$$\varphi(x, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad (3.1)$$

з деякого класу $(n + 1)$ -параметричних функцій. В якості міри близькості функцій будемо використовувати норму простору $L_2(a, b)$. Визначимо функціонал

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \|f(x) - \varphi(x, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)\|_{L_2(a, b)}^2 = \\ &= \int_a^b (f(x) - \varphi(x, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n))^2 dx. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Функція $\varphi(x, \alpha_0^*, \alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*)$ називається найкращим середньоквадратичним наближенням функції $f(x)$ на деякому класі $(n + 1)$ -параметричних функцій (3.1), якщо параметри $\alpha_0^*, \alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*$ обрані з умови мінімуму функціонала (3.2).

Розглянемо досить загальний випадок, коли функція (3.1) є лінійною щодо параметрів $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, тобто,

$$\varphi(x, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i(x), \quad (3.3)$$

причому функції $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$ — лінійно незалежні в $L_2(a, b)$. В цьому випадку функціонал (3.2) стає квадратичним:

$$\Phi(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \int_a^b (f(x) - \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i(x))^2 dx. \quad (3.4)$$

Необхідною і достатньою умовою мінімуму функціоналу (3.4) є рівність нулю

його градієнта:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_j} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \int_a^b (f(x) - \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i(x))^2 dx = \\ &= -2 \int_a^b f(x) \varphi_j(x) dx + 2 \int_a^b \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0, \quad j = \overline{0, n}.\end{aligned}$$

З огляду на вид скалярного добутка в $L_2(a, b)$,

$$(u, v)_{L_2(a, b)} = \int_a^b u v dx,$$

необхідна і достатня умова мінімуму функціонала (3.4) записується так:

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i (\varphi_i(x), \varphi_j(x))_{L_2(a, b)} = (f(x), \varphi_j(x))_{L_2(a, b)}, \quad j = \overline{0, n}. \quad (3.5)$$

Визначник СЛАР (3.5) відмінний від нуля, оскільки це визначник Грама лінійно незалежних функцій $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$. Отже, система (3.5) має єдине рішення, і найкраще середньоквадратичне наближення функції $f(x)$ існує і єдине. Лінійно незалежну систему функцій можна ортогоналізувати. Нехай $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$ — ортонормована система функцій,

$$(\varphi_i(x), \varphi_j(x))_{L_2(a, b)} = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{0, n}.$$

В цьому випадку

$$\alpha_i = (f(x), \varphi_i(x))_{L_2(a, b)} = \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx, \quad i = \overline{0, n}.$$

Якщо ж функції $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^\infty$ утворюють ортонормовану систему функцій пов-

ну в $L_2(a, b)$, то найкраще середньоквадратичне наближення функції $f(x)$

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i(x)$$

є відрізком узагальненого ряду Фур'є

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \varphi_i(x)$$

і в силу рівності Парсеваля[? ?],

$$\|f(x)\|_{L_2(a,b)}^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^2,$$

маємо

$$\|f(x) - \varphi(x)\|_{L_2(a,b)}^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i^2.$$

Значить при $n \rightarrow \infty$ норма похибки найкращого середньоквадратичного наближення наближається до нуля, тобто, найкраще середньоквадратичне наближення збігається до функції $f(x)$ за нормою простору $L_2(a, b)$ при $n \rightarrow \infty$.

Якщо функції $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$ неортогональні, то часто число обумовленості матриці системи (3.5) швидко зростає при $n \rightarrow \infty$. У таких випадках n вибирають невеликим.

Для побудови найкращих середньоквадратичних апроксимацій в якості функцій $\varphi_i(x)$ зручно брати багаточлени, що ортогональні з деякою вагою $\rho(x)$ на проміжку $[a, b]$. Найбільш часто використовуються багаточлени Якобі (окремим випадком яких є многочлени Лежандра і Чебишева), Лагерра та Ерміта [?]. Для апроксимації періодичних функцій використовують тригонометричний ряд. Всі ці системи функцій повні, а значить найкраще середньоквадратичне наближення збігається при $n \rightarrow \infty$ для функцій $f(x)$, що інтегруються з квадратом для заданої ваги $\rho(x)$.

Розглянемо приклади.

3.1. Найкраще середньоквадратичне наближення функцій багаточленами

Якщо для функції $f(x) \in L_2(0, 1)$ будувати найкраще середньоквадратичне наближення на проміжку $[0, 1]$ за допомогою многочленів $\{x^i\}_{i=0}^n$, то (i, j) -елемент матриці системи (3.5) обчислюється так:

$$\int_0^1 x^{i+j} dx = \frac{1}{i+j+1}, \quad i, j = \overline{0, n}.$$

Матриця системи (3.5) є матрицею Гільберта

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \cdots & \frac{1}{2n+2} \end{bmatrix}.$$

Оскільки число обумовленості матриці Гільберта зі збільшенням n дуже швидко зростає, то для побудови кращої середньоквадратичної апроксимації доцільно використовувати многочлени невисоких ступенів.

3.2. Найкраще середньоквадратичне наближення функцій ортогональними

Багаточлени Чебишева

$$T_i(x) = \cos(i \arccos x), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

ортогональні з вагою $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на проміжку $[-1, 1]$. Дійсно

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{T_i(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_{-1}^1 \frac{\cos(i \arccos x) \cos(j \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} t = \arccos x, \\ dt = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \end{array} \right| = \int_0^\pi \cos(it) \cos(jt) dt = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((i-j)t) dt + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((i+j)t) dt = \begin{cases} \pi, & \text{если } i = j = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } i = j \neq 0, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Нехай $f(x)$ — функція квадратично сумовна з вагою $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на проміжку $[-1, 1]$. Тоді її найкраще середньоквадратичне наближення багаточленами Чебишева має вигляд

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx + \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n \left[\int_{-1}^1 \frac{f(x)T_i(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \right] T_i(x).$$

3.3. Найкраще середньоквадратичне наближення функцій сплайнами

Нехай $f(x) \in L_2(a, b)$. Проміжок $[a, b]$ розіб'ємо на n рівних частин. Нехай $\varphi_i(x)$ — базисна функція простору лінійних безперервних сплайнів, пов'язана з вузлом $x_i = a + ih$ ($h = (b-a)/n$, $i = \overline{0, n}$). Найкраще середньоквадратичне наближення функції $f(x)$ будемо шукати в просторі лінійних безперервних сплайнів з базисом $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$. Оскільки

$$\int_a^b \varphi_0^2(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x-x_1)^2}{h^2} dx = \frac{h}{3},$$

$$\int_a^b \varphi_i^2(x) dx = 2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(x-x_{i-1})^2}{h^2} dx = \frac{2h}{3}, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$\int_a^b \varphi_n^2(x) dx = \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{(x-x_{n-1})^2}{h^2} dx = \frac{h}{3},$$

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_{i+1}(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} -\frac{x-x_{i+1}}{h} \frac{x-x_i}{h} dx = \frac{h}{6}, \quad i = \overline{0, n-1},$$

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0, \quad |i - j| > 1,$$

то матриця системи (3.5) буде симетричною тридіагональною і позитивно визначеною:

$$\begin{bmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} & & & \\ \frac{h}{6} & \frac{2h}{3} & \frac{h}{6} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{h}{6} & \frac{2h}{3} & \frac{h}{6} \\ & & & \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \end{bmatrix}.$$

Компоненти правої частини системи (3.5) обчислюються так:

$$\int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx = \begin{cases} \int_{x_0}^{x_1} f(x) \varphi_0(x) dx, & i = 0, \\ \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \varphi_i(x) dx, & i = \overline{1, n-1}, \\ \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) \varphi_n(x) dx, & i = n. \end{cases}$$

3.4. Завдання до лабораторної роботи

Студенти повинні знати:

- найкраще середньоквадратичне наближення функцій багаточленами;
- найкраще середньоквадратичне наближення функцій ортогональними багаточленами;
- найкраще середньоквадратичне наближення функцій сплайнами.

Завдання

За допомогою пакета Octave виконайте такі завдання.

1. Для заданої на проміжку $[0, 1]$ функції побудувати найкраще середньоквадратичне наближення багаточленами ступеня n . Побудувати графіки заданої функції та апроксимуючого багаточлена ($n = 1, 2, 3, 5, 10$).
2. Для заданої на проміжку $[-1, 1]$ функції побудувати найкраще середньоквадратичне наближення багаточленами Чебишева ступеня n . По-

будувати графіки заданої функції та апроксимуючого багаточлена ($n = 3, 5, 10, 20$).

3. Для заданої на проміжку $[a, b]$ функції побудувати найкраще середньо-квадратичне наближення лінійним сплайном, використовуючи рівномірну сітку з кроком $h = (b-a)/n$. Побудувати графіки заданої функції та апроксимуючого сплайну ($n = 3, 5, 10, 20$).

Варіанти до завдання 1

Вар.	$y = f(x)$	$[a, b]$	Вар.	$y = f(x)$	$[a, b]$
1	$y = \cos(4x)$	$[0, 1]$	9	$y = \sin(4x)$	$[0, 1]$
2	$y = x + \cos(x)$	$[0, 1]$	10	$y = x + \sin(3x)$	$[0, 1]$
3	$y = x \cos(2x)$	$[0, 1]$	11	$y = x \sin(3x)$	$[0, 1]$
4	$y = \frac{\cos(x)}{1+x^2}$	$[0, 1]$	12	$y = \frac{\sin(x)}{1+x^2}$	$[0, 1]$
5	$y = x \cos(x)$	$[0, 1]$	13	$y = x \sin(x)$	$[0, 1]$
6	$y = \frac{1}{1+\cos^2(x)}$	$[0, 1]$	14	$y = \frac{1}{1+\sin^2(x)}$	$[0, 1]$
7	$y = \frac{\cos(x)}{1+\cos^2(x)}$	$[0, 1]$	15	$y = \frac{\sin(x)}{1+\sin^2(x)}$	$[0, 1]$
8	$y = \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}$	$[0, 1]$	16	$y = \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$	$[0, 1]$

Варіанти до завдання 2

Вар.	$y = f(x)$	$[a, b]$	Вар.	$y = f(x)$	$[a, b]$
1	$y = \cos(4x)$	$[-1, 1]$	9	$y = \sin(4x)$	$[-1, 1]$
2	$y = x + \cos(x)$	$[-1, 1]$	10	$y = x + \sin(3x)$	$[-1, 1]$
3	$y = x \cos(2x)$	$[-1, 1]$	11	$y = x \sin(2x)$	$[-1, 1]$
4	$y = \frac{\cos(x)}{1+x^2}$	$[-1, 1]$	12	$y = \frac{\sin(x)}{1+x^2}$	$[-1, 1]$
5	$y = x \cos(x)$	$[-1, 1]$	13	$y = x \sin(x)$	$[-1, 1]$
6	$y = \frac{1}{1+\cos^2(x)}$	$[-1, 1]$	14	$y = \frac{1}{1+\sin^2(x)}$	$[-1, 1]$
7	$y = \frac{\cos(x)}{1+\cos^2(x)}$	$[-1, 1]$	15	$y = \frac{\sin(x)}{1+\sin^2(x)}$	$[-1, 1]$
8	$y = \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}$	$[-1, 1]$	16	$y = \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$	$[-1, 1]$

Варіанти до завдання 3

Вар.	$y = f(x)$	$[a, b]$	Вар.	$y = f(x)$	$[a, b]$
1	$y = \cos(4x)$	$[0, \pi/2]$	9	$y = \sin(4x)$	$[0, \pi/2]$
2	$y = x + \cos(x)$	$[0, \pi/2]$	10	$y = x + \sin(3x)$	$[0, \pi/2]$
3	$y = \ln(x) \cos(x)$	$[0.5, 2]$	11	$y = \ln(x) \sin(x)$	$[0.5, 2]$
4	$y = \frac{\cos(x)}{1+x^2}$	$[0, \pi/2]$	12	$y = \frac{\sin(x)}{1+x^2}$	$[0, \pi/2]$
5	$y = x \cos(x)$	$[0, \pi/2]$	13	$y = x \sin(x)$	$[0, \pi/2]$
6	$y = \frac{1}{1+\cos^2(x)}$	$[0, \pi/2]$	14	$y = \frac{1}{1+\sin^2(x)}$	$[0, \pi/2]$
7	$y = \frac{\cos(x)}{1+\cos^2(x)}$	$[0, \pi/2]$	15	$y = \frac{\sin(x)}{1+\sin^2(x)}$	$[0, \pi/2]$
8	$y = \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}$	$[0, \pi/2]$	16	$y = \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$	$[0, \pi/2]$

До звіту з виконання лабораторної роботи включити:

1. постановку задачі;
2. текст програми;
3. графіки заданих функцій та їх апроксимантів;
4. висновки.

4. НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

На відрізку $[a, b]$ визначимо деяку сітку $\omega_h = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$. Для функції $f(x) \in C^0[a, b]$ будемо шукати її апроксимацію на $(n+1)$ -параметричному сімействі функцій

$$\varphi(x, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad (4.1)$$

де $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ — невідомі параметри. Для визначення цих параметрів складемо систему рівнянь

$$\varphi(x_j, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = f(x_j), \quad j = \overline{0, m}. \quad (4.2)$$

Очевидно, необхідно, щоб $m \geq n$, оскільки число рівнянь $m+1$ повинно бути не менше числа невідомих $n+1$. При $m > n$ система (4.2) перевизначена. Її точне рішення в цьому випадку може не існувати. Тому будемо шукати її псевдорішення в сенсі методу найменших квадратів. Псевдорішенням системи (4.2) є набір параметрів $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, що мінімізує функціонал

$$\Phi(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{j=0}^m (f(x_j) - \varphi(x_j, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n))^2. \quad (4.3)$$

Зауважимо, що цей функціонал дорівнює сумі квадратів нев'язок рівнянь системи (4.2).

Функція $\varphi(x, \alpha_0^*, \alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*)$ називається найкращою апроксимацією функції $f(x)$ на $(n+1)$ -параметричному сімействі функцій (4.1) в сенсі методу найменших квадратів, якщо параметри $\alpha_0^*, \alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*$ знайдені з умови мінімуму функціонала (4.3).

Необхідною умовою екстремуму функціоналу (4.3), а в силу специфіки завдання, і достатньою умовою його мінімуму є рівність нулю його градієнта:

$$\sum_{j=0}^m (f(x_j) - \varphi(x_j, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)) \frac{\partial \varphi(x_j, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_i}, \quad i = \overline{0, n}. \quad (4.4)$$

Якщо функція (4.1) нелінійно залежить від параметрів $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, то системи (4.2), (4.4) є нелінійними. Тому при визначенні сімейств функцій, що апроксимують реальні залежності, число параметрів беруть невеликим. Наприклад, часто застосовуються двопараметричні сімейства:

$$\begin{aligned}\varphi(x, \alpha_0, \alpha_1) &= \alpha_0 x^{\alpha_1}, & \varphi(x, \alpha_0, \alpha_1) &= \alpha_0 e^{x\alpha_1}, \\ \varphi(x, \alpha_0, \alpha_1) &= \frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1 x}, & \varphi(x, \alpha_0, \alpha_1) &= \frac{x}{\alpha_0 + \alpha_1 x},\end{aligned}$$

рідше — трипараметричні:

$$\varphi(x, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = \alpha_0 x^{\alpha_1} + \alpha_2, \quad \varphi(x, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = \alpha_0 e^{x\alpha_1} + \alpha_2.$$

4.1. Наближення функцій лінійним методом найменших квадратів

Як і при побудові найкращого середньоквадратичного наближення функції, найбільш часто функція (4.1) вибирається лінійною щодо параметрів $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, тобто,

$$\varphi(x, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i(x), \quad (4.5)$$

де функції $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$ — лінійно незалежні на $[a, b]$. В цьому випадку система (4.2) стає лінійною і набуває вигляду:

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i(x_j) = f(x_j), \quad j = \overline{0, m}. \quad (4.6)$$

Її псевдорішення — це рішення лінійної задачі найменших квадратів

$$\min_{\alpha_i} \sum_{j=0}^m (f(x_j) - \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i(x_j))^2. \quad (4.7)$$

Оскільки функції $\varphi_i(x)$ лінійно незалежні, то і стовпці матриці

$$A = \begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \cdots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(x_m) & \varphi_1(x_m) & \cdots & \varphi_n(x_m) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

системи (4.6) лінійно незалежні. Тому лінійна задача найменших квадратів (4.7) однозначно розв'язна і її рішення можна знайти, наприклад, вирішуючи систему нормальних рівнянь

$$A^T A z = A^T b, \quad (4.9)$$

де $z = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n]^T$, $b = [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_m)]^T$. Зауважимо, що рівняння (4.9) — це необхідна і достатня умова мінімуму квадратичного функціоналу

$$\Phi(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{j=0}^m (f(x_j) - \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i(x_j))^2, \quad (4.10)$$

тобто, (4.9) можна отримати, прирівнюючи нулю градієнт цього функціоналу.

Зауваження 1. При $m = n$, система (4.2) — задача про інтерполяцію функції $f(x)$ функціями (4.1), а система (4.6) — задача про інтерполяцію функції $f(x)$ функціями (4.5).

4.2. Приклади апроксимацій функцій що задаються таблично

Приклад 1. Задана таблиця значень функції x_i , $f(x_i) > 0$, $i = \overline{0, m}$, $m > 1$. Побудуємо найкращу, в сенсі методу найменших квадратів, апроксимацію цієї функції на двопараметричному сімействі функцій

$$\varphi(x, \alpha_0, \alpha_1) = \alpha_0 e^{\alpha_1 x}.$$

Параметри α_0 и α_1 визначимо з рівнянь

$$\alpha_0 e^{\alpha_1 x_j} = f(x_j), \quad j = \overline{0, m}.$$

Логарифмуючи ці рівняння, отримуємо

$$\ln \alpha_0 + \alpha_1 x_j = \ln f(x_j), \quad j = \overline{0, m}.$$

Ввівши нову змінну $\tilde{\alpha}_0 = \ln \alpha_0$, отримуємо лінійну перевизначену систему

$$\tilde{\alpha}_0 + \alpha_1 x_j = \ln f(x_j), \quad j = \overline{0, m}.$$

Використовуючи лінійний метод найменших квадратів, знайдемо псевдорішення цієї системи $(\tilde{\alpha}_0, \alpha_1)$. Нарешті, $\alpha_0 = e^{\tilde{\alpha}_0}$, α_1 — параметри шуканої апроксимації.

Приклад 2. За допомогою лінійного методу найменших квадратів апроксимуємо функцію, задану у вигляді таблиці $x_i, f(x_i), i = \overline{0, m}, m > 1$, поліномом

$$p_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n, \quad n < m.$$

Для визначення коефіцієнтів цього полінома маємо лінійну перевизначену систему

$$p_n(x_j) = f(x_j), \quad j = \overline{0, m},$$

тобто,

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \dots \\ f(x_m) \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Відзначимо, що з ростом n матриця цієї системи стає погано обумовленою. Тому зазвичай використовуються багаточлени невисоких ступенів. Обчислюючи псевдорішення системи (4.11) методом найменших квадратів, наприклад, вирішуючи нормальні рівняння

$$A^T A x = A^T b,$$

де A, b — матриця і права частина системи (4.11), отримуємо значення шуканих параметрів α_i .

4.3. Завдання до лабораторної роботи

Студенти повинні знати:

- Метод найменших квадратів;
- Лінійний метод найменших квадратів;
- Нормальні рівняння.

Завдання

За допомогою пакета Octave:

1. Обчислити значення заданої функції $y = f(x)$ у вузлах рівномірної сітки

$$\omega_h = \{x_i : x_i = a + ih, i = \overline{0, n}, h = (b - a)/n\}, \quad n = 7.$$

2. Використовуючи МНК, табличну функцію апроксимувати однією з функцій:

- а) $\varphi(x, \alpha_0, \alpha_1) = \alpha_0 e^{\alpha_1 x}$;
- б) $\varphi(x, \alpha_0, \alpha_1) = \alpha_0 x^{\alpha_1}$;
- в) $\varphi(x, \alpha_0, \alpha_1) = \alpha_0 + \alpha_1/x$;
- г) $\varphi(x, \alpha_0, \alpha_1) = \alpha_0 10^{\alpha_1 x}$.

3. Використовуючи ЛМНК, побудувати апроксимацію табличної функції багаточленом ступеня n ($n = 2, 3, 6$).
4. Побудувати графіки заданої функції та побудованих апроксимацій.

Варіанти завдань

Вар.	$y = f(x)$	$[a, b]$	Вар.	$y = f(x)$	$[a, b]$
1	$y = \cos(x)$	$[0, \pi/2]$	9	$y = \sin(x)$	$[0, \pi/2]$
2	$y = x + \cos(x)$	$[0, \pi/2]$	10	$y = x + \sin(x)$	$[0, \pi/2]$
3	$y = \ln(x) \cos(x)$	$[0.5, 2]$	11	$y = \ln(x) \sin(x)$	$[0.5, 2]$
4	$y = \frac{\cos(x)}{1+x^2}$	$[0, \pi/2]$	12	$y = \frac{\sin(x)}{1+x^2}$	$[0, \pi/2]$
5	$y = x \cos(x)$	$[0, \pi/2]$	13	$y = x \sin(x)$	$[0, \pi/2]$
6	$y = \frac{1}{1+\cos^2(x)}$	$[0, \pi/2]$	14	$y = \frac{1}{1+\sin^2(x)}$	$[0, \pi/2]$
7	$y = \frac{\cos(x)}{1+\cos^2(x)}$	$[0, \pi/2]$	15	$y = \frac{\sin(x)}{1+\sin^2(x)}$	$[0, \pi/2]$
8	$y = \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}$	$[0, \pi/2]$	16	$y = \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$	$[0, \pi/2]$

До звіту з виконання лабораторної роботи включити:

1. постановку задачі;
2. текст програми;
3. графіки заданих функцій та їх апроксимантів;
4. висновки.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Вербіцький В.В., Реут В.В. Введення в чисельні методи аналізу і диференціальних рівнянь: навчальний посібник. Одеса: Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, 2018. 116 с.
2. Гаврилюк І.П., Макаров В.Л. Методи обчислень. Підручник. У 2ч. — К.: Вища шк., 1995. — 367 с.
3. Попов В.В. Методи обчислень. — К.: Видавничо-поліграфічний центр „Київський університет“, 2012. — 303 с.
4. Цегелик Г. Г. Чисельні методи. — Львів: Світ, 2005. — 407 с.
5. Epperson J. F. An Introduction to Numerical Methods and Analysis : Third edition / John Wiley & Sons Inc,.2021. 286 p.
6. Gupta R. K. Numerical methods. Fundamentals and applications / Cambridge University Press, 2019. 830 p.
7. Stewart D. E. Numerical Analysis: A Graduate Course. CMS/CAIMS Books in Mathematics, Springer, 2022. 632 p.
8. <http://netlib.org> — Netlib is a collection of mathematical software, papers, and databases.
9. <http://www.nag.com/> — Numerical Algorithms Group.
10. <http://www.gnu.org/software/gsl/> — GNU Association GSL Sci. Library.

Навчальне видання

МЕТОДИ ОБЧИСЛЕНЬ

Частина III

ЕЛЕКТРОННІ МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до лабораторних робіт
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
спеціальності F1 Прикладна математика

Електронне практичне видання

Укладач:

Вербіцький Віктор Васильович

В авторській редакції

Затв. авт. 27.02.2026.

Системні вимоги: операційна система сумісна з програмним забезпеченням
для читання файлів формату PDF.
Обсяг 0,5 МБ. Зам. № 3099.

Видавець і виготовлювач

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.
вул. Університетська, 12, м. Одеса, 65082, Україна
Тел.: (048) 723 28 39, e-mail: druk@onu.edu.ua