МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ОДЕССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ И. И. МЕЧНИКОВА

Институт математики, экономики и механики
Кафедра компьютерной алгебры и дискретной математики

С.В.ФЕДОРОВСКИЙ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Методические указания для студентов 1 курса направления подготовки
050102 «компьютерная инженерия»

ОДЕССА – 2013

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ. Методические указания для студентов 1 курса направления подготовки 050102 «компьютерная инженерия» ИМЭМ.-43с.

Составитель: **Федоровский С.В**., к.ф.-м.н., доцент кафедры компьютерной алгебры и дискретной математики ИМЭМ

Рецензенты: **Евтухов В.М.** д.ф.-м.н., профессор кафедры дифференциальных уравнений ИМЭМ

Кореновский А.А., д.ф.-м.н., профессор кафедры математического анализа ИМЭМ

Рекомендовано к печати
Ученым советом ИМЭМ Одесского национального университета им. И. И. Мечникова
протокол № 2 от 26 ноября 2013 г.
.

Содержание

Введение

Настоящие методические указания предназначены для студентов первого курса направления подготовки 050102 «Компьютерная инженерия» специальности «компьютерные системы и сети» и по сути представляют собой конспект лекций. Курс дискретной математики на этом факультете читается в первом семестре. Материал курса разбит на два модуля. Предлагаемые методические указания содержат материал первого модуля - первого в первом семестре. Количество отводимых на курс дискретной математики учебных часов явно недостаточно для подробного и обстоятельного изучения тем этого курса. Этот факт и новизна материала (нет необходимой базы со средней школы) вызывают у студентов трудности в процессе изучения дискретной математики. Для устранения этого пробела и для облегчения процесса обучения студентам предлагается подробное изложение темы «Теория графов» с доказательством большинства необходимых теорем, подробным решением иллюстрирующих примеров. В настоящих методических указаниях рассмотрены в минимальном объеме элементы этой теории, необходимые для понимания последующего материала курса «дискретная математика» и в дальнейшем обучении. В конце даются задачи для самостоятельного решения с указанием ответов этих задач и приводится список рекомендуемой литературы.

Предлагаемые методические указания несомненно будут полезны и студентам специальностей «прикладная математика», «классическая математика» и «математическая экономика», изучающих дискретную математику в ИМЭМ ОНУ им. И,И,Мечникова.

1. Графы и их элементы.

Теория графов берет начало с решения знаменитым математиком российской академии наук Леонардом Эйлером задачи о кенигсбергских мостах в 1736 году. Он показал, что нельзя обойти семь городских мостов города Кенигсберг (расположенного на двух островах и по берегам реки Прегал) и вернуться в исходную точку, пройдя по каждому из семи мостов ровно один раз. Следующий импульс теория графов получила спустя почти 100 лет с развитием исследований по электрическим сетям, кристаллографии, органической химии и другим наукам.

Графы служат удобным средством описания связей между объектами. С графами мы сталкиваемся постоянно. Например, сеть автомобильных дорог, воздушных сообщений, нефтепроводов или газопроводов – все это примеры графов.

Для введения формального определения графа нам понадобятся следующие

Определение 1.1. *Пусть нам задано некоторое непустое множество **M** элементов произвольной природы. Тогда **n**-местным **набором** (кортежем) над множеством **M** называется произвольная **последовательность** из **n** элементов этого множества (можно рассматривать и бесконечные наборы). В дальнейшем **n**-местные наборы над **M** мы будем задавать с использованием круглых или уголковых скобок перечислением элементов наборов, т.е. в виде $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ или $\langle a_1,a_2,\ldots,a_n\rangle$, а их множество обозначать M^n. Таким образом:*

$$M^n=\{(a_1,a_2,\ldots,a_n)\,|\,a_1,a_2,\ldots,a_n\in M\}.$$

Определение 1.2. *С формальной точки зрения **обыкновенным графом G** называется кортеж (набор) двух объектов $G=\langle V,U\rangle$, где V – произвольное непустое конечное множество, элементы которого называют-*

*ся **вершинами** графа, а U – произвольное подмножество множества двухэлементных подмножеств $V^{(2)}$ множества V, элементы которого называются **ребрами** (или **дугами**) графа.*

Из определения графа сразу следует, что всякое ребро (дуга) графа $u=\{v_i,v_j\} \in U$ определяется некоторой парой вершин $v_i,v_j \in V$. Ясно также, что обыкновенный граф не может иметь ребер вида $\{v_i,v_i\}$ (***петель***) и что он не может иметь различных ребер, помеченных одной и той же парой вершин (***кратных*** или ***параллельных*** ребер). Если допустить в графе существование кратных ребер, то такой граф называется ***мультиграфом***. Если же допустить в графе существование как кратных ребер так и петель, то такой граф называется ***псевдографом***.

Графы – это способ «визуализации» связей между определенными объектами. Эти связи могут быть как «ненаправленными» (например, сеть дорог с двусторонним движением), так и «направленными» (например, генеалогическое дерево). В соответствии с этим в теории графов выделяют два типа графов – ***неориентированные*** и ***ориентированные*** графы. В дальнейшем мы будем называть графами неориентированные графы, а ориентированные графы – орграфами. Поскольку для неориентированных графов направления ребер не установлены, то порядок перечисления вершин при описании конкретного ребра графа неважен и потому для обозначения ребер применяется теоретико-множественная символика – ребро обозначается как некоторое множество двух вершин, т.е. $\{v_i,v_j\}$. Для орграфов направления ребер существенны и потому ребра орграфа будем обозначать наборами (v_i, v_j) и называть ***дугами***. Граф, содержащий как неориентированные так и ориентированные ребра называется ***смешанным*** графом.

Существуют различия в терминологии для графов и орграфов. Проведем (согласно [3]) «параллельное» введение основных понятий графов и орграфов, позволяющее наглядно их сопоставить.

Неориентированные графы	***Ориентированные графы***
Если ребро $u=\{v_i,v_j\}$, то говорят, что ребро $\boldsymbol{u}$ соединяет вершины $\boldsymbol{v_i}$ *и* $\boldsymbol{v_j}$. При этом вершины $\boldsymbol{v_i}$ *и* $\boldsymbol{v_j}$ называются ***смежными***, а также ***концами*** ребра $\boldsymbol{u}$.	Если дуга $u=(v_i, v_j)$, то говорят, что дуга $\boldsymbol{u}$ ведет из вершины $\boldsymbol{v_i}$ в вершину $\boldsymbol{v_j}$. При этом вершины $\boldsymbol{v_i}$ *и* $\boldsymbol{v_j}$ называются ***смежными***, причем $\boldsymbol{v_i}$ называют ***началом***, а $\boldsymbol{v_j}$ ***концом*** дуги $\boldsymbol{u}$.
Ребро $\boldsymbol{u}$ называют ***инцидентным*** вершине $\boldsymbol{v}$, если она является одним из его концов. Концевые вершины ребра ***инцидентны*** ребру, образованному этими вершинами.	Дугу $\boldsymbol{u}$ называют ***инцидентной*** вершине $\boldsymbol{v}$, если она является началом или концом дуги. Начало и конец дуги ***инцидентны*** дуге, образованной этими вершинами. Дугу $\boldsymbol{u=(v_i, v_j)}$ называют ***заходящей*** в вершину $\boldsymbol{v_j}$ и ***исходящей*** из вершины $\boldsymbol{v_i}$.
Степенью вершины $\boldsymbol{v}$ называют количество $\boldsymbol{deg\,(v)}$ всех инцидентных ей ребер.	***Полустепенью захода вершины*** $\boldsymbol{v}$ называют число $\boldsymbol{deg^-(v)}$ всех заходящих в нее дуг, а ***полустепенью исхода вершины*** $\boldsymbol{v}$ - число $\boldsymbol{deg^+(v)}$ исходящих из нее дуг. ***Степенью вершины*** $\boldsymbol{v}$ называют число $\boldsymbol{deg\,(v)}$ равное сумме полустепеней захода и исхода этой вершины.
Вершина, степень которой $\boldsymbol{deg\,(v)}$ равна нулю, называется ***изолиро-***	Вершина, полустепень захода которой $\boldsymbol{deg^-(v)}$ равна нулю, назы-

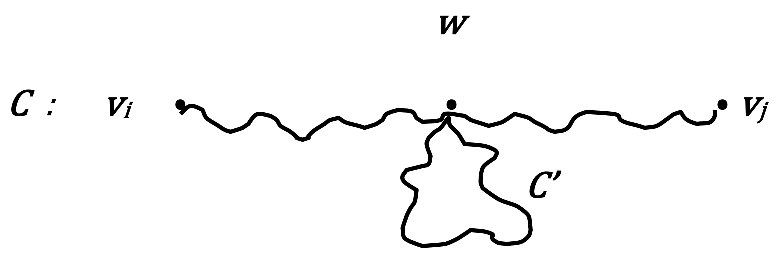
ванной.	вается ***источником***, а вершина, полустепень исхода которой $deg^{+}(v)$ равна нулю, называется ***стоком***. Вершина, степень которой $deg\,(v)$ равна нулю, называется ***изолированной***.
Множество вершин графа $O(v)$, смежных с заданной вершиной v составляет ***окружение*** вершины v. Справедливо равенство $\|O(v)\| = deg\,(v)$.	Для вершины v множество $O^{+}(v) = \{x\,\|\,(v,x)\in U\}$ называют множеством ***преемников*** вершины v, а множество $O^{-1}(v) = \{x\,\|\,(x,v)\in U\}$ - множеством ***предшественников*** вершины v. Справедливы равенства $\|O^{+}(v)\| = deg^{+}(v)$, $\|O^{-1}(v)\| = deg^{-}(v)$
Цепь (путь) в графе G - это последовательность вершин (конечная или бесконечная) $v_0,v_1,\ldots,v_n,\ldots$, такая, что любая пара соседних вершин этой последовательности образует ребро графа.	***Путь (маршрут)*** в орграфе G - это последовательность вершин (конечная или бесконечная) $v_0,v_1,\ldots,v_n,\ldots$, такая, что любая пара соседних вершин этой последовательности образует дугу орграфа, причем левая вершина образует начало, а правая – конец этой дуги.
Для конечной цепи $v_0,v_1,\ldots,v_n$ число n $(n\geqslant 0)$ называют ***длиной цепи***. Таким образом, длина цепи – это количество ее составляющих ребер. Цепь длины 0 – это отдель-	Для конечного пути (маршрута) $v_0,v_1,\ldots,v_n$ число n $(n\geqslant 0)$ называют ***длиной пути***. Таким образом, длина пути – это количество ее составляющих ребер. Путь длины

но взятая вершина графа.	0 – это отдельно взятая вершина орграфа.
Говорят, что ***вершина v_i*** графа ***G*** ***достижима из вершины v_j*** этого графа, если существует цепь $v_0, v_1, \dots, v_n$, такая, что $v_j = v_0$ и $v_i = v_n$ (при этом говорят, что данная цепь соединяет вершины v_i и v_j, которые называются ***концами цепи***).	Говорят, что ***вершина v_i*** орграфа ***G*** ***достижима из вершины v_j*** этого графа, если существует путь $v_0, v_1, \dots, v_n$, такой, что $v_j = v_0$ и $v_i = v_n$ (при этом говорят, что данный путь ведет из вершины v_i в вершину v_j, называя первую вершину ***началом пути***, а вторую его ***концом***).
Простая цепь - это цепь, все вершины которой, кроме, быть может, первой и последней, попарно различны и все ребра которой попарно различны.	***Простой путь*** - это путь, все вершины которого, кроме, быть может, первой и последней, попарно различны и все ребра которой попарно различны.
Простая цепь ненулевой длины с совпадающими концами называется ***циклом***.	Простой путь ненулевой длины начало и конец которого совпадают называется ***контуром***.
Произвольную цепь ненулевой длины с совпадающими концами, все ребра которой попарно различны, называется ***замкнутой цепью***.	Произвольный путь ненулевой длины, начало и конец которого совпадают, все ребра которого попарно различны, называется ***замкнутым путем***.
Неориентированный граф, не содержащий циклов, называется ***ациклическим***.	Ориентированный граф, не содержащий контуров, называется ***бесконтурным***.

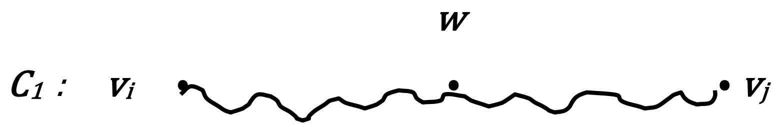
Определим еще несколько понятий общих для неориентированных и ориентированных графов. Вершина графа, инцидентная ровно одному ребру (дуге), называется ***висячей***. Ребро, инцидентное висячей вершине, называется ***висячим***. Граф, множество ребер которого пусто, называется ***пустым***. Граф, в котором любые две вершины соединены ребром, называется ***полным***. Полный граф с n вершинами обозначается K_n. В дальнейшем, если не будет оговорено противное, нас будут интересовать в большинстве случаев обыкновенные неориентированные графы.

Теорема 1.1. *Для любой цепи, соединяющей две вершины графа, существует простая цепь, соединяющая те же вершины. Для любого пути, ведущего из вершины v_i в вершину v_j орграфа, существует простой путь, ведущий из v_i в v_j.*

Доказательство. Проведем доказательство для неориентированного графа (для орграфа доказательство аналогичное). Пусть вершины v_i и v_j соединены некоторой цепью C. Если эта цепь нулевой длины или является простой, то доказывать нечего (утверждение теоремы выполняется). Если же цепь C простой не является, то в ней существует повторяющаяся вершина w. Подцепь C' исходной цепи C между двумя повторяющимися вхождениями вершины w - цепь с совпадающими концами.



Удалим из C все вершины и ребра цепи C', кроме вершины w. Получим новую цепь C_1, соединяющую вершины v_i и v_j, в которой число повторений вершины w будет по крайней мере на единицу меньше, чем в цепи C.



Если полученная цепь C_1 простая, то все доказано. Если же C_1 не является простой, то поступим с ней так же, как и с цепью C. В силу конечности множества вершин и ребер графа получим простую цепь, соединяющую вершины v_i и v_j.

Следствие 1.1. *Если вершина неориентированного графа содержится в некоторой замкнутой цепи, то она содержится и в некотором цикле. Если вершина орграфа содержится в некотором замкнутом пути, то она содержится и в некотором контуре.*

Замечание 1.1. Следствие 1.1. перестает быть верным для произвольной цепи с совпадающими концами. Например, для неориентированного графа, состоящего из двух вершин v_1 и v_2 и единственного ребра $\{v_1, v_2\}$, их соединяющего цепь v_1, v_2, v_1 с совпадающими концами не содержит цикла.

Определение 1.3. *Неориентированный граф $G' = (V', U')$ называют* ***ассоциированным*** *с орграфом $G = (V, U)$, если $V' = V$, а $\{v_i, v_j\} \in U'$ тогда и только тогда, когда $(v_i, v_j) \in U$ или $(v_j, v_i) \in U$.*

Таким образом, в силу определения 1.3, переход от орграфа к ассоциированному с ним графу состоит в «стирании» направлений дуг орграфа, отбрасывании всех петель орграфа (если они есть) и в замене появившихся кратных (параллельных) ребер $\{v_i, v_j\}$ и $\{v_j, v_i\}$ одним ребром $\{v_i, v_j\}$ (если кратные ребра появились).

2. Методы задания графов .

1. Граф (орграф) $G = (V,U)$ может быть задан ***по определению*** перечислением элементов множеств V и U. Например,

Пример 2.1.

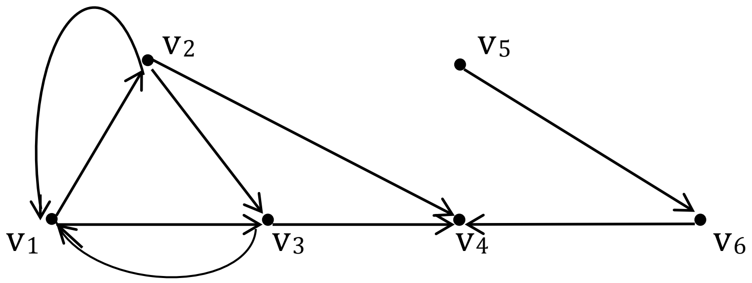
$G = (V,U) = (\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}, \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_1), (v_3, v_4), (v_5, v_6), (v_6, v_4)\})$.

Ясно, что подобное представление графа является неудобным, поскольку затрудняет выяснение характеристик графа, и не наглядным.

2. Граф (орграф) $G = (V,U)$ может быть задан ***геометрически.*** Условимся вершины графа изображать на плоскости или в пространстве точками, а ребра или дуги – отрезками или дугами, соединяющими соответствующие вершины (для неориентированных графов) или направленными отрезками или направленными дугами, идущими из начальной вершины дуги в конечную вершину (для орграфов).

Пример 2.2. Для орграфа предыдущего примера:

$G:$



Геометрический метод представления графов является наиболее наглядным, позволяющим быстро находить нужную информацию о графе, однако этот метод задания графов имеет и существенные недостатки – изображение даже несложного графа требует большой площади во-первых и, во-вторых, обработку так заданного графа нельзя поручить ЭВМ.

3. Граф (орграф) ***G = (V,U)*** может быть задан ***матрицей инцидентности***. Пусть $|V| = m$ и $|U| = n$, и пусть все ребра (дуги) графа занумерованы. Тогда граф (неориентированный или ориентированный) может быть задан прямоугольной матрицей размерности ***m x n***. ***Для ориентированного графа*** элементы матрицы задаются так:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{если для } i-\textit{той вершины } j-\textit{тая дуга выходящая,} \\ -1, & \textit{если для } i-\textit{той вершины } j-\textit{тая дуга заходящая,} \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$$

Пример 2.3. Построим матрицу инцидентности для орграфа предыдущего примера. Для этого занумеруем дуги орграфа, например, следующим образом

(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_1), (v_3, v_4), (v_5, v_6), (v_6, v_4)

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Тогда матрица инцидентности графа ***G*:**

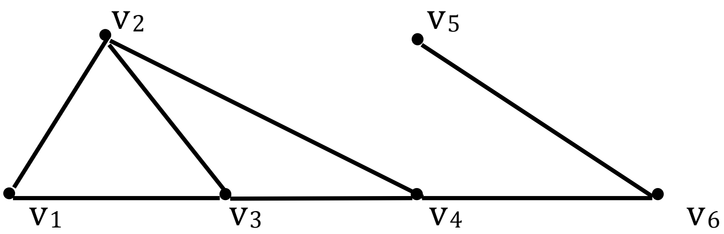
$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Для неориентированного графа элементы матрицы инцидентности задаются следующим образом

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{если } i-\textit{тая вершина инцидентна } j-\textit{тому ребру,} \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$$

Пример 2.4. Рассмотрим граф, ассоциированный с орграфом предыдущего примера

G' :



и занумеруем его ребра, например, следующим образом

{v_1, v_2}, {v_1, v_3}, {v_2, v_3}, {v_2, v_4}, {v_3, v_4}, {v_5, v_6}, {v_6, v_4}.

1 2 3 4 5 6 7

Тогда матрица инцидентности графа *G'* следующая

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Несмотря на то, что представление графов в виде матриц инцидентности играет весьма большую роль в теоретических исследованиях, практически этот способ весьма неэффективен. Столбцы матрицы содержат не более двух ненулевых элементов, что делает этот метод неэкономным при большом количестве вершин. Кроме того, решение практических задач с помощью матрицы инцидентности весьма трудоемко.

4. Граф (орграф) ***G = (V,U)*** может быть задан ***матрицей смежности***. Это квадратная матрица размерности ***n x n***, где ***n = |V|***. Элементы матрицы смежности определяются следующим образом.

Для неориентированного графа

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & если\ i-тая\ и\ j-тая\ вершины\ графа\ смежные; \\ 0, & иначе. \end{cases}$$

Из определения элементов матрицы сразу следует, что матрица смежности неориентированного графа ***симметрическая***.

Для орграфа

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & если\ из\ i-той\ вершины\ графа\ в\ j-тую\ ведет\ дуга; \\ 0, & иначе. \end{cases}$$

Заметим, что в $\boldsymbol{к}$ – той строке матрицы смежности орграфа количество единиц равно ***полустепени исхода*** $\boldsymbol{deg^+(v_к)}$ вершины $\boldsymbol{v_к}$, а количество единиц в $\boldsymbol{к}$ – том столбце матрицы смежности орграфа равно ***полустепени захода*** $\boldsymbol{deg^-(v_к)}$ вершины $\boldsymbol{v_к}$.

Пример 2.5. Для неориентированного графа примера 2.4 матрица смежности имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 2.6. Для ориентированного графа примера 2.2 матрица смежности следующая

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Как видим, матрица смежности орграфа в этом случае симметрической не является.

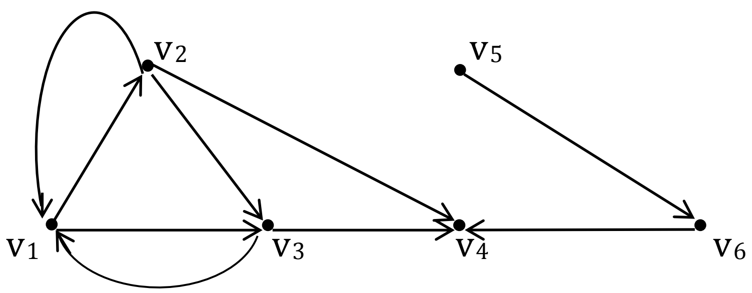
Матрица смежности графов применяется во многих случаях при выяснении характеристик графа, при решении конкретных оптимизационных задач для графов с помощью ЭВМ. Существуют и другие, кроме рассмотренных выше, методы представления графов (списками смежности, массивами лидеров и др.).

3. Подграфы. Компоненты связности.

Определение 3.1. *Граф* $G' = (V',U')$ называется ***подграфом*** графа $G = (V,U)$ *(обозначается* $G' \subsetneq G$), если $V' \subseteq V$ *и* $U' \subseteq U$. *Таким образом, каждая вершина в* G' *является вершиной в* G *и каждое ребро (дуга) в* G' *является ребром (дугой) в* G. *Если хотя бы одно из отмеченных выше включений* $V' \subseteq V$ *или* $U' \subseteq U$ *строгое, то подграф* G' *называется* ***собственным*** *подграфом графа* G. *Если* $V' = V$, то G' *называется* ***остовным*** *подграфом графа* G.

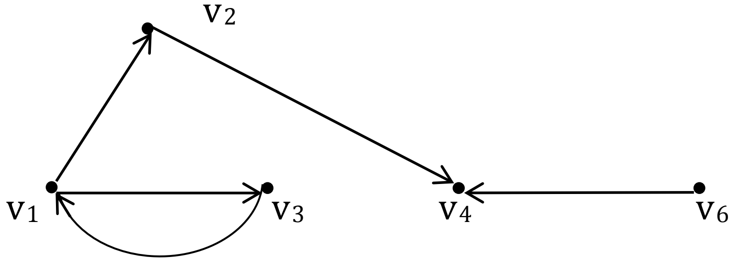
Пример 3.1. Для орграфа

G :



граф

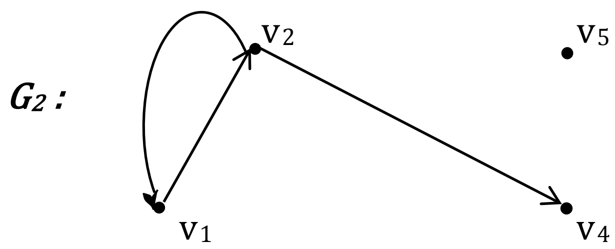
G₁ :



является собственным подграфом орграфа G.

Определение 3.2. *Подграф* $G' = (V',U')$ графа $G = (V,U)$ *называется* ***вершиннопорожденным****, если* $V' \subseteq V$ и *его множество ребер* U' *содержит* ***все*** *те ребра графа* G*, оба конца которых содержатся в* V'*.*

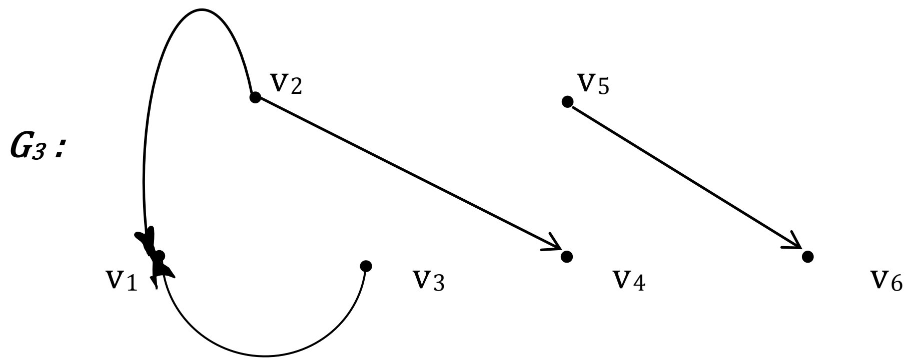
Пример 3.2. Выберем во множестве вершин V орграфа G примера 3.1 произвольным образом некоторое подмножество $V_2 = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$. Тогда подграф



графа G является вершиннопорожденным (заданным подмножеством вершин V_2).

Определение 3.3. *Подграф* $G' = (V',U')$ графа $G = (V,U)$ *называется* ***ребернопорожденным****, если* $U' \subseteq U$ *и его множество вершин* V' *состоит из* ***всех*** *тех вершин графа* G*, которые являются концевыми для ребер из* U'*.*

Пример 3.3. Выберем во множестве ребер U орграфа G примера 3.1 произвольным образом некоторое подмножество $U_3 = \{(v_2,v_1), (v_3,v_1), (v_2,v_4), (v_5,v_6)\}$. Тогда подграф



является ребернопорожденным подграфом орграфа G.

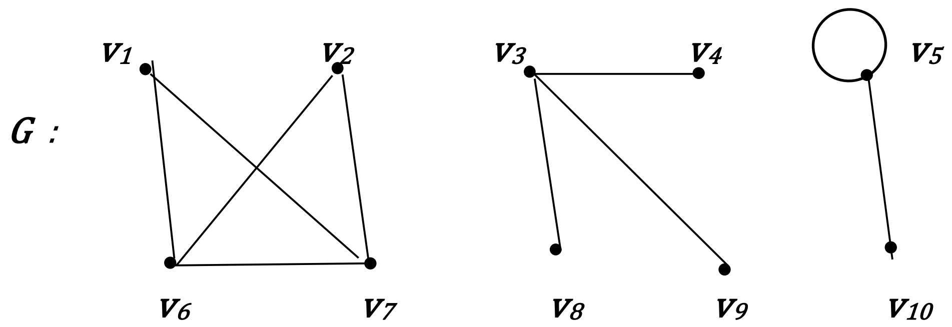
Определение 3.4. *Граф (орграф) называется* ***связным****, если для любой пары вершин графа одна из них достижима из другой.*

Например, граф G' примера 2.4 является связным, а граф G_3 примера 3.3 связным не является (например, не существует пути между вершинами v_1 и v_5).

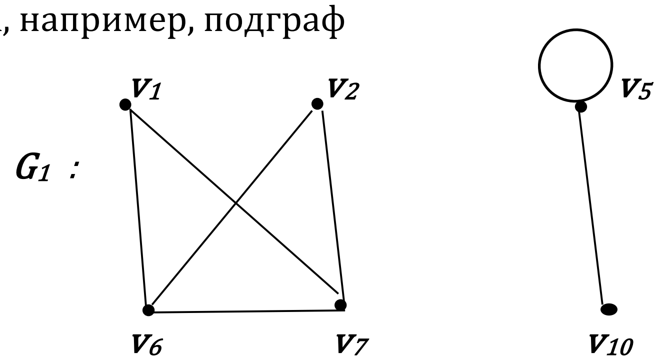
*__Определение 3.5.__ Подграф G' графа G называется **максимальным**,* если *для любого графа G'' такого, что $G' \subsetneq G'' \subsetneq G$ следует, что либо $G' = G''$ либо $G'' = G$ (иными словами, подграф G' - максимальный подграф в графе G, если не существует собственного подграфа G'' графа G, для которого подграф G', в свою очередь, был бы собственным подграфом).*

*__Определение 3.6.__ Максимальный связный подграф G' графа G называется **компонентой связности** (или просто **компонентой**) графа G.*

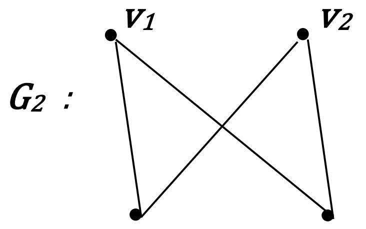
Пример 3..4. Пусть нам задан граф (псевдограф)



Тогда, например, подграф



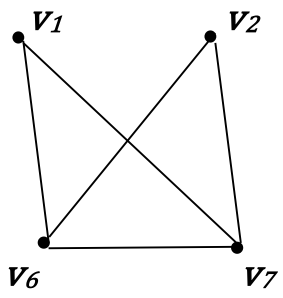
не является компонентой графа G (поскольку не является связным).
Подграф



v_6 v_7

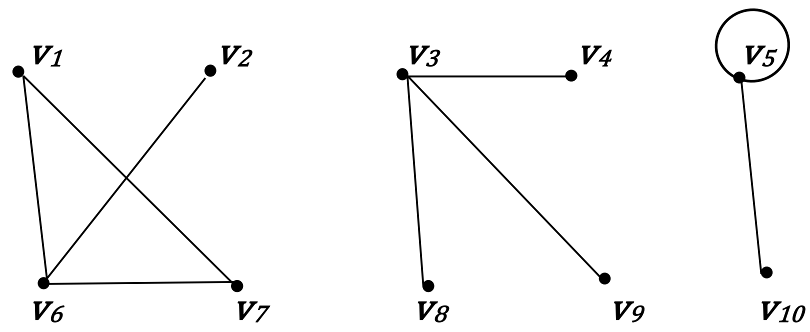
связный, но ***не является компонентой*** графа G (поскольку не является максимальным связным подграфом – он является собственным подграфом для связного подграфа G_3). Подграф

G_3 :



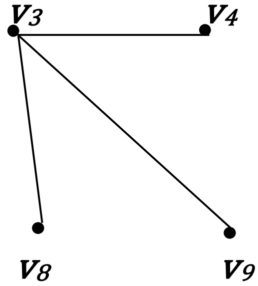
является компонентой графа G (он не является собственным подграфом ни одного связного подграфа графа G). Подграф G_4 *графа* G не является компонентой графа G (почему?), но ***является максимальным*** (и ***остовным***) подграфом G. Здесь G_4 – следующий подграф графа G:

G_4 :

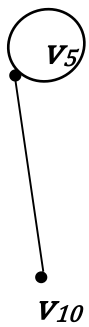


Исходный граф G имеет три компоненты связности (компоненты) – G_3, G_5, G_6 , где G_3 отмечен раньше, а G_5 и G_6 - следующие подграфы:

G_5 :



G_6 :



4. Изоморфизм графов.

Определение 4.1. *Два графа* $G = (V, U)$ *и* $G' = (V', U')$ *называются* ***изоморфными*** *(обозначается* $G \cong G'$*), если между их множествами вершин существует взаимно однозначное соответствие (биективное отображение), сохраняющее инцидентность ребер, т.е. если* $\varphi : V \longrightarrow V'$ *– биективное отображение между множествами вершин, то ребро* $\{v_i, v_j\} \in U$ *тогда и только тогда, когда ребро* $\{\varphi(v_i), \varphi(v_j)\} \in U'$ *(для орграфов* $(v_i, v_j) \in U \Leftrightarrow (\varphi(v_i), \varphi(v_j)) \in U'$*).*

Можно дать и другое, эквивалентное предыдущему, определение изоморфизма графов:

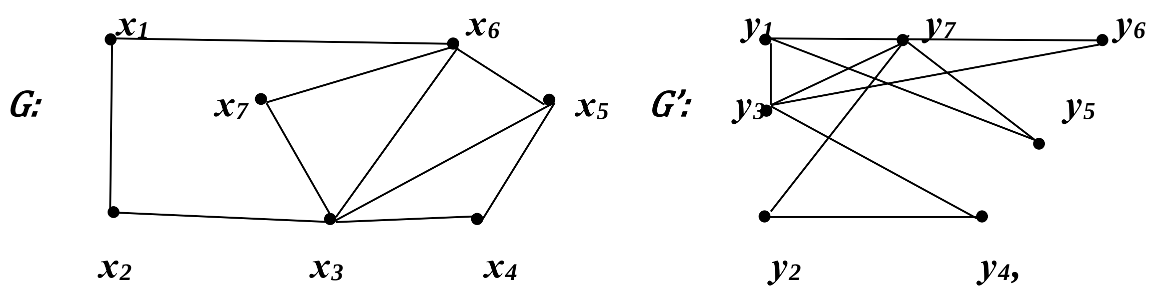
Определение 4.2. *Два графа* $G = (V, U)$ *и* $G' = (V', U')$ *называются* ***изоморфными*** *(обозначается* $G \cong G'$*), если между их множествами вершин и множествами ребер (дуг) существуют взаимно однозначные соответствия (биективные отображения)* $\varphi : V \longrightarrow V'$ *и* $\psi : U \longrightarrow U'$ *такие, что* $(v_i, v_j) \in U \Leftrightarrow \psi(v_i, v_j) = (\varphi(v_i), \varphi(v_j)) \in U'$.

Изоморфизм объектов в математике играет очень важную роль и в дальнейшем нам придется довольно часто встречаться с изоморфными объектами (структурами) как в дискретной математике, так и в других разделах математики. Интерес к изоморфным объектам вызван тем, что с математической точки зрения они отождествляются (не различаются), ибо имеют абсолютно одинаковые свойства, хотя по виду эти объекты могут различаться очень существенно. Из определения изоморфизма графов сразу следует, что изоморфные графы – это по сути один и тот же граф, но с различным обозначением (или нумерацией) вершин. Отсюда следуют:

Теорема 4.1. *Два графа изоморфны между собой тогда и только тогда, когда матрицу смежности одного из них можно получить из матрицы* *смежности другого с помощью одновременной перестановки строк и столбцов этой матрицы (т.е. одновременно с перестановкой i–той и j–той строк матрицы осуществляется и перестановка i–того и j–того столбцов матрицы).*

Теорема 4.2. *Два графа изоморфны между собой тогда и только тогда, когда матрицу инцидентности одного из них можно получить из матрицы инцидентности другого с помощью перестановок строк и столбцов этой матрицы.*

Пример 4.1. Выяснить, изоморфны ли графы G и G', где



Решение. Заметим, прежде всего, что количества вершин первого и второго графов совпадают, а потому взаимно однозначное соответствие (биективное отображение) между множествами вершин установить можно. Но необходимо такое соответствие, которое сохраняло бы инцидентность. Учтем, что вершины разной степени соответствовать друг другу не могут, ибо инцидентны разным количествам ребер (т.е. такое соответствие не сохраняло бы инцидентность). Поэтому подсчитаем степени вершин графов. Имеем:

	в графе G	в графе G'
$deg(t)=2:$	x_1, x_2, x_4, x_7	y_2, y_4, y_5, y_6
$deg(t)=3:$	x_5	y_1
$deg(t)=4:$	x_6	y_3

deg(t) = 5: x_3 y_7

Поскольку вершин степеней 3,4,5 в графах по одной, то они и должны быть сопоставлены друг другу соответственно. Оформим искомое биективное отображение в виде подстановки

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ ? & ? & y_7 & ? & y_1 & y_3 & ? \end{pmatrix}.$$

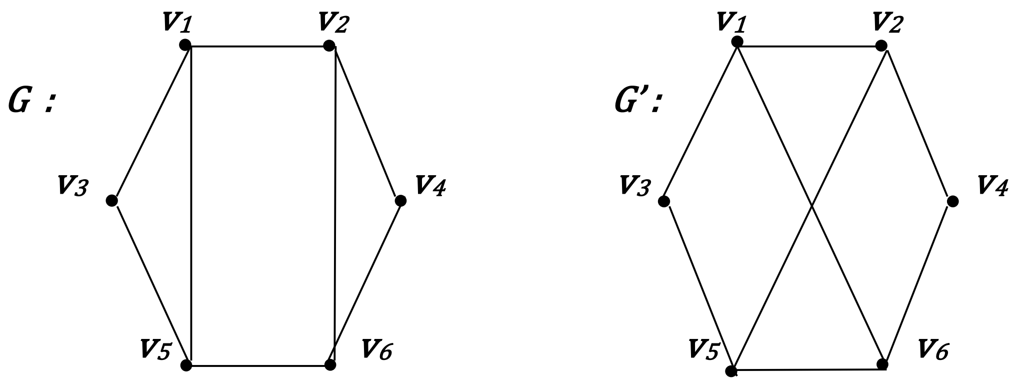
Убеждаемся в том, что уже установленное соответствие вершин сохраняет инцидентность (например, ребра $\{x_3,x_5\}$, $\{x_3,x_6\}\{x_5,x_6\}$ в графе G существуют и им отвечают в графе G' соответственно ребра $\{y_7,y_1\}$, $\{y_7,y_3\}$, $\{y_1,y_3\}$). Соответствие оставшихся вершин перебором требует большого количества проверок инцидентности. Можно, в нашем случае, заметить, что в графе G вершина x_3 степени 5 не соединена ребром с вершиной x_1 степени 2. Тогда и в графе G' вершина y_7 не должна соединяться ребром с вершиной степени 2. Таковой вершиной в графе G' является вершина y_4. Поставим в соответствие вершине x_1 вершину y_4 и проверим наличие соответствующих ребер. Продолжим дальнейший анализ и окончательно получим

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ y_4 & y_2 & y_7 & y_5 & y_1 & y_3 & y_6 \end{pmatrix}$$

Таким образом, биективное отображение между множествами вершин исходных графов, сохраняющее инцидентность, установлено и потому эти графы ***изоморфные*** друг другу.

Как видим, установление изоморфизма двух графов – процедура довольно громоздкая. Иногда о ***неизоморфности*** графов можно судить по косвенным характеристикам графов.

Пример 4.2. Проверить изоморфизм графов G и G', где



Количества вершин исходных графов (шесть) и ребер (восемь) одинаково. Поэтому биективные отображения между множествами вершин и ребер соответственно установить можно. Дальнейший перебор вариантов соответствия вершин для поиска соответствия, сохраняющего инцидентность соответствующих ребер, громоздок. Однако можно сразу заметить, что в графе G имеются два цикла длины 3 (v_1, v_3, v_5 и v_2, v_4, v_6), а граф G' циклов длины 3 вообще не имеет. Ранее мы отмечали, что изоморфные графы имеют абсолютно одинаковые свойства. Поэтому мы можем сразу судить о том, что исходные графы ***изоморфными не являются***.

Замечание 4.1. *Установление изоморфизма орграфов происходит аналогично описанному выше с той лишь разницей, что при установлении биективного отображения между множествами вершин необходимо учитывать не просто степени вершин, а их полустепени захода и исхода.*

5. Деревья. Их свойства.

Определение 5.1. ***Неориентированным деревом*** *называют ациклический связный граф.* ***Ориентированным деревом*** *называют ориентированный бесконтурный граф, у которого полустепень захода каждой вершины не больше 1 и существует ровно одна вершина, называемая* ***корнем ориентированного дерева****, полустепень захода которой равна*

0. Граф, компоненты связности которого представляют собой деревья, называется ***лесом****.*

Определение 5.2. *Вершина* v_i *ориентированного дерева называется* ***потомком*** *вершины* v_j*, если существует путь ненулевой длины из* v_j *в* v_i *. В этом же случае вершина* v_j *называется* ***предком*** *вершины* v_i*. Если длина пути из* v_j *в* v_i *равна 1, то* v_i *называется* ***сыном*** v_j*, а* v_j *–* ***отцом*** v_i*. Вершина, не имеющая потомков, называется* ***листом****.*

***Теорема 5.1** (первый критерий дерева).* *Неориентированный граф* G *является деревом тогда и только тогда, когда любые две его вершины соединяются единственной цепью.*

Доказательство.

Необходимость. *Нам дано, что граф является деревом. Нужно доказать, что любые две его вершины соединяются единственной цепью.*

Для доказательства используем тот факт, что прямая теорема и ее контрапозиция эквивалентны (равносильны) в логическом смысле. Докажем контрапозицию. Контрапозиция формулируется следующим образом: *Если в графе некоторые две вершины соединяются разными цепями, то этот граф не является деревом*. Предположим, что для некоторых вершин a и b графа существуют две разных цепи, соединяющие a и b, например, $P: a, v_1, v_2 v_3, \dots, v_{n-1}, b$ и $P': a, v_1', v_2', v_3', \dots, v_{m-1}', b$. Поскольку начальные вершины этих цепей совпадают и совпадают также их конечные вершины, а пути разные, то должна существовать вершина, в которой эти цепи расходятся (пусть это будет вершина $v_i = v_i'$) и вершина, в которой пути должны сойтись (пусть это будет вершина $v_j = v_k'$). Тогда $C: v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{k-1}', \dots, v_{i-1}', v_i$ - некоторый цикл в исходном графе и, следовательно, граф не является деревом. Контрапозиция, а вместе с ней и необходимость критерия, доказана.

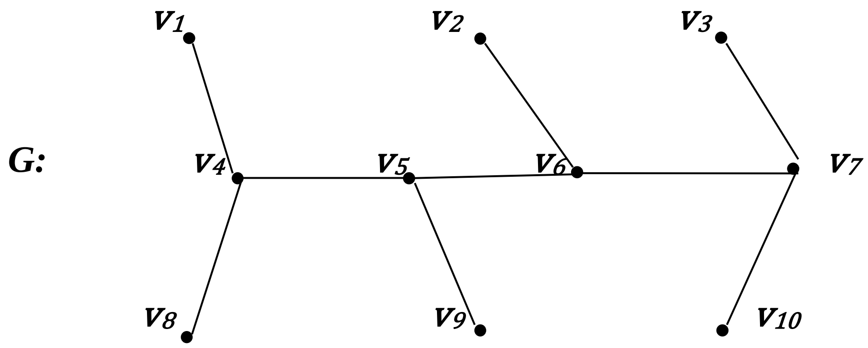
Достаточность._*Нам дано, что любые две вершины графа соединяются единственной цепью. Нужно доказать, что граф является деревом.*

Снова докажем контрапозицию, которая в данном случае формулируется следующим образом: *Если граф не является деревом, то в нем существуют, по крайней мере, две вершины, которые недостижимы друг из друга или соединяются разными цепями.*

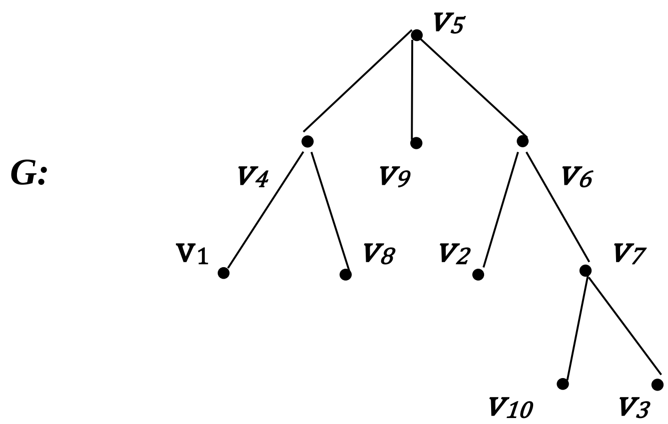
Предположим, что граф деревом не является. Тогда либо этот граф не является связным, либо в нем существуют циклы. Если граф не является связным, то в нем существуют, по крайней мере, две вершины, недостижимые друг из друга и в этом случае контрапозиция доказана.

Пусть в графе существуют циклы. Зафиксируем один из них ***C:*** ***$a, v_1, v_2 v_3, \ldots, v_{n-1}, a$.*** Тогда ***$P_1$: $v_2 v_3, \ldots, v_{n-1}, a$*** и ***$P_2$: v_2, v_1, a*** - две разные цепи, соединяющие, например. вершины ***v_2*** и ***a.*** И в этом случае контрапозиция доказана, а, значит, доказательство достаточности критерия завершено.

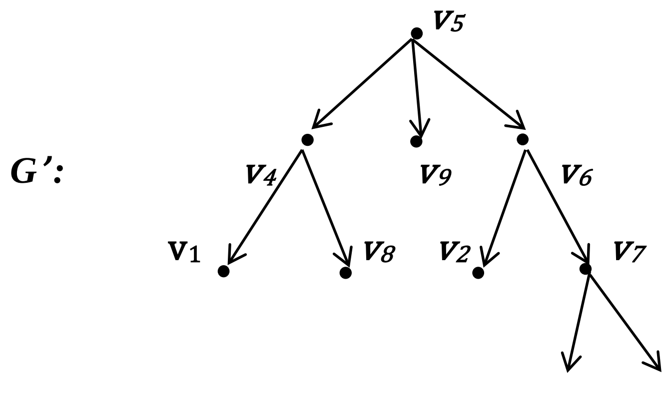
<u>Пример 5.1.</u> Пусть нам задан граф ***G:***

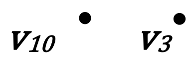


Нетрудно видеть, что этот граф в силу определения или первого критерия является деревом. Предположим, что дерево подвижно в своих вершинах и подвесим его, например, за вершину ***v_5*** так, что остальная часть дерева повиснет ниже этой вершины. Получим то же дерево ***G*** в виде



Такая форма представления деревьев является стандартной. Если рассмотреть ориентированное дерево ***G'***(выбирая в качестве корня вершину v_5), для которого предыдущее дерево является ассоциированным графом, получим:





Такое ориентированное дерево называется ***порожденным*** деревом ***G*** . В дереве ***G'*** вершина v_5 – корень дерева, вершины **v_1, v_8, v_9, v_2, v_{10}, v_3** – листья. По аналогии с ориентированными деревьями понятия корневой вершины и листьев используется и для неориентированных деревьев. Таким образом, ***любое дерево рисуется от корня вниз***. При этом вершины дерева располагаются по ярусам (уровням), номера которых равны длине пути от корня к вершинам данного яруса. В последнем примере на нулевом ярусе (уровне) находится корень дерева (вершина v_5), на первом ярусе – вершины v_4, v_9, v_6, на втором ярусе – вершины v_1, v_8, v_2, v_7, на третьем – вершины v_{10}, v_3. В ориентированном дереве направления ребер всегда выбираются от вершин некоторого уровня к вершинам следующего по номеру уровня.

Определение 5.3. *Длина самого длинного пути из корня дерева к его листьям называется* ***высотой*** *дерева.*

В рассмотренном выше примере 5.1 высота дерева (ориентированного или нет) равна 3.

Теорема 5.2 *(второй критерий дерева). Связный граф* ***G*** *является деревом тогда и только тогда, когда в нем количество вершин ровно на единицу больше количества ребер.*

Доказательство.

Необходимость. *Нам дано, что связный граф* ***G*** *является деревом. Нужно доказать, что в нем количество вершин ровно на единицу больше количества его ребер.*

Рассмотрим это дерево, как корневое (выберем какую-нибудь вершину в качестве корня и распределим вершины по уровням (ярусам)). Рассмотрим теперь ориентированное дерево ***G'***, порожденное деревом ***G***. У каждого ребра дерева ***G'*** одна и только одна конечная вершина. Следовательно число вершин и ребер ***G'*** (а , значит, и ***G***) одно и то же, исключая корневую вершину. Если учесть и корневую вершину, то количество вершин окажется на единицу больше количества ребер и необходимость теоремы доказана.

Достаточность. *Нам дано, что в связном графе* ***G*** *количество вершин ровно на единицу больше количества ребер. Нужно доказать, что* ***G*** *– дерево.*

Если G содержит цикл C: $a, v_1, v_2 v_3, \dots, v_{n-1}, a$, то зафиксируем в этом цикле произвольное ребро (v_i, v_j). Тогда (см. доказательство достаточности первого критерия дерева) существуют две цепи соединяющих вершины v_i и v_j. Удалим ребро (v_i, v_j) из G. Тем самым мы разрываем цикл и не нарушаем связности графа (ибо одна из цепей, соединяющих вершины v_i и v_j, сохранится). Если в полученном графе существуют циклы, то разорвем их аналогично предыдущему. В результате получим дерево G' у которого (согласно доказательству необходимости теоремы) количество вершин ровно на единицу больше количества ребер. Пусть количество вершин графа G равно m, а количество его ребер равно n. Пусть еще при переходе от графа G к дереву G' нами отброшено k ребер. Тогда в G' количество ребер равно $n-k$, а количество вершин равно m (вершины графа G при переходе к дереву G' не затрагивались). По условию в связном графе G количество вершин ровно на единицу больше количества ребер, т.е. $m = n + 1$. С другой стороны, для дерева G' имеем $m = n - k + 1$. Таким образом, $n + 1 = n - k + 1$. Откуда $k = 0$. Поэтому при переходе от графа G к дереву G' не было отброшено ни одно ребро, а значит, исходный граф G - дерево. Что и требовалось доказать в достаточности теоремы.

Дерево G', построенное из графа G в проведенном выше доказательстве достаточности второго критерия дерева, называется ***остовным*** или ***каркасным*** деревом графа G. Дадим более формальное определение.

Определение 5.4. *Дерево G' называется* ***остовным*** *(или* ***каркасным****) деревом графа G, если $G' \subsetneq G$ (G' подграф графа G) и $V' = V$.*

Определение 5.5. *Наименьшее (минимальное) количество ребер графа G, которые нужно удалить из него для того чтобы превратить граф в дерево или лес (т.е., чтобы разорвать все имеющиеся в нем циклы), называется* ***цикломатическим числом*** *графа и обозначается $\nu(G)$.*

Теорема 5.3. *Для цикломатического числа $\nu(G)$ графа $G = (V,U)$, справедлива формула*

$$\nu(G) = |U| - |V| + K(G),$$

где $K(G)$ - количество компонент связности графа.

Доказательство. Зафиксируем в исходном графе G произвольную компоненту связности G_i. Преобразуем ее в дерево G_i' (аналогично процедуре, примененной при доказательстве достаточности предыдущей теоремы). Заметим, что при этом нам придется удалить из G_i количество ребер, равное $\nu(G_i)$. В силу теоремы 5.2 имеем:

$$|V_{G_i}'| = |U_{G_i}'| + 1 = |U_{G_i}| - \nu(G_i) + 1, \text{ или } \nu(G_i) = |U_{G_i}| - |V_{G_i}'| + 1.$$

Учтем теперь, что $|V_{G_i}'| = |V_{G_i}|$ и соберем результаты по всем компонентам связности исходного графа. Получим:

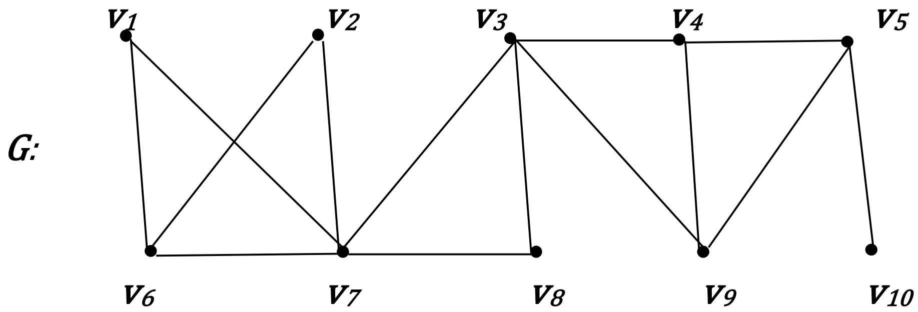
$$\sum_{i=1}^{K(G)} \nu(G_i) = \sum_{i=1}^{K(G)} |U_{G_i}| - \sum_{i=1}^{K(G)} |V_{G_i}| + \sum_{i=1}^{K(G)} 1.$$

Таким образом, общее минимальное количество ребер, отброшенных на переходе от исходного графа G к лесу (или дереву) G' (т.е. $\nu(G)$) равно:

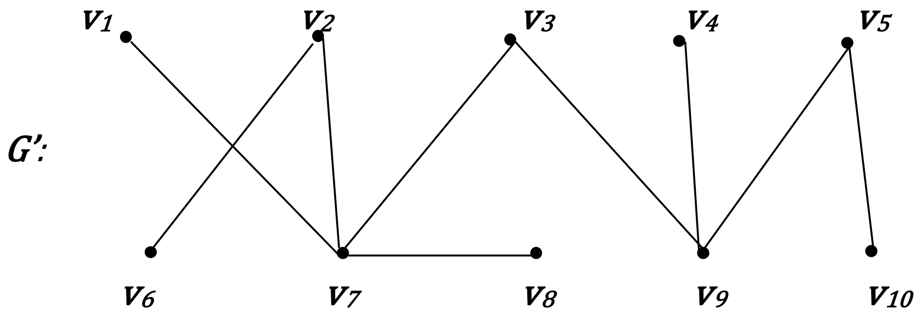
$$\nu(G) = |U| - |V| + K(G),$$

где $K(G)$ - количество компонент связности графа G, что и требовалось доказать.

Пример 5.2. Пусть нам задан граф



Тогда, например, его подграф

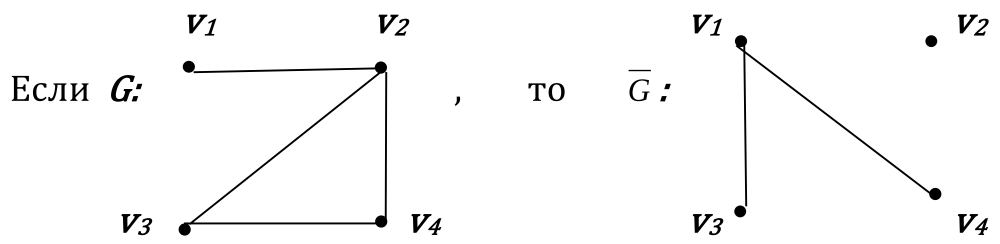


является остовным деревом исходного графа G. $\nu(G) = 5$.

6. Операции над графами. Критерий планарности графов.

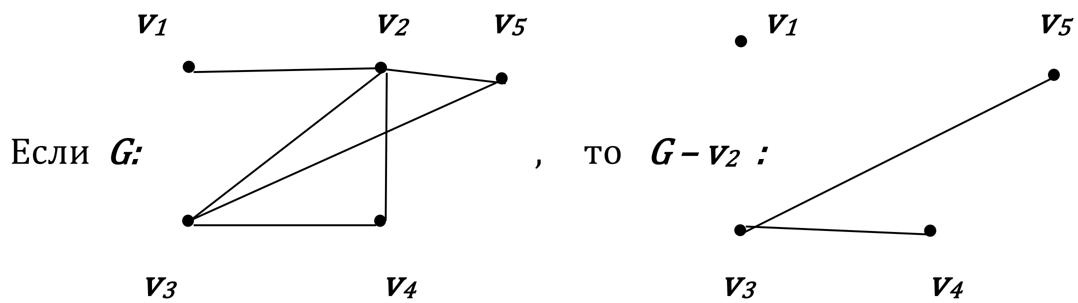
<u>Определение 6.1.</u> Дополнением G′ *графа* ***G*** *=(**V,U**) (обозначение* $\overline{G}$ *) называется такой граф* ***G′*** *=(**V′,U′**) у которого множество вершин* ***V′*** *совпадает с множеством вершин* ***V*** *исходного графа* ***G****, а вершины* v_i *и* v_j *графа* ***G′*** *соединены ребром (смежные) тогда и только тогда, когда они не являются смежными в графе* ***G****.*

<u>Пример 6.1.</u>



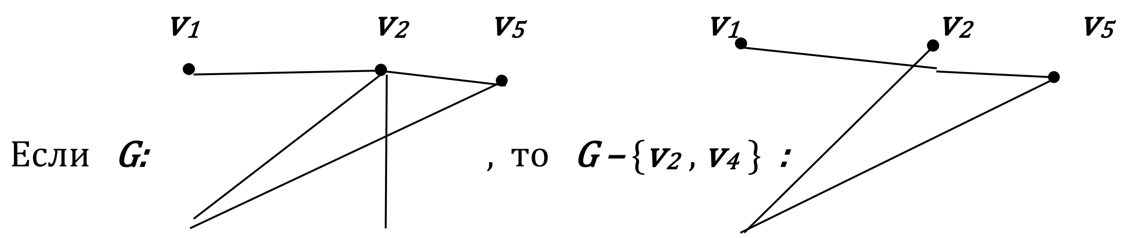
<u>Определение 6.2.</u> Удаление вершины v *из графа* ***G*** *=(**V,U**) (обозначение* ***G – v****) приводит к графу* ***G′****=(**V′,U′**) в котором* $V' = V \setminus \{v\}$, *а* $U' = U \setminus \{ \{v_i, v_j\} \mid (v_i = v) \vee (v_j = v)\}$. *Иными словами из графа* ***G*** *удаляется вершина вместе со всеми ребрами графа, которым она была инцидентна.*

<u>Пример 6.2.</u>



<u>Определение 6.3.</u> Удаление ребра $e = \{v_i, v_j\}$ *из графа* ***G*** *=(**V,U**) (обозначение* ***G – e****) приводит к графу* ***G′****=(**V′,U′**) в котором* $V' = V$, *а* $U' = U \setminus \{ \{v_i, v_j\} \}$. *Иными словами из графа* ***G*** *удаляется ребро с сохранением всех существовавших в графе* ***G*** *вершин.*

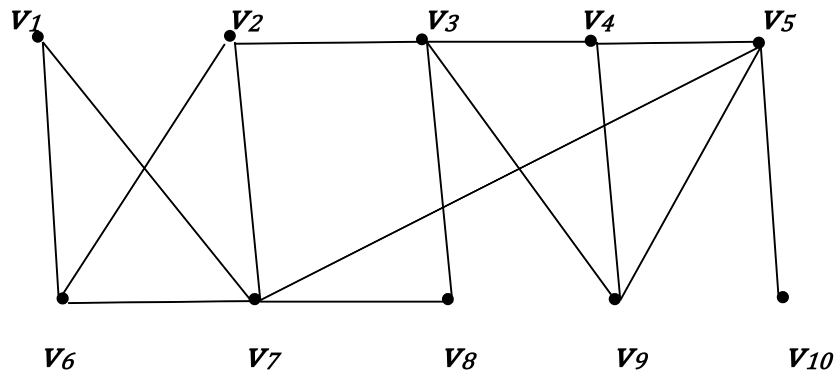
<u>Пример 6.3.</u>



Определение 6.4. *Стягивание графа* $G=(V,U)$ *по его подграфу* $H=(V_H, U_H)$ *(обозначение* $G\backslash H$ *) приводит к графу* $G'=(V',U')$ *в котором* $V'=(V \backslash V_H)\cup\{v\}$
(здесь $v\notin V$*), а* $U'=U \backslash\{\{v_i, v_j\}|(v_i\in V_H)\vee(v_j\in V_H)\}\cup\{e=\{z, v\}|z\in (O(V_H)\backslash V_H)\}$
(здесь $O(V_H)=\cup O(v_i)$*, а окружения вершин* $O(v_i)$ *рассматриваются для всех* $v_i\in V_H$*). Иными словами, из графа* G *удаляются все вершины подграфа* $H=(V_H, U_H)$ *и добавляется новая вершина* v*. Из исходного графа удаляются также все ребра, инцидентные удаленным вершинам подграфа* H*, но те ребра исходного графа, которые были инцидентны вершинам объединенного окружения вершин подграфа* H *(без учета вершин этого подграфа) восстанавливаются, как ребра , инцидентные добавленной вершине* v*.*

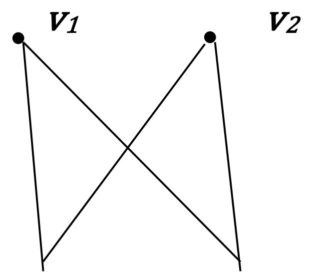
Пример 6.4. Пусть нам задан граф

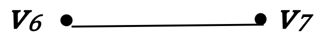
G:



Выберем в нем какой-либо подграф *H*, например,

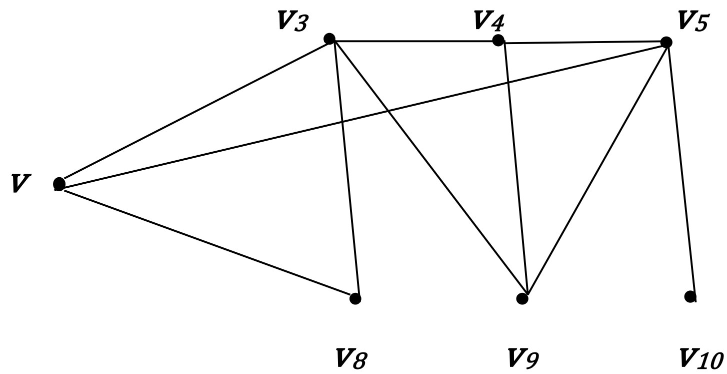
H:





Тогда граф

$G \setminus H$:



представляет собой результат стягивания графа G по его подграфу H.

Определение 6.5. ***Растяжение графа*** $G=(V,U)$ ***по ребру*** $e=\{v_i, v_j\}$ *приводит к графу* $G'=(V',U')$ *в котором* $V'=V\cup\{v\}$, $v\notin V$, *а* $U'=(U\setminus\{\{v_i, v_j\}\})\cup\{\{v_i, v\}, \{v, v_j\}\}$. *Иными словами, при растяжении графа по ребру в этом графе выбирается конкретное ребро и на этом ребре выбирается новая вершина, не совпадающая с концами исходного ребра, т.е. ребро графа разбивается на два смежных между собой ребра. Обратное действие называется* ***сжатием графа*** *(по паре смежных ребер). Операции растяжения и сжатия графов называются* ***операциями гомеоморфизма***.

Определение 6.6. *Два графа* G *и* G_1 *называются* ***гомеоморфными***, *если с помощью операций гомеоморфизма из одного графа можно получить граф,* ***изоморфный*** *другому.*

Определение 6.7. *Говорят, что граф* $G=(V,U)$ ***правильно укладывается*** *в пространство* E^n, *если в* E^n *можно выбрать* $|V|$ *точек (изображающих вершины графа) и* $|U|$ *отрезков (дуг) (изображающих ребра графа) так, чтобы эти отрезки (дуги), как ребра графа, пересекались бы только в вершинах им инцидентным.*

Теорема 6.1. *Любой граф правильно укладывается в пространство* E^3.

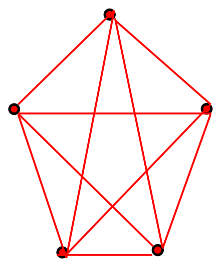
Доказательство. В пространстве E^3 выберем произвольную прямую l, проведем через нее $|U|$ различных плоскостей и занумеруем их. На прямой l выберем $|V|$ различных точек, изображающих вершины графа и занумеруем их. Занумеруем также ребра исходного графа. Теперь зафиксируем произвольное ребро $\{v_i, v_j\}$ графа, выберем плоскость, номер которой совпадает с номером этого ребра и проведем в этой плоскости дугу, соединяющую точки (вершины графа) с номерами i и j. Таким образом, различные ребра если и будут пересекаться, то только в точках прямой l в вершинах, которые инцидентны этим ребрам. Следовательно, граф будет ***правильно уложен*** в пространство E^3. Теорема доказана.

Определение 6.8. Граф называется ***плоским или планарным***, если он допускает правильную укладку в пространство E^2 (правильное изображение на плоскости).

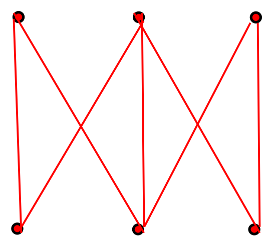
Теорема 6.2 (критерий Понтрягина – Куратовского).

Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит ни одного подграфа, гомеоморфного хотя бы одному из графов K_5 *или* $K_{3,3}$ *, где*

K_5 :



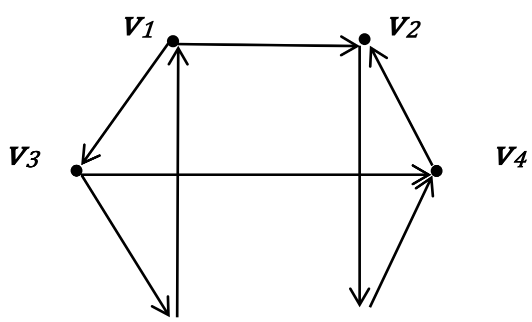
, а $K_{3,3}$:



Доказательство выходит за пределы данного курса, а потому принимаем теорему ***без доказательства.***

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. *Для орграфа, заданного на рисунке:*



1) Найти полустепени захода и исхода, степень каждой из вершин;
2) Имеет ли граф источники и стоки?
3) Имеет ли граф простые циклы? Если да, то указать хотя бы один из них и определить его длину.
4) Выяснить, является ли граф связным? Если нет, то найти хотя бы одну его компоненту связности.
5) Нарисуйте граф, ассоциированный с данным орграфом.
6) Какой простой путь в исходном графе имеет максимальную длину? Какова эта длина?
7) Сколько путей длины 2 существует у исходного графа?
8) Постройте матрицы инцидентности орграфа и ассоциированного с ним графа.
9) Постройте матрицы смежности орграфа и ассоциированного с ним графа.
10) Является ли орграф плоским?

Задача 2. Орграф задан своей матрицей инцидентности. Задайте его геометрически и ответьте на все вопросы предыдущей задачи.

$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Какую информацию о графе можно получить непосредственно на основании матрицы инцидентности? Найдите матрицу смежности графа, ассоциированного с заданным орграфом.

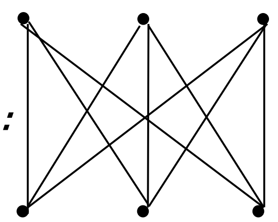
__Задача 3.__ Орграф задан своей матрицей смежности. Задайте его геометрически и ответьте на все вопросы задачи 7.1.

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

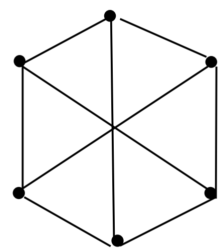
Какую информацию о графе можно получить непосредственно на основании матрицы смежности? Найдите матрицу инцидентности исходного орграфа и графа, ассоциированного с заданным орграфом.

__Задача 4.__ Являются ли изоморфными следующие графы?

$K_{3,3}$:



и



__Ответы.__

__Задача 1.__

1) Ответы на первый вопрос дадим в форме $deg(v)=deg^-(v)+deg^+(v)$:

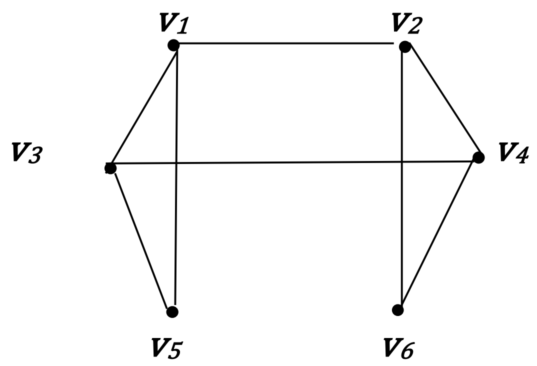
$deg(v_1) = 1+2=3$; $deg(v_2) = 2+1=3$; $deg(v_3) = 1+2=3$;
$deg(v_4) = 2+1=3$; $deg(v_5) = 1+1=2$; $deg(v_6) = 1+1=2$.

2) Не имеет.

3) Имеет, например, простой цикл v_1,v_3,v_5 длины 3.

4) Орграф является связным, т.к. для двух произвольных вершин существует путь, идущий из одной из вершин в другую.

5) Граф, ассоциированный с исходным орграфом, имеет вид:



6) Простой путь наибольшей длины $v_3, v_5, v_1, v_2, v_6, v_4$ длины 5.

7) Девять путей длины 2: v_1, v_3, v_5 ; v_1, v_2, v_6 ; v_2, v_6, v_4 ; v_3, v_5, v_1 ; v_3, v_4, v_2 ; v_4, v_2, v_6 ; v_5, v_1, v_3 ; v_5, v_1, v_2 ; v_6, v_4, v_2 .

8) Если занумеровать ребра графов следующим образом

$$\underset{1}{(v_1, v_3)},\ \underset{2}{(v_1, v_2)},\ \underset{3}{(v_4, v_2)},\ \underset{4}{(v_5, v_1)},\ \underset{5}{(v_6, v_2)},\ \underset{6}{(v_3, v_5)},\ \underset{7,}{(v_6, v_4)}$$

то матрицы инцидентности графа G и ассоциированного с ним графа G' следующие:

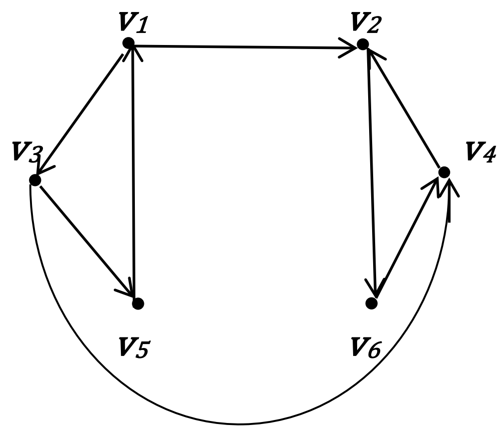
$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{G'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9) Матрицы смежности графа ***G*** и ассоциированного с ним графа ***G'*** следующие:

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_{G'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

10) И исходный граф ***G***, и ассоциированный с ним граф ***G'*** являются плоскими, поскольку, например, следующее их геометрическое задание удовлетворяет требованиям правильной укладки графов в пространство $\boldsymbol{E^2}$:



<u>Задача 2.</u> Геометрическое задание графов на основании матрицы инцидентности выполняется непосредственно по определению матрицы, а потому выполнить этот шаг, а также ответы на вопросы 1) – 9), самостоятельно (с учетом задачи 7.1).

Непосредственно по матрице инцидентности орграфа можно получить следующую информацию:

1) Найти полустепени захода и исхода для каждой вершины. Для этого достаточно зафиксировать соответствующую строку и подсчитать количество (-1) – получим полустепень захода вершины или количество 1 – получим полустепень исхода. Сумма полустепеней захода

и исхода определит степень соответствующей вершины. В нашем случае (***$deg(v)=deg^-(v)+deg^+(v)$***) имеем:

$$deg(v_1)=2+2=4; \quad deg(v_2)=1+1=2; \quad deg(v_3)=2+1=3;$$

$$deg(v_4)=2+1=3; \quad deg(v_5)=1+3=4.$$

2) Определить тип графа (псевдограф, мультиграф, обыкновенный граф). В нашем случае граф не имеет петель (в строке была бы единица помеченная сразу и плюсом и минусом) и не имеет кратных ребер (иначе в графе были бы одинаковые столбцы). Следовательно орграф – обыкновенный.

3) Орграф не имеет стоков (в матрице была бы строка, содержащая только +1) и не имеет источников (в строке матрицы содержались бы только -1).

4) Орграф не имеет изолированных вершин (иначе в матрице существовала бы нулевая строка).

5) На основании матрицы инцидентности для каждой вершины можно найти ее множества предшественников $O^{-1}(v)$ и преемников $O^{+}(v)$ (а, значит, и окружение $O(v)$), но это осуществляется не так наглядно, как поиск предыдущих характеристик. Например, для того, чтобы найти множество предшественников вершины v_3 необходимо зафиксировать третью строку матрицы и определить все ребра, для которых эта вершина является концом (зафиксировать -1 в строке и столбцы, которые содержат эти -1). Затем в этих столбцах найти 1 и по номерам строк, содержащих эти 1, зафиксировать вершины орграфа. Их множество и задает множество предшественников исходной вершины. В нашем случае $O^{-1}(v_3) = \{v_1, v_2\}$. Аналогично находится множество преемников вершины. Например, $O^{+}(v) = \{v_5\}$. Таким образом, $O(v) = \{v_1, v_2, v_5\}$.

Матрица смежности для графа, ассоциированного с исходным орграфом, следующая

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 3. Геометрическое задание графов на основании матрицы смежности выполняется непосредственно по определению матрицы, а потому выполнить этот шаг, а также ответы на вопросы 1) – 9), самостоятельно (с учетом задачи 7.1).

Непосредственно по матрице смежности графа можно получить следующую информацию:

1) Поскольку матрица смежности не является симметрической относительно главной диагонали, то граф с такой матрицей смежности является орграфом.

2) Этот орграф не имеет стоков (матрица не содержит нулевых строк таких, что соответствующие столбцы (с тем же номером, что и нулевая строка)) ненулевые;

3) Орграф не имеет источников (матрица не содержит нулевых столбцов таких, что соответствующие строки (с тем же номером, что и нулевой столбец)) ненулевые;

4) Орграф не имеет изолированных вершин (матрица смежности не содержит нулевых строк и нулевых столбцов с теми же номерами).

5) Орграф не имеет петель (главная диагональ матрицы содержит только нулевые элементы).

6) Орграф не имеет кратных ребер (матрица не содержит отличных от нуля и единицы элементов).

7) Орграф является обыкновенным (не содержит петель и кратных ребер).

8) Для каждой вершины орграфа можно подсчитать полустепени захода и исхода. Для определения полустепени исхода данной вершины необходимо зафиксировать строку с номером, совпадающим с номером вершины, и подсчитать количество 1 в этой строке, а для определения полустепени захода вершины необходимо зафиксировать столбец с номером, совпадающим с номером вершины, и подсчитать количество 1 в этом столбце. Тем самым, можно определить степень вершины. В нашем случае (учитываем $deg(v)=deg^{-}(v)+deg^{+}(v)$) имеем:

$deg(v_1)=3+4=7$; $deg(v_2)=3+2=5$; $deg(v_3)=2+3=5$; $deg(v_4)=2+3=5$;

$deg(v_5)=3+2=5$, $deg(v_6)=4+3=7$; $deg(v_7)=3+3=6$.

9) Если ввести следующую нумерацию ребер орграфа

(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_5), (v_1, v_6), (v_2, v_6), (v_2, v_4), (v_3, v_1), (v_3, v_7), (v_3, v_5), (v_4, v_2), (v_4, v_7),

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

(v_4, v_6), (v_5, v_2), (v_5, v_1), (v_6, v_3), (v_6, v_5), (v_6, v_7), (v_7, v_4), (v_7, v_6),

12 13 14 15 16 17 18 19

то матрица инцидентности орграфа следующая:

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1
\end{pmatrix}$$

10) Если ввести следующую нумерацию ребер графа, ассоциированного с исходным орграфом

$(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_5), (v_1, v_6), (v_1, v_7), (v_2, v_6), (v_2, v_5), (v_2, v_4), (v_3, v_7), (v_3, v_6), (v_3, v_5),$

$\quad 1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad 4 \qquad 5 \qquad 6 \qquad 7 \qquad 8 \qquad 9 \qquad 10 \qquad 11$

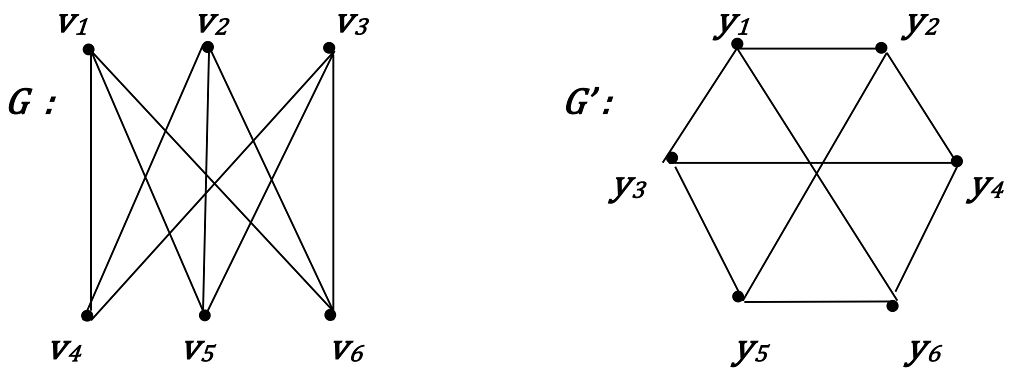
$(v_4, v_7), (v_4, v_6), (v_5, v_6), (v_6, v_7),$

$\quad 12 \qquad 13 \qquad 14 \qquad 15$

то матрица инцидентности графа следующая:

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

<u>Задача 4.</u> Введем следующие нумерации вершин исходных графов



Нетрудно увидеть, что все вершины как первого, так и второго графов имеют одну и ту же степень (три). Поэтому биекцию между множествами вершин установить можно. Поскольку устанавливаемая биекция множеств вершин должна сохранять инцидентность, то сопоставим, например, вершине v_1 вершину y_1, а вершинам v_4 ,v_5, v_6 , смежным с v_1 сопоставим соответственно вершины y_3, y_6, y_2, смежные с y_1. Запишем полученное соответствие в виде подстановки

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ y_1 & ? & ? & y_3 & y_6 & y_2 \end{pmatrix}$$

Пока такое соответствие сохраняет инцидентность – ребрам $\{v_1, v_4\}$, $\{v_1, v_5\}$, $\{v_1, v_6\}$ отвечают ребра $\{y_1, y_3\}$, $\{y_1, y_6\}$, $\{y_1, y_2\}$ соответственно, а попарно несмежным между собой вершинам v_4, v_5, v_6 отвечают попарно несмежные между собой вершины y_3, y_6, y_2. Если сопоставим вершине v_2 вершину y_4, то инцидентность сохранится (ребрам $\{v_2, v_4\}$, $\{v_2, v_5\}$, $\{v_2, v_6\}$ отвечают ребра $\{y_4, y_3\}$, $\{y_4, y_6\}$, $\{y_4, y_2\}$). Остается сопоставить вершине v_3 вершину y_5 и убедиться, что инцидентность сохраняется и в этом случае (v_3 смежная с вершинами v_4, v_5, v_6, а y_5 – с вершинами y_3, y_6, y_2). Таким образом, искомая биекция

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ y_1 & y_4 & y_5 & y_3 & y_6 & y_2 \end{pmatrix}$$

между множествами вершин найдена и, следовательно, исходные графы изоморфны между собой.

Проведенное выше доказательство изоморфности графов можно оформить с помощью их матриц смежности

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A_{G'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Поменяем во второй матрице 2-ю и 4-ю строки (соответственно 2-й и 4-й столбцы) и 3-ю и 5-ю строки (соответственно 3-й и 5-й столбцы), получим

$$A'_{G'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_G .$$

Следовательно, в силу теоремы 4.1, графы G и G' изоморфны. Более того, если вспомнить перестановку строк и столбцов, то в последней матрице

1-я строка (и 1-й столбец) соответствует вершине y_1;

2-я строка (и 2-й столбец) соответствует вершине y_4;

3-я строка (и 3-й столбец) соответствует вершине y_5;

4-я строка (и 4-й столбец) соответствует вершине y_2;

5-я строка (и 5-й столбец) соответствует вершине y_3;

6-я строка (и 6-й столбец) соответствует вершине y_6.

Тем самым найдена еще одна биекция между множествами вершин исходных графов, сохраняющая инцидентность (в чем легко убедиться),

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ y_1 & y_4 & y_5 & y_2 & y_3 & y_6 \end{pmatrix}$$

Рекомендуемая литература

Основная литература

1. А.И.Белоусов, С.Б.Ткачев Дискретная математика. М.:МГТУ им.Баумана, 2004.
2. Д.А.Андерсон, Дискретная математика и комбинаторика. М.:Вильямс, 2003.
3. Г.П.Гаврилов, А.А.Сапоженко Сборник задач по дискретной математике. М.: Наука, 1977.

Дополнительная литература

1. Ф.А.Новиков Дискретная математика для программистов.С-П.:Питер, 2001
2. Ю.Г.Карпов Теория автоматов. М.: Питер, 2002.