*Т. И. Матвеенко, доц.*
*Одесский университет*

# НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ О НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ПРИТОКЕ ЖИДКОСТИ К СКВАЖИНЕ В КРУГОВОЙ ОБЛАСТИ С УЧЕТОМ СЛАБОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ВОДОУПОРА

В системах достаточно большого числа скважин можно считать, что каждая скважина имеет свою, круговую область действия [1]. Задачи о неустановившемся притоке жидкости к такой скважине рассматривались в работах П. Альберта [2], С. Ф. Аверьянова, В. С. Усенко [3], П. Я. Полубариновой-Кочиной [1], М. Б. Баклушина [4] и др.

В данной работе эти исследования продолжены на случай учета слабой проницаемости водоупора.

§ 1. **Неустановившийся приток жидкости к скважине конечного радиуса при постоянном уровне воды в ней.** В случае неустановившегося осесимметричного движения грунтовых вод в безнапорном пласте с учетом слабой проницаемости нижележащего водоупора и инфильтрации сверху напорная функция $h(r, t)$ удовлетворяет следующему линеаризованному уравнению [1]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r}\right) - b^2(h - H) + \theta, \qquad (1)$$

где

$$a^2 = \frac{kM}{\sigma}, \quad b^2 = \frac{k_1}{M_1\sigma}, \quad \theta = \frac{\varepsilon}{\sigma},$$

$k$ — коэффициент фильтрации водоносного слоя; $\sigma$ — пористость грунта; $k_1$ — коэффициент фильтрации водоупора, $M_1$ — его глубина; $H$ — напор в водоносном пласте, лежащем ниже водоупора; $M$ — некоторое среднее значение глубины потока; $\varepsilon$ — интенсивность инфильтрации на поверхность грунтового потока.

Предположим, что интенсивность инфильтрации постоянна и что скважина радиуса $r_0$ работает при постоянном уровне $H_1$ воды в ней. Напор $H$ считаем постоянным. На границе $r = R$ области действия скважины, как на твердой стенке цилиндра, $\frac{\partial h}{\partial r} = 0$. В начальный момент времени $h(r, t)$ постоянно и равно $H$. Тогда относительно функции

$$S(r, t) = h(r, t) - H,$$

определяющей понижение напора в пласте, получаем краевую задачу

$$\frac{\partial S}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial S}{\partial r}\right) - b^2 S + \theta,$$

$$S(r, 0) = 0, \qquad r_0 \leqslant r \leqslant R,$$

$$S(r_0, t) = \alpha, \qquad \frac{\partial S}{\partial r}(R, t) = 0,$$

где

$$\alpha = H_1 - H.$$

Применив интегральное преобразование Лапласа относительно переменной $t$, получаем для изображения

$$T(r, p) = \int_0^\infty e^{-pt} S(r, t)\, dt$$

функции $T(r, p)$ задачу

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} - \frac{b^2 + p}{a^2} T + \frac{\theta}{a^2 p} = 0, \tag{2}$$

$$T(r_0, p) = \frac{\alpha}{p}, \quad \frac{dT}{dr}(R, p) = 0.$$

Общим решением задачи (2) будет функция

$$T(r, p) = \frac{\theta}{p(p + b^2)} +$$

$$+ \frac{\alpha p + \alpha b^2 - \theta}{p(p + b^2)} \cdot \frac{I_0(\omega r) K_1(\omega R) + K_0(\omega r) I_1(\omega R)}{I_0(\omega r_0) K_1(\omega R) + K_0(\omega r_0) I_1(\omega R)},$$

где

$$\omega^2 = \frac{p + b^2}{a^2},$$

$I_\lambda(z)$, $K_\lambda(z)$ — цилиндрические функции мнимого аргумента соответственно первого и второго рода порядка $\lambda$.

По формуле обращения Римана — Меллина

$$S(r, t) = \frac{\theta}{b^2}(1 - e^{-b^2 t}) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{\alpha p + \alpha b^2 - \theta}{p(p + b^2)} \cdot \frac{I_0(\omega r) K_1(\omega R) + K_0(\omega r) I_1(\omega R)}{I_0(\omega r_0) K_1(\omega R) + K_0(\omega r_0) I_1(\omega R)} e^{pt}\, dp, \tag{3}$$

где интегрирование происходит по произвольной прямой ($\gamma > 0$), параллельной мнимой оси.

Подынтегральная функция относительно $p$ однозначна и обладает простыми полюсами в точках

$$p = 0, \quad p = -b^2, \quad p_k = -b^2 - a^2 s_k, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

где $s_k$ — корни уравнения

$$J_0(r_0 s) Y_1(Rs) - J_1(Rs) Y_0(r_0 s) = 0, \tag{4}$$

$J_\lambda(z)$, $Y_\lambda(z)$ — цилиндрические функции соответственно первого и второго рода порядка $\lambda$. Как известно [5], корни уравнения (4) действительные и простые. Так как у нас выполнены все условия леммы Жордана, то для вычисления интеграла (3) достаточно найти сумму вычетов подынтегральной функции во всех полюсах.

После вычислений находим искомую функцию

$$h(r, t) - H = S(r, t) = \frac{\theta}{b^2} +$$

$$+ \frac{\alpha b^2 - \theta}{b^2} \cdot \frac{I_0\left(\frac{br}{a}\right) K_1\left(\frac{bR}{a}\right) + K_0\left(\frac{br}{a}\right) I_1\left(\frac{bR}{a}\right)}{I_0\left(\frac{br_0}{a}\right) K_1\left(\frac{bR}{a}\right) + K_0\left(\frac{br_0}{a}\right) I_1\left(\frac{bR}{a}\right)} +$$

$$+ \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta + \alpha a^2 s_k^2}{b^2 + a^2 s_k^2} A(r) e^{-(b^2 + a^2 s_k^2) t}, \tag{5}$$

где

$$A(r) = \frac{J_0(rs_k) Y_1(Rs_k) - J_1(Rs_k) Y_0(rs_k)}{J_0^2(r_0 s_k) - J_1^2(Rs_k)} J_1(Rs_k) J_0(r_0 s_k).$$

Из асимптотических разложений цилиндрических функций следует, что

$$\lim_{b \to 0} \frac{I_0\left(\frac{br}{a}\right) K_1\left(\frac{bR}{a}\right) + K_0\left(\frac{br}{a}\right) I_1\left(\frac{bR}{a}\right)}{I_0\left(\frac{br_0}{a}\right) K_1\left(\frac{bR}{a}\right) + K_0\left(\frac{br_0}{a}\right) I_1\left(\frac{bR}{a}\right)} = 1,$$

$$\lim_{b \to 0} \frac{1}{b^2} \left\{ 1 - \frac{I_0\left(\frac{br}{a}\right) K_1\left(\frac{bR}{a}\right) + K_0\left(\frac{br}{a}\right) I_1\left(\frac{bR}{a}\right)}{I_0\left(\frac{br_0}{a}\right) K_1\left(\frac{bR}{a}\right) + K_0\left(\frac{br_0}{a}\right) I_1\left(\frac{bR}{a}\right)} \right\} =$$

$$= \frac{R^2}{2a^2} \ln \frac{r}{r_0} - \frac{1}{4a^2} (r^2 - r_0^2),$$

а поэтому, если в (5) положить $b = 0$, т. е. считать водоупор совершенно непроницаемым, то получаем известный результат

$$h(r, t) = H + \frac{\theta R^2}{2a^2} \left( \ln \frac{r}{r_0} - \frac{r^2 - r_0^2}{2R^2} \right) +$$

$$+ \pi \sum_{k=1}^{\infty} \left( \alpha + \frac{\theta}{a^2 s_k^2} \right) A(r) e^{-a^2 s_k^2 t}.$$

Для (5) можно получить более простое приближенное выражение аналогично тому, как это сделано в работах [1, 3].

§ 2. **Неустановившийся приток жидкости к скважине конечного радиуса при постоянном дебите.** В отличие от предыдущего параграфа будем сейчас считать заданным и постоянным не уровень воды в скважине радиуса $r_0$, а его дебит $Q$. Тогда для функции

$$S(r,\ t) = h(r,\ t) - H$$

получаем краевую задачу

$$\frac{\partial S}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial r} \right) - b^2 S + \theta,$$

$$S(r,\ 0) = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial r}(r_0,\ t) = \beta, \quad \frac{\partial S}{\partial r}(R,\ t) = 0,$$

где

$$\beta = -\frac{Q}{2\pi k r_0 M},$$

$M$ — некоторое среднее значение глубины потока. Аналогично предыдущему для изображения по Лапласу $T(r,\ p)$ функции $S(r,\ t)$ находим

$$T(r,\ p) = \beta \frac{K_1(\omega R) I_0(\omega r) + I_1(\omega R) K_0(\omega r)}{p\omega \{K_1(\omega R) I_1(\omega r_0) - I_1(\omega R) K_1(\omega r_0)\}} + \frac{\theta}{p(p+b^2)}, \tag{6}$$

где, как и ранее,

$$\omega = \frac{\sqrt{p+b^2}}{a}.$$

Первое слагаемое в равенстве (6) четное, следовательно, однозначная функция. Так как выполнены все условия леммы Жордана, то для нахождения оригинала достаточно найти сумму вычетов функции

$$\frac{K_1(\omega R) I_0(\omega r) + I_1(\omega R) K_0(\omega r)}{p\omega \{K_1(\omega R) I_1(\omega r_0) - I_1(\omega R) K_1(\omega r_0)\}} e^{pt}$$

в ее особых точках (полюсах)

$$p = 0, \quad p = -b^2, \quad p_k = -b^2 - a^2 s_k^2, \qquad k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

где $s_k$ — корни уравнения

$$J_1(sR)\, Y_1(sr_0) - J_1(sr_0)\, Y_1(sR) = 0.$$

Известно [5], что все $s_k$ действительные и простые.

После вычислений и преобразований находим

$$h(r,\ t) - H = \frac{\theta}{b^2}(1 - e^{-b^2 t}) + 2\beta \frac{a^2 r_0}{b^2 (R^2 - r_0^2)} e^{-b^2 t} +$$

$$+ \frac{a\beta}{b} \frac{K_1\left(\frac{bR}{a}\right) I_0\left(\frac{br}{a}\right) + I_1\left(\frac{bR}{a}\right) K_0\left(\frac{br_0}{a}\right)}{K_1\left(\frac{bR}{a}\right) I_1\left(\frac{br_0}{a}\right) - I_1\left(\frac{bR}{a}\right) K_1\left(\frac{br_0}{a}\right)} +$$

$$+ \pi a^2 \beta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k}{b^2 + a^2 s_k^2} B(r)\, e^{-(b^2 + a^2 s_k^2)t}, \tag{7}$$

где

$$B(r)=\frac{J_1(s_kR)\,Y_0(s_kr)-J_1(s_kr)\,Y_1(s_kR)}{J_1^2(s_kr_0)-J_1^2(s_kR)}\,J_1(s_kR)\,J_1(s_kr_0).$$

В случае непроницаемого водоупора (после перехода в (7) к пределу, когда $b\to 0$) находим

$$h(r,t)=H+\theta t-\frac{\beta}{R^2-r_0^2}\left(2a^2r_0t+\frac{1}{2}r^2r_0-\right.$$

$$\left.-R^2r_0\ln\frac{r}{R}+\frac{aR^2r_0^3}{R^2-r_0^2}\ln\frac{R}{r_0}\right)+\pi\beta\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B(r)}{s_k}e^{-a^2s_k^2t}.$$

**§ 3. Приток жидкости к скважине бесконечно тонкого радиуса при постоянном дебите.** Для бесконечно тонкой скважины, вместо задания $\frac{\partial S}{\partial r}$ при $r=r_0$, как в § 2, имеем граничное условие

$$\lim_{r\to 0}\left(r\frac{\partial S}{\partial r}\right)=\gamma,$$

где

$$\gamma=-\frac{Q}{2\pi kM}.$$

Остальные обозначения те же, что и в предыдущих параграфах.

Решением операторного уравнения

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{dT}{dr}-\frac{b^2+p}{a^2}T+\frac{\theta}{a^2p}=0,$$

удовлетворяющим граничным условиям

$$\frac{dT}{dr}(R,p)=0,\quad \lim_{r\to 0}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=\frac{\gamma}{p},$$

будет функция

$$T(r,p)=-\frac{\gamma}{p}\left\{\frac{K_1(\omega R)}{I_1(\omega R)}I_0(\omega r)+K_0(\omega r)\right\}+\frac{\varepsilon}{p(p+b^2)},$$

где $\omega$ то же, что и в предыдущих параграфах.

Как и ранее, для нахождения оригинала достаточно найти сумму вычетов функции

$$\frac{K_1(\omega R)\,I_0(\omega r)+I_1(\omega R)\,K_0(\omega r)}{pI_1(\omega R)}e^{pt}$$

во всех ее особых точках. Особыми точками этой функции являются полюса

$$p=0,\quad p=-b^2,\quad p_k=-b^2-a^2s_k^2,\qquad k=1,2,3,\ldots,$$

где $s_k$ (они вещественны) корни уравнения

$$J_1(Rs)=0.$$

После вычислений и преобразований находим

$$h(r,t)-H=S(r,t)=\frac{\theta}{b^2}\left(1-e^{-b^2t}\right)+\frac{2\gamma a^2}{b^2R^2}e^{-b^2t}-$$

$$-\gamma\frac{K_1\left(\frac{bR}{a}\right)I_0\left(\frac{br}{a}\right)+I_1\left(\frac{bR}{a}\right)K_0\left(\frac{br}{a}\right)}{I_1\left(\frac{bR}{a}\right)}+$$

$$+\frac{2\gamma a^2}{R}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0(rs_k)}{(b^2+a^2s_k^2)\,J_0(Rs_k)}\,e^{-(b^2+a^2s_k^2)t}.$$

Из асимптотического разложения цилиндрических функций следует, что

$$\lim_{b\to 0}\left\{\frac{K_1\left(\frac{bR}{a}\right)}{I_1\left(\frac{bR}{a}\right)}I_0\left(\frac{br}{a}\right)+K_0\left(\frac{br}{a}\right)-\frac{2a^2}{b^2R^2}e^{-b^2t}\right\}=$$

$$=-\ln\frac{r}{R}+\frac{r^2}{2R^2}+\frac{2a^2}{R^2}t-\frac{3}{4}.$$

Следовательно,

$$h(r,t)-H=\varepsilon t+\gamma\left(\ln\frac{r}{R}-\frac{r^2}{2R^2}+\frac{3}{4}-\frac{2a^2t}{R^2}\right)+$$

$$+\frac{2\gamma}{R}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0(rs_k)}{s_k^2J_0^2(Rs_k)}e^{-a^2s_k^2t},$$

что совпадает с результатом [1, 2] для совершенно непроницаемого водоупора.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Полубаринова-Кочина П. Я., Пряжинская В. Г., Эмих В. Н., Математические методы в вопросах орошения, «Наука», 1969.
2. Albert P., Methode d'estimation des reserves. VI — émes journées de l'hydraulique. Nancy, 1960, Qustion VI, rapport N 4.
3. Аверьянов С. Ф., Усенко В. С., Способ расчета систематического вертикального дренажа. — Управление поверхностными и подземными водными ресурсами и их использование, Изд-во АН СССР, 1961.
4. Баклушин М. Б., К методике расчета неустановившегося движения подземных вод к одиночной совершенной скважине.— Изв. АН УзССР, серия техн. наук, 1971, № 3.
5. Янке Е., Эмде Ю., Леш Ф., Специальные функции, 1968.



*T. I. MATWEJENKO*


## EINIGE AUFGABEN BEIM NICHTSTATIONÄREN EINFLIEBEN VAN FLÜSSIGKEIT IN DIE OFFNUNG EINES KRESFÖRMIGEN GEBIETS UNTER BERÜCKSICHTIGUNG VON SCHWACHER DURCHLÄSSIGKEIT DER WANDUNG


Zusammenfassung

In der Arbeit wurde die Lösung der linearisieren Bussinesk'schen Gleichung gefunden unter der Vorraussetzung, daβ entweder der Staudruck oder der Versult durch die Wandung einer Offnung endlichen Radiusses vorgegeben ist, die in einem kreisförmigen Gebiet wirkt. Des weiteren wurde der Toll einer unendlicht dünnen Offnung betrachtet.