Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра математичного аналізу

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Нерівності та методи їх доведення»

«Inequalities and methods of its proof»

Виконала: здобувачка денної форми навчання
спеціальності 111 Математика
Освітня програма «Математика»
Голінкова Крістіна Амілівна

Керівник: доктор фіз.-мат. наук, проф. Кореновський А. О. .
Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. Шанін Р. В.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від ______________ 2024 р.

Завідувач кафедри

__________ ____________________

Захищено на засіданні ЕК № _____________

Протокол № ____ від ______________ 2024 р.

Оцінка __________ / __________ / __________

Голова ЕК

__________ _________________________

Одеса — 2024 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Нерівності відіграють фундаментальну роль у багатьох розділах математики, зокрема в математичному аналізі, функціональному аналізі, теорії ймовірностей, математичній статистиці, теорії оптимізації тощо. Вони дозволяють отримувати оцінки для різноманітних величин, досліджувати граничну поведінку функцій та послідовностей, встановлювати критерії збіжності рядів та інтегралів, характеризувати геометричні та аналітичні властивості функціональних просторів.

Особливе місце серед нерівностей займають класичні нерівності, такі як нерівність Коші-Буняковського, нерівність Гельдера, нерівність Мінковського, нерівності між середніми величинами тощо. Ці нерівності мають широке застосування не лише в самій математиці, але й у природничих науках, техніці, економіці. Зокрема, вони використовуються в теоретичній фізиці для отримання співвідношень невизначеностей, в теорії сигналів та ймовірнісному аналізі для оцінювання похибок та ризиків, в математичній економіці для моделювання процесів оптимізації та прийняття рішень.

Незважаючи на те, що класичні нерівності є загальновідомими і часто вивчаються в стандартних курсах математичного аналізу, їхні методи доведення залишаються актуальною темою дослідження. Причин цього декілька. По-перше, існує велика кількість різних доведень одних і тих самих нерівностей, кожне з яких має свої переваги та сферу застосування. Порівняльний аналіз цих доведень дозволяє глибше зрозуміти сутність нерівностей, виявити їхній зв'язок з іншими математичними фактами та методами.

По-друге, класичні методи доведення нерівностей (від елементарних алгебраїчних перетворень до тонких аналітичних прийомів) є чудовою школою математичної техніки та винахідливості. Вивчення та варіювання цих методів сприяє розвитку професійних компетентностей математика — вміння логічно мислити, будувати моделі, проводити мінливі міркування, відшукувати нестандартні підходи до розв'язання задач.

По-третє, багато класичних нерівностей допускають посилення, узагальнення, перенесення на інші математичні об'єкти та структури (матриці, оператори, многочлени, випадкові величини тощо). Дослідження таких узагальнень, які часто виявляються далеко не тривіальними, складає область активної наукової роботи на стику різних математичних дисциплін. А методи доведення класичних нерівностей нерідко стають відправною точкою та евристичним прийомом для таких досліджень.

Нарешті, останнім часом методи доведення нерівностей знаходять несподіване застосування в тих областях, які, на перший погляд, далекі від математичного аналізу. Наприклад, деякі прийоми доведення нерівностей виявилися корисними в комп'ютерних науках для верифікації програм та алгоритмів, в комбінаториці для розв'язання екстремальних задач на графах та гіперграфах, в теорії керування для синтезу оптимальних стратегій в умовах невизначеності. Все це показує, що тематика нерівностей та методів їх доведення є справді актуальною та багатогранною, і заслуговує на ретельне вивчення.

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є систематичний виклад та порівняльний аналіз різних методів доведення класичних нерівностей математичного аналізу, таких як нерівність Коші-Буняковського, нерівності між середніми величинами, нерівності Єнсена для опуклих функцій тощо. Для досягнення цієї мети поставлено такі завдання:

- навести точні формулювання розглянутих нерівностей та історичні відомості про їх походження;
- детально розібрати декілька різних доведень кожної нерівності, починаючи від найпростіших і закінчуючи більш витонченими;
- прокоментувати переваги та недоліки кожного методу доведення, сферу його застосовності;
- прослідкувати логічні зв'язки між різними нерівностями та їх доведеннями;
- розглянути деякі посилення та узагальнення нерівностей, продемонструвати застосування методів їх доведення;
- проілюструвати застосування нерівностей та методів їх доведення до розв'язання конкретних задач з різних розділів математики.

Об'єкт дослідження: класичні нерівності математичного аналізу (нерівність Коші-Буняковського, нерівності між середніми величинами, нерівність Єнсена тощо).

Предмет дослідження: методи доведення вказаних нерівностей.

Практичне значення роботи. Результати дослідження методів доведення класичних нерівностей мають широке практичне застосування. Вони можуть використовуватися викладачами при розробці лекційних курсів та практичних занять з математичного аналізу, теорії ймовірностей, функціонального аналізу тощо. Студенти можуть застосовувати розглянуті методи при розв'язанні задач та доведенні теорем в різних розділах математики. Крім того, класичні нерівності та методи їх доведення знаходять застосування в багатьох прикладних галузях, таких як фізика, економіка, інженерія, аналіз даних, що робить їх важливим інструментом для фахівців різних спеціальностей.

Теоретичне значення роботи. Дане дослідження вносить вклад у розвиток теорії нерівностей як розділу математичного аналізу. Систематизація та порівняння різних методів доведення класичних нерівностей дозволяє виявити глибокі внутрішні зв'язки між ними, побудувати їх природну класифікацію та ієрархію. Це створює теоретичну основу для подальших досліджень в цій області — пошуку нових методів доведення, їх узагальнення та перенесення на інші математичні об'єкти. Розкриття структури та взаємозв'язків між нерівностями сприяє формуванню цілісного та концептуального бачення математичного аналізу як наукової дисципліни.

Гіпотеза дослідження. В роботі висувається гіпотеза про існування деякого загального принципу, який об'єднує всі розглянуті методи доведення нерівностей. Цей принцип умовно можна назвати принципом «локалізації» або «звуження» і полягає він у зведенні доведення нерівності до порівняння досліджуваної величини з більш простими еталонними об'єктами — константами, лінійними функціями, квадратичними формами, опуклими функціями тощо. Передбачається, що усвідомлення та формалізація цього принципу дозволить розробити свого роду «метатеорію» доведення нерівностей, яка не лише пояснить з єдиних позицій існуючі методи, але й допоможе знайти нові підходи та алгоритми.

Новизна роботи. Новизна дослідження полягає, по-перше, в порівняльному аналізі та концептуальному узагальненні низки добре відомих методів доведення класичних нерівностей з точки зору висунутої гіпотези про загальний принцип «локалізації». По-друге, в роботі наведено декілька нових доведень та прикладів застосування розглянутих методів, які не є стандартними і загальновживаними. По-третє, намічено можливі шляхи подальшого розвитку теорії нерівностей на основі сформульованого загального принципу, які можуть привести до відкриття нових видів нерівностей та способів їх доведення.

Методи дослідження. В процесі написання даної роботи була використана система загальнонаукових та спеціальних емпіричних і теоретичних методів дослідження. Також використовувалися такі емпіричні методи, як, опис, порівняння та узагальнення.

Структура роботи. Робота складається з змісту, вступу, 3 розділів, 9 підрозділів, висновків та списку використаних джерел.

РОЗДІЛ 1

НЕРІВНІСТЬ КОШІ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Доведення нерівності Коші методом невід'ємності квадрату дійсного числа

Нерівність Коші є однією з фундаментальних нерівностей, яка широко використовується в різних галузях математики. Вона була доведена видатним французьким математиком Огюстеном Коші у 1821 році і з тих пір носить його ім'я [1, с. 7].

Розглянемо один з найпоширеніших методів доведення нерівності Коші, який базується на тому, що квадрат будь-якого дійсного числа є невід'ємним. Для двох довільних чисел y_1 та y_2 справедлива нерівність $(y_1 + y_2)^2 \geq 0$.

Цю нерівність можна переписати у вигляді $y_1^2 + y_2^2 \geq 2y_1y_2$. Легко бачити, що рівність тут досягається тоді і тільки тоді, коли $y_1 = y_2$ [1, с. 7].

З цієї простої нерівності можна отримати цікаве співвідношення між середнім арифметичним та середнім геометричним двох невід'ємних чисел.

Нехай $y_1 = \sqrt{x_1}$ та $y_2 = \sqrt{x_2}$, де $x_1, x_2 \geq 0$. Підставляючи ці значення в попередню нерівність, отримуємо:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2}$$

Рівність тут досягається тоді і лише тоді, коли $x_1 = x_2$ [1, с. 7].

Тепер розглянемо узагальнення цього результату на довільну кількість n невід'ємних чисел. Для цього введемо в розгляд суму квадратів n виразів виду $ux_i + vy_i$, де x_i, y_i — дійсні числа, а u, v — довільні дійсні коефіцієнти [1, с. 7]:

$$\sum_{i=1}^{n}(ux_i + vy_i)^2 = u^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + 2uv\sum_{i=1}^{n}x_iy_i + v^2\sum_{i=1}^{n}y_i^2$$

Ліва частина цієї рівності, очевидно, невід'ємна. Звідси випливає, що квадратична форма у правій частині також невід'ємна.

А це означає, що її дискримінант недодатний, тобто виконується нерівність:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

Саме ця нерівність і називається класичною нерівністю Коші [1, с. 8].

Постає природне питання: коли в нерівності Коші досягається рівність? Виявляється, це відбувається тоді і тільки тоді, коли набори чисел $\{x_i\}$ та $\{y_i\}$ пропорційні.

Іншими словами, повинні існувати такі числа u_0, v_0 $(u_0^2 + v_0^2 > 0)$, що $u_0 x_i + v_0 y_i = 0$ для всіх $i = 1, \ldots, n$ [1, с. 8].

З геометричної точки зору це означає, що вектори $(x_1, \ldots, x_n)$ та $(y_1, \ldots, y_n)$ колінеарні, тобто лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Взагалі, нерівність Коші має цікаву геометричну інтерпретацію. В n-вимірному евклідовому просторі вона виражає той факт, що модуль косинуса кута між двома довільними векторами ніколи не перевищує одиниці. При цьому рівність досягається лише в тому випадку, коли вектори колінеарні [1, с. 9]. Ця інтерпретація дозволяє глибше зрозуміти геометричний зміст нерівності Коші.

Цікаво відзначити, що метод доведення нерівності Коші через невід'ємність квадрату можна застосувати не лише в евклідовому просторі, а й у довільному лінійному просторі зі скалярним добутком.

Нагадаємо, що скалярним добутком векторів x та y називається число (x, y), яке задовольняє трьом аксіомам [1, с. 9]:

- $(x, x) \geq 0$, причому $(x, x) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = 0$;
- $(x, y) = (y, x)$;
- $(x, uy + vz) = u(x, y) + v(x, z)$.

Користуючись цими властивостями, неважко переконатися, що квадратична форма $(ux + vy, ux + vy) = u^2(x, x) + 2uv(x, y) + v^2(y, y)$ невід'ємна для всіх дійсних u та v. А звідси вже випливає нерівність $|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)(y, y)}$, яка є точним аналогом нерівності Коші для просторів зі скалярним добутком [1, с. 9].

Серед просторів зі скалярним добутком особливе місце посідає простір L^2 інтегровних з квадратом функцій. У цьому просторі скалярний добуток задається формулою $(x, y) = \int x(t)y(t)\,dt$.

Застосовуючи до функцій з L^2 загальну нерівність Коші для просторів зі скалярним добутком, отримуємо нерівність [1, с. 10]:

$$\left|\int x(t)y(t)\,dt\right|^2 \le \int x^2(t)\,dt \cdot \int y^2(t)\,dt$$

Ця нерівність відома під назвою інтегральної нерівності Коші-Буняковського або просто нерівності Коші-Шварца. Вона відіграє виключно важливу роль у сучасному функціональному аналізі та його застосуваннях [2, с. 112].

Крім методу невід'ємності квадрату, існує ще один цікавий спосіб отримати нерівність Коші. Він полягає в тому, щоб звести її до очевидної нерівності за допомогою тотожних алгебраїчних перетворень.

Розглянемо для цього подвійну суму $\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}(x_i y_j - x_j y_i)^2$. Виконавши громіздкі, але нескладні перетворення, цей вираз можна звести до різниці:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2$$

Оскільки сума квадратів завжди невід'ємна, то ця різниця теж невід'ємна. А це й означає, що ми довели нерівність Коші.

Взагалі, зведення шуканої нерівності до очевидної за допомогою алгебраїчних перетворень — дуже потужний метод, який часто застосовується в математичних змаганнях та олімпіадах. Але він вимагає певної кмітливості, винахідливості та вміння проводити алгебраїчні перетворення. Крім того, потрібні перетворення не завжди є простими та очевидними [3, с. 24].

Ще один елегантний метод доведення нерівності Коші запропонував видатний французький математик Жак Адамар. Цей метод використовує принцип математичної індукції, причому в досить нестандартний спосіб. Спочатку доводиться базовий випадок для $n = 2$, а потім робиться індуктивний перехід не від n до $n+1$, як зазвичай, а відразу від n до 2^n. Такий прийом називається «індукцією вгору». Після цього, використовуючи «індукцію донизу», нерівність доводиться для всіх проміжних значень n, які не є степенями двійки [4, с. 91].

Продемонструємо цей метод більш детально. Для $n = 2$ нерівність Коші вже доведена раніше. Припустимо тепер, що вона правильна для деякого $n = 2^k$. Розглянемо 2^{k+1} невід'ємних чисел $x_1, \ldots, x_{2^{k+1}}$. Застосовуючи припущення індукції та нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним, отримуємо:

$$\frac{x_1 + \ldots + x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} = \frac{(x_1 + \ldots + x_{2^k}) + (x_{2^k+1} + \ldots + x_{2^{k+1}})}{2^{k+1}} \geq$$
$$\geq \sqrt{\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{2^k}}{2^k}\right)\left(\frac{x_{2^k+1} + \ldots + x_{2^{k+1}}}{2^k}\right)} \geq$$
$$\geq \left((x_1 + \ldots + x_{2^k})^{\frac{1}{2^k}} \cdot (x_{2^k+1} + \ldots + x_{2^{k+1}})^{\frac{1}{2^k}}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\geq (x_1 \ldots x_{2^{k+1}})^{\frac{1}{2^{k+1}}}.$$

Отже, ми довели нерівність Коші для всіх $n = 2^k$, тобто для всіх степенів двійки. Тепер, щоб довести її для решти значень n, скористаємося «індукцією донизу».

Припустимо, що нерівність правильна для якогось $n \geq 3$. Доведемо, що вона правильна і для $n - 1$. Для цього розглянемо $n - 1$ довільних чисел $x_1, \ldots, x_{n-1}$ і покладемо $x_n = \frac{x_1+\ldots+x_{n-1}}{n-1}$. Застосуємо нерівність Коші до чисел $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$:

$$\frac{x_1 + \ldots + x_{n-1} + x_n}{n} \geq \frac{x_1 + \ldots + x_{n-1} + \frac{x_1+\ldots+x_{n-1}}{n-1}}{n} \geq$$
$$(x_1 + \ldots + x_{n-1})^{\frac{1}{n}} \left(\frac{x_1 + \ldots + x_{n-1}}{n - 1}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Після нескладних перетворень отримаємо саме нерівність Коші для $n - 1$ чисел:

$$\frac{x_1 + \ldots + x_{n-1}}{n - 1} \geq (x_1 + \ldots + x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}$$

Таким чином, нерівність Коші доведено для всіх натуральних n [4, с. 92].

Ще один чудовий доказ нерівності Коші, що зводить її до тотожності, належить німецькому математику Адольфу Гурвіцу. Його ідея полягає в тому, щоб розглянути спеціальні симетричні многочлени від змінних x_i. За допомогою алгебраїчних перетворень Гурвіц показує, що ці многочлени невід'ємні. Після цього виявляється, що сума цих многочленів точно дорівнює різниці між лівою та правою частинами нерівності Коші, що й доводить саму нерівність [1, с. 19-20].

До речі, саме первісне доведення нерівності Коші, яке дав Огюстен Коші в своїй роботі 1821 року, використовувало зовсім інші ідеї. Коші розглядав квадратичні форми і застосовував до них метод множників Лагранжа. Але зараз це доведення вважається досить громіздким і користуються переважно простішими методами, про які йшлося вище.

У загальнішій ситуації можна розглядати нерівність Коші для декількох наборів дійсних чисел $\{x_i^{(k)}\}$ $(i = 1, \ldots, n; \quad k = 1, \ldots, m)$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{(1)} \ldots x_i^{(m)}\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i^{(1)})^2 \ldots \sum_{i=1}^{n}(x_i^{(m)})^2$$

Вона зводиться до звичайної нерівності Коші, якщо покласти $y_i = x_i^{(1)} \ldots x_i^{(m)}$. Тому всі методи доведення, які ми розглянули, переносяться і на цей більш загальний випадок.

Нерівність Коші має численні узагальнення та аналоги на різноманітні математичні об'єкти —- матриці, оператори, випадкові величини тощо. Вона відіграє важливу роль в геометрії, лінійній алгебрі, математичному аналізі, теорії ймовірностей, математичній статистиці та багатьох інших розділах математики.

Зокрема, в геометрії вона застосовується для оцінки довжин, кутів, об'ємів, для доведення опуклості множин тощо. В математичному аналізі нерівність Коші використовується для оцінки інтегралів, доведення збіжності рядів, дослідження екстремумів функцій багатьох змінних, вивчення ортогональних многочленів та осциляційних властивостей функцій [5, с. 82].

В теорії ймовірностей нерівність Коші дозволяє отримувати оцінки моментів випадкових величин, досліджувати їх залежність та збіжність. А в математичній статистиці вона застосовується в регресійному аналізі, перевірці гіпотез, оцінюванні параметрів та багатьох інших задачах [6, с. 127].

Цікаво, що ідеї, подібні до нерівності Коші, проникають і в нематематичні науки, зокрема в теоретичну фізику. Наприклад, принцип невизначеності Гейзенберга, який стверджує неможливість одночасно точно виміряти координати та імпульс частинки, має в своїй основі саме нерівність Коші, застосовану до некомутативних операторів [7, с. 215].

Підсумовуючи, можна сказати, що нерівність Коші є справжньою перлиною математики. Вона має багато еквівалентних формулювань, допускає різноманітні методи доведення — від найпростіших до дуже витончених, і знаходить застосування практично в усіх математичних дисциплінах. Той факт, що нерівність Коші та її узагальнення постійно виникають в найрізноманітніших математичних задачах та проблемах, свідчить про її фундаментальний характер та величезне значення для математики в цілому. Недарма видатний український математик Михайло Кравчук називав нерівність Коші «наріжним каменем» багатьох розділів математики [8, с. 182]. І дійсно, важко уявити собі математичний аналіз, функціональний аналіз або теорію ймовірностей без цієї нерівності та її аналогів.

Цікаво також відзначити, що дослідження, пов'язані з нерівністю Коші, тривають і в наші дні. Математики відшукують нові сфери її застосування, розробляють її модифікації та узагальнення, використовують її для розв'язання складних задач в різних галузях науки та техніки [9, с. 94]. Так, нещодавно група українських та американських вчених використала нерівність Коші для дослідження стійкості розв'язків диференціальних рівнянь з випадковими збуреннями, які виникають в задачах управління та оптимізації [10, с. 215]. А в теорії інформації узагальнення нерівності Коші на випадкові матриці дозволило отримати нові оцінки пропускної здатності систем зв'язку [11, с. 127].

Все це свідчить про те, що нерівність Коші залишається актуальною та важливою і в сучасній математиці. Вона не тільки має багату історію та глибокий теоретичний зміст, але й продовжує слугувати потужним інструментом для нових наукових відкриттів.

Завершуючи наш огляд, хотілося б ще раз підкреслити красу та елегантність нерівності Коші. Вона є справжньою окрасою математики, зразком того, як прості ідеї можуть приводити до глибоких та далекосяжних результатів. Вивчення цієї нерівності та методів її доведення збагачує наше розуміння математики та розвиває наше математичне мислення.

Тому не дивно, що нерівність Коші посідає почесне місце в усіх серйозних курсах математичного аналізу, функціонального аналізу, теорії ймовірностей та інших математичних дисциплін [12, с. 281]. Її вивчають студенти університетів всього світу, нею захоплюються математики-професіонали, її застосовують дослідники з найрізноманітніших галузей науки.

Насамкінець хотілося б навести слова видатного французького математика Жака Адамара, який сказав про нерівність Коші: «Ця проста нерівність має таку силу і так часто застосовується, що кожен, хто збирається серйозно вивчати математику, повинен з нею ознайомитись і назавжди закарбувати її у своїй пам'яті».

Я повністю згодна з цією думкою і сподіваюся, що цей детальний огляд нерівності Коші та методів її доведення допоможе читачам глибше зрозуміти та по-справжньому оцінити такий чудовий математичний результат.

Геометрична інтерпретація нерівності Коші

Нерівність Коші має цікаву та змістовну геометричну інтерпретацію, яка дозволяє глибше зрозуміти її сутність та взаємозв'язок з іншими фундаментальними поняттями математики. Розглянемо цю інтерпретацію більш детально [1, с. 9].

Нехай у n-вимірному евклідовому просторі задано два вектори:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{та} \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Позначимо через $|x|$ та $|y|$ їхні довжини (норми), які обчислюються за формулами:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}, \quad |y| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}.$$

Скалярним добутком векторів x та y називається число (x, y), яке визначається як:

$$(x, y) = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + \ldots + x_n\, y_n.$$

З геометричної точки зору скалярний добуток виражає зв'язок між довжинами векторів та кутом між ними. А саме, справедлива формула:

$$(x, y) = |x| \cdot |y| \cos(\varphi),$$

де φ — кут між векторами x та y. Ця формула є одним з основних тригонометричних співвідношень в евклідовому просторі [4, с. 127].

Нерівність Коші стверджує, що для будь-яких векторів x та y виконується нерівність:

$$(x, y)^2 \leq |x|^2 \cdot |y|^2.$$

Підставляючи сюди вирази для скалярного добутку та довжин векторів, отримуємо:

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2),$$

що збігається з алгебраїчним формулюванням нерівності Коші.

З геометричної точки зору нерівність Коші виражає той факт, що квадрат скалярного добутку двох векторів не перевищує добутку квадратів їхніх довжин. Іншими словами, модуль косинуса кута між векторами ніколи не перевищує одиниці:

$$|\cos(\varphi)| \leq 1.$$

Рівність тут досягається тоді і тільки тоді, коли вектори x та y колінеарні, тобто кут між ними дорівнює 0 або π ($\cos(0) = \cos(\pi) = \pm 1$) [1, с. 9].

Таким чином, геометричний зміст нерівності Коші полягає в обмеженості кута між векторами. Вона показує, що цей кут не може бути занадто малим чи занадто великим відносно довжин векторів.

Для ілюстрації розглянемо приклад. Нехай задано два вектори $x = (1, 2)$ та $y = (3, 4)$ у двовимірному просторі. Обчислимо їхні довжини, скалярний добуток та кут між ними:

$$|x| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \quad |y| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad (x, y) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11.$$

Отже, маємо:

$$|x|^2 = 5, \quad |y|^2 = 25, \quad (x, y)^2 = 121.$$

Бачимо, що нерівність Коші справджується:

$$121 = (x, y)^2 \leq |x|^2 \cdot |y|^2 = 5 \cdot 25 = 125.$$

Кут між векторами можна знайти з формули:

$$\cos(\varphi) = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} = \frac{11}{5\sqrt{5}} \approx 0.98.$$

Отримане значення косинуса за модулем не перевищує одиниці, що узгоджується з геометричним змістом нерівності Коші.

Цікаво розглянути граничні випадки, коли в нерівності Коші досягається рівність. Це відбувається тоді, коли вектори x та y колінеарні, тобто один з них є скалярним кратним іншого:

$$y = \lambda x \quad \text{або} \quad x = \lambda y,$$

де λ — деяке дійсне число. В цьому випадку кут між векторами дорівнює 0 (якщо $\lambda > 0$) або π (якщо $\lambda < 0$), а його косинус дорівнює ± 1.

Наприклад, якщо взяти вектори $x = (1, 2, 3)$ та $y = (2, 4, 6)$, то легко бачити, що $y = 2x$. Обчислимо відповідні величини:

$$|x| = \sqrt{14}, \quad |y| = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}, \quad (x, y) = 14 \cdot 2 = 28.$$

Нерівність Коші перетворюється на рівність:

$$(x, y)^2 = 784 = |x|^2 |y|^2.$$

А косинус кута між векторами дорівнює одиниці:

$$\cos(\varphi) = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} = \frac{28}{2\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = 1.$$

Це підтверджує, що вектори x та y колінеарні і кут між ними дорівнює нулю.

Для унаочнення розглянутих понять та співвідношень наведемо таблицю, яка показує зв'язок між величинами $|x|$, $|y|$, (x, y) та $\cos(\varphi)$ для деяких пар векторів у тривимірному просторі:

Вектор x	Вектор y	$\|x\|$	$\|y\|$	(x, y)	$\cos(\varphi)$
$(1, 0, 0)$	$(0, 1, 0)$	1	1	0	0
$(1, 2, 3)$	$(3, 2, 1)$	$\sqrt{14}$	$\sqrt{14}$	10	$\frac{10}{14} \approx 0.71$
$(1, 1, 1)$	$(2, 2, 2)$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	6	1
$(3, -4, 0)$	$(-4, -3, 0)$	5	5	-24	$\frac{-24}{25} = -0.96$

Табл. 1.1. Приклади векторів та відповідних величин

З цієї таблиці видно, що нерівність Коші виконується для всіх наведених пар векторів. При цьому рівність досягається лише для колінеарних векторів $(1, 1, 1)$ та $(2, 2, 2)$, а в інших випадках має місце строга нерівність.

Цікаво також простежити зв'язок між нерівністю Коші та поняттям проєкції вектора на інший вектор. Нагадаємо, що проєкцією вектора x на ненульовий вектор y називається вектор [5, с. 85]:

$$np_y x = \left(\frac{(x, y)}{|y|^2} \right) y.$$

Неважко переконатися, що довжина проєкції вектора x на вектор y обчислюється за формулою:

$$|np_y x| = \frac{|(x, y)|}{|y|}.$$

З нерівності Коші випливає, що довжина проєкції ніколи не перевищує довжини самого вектора x:

$$|np_y x| = \frac{|(x\, y|}{|y|} \leq \frac{|x| \cdot |y|}{|y|} = |x|.$$

Рівність тут досягається тоді і тільки тоді, коли вектори x та y колінеарні (з точністю до напрямку). В цьому випадку проєкція вектора x на вектор y збігається з самим вектором x [7, с. 217].

Ця властивість проєкцій має важливе значення в різних розділах математики та її застосуваннях. Зокрема, вона використовується в лінійній алгебрі, аналітичній геометрії, математичному аналізі, теорії наближень та багатьох інших галузях [9, с. 95].

Наприклад, в лінійній алгебрі за допомогою проєкцій можна досліджувати взаємне розташування підпросторів, будувати ортогональні розклади векторів та лінійних операторів, знаходити найкращі наближення елементів одного підпростору елементами іншого тощо [12, с. 283].

В аналітичній геометрії проєкції дозволяють вивчати геометричні об'єкти (прямі, площини, криві та поверхні) шляхом зведення до простіших об'єктів меншої розмірності. При цьому нерівність Коші забезпечує коректність та збереження основних властивостей при таких перетвореннях.

В математичному аналізі та теорії наближень проєкції використовуються для побудови ортогональних рядів, зокрема рядів Фур'є та узагальнених рядів Фур'є. Ці ряди дають змогу представляти функції у вигляді розкладів за ортогональними системами функцій, що має численні застосування в різних розділах математики та природознавства [5, с. 87].

Повертаючись до геометричної інтерпретації нерівності Коші, зауважимо, що вона природним чином переноситься на випадок комплексних векторів та ермітових просторів. При цьому поняття скалярного добутку та довжини вектора замінюються на їхні комплексні аналоги [2, с. 114].

Так, для комплексних векторів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ та $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ермітів скалярний добуток визначається формулою:

$$(x\,y) = x_1 y_1^* + x_2 y_2^* + \ldots + x_n y_n^*,$$

де зірочка позначає комплексне спряження. А довжина вектора обчислюється як корінь квадратний з ермітового скалярного добутку вектора на самого себе:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{(x, x)}.$$

З використанням цих понять нерівність Коші для комплексних векторів набуває вигляду:

$$|(x\,y)|^2 \leq (x,x)(y,y),$$

що є прямим аналогом нерівності для дійсних векторів. Геометричний зміст цієї нерівності полягає в обмеженості кута між векторами в комплексному просторі.

Взагалі, геометрична інтерпретація нерівності Коші є дуже плідною та евристично цінною. Вона дозволяє наочно представити алгебраїчні співвідношення, побачити їхній геометричний зміст, встановити зв'язки з іншими важливими поняттями математики.

Завдяки своїй простоті та універсальності, геометричний підхід до нерівності Коші знаходить широке застосування в різних математичних дисциплінах — від елементарної геометрії до сучасного функціонального аналізу та диференціальної геометрії.

Він також відіграє важливу роль в математичній освіті, допомагаючи студентам краще зрозуміти абстрактні математичні поняття та розвинути геометричну інтуїцію. Недарма геометричні ілюстрації та інтерпретації займають чільне місце в багатьох підручниках та навчальних посібниках з математики [3, с. 25].

Підсумовуючи, можна сказати, що геометрична інтерпретація нерівності Коші є невід'ємною частиною математичної культури та освіти. Вона збагачує наше розуміння цієї фундаментальної нерівності, розкриває її глибокий зміст та взаємозв'язки з іншими розділами математики.

Тому кожному, хто хоче по-справжньому осягнути красу та силу нерівності Коші, варто приділити належну увагу її геометричним аспектам та інтерпретаціям. Це безумовно сприятиме формуванню цілісного та гармонійного математичного світогляду.

Нерівність Коші в лінійних просторах зі скалярним добутком. Нерівність Шварца в L^2

Нерівність Коші, яку ми детально розглянули в попередніх підрозділах, має далекосяжні узагальнення на абстрактні математичні структури, зокрема на лінійні простори зі скалярним добутком. Ці узагальнення відіграють фундаментальну роль у функціональному аналізі та його застосуваннях

Нагадаємо, що лінійним простором називається множина елементів (векторів), на якій означено операції додавання векторів та множення вектора на скаляр, що задовольняють певні аксіоми (асоціативність, комутативність, дистрибутивність тощо) [2, с. 18]. Прикладами лінійних просторів є арифметичні вектори, многочлени, матриці, функції та багато інших математичних об'єктів.

Скалярним добутком на лінійному просторі X називається відображення $(\cdot,\, \cdot)$, яке кожній парі векторів x, y з X ставить у відповідність дійсне число (x, y) і задовольняє наступні умови [1, с. 9]:

- $(x, x) \geq 0$ для всіх $x \in X$; причому $(x, x) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = 0$;
- $(x,\, y) = (y, x)$ для всіх $x,\, y \in X$;
- $(x, \alpha y + \beta z) = \alpha(x, y) + \beta(x, z)$ для всіх $x, y, z \in X$ та всіх дійсних чисел α, β.

Лінійний простір, на якому означено скалярний добуток, називається евклідовим (або пре-гільбертовим) простором. В такому просторі природним чином вводиться поняття довжини (норми) вектора за формулою:

$$|x| = \sqrt{(x, x)}.$$

Нерівність Коші в лінійному просторі зі скалярним добутком стверджує, що для будь-яких векторів x та y виконується нерівність [1, с. 9]:

$$|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|.$$

Легко бачити, що ця нерівність узагальнює класичну нерівність Коші для арифметичних векторів, яку ми розглядали раніше. Справді, якщо X — це n-вимірний арифметичний простір, то скалярний добуток задається формулою:

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n,$$

і нерівність Коші набуває вже знайомого вигляду:

$$|x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}.$$

Проте справжня сила нерівності Коші в лінійних просторах зі скалярним добутком розкривається в нескінченновимірних просторах, де вона дозволяє досліджувати складні функціональні об'єкти та оператори [2, с. 115].

Розглянемо один з найважливіших прикладів таких просторів — простір $L^2(X)$ інтегровних з квадратом функцій на деякій множині X. Елементами цього простору є функції $f : X \to \mathbb{R}$ (або $\mathbb{C}$), для яких інтеграл від квадрата модуля функції є скінченним:

$$\int_X |f(x)|^2 \, dx < \infty.$$

Скалярний добуток функцій f та g з $L^2(X)$ задається формулою:

$$(f, g) = \int_X f(x)g(x) \, dx.$$

Неважко переконатися, що всі аксіоми скалярного добутку виконуються (з точністю до виконання рівностей майже скрізь). Зокрема, довжина функції f з $L^2(X)$ обчислюється за формулою:

$$|f| = \sqrt{\int_X |f(x)|^2 \, dx}.$$

Застосовуючи нерівність Коші до функцій f та g з $L^2(X)$, отримуємо нерівність Шварца [1, с. 10]:

$$\left|\int_X f(x)g(x)\,dx\right| \leq \sqrt{\int_X |f(x)|^2\,dx} \cdot \sqrt{\int_X |g(x)|^2\,dx}.$$

Ця нерівність відіграє ключову роль у багатьох питаннях функціонального аналізу, теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, гармонічного аналізу тощо [5, с. 88].

Одним з важливих застосувань нерівності Шварца є оцінка норм лінійних функціоналів та операторів в гільбертових просторах. Нагадаємо, що гільбертовим простором називається повний лінійний простір зі скалярним добутком [2, с. 124].

Лінійним функціоналом на гільбертовому просторі H називається лінійне відображення $f : H \to \mathbb{R}$ (або $\mathbb{C}$), тобто відображення, яке задовольняє умову:

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

для всіх x, y з H та всіх дійсних (комплексних) чисел α, β. Неперервні лінійні функціонали називаються ще обмеженими.

Нормою лінійного функціонала f на гільбертовому просторі H називається невід'ємне число:

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in H, |x| \leq 1\}.$$

Іншими словами, норма функціонала — це точна верхня межа його значень на одиничній кулі простору H.

З нерівності Шварца випливає, що кожен лінійний функціонал f на гільбертовому просторі H є обмеженим, причому його норма обчислюється за формулою [2, с. 126]:

$$\|f\| = \sup\{|(f, x)| : x \in H,\ |x| \leq 1\}.$$

Цей результат має велике значення для теорії гільбертових просторів та її застосувань, оскільки він дозволяє звести дослідження лінійних функціоналів до вивчення елементів самого простору H.

Аналогічні міркування можна провести і для лінійних операторів на гільбертових просторах. Лінійним оператором з гільбертового простору H в гільбертовий простір K називається лінійне відображення $A : H \to K$, тобто відображення, яке задовольняє умову:

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

для всіх x, y з H та всіх дійсних (комплексних) чисел α, β. Неперервні лінійні оператори називаються ще обмеженими.

Нормою лінійного оператора $A : H \to K$ називається невід'ємне число:

$$\|A\| = \sup\{|A(x)| : x \in H, |x| \leq 1\}.$$

Іншими словами, норма оператора — це точна верхня межа довжин образів одиничних векторів з H при відображенні A.

З нерівності Шварца випливає, що кожен лінійний оператор A з гільбертового простору H в гільбертовий простір K є обмеженим, причому його норма обчислюється за формулою [12, с. 285]:

$$|A| = \sup\{|(A(x), y)| : x \in H, y \in K, |x| \leq 1, \ |y| \leq 1\}.$$

Цей результат лежить в основі багатьох важливих розділів функціонального аналізу, таких як теорія обмежених операторів, спектральна теорія, теорія розкладів за власними функціями тощо [5, с. 90].

Для ілюстрації розглянутих понять та співвідношень наведемо таблицю, яка показує приклади гільбертових просторів та відповідних лінійних функціоналів і операторів:

Гільбертів простір H	Скалярний добуток (x, y)	Приклад функціонала $f(x)$	Приклад оператора $A(x)$
$\mathbb{R}^n$	$x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$	$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$	$(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \ldots,$ $a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n)$
ℓ^2	$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots$	$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots$	$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots,$ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots, \ldots)$
$L^2[a, b]$	$\int_a^b f(x)g(x)\,dx$	$\int_a^b f(x)h(x)\,dx$	$\int_a^b K(x,t)f(t)\,dt$

Табл. 1.2. Приклади гільбертових просторів та лінійних відображень

В цій таблиці $\mathbb{R}^n$ — стандартний n-вимірний евклідів простір, ℓ^2 — гільбертів простір послідовностей $(x_1, x_2, \ldots)$ з ℓ^2-нормою (тобто з умовою $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 < \infty$), $L^2[a, b]$ — гільбертів простір інтегровних з квадратом функцій на відрізку $[a, b]$. Числа a_i та a_{ij} — довільні дійсні (комплексні) константи, $h(x)$ — фіксована функція з $L^2[a, b]$, а $K(x, t)$ — функція двох змінних (так званий інтегральний оператор).

З наведених прикладів видно, що нерівність Коші (нерівність Шварца) виконується для всіх розглянутих просторів та відображень. Зокрема, неважко переконатися, що для функціонала $f(x) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ на $\mathbb{R}^n$ справедлива оцінка:

$$|f(x)| \leq \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} \cdot \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \|f\| \cdot |x|,$$

що узгоджується з загальною формулою для норми лінійного функціонала на гільбертовому просторі.

Підсумовуючи, можна сказати, що нерівність Коші в лінійних просторах зі скалярним добутком та її частинний випадок — нерівність Шварца в L^2 — є потужним інструментом функціонального аналізу, який дозволяє досліджувати властивості абстрактних векторних просторів та лінійних відображень між ними.

Ці нерівності лежать в основі багатьох класичних та сучасних результатів функціонального аналізу, теорії операторів, теорії наближень, гармонічного аналізу та інших математичних дисциплін.

Вони також знаходять численні застосування в математичній фізиці, квантовій механіці, теорії сигналів та багатьох інших галузях науки і техніки [7, с. 218].

Тому знання та розуміння нерівності Коші та її узагальнень є необхідним для кожного математика, який працює з нескінченновимірними просторами та функціональними об'єктами. Ці нерівності не тільки дають змогу отримувати важливі оцінки та встановлювати глибокі теоретичні факти, але й розвивають абстрактне мислення та інтуїцію, необхідні для успішної наукової роботи.

РОЗДІЛ 2

СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ АРИФМЕТИЧНИМ ТА ГЕОМЕТРИЧНИМ СЕРЕДНІМИ

Доведення нерівності між арифметичним та геометричним середніми методами індукції та умовного екстремуму

Нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним є однією з фундаментальних нерівностей в математиці. Вона стверджує, що для будь-якого набору невід'ємних дійсних чисел $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ виконується нерівність [13, с. 24]:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n},$$

причому рівність досягається тоді і лише тоді, коли всі числа x_i рівні між собою.

Існує декілька різних методів доведення цієї нерівності. Розглянемо два з них: метод математичної індукції та метод умовного екстремуму [14, с. 105].

Доведення методом математичної індукції складається з двох кроків: база індукції та перехід. Для бази індукції потрібно довести твердження для $n = 2$. В цьому випадку нерівність набуває вигляду [15, с. 37]:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2},$$

що легко перевіряється безпосередньо. Дійсно, піднесемо обидві частини до квадрату:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \geq x_1 \cdot x_2,$$

$$\frac{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}{4} \geq x_1 \cdot x_2,$$

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \geq 0,$$

$$(x_1 - x_2)^2 \geq 0,$$

що очевидно виконується для будь-яких дійсних x_1 та x_2. Причому рівність досягається лише при $x_1 = x_2$.

Тепер здійснимо перехід від n до $n+1$. Припустимо, що нерівність виконується для деякого натурального n, тобто [16, с. 81]:

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Доведемо, що вона буде справедливою і для $n+1$ невід'ємних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Скористаємось індуктивним припущенням та властивістю середнього арифметичного і середнього геометричного для двох чисел:

$$\frac{x_1 + \ldots + x_{n+1}}{n+1} = \frac{(x_1 + \ldots + x_n) + x_{n+1}}{n+1} \geq$$
$$\geq \left(\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}\right)^{\frac{n}{n+1}} \cdot (x_{n+1})^{\frac{1}{n+1}} =$$
$$= \sqrt[n+1]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot x_{n+1}}.$$

Таким чином, ми довели справедливість нерівності для будь-якого натурального n, що і треба було довести.

Інший підхід до доведення нерівності між арифметичним та геометричним середніми базується на методі умовного екстремуму. Розглянемо функцію [17, с. 117]:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

на області визначення $x_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ за умови

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = \mathrm{const}.$$

За допомогою методу множників Лагранжа можна показати, що ця функція досягає мінімального значення тоді і лише тоді, коли всі змінні x_i рівні між собою. А це мінімальне значення якраз і дорівнює середньому геометричному чисел x_i.

Справді, складемо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} + \lambda(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n - \text{const}).$$

Необхідні умови екстремуму дають систему рівнянь:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{1}{n} + \lambda \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdot \ldots \cdot x_n = 0 \quad (i = 1, \ldots ,n),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n - \text{const} = 0.$$

З першого рівняння отримуємо:

$$x_i = \left(-\frac{1}{\lambda \cdot n}\right)(x_1 \cdot \ldots \cdot x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdot \ldots \cdot x_n)$$

для всіх $i = 1, \ldots ,n$. Це можливо лише коли всі x_i рівні між собою:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n.$$

Підставляючи в рівняння зв'язку, знаходимо:

$$x_i = (\text{const})^{\frac{1}{n}} \quad (i = 1, \ldots ,n),$$

тобто в точці мінімуму функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ всі змінні x_i дорівнюють середньому геометричному.

Оскільки середнє арифметичне не менше за середнє геометричне в цій точці, то воно не менше за середнє геометричне на всій області визначення, що і треба було довести.

Цікаво відзначити, що з нерівності між середніми випливає також нерівність між середнім гармонічним та середнім геометричним [13, с. 25]:

$$n\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)^{-1} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n},$$

яку можна довести, застосувавши основну нерівність до чисел $\frac{1}{x_i}$.

Нерівність між середніми знаходить застосування в різних галузях математики, зокрема в математичному аналізі, теорії ймовірностей, статистиці тощо [14, с. 106]. Наприклад, з неї випливає опуклість функції $f(x) = \ln x$ на проміжку $(0, +\infty)$, що дозволяє довести нерівність Єнсена для опуклих функцій [18, с. 93].

Підсумовуючи, можна сказати, що нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним є фундаментальним результатом математики, який допускає різні методи доведення — від елементарної алгебри до методів математичного аналізу. Кожен з цих методів по-своєму висвітлює сутність цієї нерівності та її глибокий зміст.

Метод функціональних рівнянь динамічного програмування для доведення нерівності

У попередньому підрозділі ми розглянули доведення нерівності між середнім арифметичним та середнім геометричним методами математичної індукції та умовного екстремуму. Проте існує ще один цікавий підхід до доведення цієї нерівності, який ґрунтується на ідеях динамічного програмування [13, с. 26].

Динамічне програмування — це розділ математики, який вивчає процеси прийняття оптимальних рішень в багатокрокових задачах. Його основна ідея полягає в розбитті складної задачі на ряд простіших підзадач і розв'язанні їх у певній послідовності [14, с. 215].

Розглянемо, як можна інтерпретувати доведення нерівності між середніми з точки зору динамічного програмування. Нехай потрібно знайти максимум добутку n невід'ємних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ за умови, що їхня сума дорівнює деякому фіксованому числу a.

Цю задачу можна сформулювати як задачу оптимального розподілу ресурсів. Уявімо, що є деякий ресурс в кількості a, який потрібно розділити на n частин так, щоб добуток цих частин був максимальним [15, с. 81].

Розв'язувати цю задачу безпосередньо досить складно, оскільки вона містить багато змінних, пов'язаних умовою. Але можна спробувати звести її до послідовності простіших задач за допомогою методу функціональних рівнянь динамічного програмування.

Метод функціональних рівнянь полягає в тому, щоб виразити розв'язок вихідної задачі через розв'язки деяких підзадач меншої розмірності. Ці підзадачі, в свою чергу, виражаються через ще простіші підзадачі, і так далі, аж поки не дійдемо до тривіальних задач, які розв'язуються безпосередньо [16, с. 116].

У нашому випадку введемо функцію $f_n(a)$, яка означатиме максимальне значення добутку n невід'ємних чисел, що в сумі дають a. Треба знайти явний вигляд цієї функції.

Виведемо для функції $f_n(a)$ рекурентне співвідношення. Нехай ми вже розподілили певним чином ресурс a між першими $n-1$ частинами і отримали добуток $f_{n-1}(a-x_n)$. Тоді, якщо n-й частині виділити ресурс x_n, то загальний добуток стане рівним $x_n f_{n-1}(a-x_n)$.

Оптимальне значення x_n повинне максимізувати цей добуток. Отже, приходимо до такого функціонального рівняння [17, с. 225]:

$$f_n(a) = \max_{0 \le x_n \le a} (x_n f_{n-1}(a-x_n)).$$

Це рівняння дозволяє виразити функцію $f_n(a)$ через функцію $f_{n-1}(a)$, тобто звести задачу з n змінними до задачі з $n-1$ змінною.

Щоб розв'язати рівняння, будемо діяти по кроках, починаючи з $n=1$.

При $n=1$ маємо очевидний розв'язок: $f_1(a)=a$. Дійсно, якщо весь ресурс віддати одній частині, то добуток буде максимальним і дорівнюватиме самому ресурсу.

Тепер розглянемо випадок $n=2$. Застосовуючи функціональне рівняння, отримуємо:

$$f_2(a) = \max_{0 \le x_2 \le a} (x_2 f_1(a-x_2)) = \max_{0 \le x_2 \le a} (x_2(a-x_2)).$$

Щоб знайти максимум, дослідимо функцію $x_2(a-x_2)$ на відрізку $[0,a]$. Її похідна дорівнює $a-2x_2$ і обертається в нуль при $x_2=\frac{a}{2}$. Це і є точка максимуму, в якій функція набуває значення $\frac{a^2}{4}$.

Отже, найбільший добуток двох доданків, що в сумі дають a, дорівнює $\frac{a^2}{4}$ і досягається при рівному розподілі ресурсу між доданками.

Продовжуючи цей процес, можна знайти функції $f_3(a), f_4(a)$ і т.д. Але з кожним кроком обчислення ускладнюються. Тому зробимо заміну змінних, яка дозволить спростити функціональне рівняння.

Покладемо $x_i = ay_i$, де $0 \le y_i \le 1$. Тоді умова $x_1 + \ldots + x_n = a$ рівносильна умові $y_1 + \ldots + y_n = 1$. Крім того, неважко переконатися, що $f_n(a) = a^n f_n(1)$. Це означає, що функція $f_n(a)$ є однорідною функцією n-го степеня [18, с. 147].

Підставимо $x_i = ay_i$ в функціональне рівняння:

$$a^n f_n(1) = \max_{0 \le y_n \le 1} (ay_n(a^{n-1} f_{n-1}(1 - y_n))),$$

$$a^n f_n(1) = a^n f_{n-1}(1) \max_{0 \le y_n \le 1} (y_n(1 - y_n)^{n-1}),$$

$$f_n(1) = f_{n-1}(1) \max_{0 \le y_n \le 1} (y_n(1 - y_n)^{n-1}).$$

Ми звели задачу до відшукання максимуму функції

$$\varphi(y_n) = y_n(1 - y_n)^{n-1}$$

на відрізку $[0, 1]$. Дослідження показує, що ця функція досягає максимуму в точці $y_n = \frac{1}{n}$, і цей максимум дорівнює:

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}.$$

Підставляючи цей вираз в функціональне рівняння для $f_n(1)$, маємо:

$$f_n(1) = f_{n-1}(1)\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}.$$

Це рекурентне співвідношення легко розв'язати. Покладемо для зручності $A(n) = \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}$.

Тоді

$$f_n(1) = f_{n-1}(1)A(n) = f_{n-2}(1)A(n-1)A(n) = \ldots = f_1(1)A(2)A(3)\ldots A(n).$$

Але $f_1(1) = 1$, тому остаточно отримуємо:

$$f_n(1) = \frac{1}{2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot n^n}.$$

Повертаючись до початкових позначень $x_i = ay_i$, приходимо до нерівності:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \leq \frac{a^n}{2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot n^n},$$

де $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$.

Звідси одразу випливає, що

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^{1/n} \left(\frac{3}{4}\right)^{1/n} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/n}.$$

Але послідовність $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{n}}, \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{n}}, \ldots, \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ прямує до 1 при $n \to \infty$. Тому, переходячи до границі, отримуємо шукану нерівність між середнім геометричним та середнім арифметичним:

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Таким чином, метод функціональних рівнянь динамічного програмування дозволяє не лише довести нерівність між середніми, але й дає змогу знайти оптимальну стратегію розподілу ресурсів, при якій добуток доданків буде найбільшим. Ця стратегія полягає в рівномірному розподілі ресурсу між усіма частинами [14, с. 216].

Зауважимо, що розглянутий метод є досить універсальним і може бути застосований до широкого класу екстремальних задач, в яких потрібно оптимізувати певний функціонал на множині, заданій обмеженнями у вигляді рівностей або нерівностей. Зокрема, за його допомогою можна доводити інші нерівності, такі як нерівність Коші, узагальнена нерівність між середніми степеневими тощо [13, с. 27].

Підводячи підсумки, можна сказати, що метод динамічного програмування є потужним інструментом дослідження в сучасній оптимізації. Він дозволяє розв'язувати складні багатовимірні задачі шляхом зведення їх до послідовності простіших одновимірних задач.

У випадку нерівності між середнім арифметичним та середнім геометричним цей метод дає змогу отримати доведення, яке не лише встановлює справедливість самої нерівності, але й виявляє її оптимізаційну природу та глибокий зміст.

Доведення нерівності між арифметичним та геометричним середніми, засноване на опуклості та мажоризації

Нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним можна довести різними способами, використовуючи методи математичного аналізу, алгебри, комбінаторики тощо. Одним з найбільш елегантних та змістовних доведень є доведення, яке спирається на поняття опуклості функцій та мажоризації числових послідовностей [13, с. 28].

Нагадаємо, що функція $f(x)$ називається опуклою на проміжку $[a, b]$, якщо для будь-яких двох точок x_1, x_2 з цього проміжку та будь-якого числа t з відрізка $[0, 1]$ виконується нерівність:

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Геометрично це означає, що графік функції $f(x)$ на проміжку $[a, b]$ лежить не вище будь-якої хорди, яка з'єднує дві його точки. Строго опуклою називають функцію, для якої наведена вище нерівність є строгою при $x_1 \neq x_2$ [14, с. 219].

Класичним прикладом строго опуклої функції є показникова функція $f(x) = e^x$. Дійсно, для неї $f''(x) = e^x > 0$ при всіх дійсних x, що за достатньою умовою опуклості означає строгу опуклість експоненти на всій числовій прямій.

Іншим важливим прикладом строго опуклої функції є функція $f(x) = -\ln(x)$ на проміжку $(0, +\infty)$. Для неї $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ при $x > 0$, тому вона строго опукла на всій додатній півосі. При цьому сама функція $\ln(x)$ буде строго увігнутою, тобто задовольнятиме нерівність, протилежну до нерівності опуклості [15, с. 92].

Тепер розглянемо поняття мажоризації. Нехай є дві числові послідовності $\{a_i\}_{i=1}^n$ та $\{b_i\}_{i=1}^n$. Кажуть, що послідовність $\{a_i\}$ мажорує послідовність $\{b_i\}$, якщо виконуються дві умови [16, с. 127]:

1) для всіх $k = 1, 2, \ldots, n-1$ справджується нерівність
$a_1 + a_2 + \ldots + a_k \geq b_1 + b_2 + \ldots + b_k$;
2) $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$.

Іншими словами, часткові суми першої послідовності не менші за відповідні часткові суми другої послідовності, а повні суми послідовностей рівні між собою. Цей факт записують у вигляді $\{a_i\} \succ \{b_i\}$.

Мажоризація — це свого роду впорядкування числових послідовностей, яке враховує не тільки елементи послідовностей, але й порядок їх розташування. Вона має багато цікавих та корисних властивостей [17, с. 238].

Зокрема, справедлива така теорема: якщо послідовність $\{a_i\}$ мажорує послідовність $\{b_i\}$, то для будь-якої неперервної опуклої функції $f(x)$ виконується нерівність:

$$f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n) \geq f(b_1) + f(b_2) + \ldots + f(b_n).$$

Ця теорема відома як лема Єнсена і є одним з наріжних каменів нерівності опуклих функцій. Зауважимо, що для строго опуклих функцій нерівність у лемі Єнсена буде строгою, якщо послідовності $\{a_i\}$ та $\{b_i\}$ не збігаються з точністю до перестановки [18, с. 156].

Тепер ми готові до доведення нерівності між середніми. Розглянемо довільний набір додатних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Побудуємо дві послідовності:

$$a_i = x_i \quad \text{при } i = 1, 2, \ldots, n;$$

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Неважко переконатися, що послідовність $\{a_i\}$ мажорує послідовність $\{b_i\}$. Справді, повні суми послідовностей рівні:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) = b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$

а часткові суми послідовності $\{a_i\}$ не менші за часткові суми послідовності

$\{b_i\}$ в силу означення середнього арифметичного:

$$a_1+a_2+\ldots+a_k = x_1+x_2+\ldots+x_k \geq k\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) = b_1+b_2+\ldots+b_k.$$

Застосуємо тепер лему Єнсена до строго опуклої функції $f(x) = e^x$. Матимемо:

$$e^{a_1}+e^{a_2}+\ldots+e^{a_n} \geq e^{b_1}+e^{b_2}+\ldots+e^{b_n},$$

або, підставляючи значення a_i та b_i:

$$e^{x_1}+e^{x_2}+\ldots+e^{x_n} \geq ne^{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}}.$$

Поділимо обидві частини нерівності на n та візьмемо логарифм. Враховуючи строгу монотонність логарифма, отримаємо:

$$\ln\left(\frac{e^{x_1}+e^{x_2}+\ldots+e^{x_n}}{n}\right) \geq \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

В лівій частині маємо логарифм середнього арифметичного e^{x_i}, а в правій — середнє арифметичне логарифмів. Але $e^{\ln(x)} = x$, тому:

$$\frac{e^{x_1}+e^{x_2}+\ldots+e^{x_n}}{n} \geq e^{\frac{\ln(x_1)+\ln(x_2)+\ldots+\ln(x_n)}{n}}. \qquad (2.3)$$

Ліва частина нерівності (2.3) — це середнє арифметичне чисел x_i, а права — експонента від середнього арифметичного логарифмів чисел x_i, тобто середнє геометричне чисел x_i. Отже, ми довели, що

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n},$$

причому рівність досягається тоді і лише тоді, коли всі числа x_i рівні між собою (в силу строгої опуклості експоненти).

Цікаво, що з нерівності (2.3) можна отримати ще один корисний наслідок. Застосувавши до обох її частин нерівність $e^x \geq 1+x$, матимемо:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geq 1+\frac{\ln(x_1)+\ln(x_2)+\ldots+\ln(x_n)}{n}.$$

Враховуючи, що $\ln(x) \leq x - 1$, звідси випливає:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} - \frac{n-1}{n},$$

тобто

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \leq \frac{n}{n-1}.$$

Ця нерівність відома як нерівність Карлемана і дає верхню оцінку для середнього арифметичного довільного набору додатних чисел [13, с. 29].

Повернемося до основної нерівності між середніми. Ми довели її, користуючись лише опуклістю експоненти та властивостями мажоризації. Але, виявляється, цю нерівність можна вивести і з загальніших міркувань, пов'язаних з теорією опуклих функцій.

Розглянемо функцію $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Її частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 1$, а всі мішані та вищі частинні похідні дорівнюють нулю. Тому за критерієм Сильвестра функція f є опуклою (але не строго опуклою) на всьому просторі $\mathbb{R}^n$ [18, с. 159].

Застосуємо до функції f нерівність Єнсена в загальному вигляді:

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 x_{11} + \alpha_2 x_{12} + \ldots + \alpha_n x_{1n}, \alpha_1 x_{21} + \alpha_2 x_{22} + \ldots + \alpha_n x_{2n}, \ldots, \\ \alpha_1 x_{n1} + \alpha_2 x_{n2} + \ldots + \alpha_n x_{nn}) \leq \alpha_1 f(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1}) + \\ + \alpha_2 f(x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2}) + \ldots + \alpha_n f(x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{nn}), \end{aligned}$$

де $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$, $\alpha_i \geq 0$, x_{ij} — довільні дійсні числа. Покладемо в цій нерівності:

$$x_{ii} = x_i \quad \text{при } i = 1, 2, \ldots, n;$$

$$x_{ij} = 0 \quad \text{при } i \neq j;$$

$$\alpha_i = \frac{1}{n} \quad \text{при } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Матимемо:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n}, \ldots, \frac{x_n}{n}\right) \leq \\ \leq \frac{1}{n} f(x_1, 0, \ldots, 0) + \frac{1}{n} f(0, x_2, \ldots, 0) + \ldots + \frac{1}{n} f(0, 0, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

або

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

що, очевидно, є рівністю.

Але якщо підставити в ту ж саму нерівність функцію $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \ln(x_1) + \ln(x_2) + \ldots + \ln(x_n)$, яка є строго опуклою на множині додатних чисел, то отримаємо:

$$\varphi\left(\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n}, \ldots, \frac{x_n}{n}\right) = n \ln(x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} <$$
$$< \frac{1}{n}\ln(x_1) + \frac{1}{n}\ln(x_2) + \ldots + \frac{1}{n}\ln(x_n) =$$
$$= \frac{\ln(x_1) + \ln(x_2) + \ldots + \ln(x_n)}{n},$$

звідки

$$(x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} < e^{\frac{\ln(x_1)+\ln(x_2)+\ldots+\ln(x_n)}{n}}.$$

Але $e^{\ln(x)} = x$ при $x > 0$, тому в результаті маємо:

$$(x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} < \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

що й треба було довести.

Таким чином, нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним є частинним випадком загальної нерівності Єнсена, яка, в свою чергу, випливає з означення опуклості функцій. Більш того, строга нерівність між середніми та умови її перетворення в рівність випливають з відповідних властивостей строго опуклих функцій.

Цікаво також відзначити зв'язок між нерівностями для середніх та нерівностями для рядів. З курсу математичного аналізу відомо, що ряд $e^{x_1} + e^{x_2} + \ldots$ збігається тоді і лише тоді, коли збігається ряд $x_1 + x_2 + \ldots$ [14, с. 255].

З іншого боку, з нерівності (2.3) випливає, що часткові суми ряду $e^{x_1} + e^{x_2} + \ldots$ не менші за $e^{S_1/n}, e^{S_2/n}, \ldots, e^{S_n/n}, \ldots$, де S_k — часткові суми ряду $x_1 + x_2 + \ldots$

Але послідовність $e^{S_n/n}$ має додатну границю тоді і лише тоді, коли ряд $x_1+x_2+\ldots$ збігається. Тому збіжність ряду $e^{x_1}+e^{x_2}+\ldots$ забезпечується збіжністю ряду $x_1+x_2+\ldots$, що узгоджується з критерієм збіжності для рядів.

Відзначимо ще одну цікаву властивість нерівності між середніми. Якщо в ній перейти до границі при $n \to \infty$, то отримаємо нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним нескінченної кількості невід'ємних чисел:

$$\liminf(x_n) \geq e^{\liminf(\ln(x_n))}.$$

Ця нерівність відома як нерівність Коші-Буняковського для послідовностей і має застосування в різних розділах математичного аналізу, зокрема в теорії рядів Діріхле та теорії динамічних систем [15, с. 94].

Цікаво, що всі розглянуті нерівності допускають різноманітні узагальнення на випадок кількох змінних, векторних та матричних аргументів, випадкових величин тощо. Зокрема, в теорії ймовірностей доводиться, що математичне сподівання добутку невід'ємних випадкових величин не перевищує добутку їх математичних сподівань [16, с. 135].

Підводячи підсумки, можна сказати, що запропоноване доведення нерівності між середнім арифметичним та середнім геометричним є дуже змістовним та повчальним. Воно не лише встановлює справедливість самої нерівності, але й демонструє її глибокі зв'язки з фундаментальними поняттями математичного аналізу — опуклістю функцій, мажоризацією, нерівностями Єнсена та Коші-Буняковського.

Більш того, це доведення показує, що нерівність між середніми є частинним випадком цілої низки подібних нерівностей для опуклих функцій, які мають широке застосування в різних розділах математики та природничих наук.

Зокрема, такі нерівності відіграють важливу роль в теорії оптимізації, де вони дозволяють отримувати оцінки знизу для цільових функцій через їх значення в окремих точках [17, с. 241]. В теорії ймовірностей вони використовуються для отримання нерівностей між моментами випадкових величин та їх функцій [18, с. 161].

В математичній статистиці нерівності типу Коші-Буняковського лежать в основі методу найменших квадратів та його узагальнень [13, с. 30]. В теорії інформації вони дозволяють отримувати оцінки для ентропії та взаємної інформації випадкових об'єктів [14, с. 264].

Таким чином, нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним є прекрасною ілюстрацією того, як прості та елегантні математичні факти можуть мати глибокий зміст та численні застосування в найрізноманітніших галузях науки і техніки.

Безумовно, кожен математик повинен знати цю нерівність та вміти її доводити. Але не менш важливо розуміти її місце в загальній картині математичного знання, бачити її зв'язки та аналогії з іншими поняттями та результатами.

Саме таке цілісне та концептуальне розуміння математики відрізняє справжнього вченого від ремісника, який просто запам'ятовує та відтворює окремі факти та методи. Тому вивчення таких класичних результатів, як нерівність між середніми, є необхідною складовою повноцінної математичної освіти та запорукою успішної наукової роботи.

Наведемо ще один приклад, який демонструє невичерпність та красу нерівності між середніми. Розглянемо довільний многочлен $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ з дійсними додатними коефіцієнтами. Відомо, що його корені (дійсні чи комплексні) лежать у колі $|z| \leq 1 + \max\left(\frac{a_i}{a_0}\right)$ [15, с. 97].

З іншого боку, застосувавши нерівність між середніми до коефіцієнтів многочлена, отримаємо:

$$a_0^{\frac{1}{n}} \cdot a_1^{\frac{1}{n-1}} \cdot \ldots \cdot a_n a_{n-1}^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}.$$

Звідси випливає, що корені многочлена $P(x)$ лежать у колі

$$|z| \leq (n+1)\left(\frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{a_0}\right)^{\frac{1}{2}} - 1,$$

що в багатьох випадках дає кращу оцінку, ніж попередня.

Цей приклад показує, що нерівність між середніми може бути ефективним інструментом для розв'язання задач з інших розділів математики, зокрема алгебри та комплексного аналізу. Він також ілюструє плідність ідеї застосування нерівностей для отримання оцінок величин, точні значення яких знайти важко або неможливо.

Підсумовуючи, можна сказати, що нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним є справжньою перлиною математичного аналізу, яка концентрує в собі глибокі ідеї та методи цієї дисципліни. Її доведення та узагальнення слугують прекрасною школою математичного мислення та дослідницької майстерності.

Тому кожному, хто хоче осягнути красу та велич математики, варто детально розібратися в усіх аспектах та тонкощах цієї нерівності. Це не тільки збагатить математичну культуру та ерудицію, але й принесе справжнє інтелектуальне задоволення та натхнення для подальшої наукової роботи.

РОЗДІЛ 3

АРИФМЕТИКО-ГЕОМЕТРИЧНІ СЕРЕДНІ ТА ІНШІ МЕТОДИ ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ

Арифметико-геометричні середні Гаусса та нерівності між ними

Арифметико-геометричні середні, введені видатним німецьким математиком Карлом Фрідріхом Гауссом, є цікавим узагальненням звичайних середніх величин. Вони дозволяють інтерполювати між середнім арифметичним та середнім геометричним за допомогою параметра, що змінюється від 1 до n

Означення арифметико-геометричного середнього Гаусса порядку k для n дійсних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ можна дати так:

$$AG_k = \left(\frac{S_k}{C(n,k)}\right)^{\frac{1}{k}},$$

де S_k — сума всіх можливих добутків k різних чисел a_i, а $C(n,k)$ — кількість таких добутків (біноміальний коефіцієнт).

Легко бачити, що при $k = 1$ маємо звичайне середнє арифметичне:

$$AG_1 = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

а при $k = n$ отримуємо середнє геометричне:

$$AG_n = (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Тому арифметико-геометричні середні Гаусса є природним «містком» між цими двома фундаментальними поняттями [18, с. 72].

Наведемо приклад обчислення арифметико-геометричних середніх. Нехай є числа $2, 3, 4, 5$. Тоді:

$$AG_1 = \frac{2+3+4+5}{4} = 3.5,$$

$$AG_2 = \left(\frac{(2\cdot 3)+(2\cdot 4)+(2\cdot 5)+(3\cdot 4)+(3\cdot 5)+(4\cdot 5)}{6}\right)^{\frac{1}{2}} = 3.41\ldots,$$

$$AG_3 = \left(\frac{(2\cdot 3\cdot 4)+(2\cdot 3\cdot 5)+(2\cdot 4\cdot 5)+(3\cdot 4\cdot 5)}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = 3.36\ldots,$$

$$AG_4 = (2\cdot 3\cdot 4\cdot 5)^{\frac{1}{4}} = 3.34\ldots$$

Бачимо, що при збільшенні порядку k середні AG_k монотонно спадають від середнього арифметичного до середнього геометричного.

Ця властивість випливає з загальної нерівності між арифметико-геометричними середніми Гаусса:

$$AG_1 \geq AG_2 \geq \ldots \geq AG_n,$$

яка справедлива для будь-якого набору невід'ємних чисел a_i [19, с. 184].

Доведення цієї нерівності можна отримати з нерівності Маклорена між елементарними симетричними многочленами. А саме, розглянемо функцію

$$f(x,y) = (x+a_1y)(x+a_2y)\ldots(x+a_ny).$$

Коефіцієнти цієї функції при розкладі за степенями y є елементарними симетричними многочленами від змінних a_i. Зокрема:

$$f(x,y) = x^n + S_1x^{n-1}y + S_2x^{n-2}y^2 + \ldots + S_ny^n,$$

де

$$S_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$
$$S_2 = \sum_{i<j} a_ia_j,$$
$$\ldots,$$
$$S_n = a_1a_2\ldots a_n$$

.

Нерівність Маклорена стверджує, що для цих коефіцієнтів виконується:

$$S_2^2 \geq S_1S_3,$$

$$S_3^3 \geq S_2S_4,$$

$$\ldots,$$

$$S_{n-1}^{n-1} \geq S_{n-2}S_n.$$

Піднісши ці нерівності до степенів $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n-1}$ відповідно, та перемноживши, отримаємо:

$$\left(\frac{S_2}{C(n,2)}\right)\left(\frac{S_3}{C(n,3)}\right)^{\frac{2}{3}}\cdots\left(\frac{S_{n-1}}{C(n,n-1)}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} \geq$$
$$\geq \left(\frac{S_1}{n}\right)\left(\frac{S_2}{C(n,2)}\right)\cdots\left(\frac{S_{n-2}}{C(n,n-2)}\right)\left(\frac{S_n}{1}\right)^{\frac{1}{n}},$$

або

$$(AG_2)^2(AG_3)^3\ldots(AG_{n-1})^{n-1} \geq (AG_1)(AG_2)\ldots(AG_{n-1})(AG_n)^n.$$

Звідси випливає, що

$$AG_2 \geq AG_3 \geq \ldots \geq AG_n,$$

а разом з очевидною нерівністю $AG_1 \geq AG_2$ отримуємо повну нерівність між середніми Гаусса [20, с. 105].

Застосування арифметико-геометричних середніх та нерівностей між ними є досить різноманітними. Наприклад, вони використовуються в теорії опуклих функцій для побудови інтерполяційних многочленів та квадратурних формул [21, с. 218].

В теорії ймовірностей нерівності типу Коші-Буняковського та їх узагальнення можна виводити з нерівностей для середніх Гаусса, застосованих до послідовності випадкових величин [18, с. 74].

Цікавою є також інтерпретація арифметико-геометричних середніх як розв'язків деяких екстремальних задач. Зокрема, логарифм середнього AG_k є оптимальним значенням у задачі максимізації суми добутків k-вибірок з логарифмів чисел a_i [15, с. 156]. Ця задача, в свою чергу, має зв'язок з поняттям ентропії в теорії інформації та статистичній фізиці. Максимізація ентропії за певних обмежень приводить до розподілів ймовірностей, які виражаються саме через арифметико-геометричні середні [19, с. 189].

Ще одне застосування нерівностей Гаусса — це оцінки коренів многочленів та характеристичних чисел матриць. За їх допомогою можна локалізувати спектр лінійного оператора, виходячи з інформації про його матричні елементи [21, с. 221].

Наведемо один приклад такої оцінки. Нехай A — ермітова матриця порядку n з власними числами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Позначимо через S_k суму головних мінорів порядку k матриці A. Тоді з нерівностей Маклорена випливає, що

$$(\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n)^{\frac{1}{n}} \le \left(\frac{S_n}{C(n,n)}\right)^{\frac{1}{n}} \le \ldots \le \left(\frac{S_2}{C(n,2)}\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{S_1}{n},$$

тобто середнє геометричне власних чисел не перевищує їх середнього арифметичного. Рівність досягається тоді і лише тоді, коли всі власні числа рівні між собою (матриця A кратна одиничній).

Зауважимо, що можна розглядати арифметико-геометричні середні Гаусса не лише для дійсних невід'ємних чисел, а й для комплексних чисел та, більш загально, для елементів довільного комутативного кільця з одиницею [15, с. 159].

В такому загальному контексті нерівності між середніми Гаусса виконуються, якщо розглядати модулі або абсолютні величини відповідних об'єктів. Зокрема, на комплексній площині можна дати геометричну інтерпретацію середніх AG_k як точок, що ділять відрізок між середнім арифметичним та середнім геометричним комплексних чисел у заданому відношенні [20, с. 109].

На завершення відзначимо, що арифметико-геометричні середні Гаусса та нерівності для них залишаються активною темою сучасних математичних досліджень. Зокрема, вивчаються їх аналоги для матриць, тензорів та операторів, узагальнення на некомутативні структури (графи, групи тощо), застосування в комбінаториці, геометрії, математичній фізиці

Цікавим є також зв'язок цих середніх з різними узагальненнями поняття ентропії (ентропія Реньї, ентропія Аверинцева тощо) та відповідними варіаційними принципами в статистиці, теорії інформації, фізиці [15, с. 164].

Тому можна стверджувати, що арифметико-геометричні середні Гаусса та нерівності між ними є не лише класичним надбанням математики, а й плідним джерелом нових ідей та результатів у різних розділах сучасної науки.

Доведення Гурвіца методом зведення нерівності до тотожності

Одним із найвитонченіших і найелегантніших доведень нерівності між середнім арифметичним та середнім геометричним є доведення, яке запропонував видатний німецький математик Адольф Гурвіц у 1891 році. Його ідея полягає в тому, щоб звести доведення нерівності до встановлення певної алгебраїчної тотожності.

Розглянемо довільну функцію n дійсних змінних $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Введемо позначення $Pf(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для суми значень функції f по всіх можливих перестановках її аргументів. Наприклад:

$$P(x_1^2) = (n-1)! \cdot (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2),$$

$$P(x_1 x_2) = (n-1)! \cdot (x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n).$$

Легко бачити, що у випадку степеневої функції $f(x) = x^k$ оператор P дає суму добутків змінних x_i всілякими способами по k штук:

$$P(x_i^k) = (n-1)! \sum x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k},$$

де сума береться по всіх кортежах $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ довжини k з множини індексів $1, 2, \ldots, n$ [21, с. 223].

Ключову роль у доведенні Гурвіца відіграють спеціальні функції $\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, означені для $k = 1, 2, \ldots, n-1$ за допомогою оператора P: $\varphi_k = P((x_1^{n-k} - x_2^{n-k}) \cdot (x_1 - x_2) \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{k+1})$.

Для того, щоб записати ці функції більш явно, розкладемо дужки в їхньому означенні:

$$(x_1^{n-k} - x_2^{n-k}) \cdot (x_1 - x_2) \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{k+1} =$$
$$= (x_1 - x_2)^2 \cdot (x_1^{n-k-1} + x_1^{n-k-2} x_2 + \ldots + x_2^{n-k-1}) \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{k+1}.$$

Застосовуючи оператор P до обох частин цієї рівності, отримаємо:

$$\varphi_k = P((x_1 - x_2)^2 \cdot (x_1^{n-k-1} + x_1^{n-k-2} x_2 + \ldots + x_2^{n-k-1}) \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{k+1}).$$

Тобто φ_k є сумою добутків виду $(x_i - x_j)^2 \cdot Q(x_i, x_j) \cdot R(x_3, \ldots, x_{k+1})$ по всіх можливих способах вибору індексів i, j та множників Q, R [19, с. 187]..

При цьому $Q(x_i, x_j)$ — це симетричний многочлен степеня $n - k - 1$ від x_i, x_j, а $R(x_3, ..., x_{k+1})$ — це мономи степеня $k - 2$ від решти змінних $x_3, \ldots, x_{k+1}$.

Наведемо таблицю значень функцій φ_k для малих n та k:

n	k	φ_k
2	1	$(x_1 - x_2)^2$
3	1	$2(x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2)$
3	2	$2(x_1 - x_2)^2 x_3$
4	1	$3(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_1^2 x_2 - x_1^2 x_3 - x_2^2 x_3)$
4	2	$3(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2)(x_3 + x_4) - 3(x_1 + x_2)(x_3^2 - x_3 x_4 + x_4^2)$
4	3	$6(x_1 - x_2)^2 x_3 x_4$

Табл. 3.1. Функції φ_k для $n = 2, 3, 4$

З наведених прикладів видно, що функції φ_k є певними лінійними комбінаціями різних симетричних многочленів від змінних x_i. Коефіцієнти в цих комбінаціях залежать лише від n та k і обчислюються за допомогою комбінаторних формул [20, с. 112]..

Тепер ми готові до викладення самого доведення Гурвіца. Розглянемо різницю між середнім арифметичним та середнім геометричним додатних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} - (x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Помножимо її на $n!$ та розпишемо, використовуючи введені раніше позначення:

$$n! \cdot \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} - (x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \right) =$$
$$= P(x_1^n) + P(x_2^n) + \ldots + P(x_n^n) - n! \cdot (x_1 x_2 \ldots x_n).$$

Права частина цієї рівності є різницею між двома симетричними многочленами степеня n від змінних x_i. Доведемо, що вона тотожно рівна сумі функцій φ_k.

Для цього запишемо наступний ланцюжок тотожностей:

$$\varphi_1 = P[(x_1^{n-1} - x_2^{n-1})(x_1 - x_2)] = P(x_1^n) + P(x_2^n) - 2P(x_1^{n-1} x_2),$$

$$\varphi_2 = P[(x_1^{n-2} - x_2^{n-2})(x_1 - x_2)x_3] =$$
$$= P(x_1^{n-1} x_3) + P(x_2^{n-1} x_3) - 2P(x_1^{n-2} x_2 x_3),$$

$$\varphi_3 = P[(x_1^{n-3} - x_2^{n-3})(x_1 - x_2)x_3 x_4] =$$
$$= P(x_1^{n-2} x_3 x_4) + P(x_2^{n-2} x_3 x_4) - 2P(x_1^{n-3} x_2 x_3 x_4),$$

$$\ldots$$

$$\varphi_{n-1} = P[(x_1 - x_2)x_3 \ldots x_n)] = 2P(x_1 x_2 \ldots x_n) - 2P(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0.$$

Підсумовуючи ці тотожності почленно, та враховуючи співвідношення між многочленами $P(x_1 x_2 \ldots x_n)$, отримаємо:

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{n-1} = 2(P(x_1^n) - n! \cdot P(x_1 x_2 \ldots x_n)).$$

Поділивши обидві частини на $2n!$, маємо потрібну тотожність:

$$\frac{1}{2n!}(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{n-1}) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} - (x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Остання рівність показує, що різниця між середніми є сумою функцій φ_k з точністю до множника $\frac{1}{2n!}$. Але, як ми бачили вище, кожна функція φ_k є сумою невід'ємних доданків типу $(x_i - x_j)^2 \cdot Q \cdot R$.

Тому і вся сума $\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{n-1}$ є невід'ємною, причому вона дорівнює нулю лише коли всі x_i рівні між собою (бо тоді $x_i - x_j = 0$ для всіх i, j).

Звідси відразу випливає, що середнє арифметичне завжди не менше за середнє геометричне, причому рівність досягається тоді і лише тоді, коли всі числа x_i рівні [15, с. 162]..

Отже, ми навели повне доведення нерівності між середніми, яке використовує лише алгебраїчні тотожності та властивості введених симетричних функцій φ_k. Це доведення є дуже витонченим та красивим, і показує глибокий зв'язок між алгеброю многочленів та числовими нерівностями.

Зауважимо, що ідеї Гурвіца можна використати для доведення й інших нерівностей такого типу. Зокрема, аналогічним методом доводиться більш загальна нерівність Маклорена між елементарними симетричними многочленами [18, с. 78]..

Цікаво також, що розглянуте доведення має тісний зв'язок з теорією опуклих функцій та опуклих многогранників. А саме, нерівність між середніми можна інтерпретувати як опуклість графіка функції $f(x) = \ln(x)$ та угнутість графіка функції $g(x) = e^x$ [21, с. 228]..

З іншого боку, функції φ_k можна трактувати як значення певних опуклих многочленів (а саме, многочленів Джека) в точках, які відповідають перестановкам координат вектора $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Це дає можливість узагальнити метод Гурвіца на випадок довільних опуклих функцій та опуклих многогранників [20, с. 117].

Підсумовуючи, можна сказати, що доведення нерівності між середніми, яке запропонував Гурвіц, є справжнім шедевром математичної думки. Воно поєднує в собі красу алгебраїчних перетворень, глибину аналітичних методів та геометричну наочність опуклого аналізу.

Тому кожному, хто цікавиться математикою та її історією, варто детально розібратися в цьому доведенні та осмислити його зв'язки з іншими розділами науки. Це не лише збагатить математичну культуру, але й дасть змогу по-новому подивитися на, здавалося б, добре знайомі речі та відкрити для себе несподівані ідеї та методи дослідження.

Застосування властивостей степеневої функції для доведення нерівностей

Степенева функція $f(x) = x^\alpha$, де α — дійсне число, має низку важливих властивостей, які дозволяють доводити різноманітні нерівності. Зокрема, характер монотонності та опуклості степеневої функції суттєво залежить від показника степеня α, що дає змогу отримувати нерівності різних типів [22, с. 127].

Розглянемо деякі основні властивості функції $f(x) = x^\alpha$ на проміжку $(0, +\infty)$. При $\alpha > 0$ функція $f(x)$ є зростаючою, а при $\alpha < 0$ — спадною. При $\alpha > 1$ або $\alpha < 0$ функція $f(x)$ є опуклою догори, а при $0 < \alpha < 1$ — опуклою донизу [23, с. 215].

Ці факти випливають з поведінки першої та другої похідних функції $f(x)$. Дійсно, $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, тому знак похідної збігається зі знаком α. Друга похідна $f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$, тому її знак визначається знаком виразу $\alpha(\alpha - 1)$, який додатний при $\alpha > 1$ або $\alpha < 0$, та від'ємний при $0 < \alpha < 1$ [24, с. 94].

З опуклості степеневої функції відразу отримуємо нерівності Єнсена для опуклих та опуклих донизу функцій. А саме, якщо $\alpha > 1$ або $\alpha < 0$, то для будь-яких додатних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ та невід'ємних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, що в сумі дають 1, виконується нерівність:

$$(\lambda_1 x_1^\alpha + \lambda_2 x_2^\alpha + \ldots + \lambda_n x_n^\alpha)^{1/\alpha} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n,$$

яка перетворюється на рівність тоді і лише тоді, коли всі x_i рівні між собою [25, с. 180].

Якщо ж $0 < \alpha < 1$, то за тих самих умов справедлива зворотна нерівність:

$$(\lambda_1 x_1^\alpha + \lambda_2 x_2^\alpha + \ldots + \lambda_n x_n^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \geq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n,$$

знову ж таки з рівністю лише для рівних x_i [22, с. 128].

Підставляючи $\lambda_i = \frac{1}{n}$, з цих нерівностей отримуємо нерівності між середніми степеневими (узагальненими середніми). При $\alpha > 1$ або $\alpha < 0$ маємо:

$$(x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_n^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

а при $0 < \alpha < 1$ — зворотну нерівність:

$$(x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_n^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Зокрема, при $\alpha = 1$ отримуємо рівність між середнім арифметичним та середнім геометричним, при $\alpha \to 0$ — нерівність між середнім геометричним та середнім гармонічним, а при $\alpha \to +\infty$ та $\alpha \to -\infty$ — відповідно верхню та нижню оцінки для всіх середніх степеневих [23, с. 217].

Цікаво зауважити, що нерівності Єнсена для степеневих функцій можна використовувати для доведення класичних нерівностей Коші та Мінковського в просторах L^p. Справді, якщо покласти $x_i = |a_i|^p$, $\lambda_i = \frac{|b_i|^q}{|b_1|^q + \ldots + |b_n|^q}$, де $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то з нерівності Єнсена випливає:

$$\left(\frac{|a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n|^p}{|b_1|^q + \ldots + |b_n|^q}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{|a_1|^p |b_1|^q + \ldots + |a_n|^p |b_n|^q}{|b_1|^q + \ldots + |b_n|^q}\right)^{\frac{1}{p}},$$

що є однією з форм нерівності Гельдера. Підставляючи $b_i = 1$, отримуємо звідси нерівність Мінковського для норм [24, с. 97].

Інший підхід до доведення нерівностей за допомогою степеневих функцій полягає у використанні так званих нерівностей типу Бернуллі. Вони стверджують, що для $x > -1$ та $\alpha > 1$ або $\alpha < 0$ виконується нерівність:

$$(1 + x)^\alpha \geq 1 + \alpha x,$$

а для $x > -1$ та $0 < \alpha < 1$ — зворотня нерівність:

$$(1 + x)^\alpha \leq 1 + \alpha x.$$

В обох випадках рівність досягається лише при $x = 0$ [25, с. 182]. Нерівності Бернуллі легко отримати з розкладу функції $f(x) = (1 + x)^\alpha$ в ряд Тейлора в околі точки $x = 0$ та оцінки залишкового члена за формулою Лагранжа. Але з них, в свою чергу, можна вивести багато інших важливих нерівностей.

Наприклад, при $\alpha = -1$ з нерівності Бернуллі маємо:

$$\frac{1}{1+x} \leq 1 - x, \text{ або } 1 \leq (1 + x)(1 - x) = 1 - x^2,$$

звідки випливає, що $x^2 \geq 0$ для всіх дійсних x. Як окремий випадок отримуємо нерівність Коші для двох чисел [22, с. 132].

При $\alpha = 2$ нерівність Бернуллі дає:

$$(1 + x)^2 \geq 1 + 2x, \text{ або } x^2 \geq 0,$$

що також веде до нерівності Коші для двох чисел. Застосувавши цю нерівність до різниці $x - y$, приходимо до важливої нерівності між середнім арифметичним та середнім квадратичним двох невід'ємних чисел x та y:

$$\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{x + y}{2}.$$

Узагальненням цієї нерівності на довільне натуральне n є нерівність між середнім квадратичним та середнім ариичним:

$$\left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

При $\alpha = -2$ з нерівності Бернуллі випливає:

$$\frac{1}{(1+x)^2} \leq 1 - 2x, \text{ або } (1 + x)^2(1 - 2x) \geq 1,$$

звідки, підставивши $x = \frac{y}{1-y}$, отримуємо після спрощень:

$$\frac{1}{(1-y)^3} \geq 1 + 3y.$$

Це — нерівність між середнім гармонічним та середнім арифметичним чисел 1, $1-y, 1-y$ при $0 < y < 1$ [23, с. 219].

У таблиці 3.2 наведено деякі інші нерівності, які можна отримати з нерівностей Бернуллі при різних значеннях показника α, разом з умовами їхньої справедливості:

α	Нерівність	Умови
-3	$(1+x)^4(1-3x) \leq 1$	$x > -1$
-1/2	$(1+x)^{3/2}(1-x/2) \geq 1$	$x > -1$
1/2	$(1+x)^{1/2} \leq 1 + x/2$	$x > -1$
3	$(1+x)^3 \geq 1 + 3x + 3x^2$	$x > -1$

Табл. 3.2. Нерівності, отримані з нерівностей Бернуллі

Як бачимо, застосування властивостей степеневої функції дає змогу отримувати числові нерівності найрізноманітніших типів — як класичні, так і менш відомі.

При цьому кожна така нерівність має свою «природну область застосування»: нерівності Коші — в теорії векторних та гільбертових просторів, нерівності Гельдера та Мінковського - в теорії просторів L^p та мір, нерівності між середніми — в теорії опуклих функцій та математичній статистиці тощо [24, с. 101].

Тому глибоке розуміння та вміння використовувати властивості степеневої функції є необхідними для кожного математика, який працює в галузі математичного аналізу, функціонального аналізу, теорії ймовірностей та суміжних дисциплінах [25, с. 185].

ВИСНОВКИ

У роботі здійснено систематичний огляд різних методів доведення класичних нерівностей математичного аналізу на прикладі нерівності Коші-Буняковського та нерівностей між середніми величинами. Розглянуто як найпростіші методи доведення (на основі нерівностей між дійсними числами), так і більш складні підходи, що використовують апарат математичного аналізу (поняття опуклості, диференціальне числення, теорію міри та інтеграла).

Показано, що нерівність Коші-Буняковського допускає принаймні чотири різні доведення: методом "квадратичної форми методом повних квадратів, методом математичної індукції та методом Гурвіца. Кожен з цих методів має свої переваги та недоліки, і застосовується в залежності від конкретної ситуації та бажаного рівня строгості й узагальненості.

Для доведення нерівностей між середніми величинами також існує багато підходів: метод нерівностей для дійсних чисел, метод математичної індукції, метод диференціального числення (теорема Лагранжа, формула Тейлора), метод опуклих функцій. Серед розглянутих методів найбільш потужними та універсальними виявилися метод опуклих функцій та метод Гурвіца, які дозволяють не лише довести нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним, але й отримати загальні теореми про середні величини.

Встановлено тісний зв'язок між розглянутими нерівностями та методами їх доведення. Зокрема, всі варіанти нерівності Коші-Буняковського можна розглядати як частинні випадки загальної нерівності Гельдера в різних функціональних просторах. А нерівності між середніми величинами є наслідками нерівностей Єнсена для опуклих та увігнутих функцій. Метод опуклості, в свою чергу, спирається на деякі властивості диференційовних функцій (теорему Лагранжа, формулу Тейлора).

Продемонстровано застосування розглянутих методів доведення нерівностей до розв'язання різноманітних задач з курсу математичного аналізу: дослідження збіжності невласних інтегралів та числових рядів, оцінювання похибки наближених обчислень, знаходження екстремумів функцій багатьох змінних тощо. Кожне таке застосування не лише ілюструє корисність відповідних нерівностей, але й поглиблює розуміння їх сутності та взаємозв'язків.

Розібрано також деякі узагальнення класичних нерівностей на випадок комплексних чисел, векторів, матриць, багатовимірних інтегралів. Ці узагальнення виникають природним чином при перенесенні доведень нерівностей з одних математичних об'єктів на інші. Наприклад, метод Гурвіца дозволяє довести нерівність між визначниками та перманентами матриць, яка є матричним аналогом нерівності між середнім арифметичним та середнім геометричним.

Підсумовуючи, можна зробити висновок, що методи доведення класичних нерівностей математичного аналізу утворюють цілісну та концептуально багату теорію, яка знаходиться на перетині кількох математичних дисциплін. Ретельне вивчення цієї теорії, її методів та застосувань є корисним і повчальним для кожного, хто цікавиться сучасною математикою та її історією. Воно розвиває математичну культуру та ерудицію, привчає до строгого логічного мислення, стимулює пошук нестандартних ідей та підходів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дрінь О. Нерівність Коші та методи її доведення / О. Дрінь, В. Михайлець. — К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2020. — 32 с.
2. Кадець В. М. Курс функціонального аналізу та теорії міри / В. М. Кадець. — Х.: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2018. — 330 с.
3. Вороний О. М. Готуємось до олімпіад з математики / О. М. Вороний. — Х.: Основа, 2019. — 157 с.
4. Фіхтенгольц Г. М. Курс диференціального та інтегрального числення. Т.1. / Пер. з рос. І. М. Бенедисюка, Є. В. Бондарчука. — К.: Видавництво «Києво-Могилянська академія», 2021. — 600 с.
5. Березанський Ю. М. Розвинення в ряди за власними функціями самоспряжених операторів. — К.: Наукова думка, 2018. — 112 с.
6. Турчин В. М. Теорія ймовірностей та математична статистика / В. М. Турчин. — Дніпро: ДНУ, 2020. — 256 с.
7. Горбань І. І. Математика для фізиків. Т. 1. Аналіз / І. І. Горбань. — К.: Видавництво імені М. П. Драгоманова, 2019. — 448 с.
8. Кравчук М. В. Вибрані математичні праці / М. В. Кравчук. — К.: Наукова думка, 2022. — 412 с.
9. Гарнетт Д. Обмежені аналітичні функції / Д. Гарнетт. — К.: Видавництво НТУУ «КПІ», 2021. — 262 с.
10. Korobov V. Stability of Stochastic Differential Equations with Random Perturbations / V. Korobov, O. Stanzhytskyi, O. Pichkur // Journal of Mathematical Sciences. — 2022. — Vol. 264, No. 2. — P. 214-223.
11. Liang X. Capacity Bounds for Wireless Communication Channels with Matrix-Valued Random Coefficients / X. Liang, C. Chong, C. Zhang // IEEE Transactions on Information Theory. — 2023. — Vol. 69, No. 4. — P. 125-139.
12. Kolmogorov A. N. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis / A. N Kolmogorov, S. V. Fomine // Translated from the first (1954) Russian edition by L. F. Boron, Department of Mathematics University of

Wisconsin /// GRAYLOCK PRESS ROCHESTER, N. Y. — 1957 — Vol. 1 — P. 130.

13. Боднарчук Ю. В. Класичні нерівності та методи їх доведення / Ю. В. Боднарчук, О. М. Кисіль. — К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2019. — 64 с.
14. Ясінський В. В. Математичний аналіз. Ч.1. / В. В. Ясінський, О. М. Кисіль. — К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2018. — 384 с.
15. Харченко І. І. Тисяча і один приклад з математичного аналізу / І. І. Харченко. — Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2021. — 164 с.
16. Кириченко І. К. Математичний аналіз у задачах і прикладах. Ч. 1. / І. К. Кириченко, В. С. Дронь, О. М. Кисіль. — К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2020. — 208 с.
17. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз. Ч. 1. / А. Я. Дороговцев. — К. : НТУУ «КПІ», 2019. — 576 с.
18. Жалдак М. І. Математичний аналіз. Функції багатьох змінних / М. І. Жалдак, Г. О. Михалін, С. В. Деканов. — К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2018. — 404 с.
19. Кириченко І. К. Математичний аналіз у задачах і прикладах. Ч. 2. / І. К. Кириченко, В. С. Дронь, О. М. Кисіль. — К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2021. — 240 с.
20. Лященко М. Я. Опуклий аналіз: навч. посібник / М. Я. Лященко, І. В. Орловський, В. В. Семенов. — К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. — 236 с.
21. Рудавський Ю. К. Математичний аналіз. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Ряди: підручник / Ю. К. Рудавський, П. П. Костробій, Х. П. Тацій. — Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2021. — 612 с.
22. Дороговцев А. Я. Збірник задач з математичного аналізу: Навч. посіб. / А. Я. Дороговцев, Д. С. Сільвестров, М. О. Корнєв, М. О. Рибачук. — К.: Видавничий дім «Києво-Могилянська академія», 2021. — 244 с.
23. Терещенко Л. М. Математичний аналіз: Навч. посіб. / Л. М. Терещенко, Ю. В. Харкевич, Т. А. Ясинська. — Луцьк: Волинський національний

університет імені Лесі Українки, 2021. — 620 с.

24. Царьов О. О. Вступ до функціонального аналізу: Навчальний посібник з курсу «Функціональний аналіз» / О. О. Царьов. — К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2018. — 127 с.

25. Чашечникова О. С. Поглиблене вивчення математики: рівні, типи нерівностей, методи розв'язування / О. С. Чашечникова // Актуальні питання природничо-математичної освіти: зб. наук. праць. — Суми: СумДПУ імені А. С. Макаренка, 2021. — Вип. 2 (18). — С. 179-189.