МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Фізичний факультет

Кафедра астрономії

Г. О. Гарбузов, Б. О. Мурніков, Т. І. Кабанова

ВИКОРИСТАННЯ СПОСОБУ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ПРИ ОБРОБЦІ АСТРОНОМІЧНИХ СПОСТЕРЕЖЕНЬ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для студентів фізичного факультету

спеціальності «астрономія»

Одеса
«Астропринт»
2011

ББК 22.61я73
УДК 52–13:519.654(075.8)
Г20

Автори-укладачі:
Г. О. Гарбузов, кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник Астрономічної обсерваторії Одеського національного університету;
Б. О. Мурніков, старший викладач кафедри астрономії Одеського національного університету;
Т. І. Кабанова, зав. учбовою лабораторією кафедри астрономії Одеського національного університету

Рецензенти:
В. Г. Каретніков, доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри астрономії;
В. І. Марсакова, канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри астрономії

Друкується згідно з рішенням вченої ради фізичного факультету Одеського національного університету імені І. І. Мечникова.
Протокол № 11 від 1 липня 2011 р.

Гарбузов Г. О., Мурніков Б. О., Кабанова Т. І.
Г20 Використання способу найменших квадратів при обробці астрономічних спостережень : методичні вказівки для студентів фізичного факультету спеціальності «астрономія» / Г. О. Гарбузов, Б. О. Мурніков, Т. І. Кабанова. — Одеса : Астропринт, 2011. — 12 с.

ББК 22.61я73
УДК 52–13:519.654(075.8)

Про похибки спостережень

Астрономічне спостереження — це вимірювання якої-небудь величини, а при вимірюванні будь-яких величин неминучі *похибки вимірювань*. Треба прагнути усунути або зменшити вплив причин, що викликають *систематичні похибки*, або вивчити цей вплив для того, щоб врахувати його при обробці результатів вимірювань. Наприклад, зенітна відстань зірки та її годинний кут пов’язані строгим співвідношенням. Можна точно обчислити зенітні відстані зірки при різних годинних кутах. Однак, якщо ми побажаємо перевірити це співвідношення, вимірюючи великий ряд зенітних відстаней для різних значень *t*, то переконаємось в тому, що всі виміряні зенітні відстані менше обчислених, причому різниця між ними зростає з величиною самої зенітної відстані. Причиною цієї систематичної похибки є рефракція в земній атмосфері, яка піднімає світило над горизонтом, тобто зенітна відстань світила зменшується. Виправивши вимірювання за рефракцію, ми знайдемо, що і зараз вимірювання не співпадають точно із обчисленнями, причому виміряні значення то більше, то менше обчислених, а більші відхилення зустрічаються рідше, ніж малі. Виявляється, що, крім систематичних похибок, при вимірюваннях неминучі *випадкові похибки*. Причина кожної такої похибки не піддається строгому врахуванню, але випадкові похибки при багаторазовому повторенні тих самих вимірювань підпорядковуються особливим законам, котрі дають дослідникові можливість отримати із ряду вимірювань більш надійний результат, ніж із кожного окремого вимірювання, і оцінити точність цього результату.

З теорії випадкових похибок випливає, що при достатньо великій кількості окремих вимірювань найбільш імовірний результат дорівнює *середньому арифметичному* зі всіх вимірювань:

$$a_N = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}.$$

Для оцінки точності цього середнього арифметичного слугує *середня похибка*, яка дорівнює середньому арифметичному із абсолютних величин (тобто взятих без урахування знаку) окремих відхилень вимірювань від середнього $|a_N - a_i| = |\Delta_i|$, тобто

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |\Delta_i|}{n}.$$

Часто точність характеризують величиною *середньої квадратичної похибки*, яку обчислюють за відхиленнями Δ_i кожного вимірювання від середнього арифметичного за формулою:

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2}{n(n-1)}},$$

де $\Delta_i = a_i - a_N$, Δ_i^2 — сума квадратів відхилень, n — кількість вимірювань.

Середня похибка ε_{cp} і середня квадратична похибка σ_N пов’язані між собою співвідношенням:

$$\varepsilon_{cp} = 0,7979\sigma_N,$$

або

$$\sigma_N = 1,2533\varepsilon_{cp}.$$

Характеристикою точності середнього результату може слугувати його *імовірна похибка* σ_p. Це така похибка, коли кількість менших похибок дорівнює кількості більших.

$$\sigma_p = 0,6745\sigma_N; \ \sigma_p = 0,8453\varepsilon_{cp}.$$

Можна також оцінити середню квадратичну похибку окремого вимірювання:

$$s_N = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2}{n}},$$

або його імовірну похибку

$$s_p = 0,6745 s_N.$$

Хоча теорія випадкових похибок потребує великої кількості вимірювань, її правила часто використовують і до малої кількості вимірювань, оскільки і в цьому випадку вони дають добрі результати і приблизне уявлення про точність вимірювань.

Якщо окремі спостереження нерівноцінні за точністю, — *нерівноточні*, то при обчисленні середнього кожне окреме значення, яке отримане із вимірювань a_i, помножується на *вагу* p_i, виражену в якій-небудь шкалі (чим точніше вимірювання, тим більша його вага), а сума добутку $a_i p_i$ ділиться на суму ваги:

$$a_N = \frac{\sum a_i p_i}{\sum p_i}.$$

Можна оцінити відносну похибку самої середньої квадратичної похибки за формулою:

$$\frac{\Delta\sigma_N}{\sigma_N} = \frac{1}{\sqrt{2n}},$$

де n — кількість вимірювань, що увійшли у визначення σ_N. Таким чином, при чотирьох вимірюваннях $\Delta\sigma_N$ складає близько 35% величини σ_N, при n = 50 похибка у визначенні складає приблизно 1/10 величини σ_N.

Спосіб найменших квадратів

Дуже часто астрономам доводиться вирішувати наступну задачу. Нехай дано кілька рівнянь, що містять дві невідомі величини й мають вид

$$a_1x + b_1y = c_1,$$
$$a_2x + b_2y = c_2,$$
$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$
$$a_nx + b_ny = c_n.$$

Тут з вимірювань відомі величини $a_1, a_2, ..., a_n$; $b_1, b_2, ..., b_n$; $c_1, c_2, ..., c_n$ і невідомі x і y.

Треба розв’язати цю систему рівнянь. Якби ці рівняння були зовсім точними, то не було б необхідності в такій кількості рівнянь − було б досить тільки двох. Питання ускладнюється тією обставиною, що кожне рівняння отримане з вимірювань, а кожний вимір неминуче містить випадкову помилку. Тому рівняння повинні бути замінені наступними:

$$a_1x + b_1y — c_1 = \varepsilon_1,$$
$$a_2x + b_2y — c_2 = \varepsilon_2,$$
$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$
$$a_nx + b_ny — c_n = \varepsilon_n,$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ — невідомі нам похибки вимірювань. Такі рівняння називаються *умовними*.

Цю систему рівнянь розв’язати звичайними прийомами неможливо, тому що вона містить $n + 2$ невідомих: $x, y, \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$. Тому розв’язують її іншим прийомом, що називається способом найменших квадратів.

Для простоти припустимо, що в нас є два основних невідомих x и y. Обчислимо квадрати похибок ε_j і складемо їх один з одним. Ми одержимо суму квадратів всіх відхилень:

$$S = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + ... + \varepsilon_n^2 = (a_1x + b_1y - c_1)^2 + (a_2x + b_2y - c_2)^2 + ... + (a_nx + b_ny - c_n)^2.$$

Природно вважати найкращими значеннями невідомих x и y такі, при яких сума квадратів похибок S найменша. Такі значення називаються найімовірнішими, а спосіб їхнього відшукання — *способом найменших квадратів.*

Перетворимо вираз S, розкривши дужки й об'єднавши подібні члени:

$$S = \left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)x^2 + \left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right)y^2 + \left(c_1^2 + c_2^2 + ... + c_n^2\right) +$$
$$+ 2(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)xy - 2(b_1c_1 + b_2c_2 + ... + b_nc_n)y - 2(c_1a_1 + c_2a_2 + ... + c_na_n)x.$$

Для стислості позначимо коефіцієнти так:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = [a \cdot a] = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i = [a \cdot b] = a_1b_1 + a_2b_2 + .. + a_nb_n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i c_i = [a \cdot c] = a_1 c_1 + a_2 c_2 + .. + a_n c_n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^2 = [b \cdot b] = b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i c_i = [b \cdot c] = b_1 c_1 + b_2 c_2 + .. + b_n c_n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = [c \cdot c] = c_1^2 + c_2^2 + ... + c_n^2.$$

Всі ці коефіцієнти відомі з рівнянь і при зміні x и y не змінюються. Отже,

$$S = [a{\cdot}a]x^2 + [b{\cdot}b]y^2 + 2[a{\cdot}b]xy — 2[a{\cdot}c]x — 2[b{\cdot}c]y + [c{\cdot}c].$$

Наше подальше завдання полягає в тому, щоб знайти значення x и y, при яких S було б найменшим.

Запишемо величину S у такий спосіб

$$S = [a{\cdot}a]x^2 + 2\{[a{\cdot}b]y — [a{\cdot}c]\}x + \{[b{\cdot}b]y^2 — 2[b{\cdot}c]y + [c{\cdot}c]\}.$$

Диференціюючи по x і прирівнявши похідну нулю, одержуємо

$$[a{\cdot}a]x + [a{\cdot}b]y — [a{\cdot}c] = 0.$$

Це рівняння називається першим нормальним рівнянням.

Аналогічно диференціюючи по y, ми прийдемо до другого нормального рівняння:

$$[a{\cdot}b]x + [b{\cdot}b]y — [b{\cdot}c] = 0.$$

Отже, найімовірніші значення x и y, при яких S має найменше значення, виходять із двох *нормальних рівнянь*:

$$[a{\cdot}a]x + [a{\cdot}b]y = [a{\cdot}c], \quad [b{\cdot}a]x + [b{\cdot}b]y = [b{\cdot}c].$$

Ця система рівнянь розв’язується звичайними прийомами алгебри.

Повний розвиток способу найменших квадратів дає можливість обчислення не тільки ймовірних значень невідомих величин x и y, але і їхніх імовірних похибок. Можна легко узагальнити спосіб найменших квадратів і на такі умовні рівняння, які містять будь-яке число невідомих величин $x, y, z, ...$

Наведемо приклад розв’язку рівнянь з допомогою способу найменших квадратів.

Нехай із спостережень блиску чотирьох зір – a, b, c і d отримана ступенева шкала: s_a = 0,0; s_b = 9,2; s_c = 13,1; s_d = 15.5. Із фотометричного каталогу нам відомі зоряні величини цих зір: $m_a = 8{,}30^m$; $m_b = 9{,}30^m$; $m_c = 9{,}40^m$; $m_d = 9{,}60^m$. Нам треба знайти формулу, яка зв’язує ступені та зоряні величини. Позначимо значення ступеня через p, а зоряну величину, що відповідає блиску 0,0 ступенів, — через m_0. Тоді загальний вид формули має вигляд:

$$m = m_0 + p \cdot s,$$

де s — кількість ступенів, що вимірюють блиск даної зорі в отриманій шкалі.

Використовуючи наші дані, отримаємо систему рівнянь:

для зорі a	$m_0 + 0{,}0p = 8{,}30;$
для зорі b	$m_0 + 9{,}2p = 9{,}30;$
для зорі c	$m_0 + 13{,}1p = 9{,}40;$

для зорі d $\qquad m_0 + 15,5p = 9,60.$

Ці рівняння отримані із спостережень і тому вони неточні, це умовні рівняння. Із цих умовних рівнянь треба скласти нормальні рівняння і розв'язати їх відносно m_0 і p.

Випишемо колонки коефіцієнтів:

$$a_1 = 1; \quad b_1 = 0,0; \quad c_1 = 8,30; \quad a_1^2 = 1; \quad b_1^2 = 0,0;$$
$$a_2 = 1; \quad b_2 = 9,2; \quad c_2 = 9,30; \quad a_2^2 = 1; \quad b_2^2 = 84,64;$$
$$a_3 = 1; \quad b_3 = 13,1; \quad c_3 = 9,40; \quad a_3^2 = 1; \quad b_3^2 = 171,61;$$
$$a_4 = 1; \quad b_4 = 15,5; \quad c_4 = 9,60; \quad a_4^2 = 1; \quad b_4^2 = 240,25;$$
$$a_1b_1 = 0,0; \quad a_1c_1 = 8,30; \quad b_1c_1 = 0,0;$$
$$a_2b_2 = 9,2; \quad a_2c_2 = 9,30; \quad b_2c_2 = 85,56;$$
$$a_3b_3 = 13,1; \quad a_3c_3 = 9,40; \quad b_3c_3 = 123,14;$$
$$a_4b_4 = 15,5; \quad a_4c_4 = 9,60; \quad b_4c_4 = 148,8.$$

Після підсумовування знаходимо:

$$[a \cdot a] = 4; \quad [a \cdot b] = 37,8; \quad [a \cdot c] = 36,6;$$
$$[b \cdot b] = 496,5; \quad [b \cdot c] = 357,5.$$

Отримуємо нормальні рівняння:

$$4m_0 + 37,8p = 36,6,$$
$$37,8m_0 + 496,5p = 357,5.$$

Розв'язуючи ці рівняння, знаходимо $m_0 = 8,36$, p = 0,08349. Отже, імовірна формула має такий вигляд:

$$m = 8,36 + 0,08349s.$$

Підставляючи спостережувані значення s, отримаємо виправлені значення зоряних величин у відповідності із шкалою. Запишемо все це в одну таблицю:

зірка	ступінь	m із каталогу (O)	m із формули (C)	Δ різниці (O–C)
a	0,0	8,30	8,36	–0,06
b	9,2	9,30	9,13	+0,17
c	13,1	9,40	9,45	–0,05
d	15,5	9,60	9,65	–0,05

Якщо обчислення виконані правильно, то сума всіх різниць в останньому стовпці повинна бути близькою до нуля. В нашому випадку так і сталося $\left(\sum \Delta = 0,01\right)$.

Скажемо кілька слів про те, як обчислити ймовірні похибки невідомих. Для цього треба підставити отримані значення невідомих в усі умовні рівняння й знайти відхилення Δ, що залишаються. В нашому випадку вони вказані в стовпці «різниці». Потім треба знайти суму квадратів відхилень $\sum \Delta_i \cdot \Delta_i = [\Delta \cdot \Delta]$. В нашому випадку вона дорівнює $[\Delta \cdot \Delta] = 0,0375$. Отриману суму треба розділити на число умовних рівнянь n, з якого віднімається число невідомих величин k, і добути квадратний корінь. Тоді похибка одиниці ваги буде

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{[\Delta \cdot \Delta]}{n-k}} = \sqrt{\frac{0,0375}{4-2}} = 0,137.$$

В нашому випадку $n = 4$, $k = 2$.

Щоб знайти квадратичні похибки невідомих, треба розв'язати такі системи рівнянь:

$$\left.\begin{array}{l} [a \cdot a]A_x + [a \cdot b]K = 1 \\ [a \cdot b]A_x + [b \cdot b]K = 0 \end{array}\right\}$$

та

$$\left.\begin{array}{l} [a \cdot a]M + [a \cdot b]A_y = 0 \\ [a \cdot b]M + [b \cdot b]A_y = 1 \end{array}\right\}$$

і визначити з них величини A_x і A_y (K и M визначати не потрібно).

В нашому прикладі розв'язуємо рівняння:

$$\left.\begin{array}{r} 4A_x \;\;+\;\; 37,8K = 1 \\ 37,8A_x + 496,5K = 0 \end{array}\right\} \text{ та } \left.\begin{array}{r} 4M \;\;+\;\; 37,8A_y = 0 \\ 37,8M + 496,5A_y = 1 \end{array}\right\}$$

і отримуємо величини:

$$A_x = 0,89;\; A_y = 0,0072;\; \sqrt{A_x} = 0,94;\; \sqrt{A_y} = 0,085.$$

Квадратичні похибки невідомих визначаються з формул

$$\sigma_x = \sigma_0\sqrt{A_x} = 0,137 \cdot 0,94 = 0,13;$$

$$\sigma_y = \sigma_0\sqrt{A_y} = 0,137 \cdot 0,085 = 0,012.$$

Отже, розв'язок наших умовних рівнянь має вигляд:

$$m_0 = 8,36 \pm 0,13;\;\; p = 0,08349 \pm 0,012,$$

а формула часто записується у вигляді:

$$\begin{array}{l} m = 8,36 \;\;+\;\; 0,083s \\ \quad\;\; \pm 0,13 \quad \pm 0,012 \end{array}.$$

Приведемо всі необхідні відомості для розв'язання умовних рівнянь

$$a_k x + b_k y + c_k z = l_k \; (k = 1, 2, 3, ...)$$

с *трьома невідомими* за способом найменших квадратів.

Нормальні рівняння мають такий вид:

$$[a{\cdot}a]x + [a{\cdot}b]y + [a{\cdot}c]z = [a{\cdot}l],$$
$$[a{\cdot}b]x + [b{\cdot}b]y + [b{\cdot}c]z = [b{\cdot}l],$$
$$[a{\cdot}c]x + [b{\cdot}c]y + [c{\cdot}c]z = [c{\cdot}l].$$

Їх розв'язок дає значення x, y і z.

Далі обчислюються відхилення Δ і знаходиться похибка одиниці ваги σ_0 за формулою $\sigma_0 = \sqrt{\dfrac{[\Delta \cdot \Delta]}{n-k}}$, де треба прийняти $k = 3$.

Для визначення квадратичних похибок невідомих треба розв’язати три системи рівнянь. Перша з них

$$[a \cdot a]A_x + [a \cdot b]M + [a \cdot c]N = 1,$$
$$[a \cdot b]A_x + [b \cdot b]M + [b \cdot c]N = 0,$$
$$[a \cdot c]A_x + [b \cdot c]M + [c \cdot c]N = 0,$$

розв’язується відносно A_x, і тоді $\sigma_x = \sigma_0 \sqrt{A_x}$. Друга система

$$[a \cdot a]M + [a \cdot b]A_y + [a \cdot c]N = 0,$$
$$[a \cdot b]M + [b \cdot b]A_y + [b \cdot c]N = 1,$$
$$[a \cdot c]N + [b \cdot c]A_y + [c \cdot c]N = 0,$$

розв’язується відносно A_y, і тоді $\sigma_y = \sigma_0 \sqrt{A_y}$.

І, нарешті, третя система має вигляд

$$[a \cdot a]M + [a \cdot b]N + [a \cdot c]A_z = 0,$$
$$[a \cdot b]M + [b \cdot b]N + [b \cdot c]A_z = 0,$$
$$[a \cdot c]M + [b \cdot c]N + [c \cdot c]A_z = 1;$$

її вирішують відносно A_z і знаходять $\sigma_z = \sigma_0 \sqrt{A_z}$.

Розв’язання системи рівнянь за правилом Крамера

Нагадаємо, як розв’язується система рівнянь за правилом Крамера, тобто за допомогою визначників.

$$x = \frac{D_x}{D}; \quad y = \frac{D_y}{D}; \quad z = \frac{D_z}{D}.$$

D_x утворюється з D заміною стовпця при x на стовпець правої частини рівнянь. Так само знаходять D_y і D_z.

Наприклад, ми маємо рівняння:

$$2x + y + 3z = 9,$$
$$x - 2y + z = -2,$$
$$3x + 2y + 2z = 7.$$

Визначник системи: $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 13.$

Визначники: $D_x = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -13;$ $D_y = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 26;$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 39.$$

Тоді отримуємо:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-13}{13} = -1;\ \ y = \frac{D_y}{D} = \frac{26}{13} = 2;\ \ z = \frac{D_x}{D} = \frac{39}{13} = 3.$$

Нагадаємо також, як обчислюються визначники 3-го порядку. Якщо ми маємо матрицю $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, то її визначник обчислюють таким чином:

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

В нашому випадку

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 3 + 3\cdot 1\cdot 2 - 3\cdot(-2)\cdot 3 - 2\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 2 =$$

$$= -8 + 3 + 6 + 18 - 4 - 2 = 13.$$

Література

1. Цесевич В. П. Что и как наблюдать на небе. – М. : Наука, 1979. – С. 279–283.

2. Куликовский П. Г. Справочник любителя астрономии. – М. : Главное изд-во физико-математической литературы, 1971. – 632 с.

3. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. – Лейпциг : Тойбнер; Москва : Наука, 1991. – С. 185, 192.

4. Щиголев Б. М. Математическая обработка наблюдений. – М. : Наука, 1969. – 344 с.

5. Кассандрова О. Н., Лебедев В. В. Обработка результатов наблюдений. – М. : Наука, 1970. – 109 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

ГАРБУЗОВ Г. О.
МУРНІКОВ Б. О.
КАБАНОВА Т. І.

ВИКОРИСТАННЯ СПОСОБУ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ПРИ ОБРОБЦІ АСТРОНОМІЧНИХ СПОСТЕРЕЖЕНЬ

Методичні вказівки
для студентів фізичного факультету
спеціальності «астрономія»

Надруковано в авторській редакції

Підписано до друку 17.08.2011. Формат 60х84/16. Папір офсетний.
Гарнітура «TimesNewRoman». Друк офсетний.
Ум. друк. арк. 0,70. Тираж 50 прим. Зам. № 607.

Надруковано з готового оригінал-макета

Видавництво і друкарня «Астропринт»
65091, м. Одеса, вул. Разумовська, 21
Тел.: (0482) 37-07-95, 37-14-25, 33-07-17, (048) 7-855-855
www.astroprint.odessa.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1373 від 28.05.2003 р.

Г. О. Гарбузов, Б. О. Мурніков, Т. І. Кабанова

ВИКОРИСТАННЯ СПОСОБУ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ПРИ ОБРОБЦІ АСТРОНОМІЧНИХ СПОСТЕРЕЖЕНЬ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для студентів фізичного факультету

спеціальності «астрономія»