

ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І. І. МЕЧНИКОВА
(повне найменування вищого навчального закладу)

Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
(повне найменування факультету)

Кафедра оптимального керування і економічної кібернетики
(повна назва кафедри)

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «Магістр»

«Нелінійні диференціальні рівняння з похідною Хукухари»

«Nonlinear differential equations with the Hukuhara derivative»

Виконав: здобувач денної форми навчання
спеціальність: 113- Прикладна математика
освітня програма: «Прикладна математика»
Сапожніков Володимир Валерійович

Керівник д.ф.-м.н., доц. Кічмаренко О.Д. _____

Рецензент к.ф.-м.н., доц. Таїрова М.С.

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ____ від _____. 2023 р.

Захищено на засіданні ЕК № ____
протокол № ____ від _____. 2023 р.

Оцінка _____ / _____ / _____
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Завідувач кафедри

Голова ЕК

(підпис)

Кічмаренко О.Д. _____
(підпис)

Кічмаренко О.Д.

Одеса 2023

ЗМІСТ

	Вступ	2
1	Диференціальні рівняння з похідною Хукухари	3
1.1	Диференціальні рівняння з похідною Хукухари	3
1.2	Теорема існування і єдиності розв'язку	3
1.3	Лінійні диференціальні рівняння з похідною Хукухари	4
1.4	Алгоритм побудови чисельного розв'язку лінійного диференціального рівняння з похідною Хукухари	5
1.5	Тестові приклади	8
2	Добуток множин	13
2.1	Множення множин на основі скалярного добутку	13
2.2	Декартовий добуток	13
2.3	Операція «*»	14
2.4	Тестові приклади	15
3	Диференціальні рівняння з похідною Хукухари з квадратичною правою частиною	19
3.1	Постановка задачі	19
3.2	Алгоритм побудови чисельних розв'язків квадратичного диференціального рівняння з похідною Хукухари	19
3.3	Тестові приклади	22
	Висновки	31
	Список літератури	32
	Додаток А	34
	Додаток Б	36
	Додаток В	39
	Додаток Г	43

ВСТУП

Дослідження розв'язків задачі оптимального керування призводить до вивчення рівнянь з множиннозначною правою частиною [4],[5],[7],[6], зокрема диференціальних рівнянь з похідною Хукухари, так як траєкторії керованого руху при всіх можливих керуваннях утворюють пучок, так звану інтегральну воронку, яка, апроксимується зверху розв'язком відповідного диференціального рівняння з похідною Хукухари.

Диференціальні рівняння з похідною Хукухари були введені в роботах F.S. De Blasi, F. Iervolino. В цих же роботах досліджувались основні властивості розв'язків рівнянь з похідною Хукухари:

$$D_H X(t) = F(t, X(t)), X(t_0) = X^0,$$

де $X: I \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, $F: I \times \text{conv}(\mathbb{R}^n)^1 \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$.

Надалі багато авторів [2],[3],[8] розглядали диференціальні рівняння з похідною Хукухари.

Метою данної роботи є визначення поняття добутку множини та використання його для конструювання нелінійності правої частини, розробка алгоритмів побудови числових розв'язків диференціальних рівнянь з похідною Хукухари з квадратичною правою частиною.

Об'єкт данної роботи є числові розв'язки квадратичних диференціальних рівнянь з похідною Хукухари.

Предметом данної роботи є квадратичні рівняння з похідною Хукухари.

Методи данної роботи є аналітичний метод, програмування та літературний огляд.

Розділ 1

Диференціальні рівняння з похідною Хукухари

1.1 Диференціальні рівняння з похідною Хукухари

Розглянемо диференціальне рівняння

$$D_H X = F(t, X), \quad X(t_0) = X_0 \quad (1)$$

де $F : I \times \text{conv}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ – багатозначне відображення, $X_0 \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$.

Означення 1 [2]. Багатозначне відображення $X : J \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, $J \subset I$, називається розв'язком диференціального рівняння (1), якщо воно абсолютно неперервне на J і задовольняє цьому рівнянню при майже усіх $t \in J$.

Разом з диференціальним рівнянням (1) розглянемо інтегральне рівняння

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(s, X(s)) ds. \quad (2)$$

Означення 2 [2]. Багатозначне відображення $X : J \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, $J \subset I$, називається розв'язком інтегрального рівняння (2), якщо воно неперервне на J та задовольняє цьому рівнянню при всіх $t \in J$.

Тоді за лемами 7, 8 і зауваженням 2 рівняння (1) та (2) є еквівалентними, тобто розв'язок рівняння (1) є розв'язком рівняння (2) і навпаки

Лема 9 [2]. Нехай багатозначне відображення $F(t, X)$ вимірне по t для будь-якого фіксованого X , неперервне по X при майже всіх t , $h(F(t, X), \{0\}) \leq m(t)$, де $m(\cdot)$ сумована і відображення $\varphi : I \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ вимірне. Тоді багатозначне відображення $F(t, \varphi(t))$ вимірне.

1.2 Теорема існування і єдиності розв'язку

Для задачі (1) справедливою є наступна теорема.

Теорема 1 [2]. Нехай багатозначне відображення $F(t, X)$ в області $Q = \{(t, X) : t_0 \leq t \leq t_0 + a, h(X, X_0) \leq b\}$ задовольняє наступним умовам:

- 1) $F(t, X)$ вимірне по t для будь-якого фіксованого X ;
- 2) $F(t, X)$ неперервне по X для будь-якого фіксованого t ;
- 3) $h(F(t, X), \{0\}) \leq m(t)$, де $m(\cdot)$ сумована на $[t_0, t_0 + a]$.

Тоді на відрізку $[t_0, t_0 + d]$ існує розв'язок задачі (1), де $d > 0$ таке, що

$$d \leq a, \varphi(t_0 + d) \leq b, \varphi(t) = \int_{t_0}^t m(s) ds.$$

Умови єдиності розв'язку задачі (1) окреслює наступна теорема.

Теорема 2 [2]. Нехай в області $Q = \{(t, X) : t_0 \leq t \leq t_0 + a, X \in D \subset \text{conv}(\mathbb{R}^n)\}$ багатозначне відображення $F(t, X)$ задовольняє умову Ліпшиця з константою $L > 0$.

Тоді рівняння (1) має єдиний розв'язок.

1.3 Лінійні диференціальні рівняння з похідною Хукухари

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння з похідною Хукухари:

$$D_H X = A(t)X(t) + B(t), \quad X(t_0) = X_0 \quad (3)$$

де $A(t)$ - 2π -періодична матриця розмірності $n \times n$, $t \in [t_0, T]$, $B(t)$ - неперервне багатозначне відображення.

Для рівняння (3) доведено існування розв'язку на всьому проміжку $[t_0, T]$.

Теорема 3 [2]. Нехай виконуються наступні умови:

- 1) всі елементи матриці $A(t)$ сумовані на відрізку $[\alpha, \beta]$;

2) багатозначне відображення $B(t)$ вимірне, $|B(t)| \leq m(t)$, де функція $m(\cdot)$ сумована на відрізку $[\alpha, \beta]$.

Тоді при $t_0 \in [\alpha, \beta]$ розв'язок системи (3) з будь-якою початковою умовою $X(t_0) = X_0 \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ існує на всьому відрізку $[\alpha, \beta]$ і єдиний.

Для диференціального рівняння з похідною Хукухари (3) розглянемо алгоритм побудови "ламаної" Ейлера та оцінки похибки. Розіб'ємо проміжок $[t_0, T]$ на m частин наступним чином:

$$t_0 < t_1 < \dots < t_m = T, t_{k+1} - t_k = \delta, I_k = [t_k, t_{k+1}], k = \overline{0, m-1},$$

і побудуємо "ламану" Ейлера:

$$\begin{aligned} X_m(t) &= X_m(t_k) + (t - t_k)F(t_k, X_m(t_k)), \quad t \in I_k, \quad k = \overline{0, m-1}, \\ X_m(t_0) &= X_0 \end{aligned} \quad (4)$$

Позначимо як $R = \max_{t \in [t_0, T]} h(X(t), X_m(t))$ – відхилення лінійної апроксимації від точного розв'язку.

Теорема 4 [2]. Нехай багатозначне відображення $F : [t_0, T] \times \text{conv}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ задовольняє наступним умовам:

- 1) $F(\cdot, \cdot)$ неперервне по (t, X) ;
- 2) $F(t, \cdot)$ задовольняє умову Ліпшиця по X з константою L ;
- 3) розв'язок $X(\cdot)$ рівняння (3) має неперервну другу похідну $D_H(D_H X(\cdot))$ на $[t_0, T]$ таку, що $|D_H(D_H X(t))| < K$ при $t \in [t_0, T]$.

Тоді похибка R задовольняє нерівності

$$R < \frac{\delta K}{2} \left[\left(\frac{1}{L} + \delta \right) (e^{L(T-t_0)} - 1) + \delta \right].$$

1.4 Алгоритм побудови числового розв'язку лінійного диференціального рівняння з похідною Хукухари

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння з похідною Хукухари (3).

Розв'язком цього диференціального рівняння є відображення $X(t)$.
Запишемо розв'язок рівняння (3) в інтегральній формі:

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t [A(s)X(s) + B(s)]ds.$$

Розіб'ємо проміжок $[t_0, t_1]$ на n частин кроком

$$\Delta t = \frac{t_1 - t_0}{n}.$$

Тоді на кожному з отриманих проміжків

$$X(t + \Delta t) = X(t) + \int_t^{t+\Delta t} [A(s)X(s) + B(s)]ds, \quad X(t_0) = X_0.$$

Скористаємося формулою числового інтегрування

$$X(t + \Delta t) = X(t) + \Delta t[A(t)X(t) + B(t)], \quad X(t_0) = X_0.$$

Візьмемо опорну функцію від обох частин:

$$C(X(t + \Delta t), \psi) = C(X(t) + \Delta t[A(t)X(t) + B(t)], \psi).$$

Скористаємося властивостями опорної функції [1]. Нехай A, B – компактні множини. Тоді:

$$C(A + B, \psi) = C(A, \psi) + C(B, \psi)$$

$$C(\lambda A, \psi) = C(A, \lambda \psi)$$

$$C(A, \lambda \psi) = \lambda C(A, \psi), \lambda \geq 0$$

$$C(M A, \psi) = C(A, M^T \psi),$$

де M - матриця $n \times n$.

Отримаємо:

$$C(X(t + \Delta t), \psi) = C(X(t), \psi) + \Delta t[C(X(t), A(t)^T \psi) + C(B(t), \psi)].$$

Отримана формула і буде розрахунковою формулою для розв'язання диференціального рівняння з похідною Хукухари.

Далі приведемо безпосередньо алгоритм розв'язку поставленої задачі.

Розіб'ємо коло $[0, 2\pi]$ на m частин і отримаємо m значень кута γ . Вектор ψ визначимо наступним чином:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \psi_1 = \cos \gamma, \quad \psi_2 = \sin \gamma.$$

Затабулюємо для кожного значення кута γ значення опорної функції $C(X_0, \psi)$ початкової множини X_0 .

В кожний момент часу ми отримаємо значення для наступної таблиці:

γ	$C(X(t), \psi)$	$C(X(t), A^T \psi)$	$C(X(t + \Delta t), \psi)$	$C(B(t), \psi)$
0				
$\gamma_1 = 2\pi/m$				
...				
$\gamma_m = 2\pi$				

Стовбець $C(X(t), A^T \psi)$ розраховується наступним чином:

$$C(X(t), A^T \psi) = C\left(X(t), \frac{A^T \psi}{\|A^T \psi\|}\right) \|A^T \psi\|,$$

де для компоненти:

$$\frac{A^T \psi}{\|A^T \psi\|}$$

ми повинні знайти такий вектор ψ , на якому буде досягатися мінімум норми різниці:

$$\min_j \left\| \psi_j - \frac{A^T(t_k) \psi_j}{\|A^T(t_k) \psi_j\|} \right\|$$

Тут змінюється вектор ψ , а отже і кут γ . Тому знайдені значення слід записувати в рядок таблиці з відповідним γ .

Отже, в кожний момент часу t ми отримуємо m значень опорної функції і m значень опорного вектору ψ , які визначають m точок на межі множини, яка утворює багатозначне відображення $X(t)$ в кожний момент часу. Але самі точки ми отримати не зможемо, оскільки опорна функція визначає цілу опорну гіперплощину і невідомо яка саме точка цієї гіперплощини є точкою межі

множини. Проте ми зможемо побудувати наближення цих множин у вигляді описаних багатокутників, вершинами яких будуть точки перетину гіперплощин, які визначаються опорними функціями і опорними векторами. Для знаходження кожної i -тої вершини багатокутника для множини, що утворюється відображенням $X(t)$ в конкретний момент часу, ми будемо розв'язувати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1\psi_1^i + x_2\psi_2^i = C(X(t), \psi^i), \\ x_1\psi_1^{i+1} + x_2\psi_2^{i+1} = C(X(t), \psi^{i+1}), \end{cases}$$

Описаний вище алгоритм реалізований у пакеті комп'ютерної (див. Додаток В).

1.5 Тестові приклади

Розглянемо початкову задачу для лінійного диференціального рівняння з похідною Хукухари (3).

Використовуючи описаний вище алгоритм, побудуємо для різних значень матриці $A(t)$ і множини $B(t)$ графіки розв'язків рівняння виду (3) на якому синім будемо зображати графік початкової множини $X(t_0)$, а червоним будемо зображати побудовані множини досяжності в конкретний момент часу.

Приклад 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

B - одиничне коло з центром в точці $(1, 1)$.

X_0 - одиничне коло з центром в початку координат

$$D_H X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X(t) + S_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

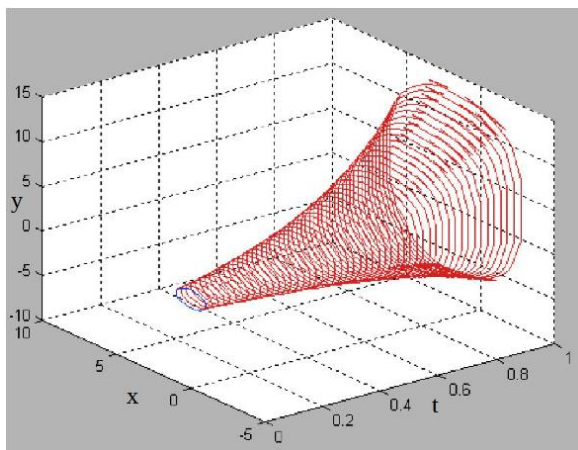


Рис. 1: Розв'язок лінійного диференціального рівняння з похідною Хукухари для прикладу 1

Приклад 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

B - одиничне коло з центром в точці $(1, 1)$.

X_0 - одиничний квадрат з центром в початку координат

$$D_H X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X(t) + s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

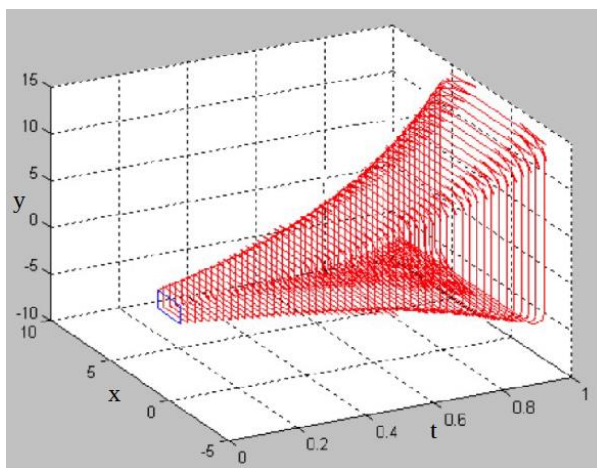


Рис. 2: Розв'язок лінійного диференціального рівняння з похідною Хукухари для прикладу 2

Приклад 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

B - одиничне коло з центром в точці $(1, 1)$.

X_0 - відрізок осі $Y[-1, 1]$

$$D_H X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X(t) + S_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

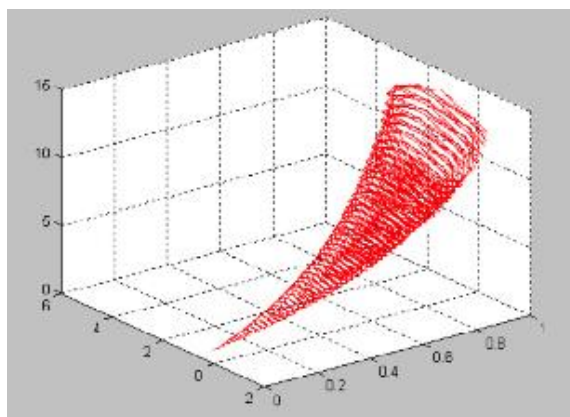


Рис. 3: Розв'язок лінійного диференціального рівняння з похідною Хукухари для прикладу 3

Приклад 4.

$$A = \begin{pmatrix} \sin t & 1 \\ 0 & -3t \end{pmatrix}$$

B - одиничний квадрат з центром в точці $(-1, t)$.

X_0 - одиничне коло з центром в початку координат

$$D_H X = \begin{pmatrix} \sin t & 1 \\ 0 & -3t \end{pmatrix} X(t) + K_1 \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix},$$

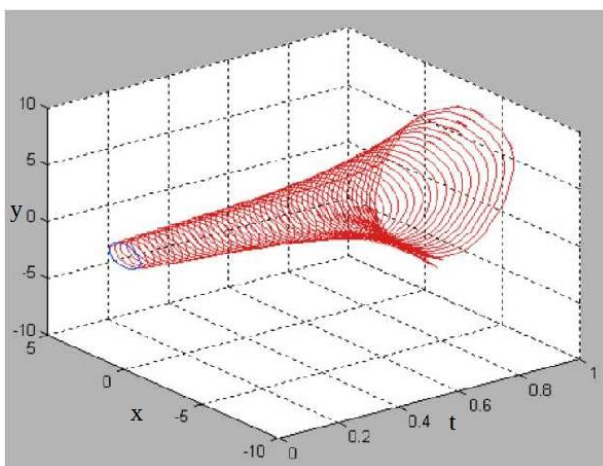


Рис. 4: Розв'язок лінійного диференціального рівняння з похідною Хукухари
для прикладу 4

Приклад 5.

$$A = \begin{pmatrix} \sin t & 1 \\ 0 & -3t \end{pmatrix}$$

B - одиничний квадрат з центром в точці $(-1, t)$.

X_0 - одиничний квадрат з центром в початку координат

$$D_H X = \begin{pmatrix} \sin t & 1 \\ 0 & -3t \end{pmatrix} X(t) + K_1 \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix},$$

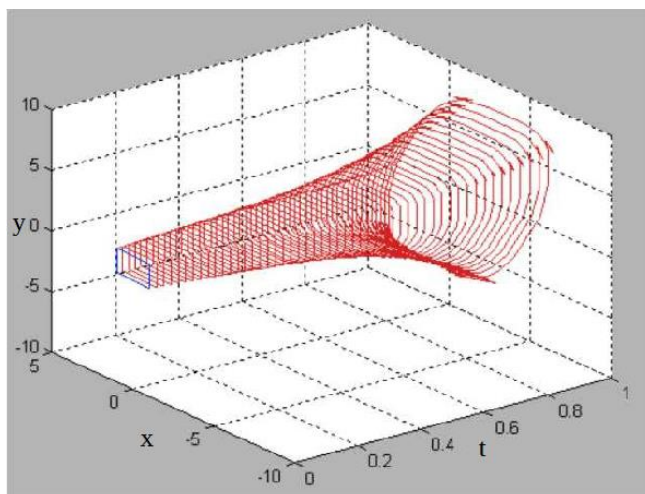


Рис. 5: Розв'язок лінійного диференціального рівняння з похідною Хукухари
для прикладу 5

Приклад 6.

$$A = \begin{pmatrix} \sin t & 1 \\ 0 & -3t \end{pmatrix}$$

B - одиничний квадрат з центром в точці $(-1, t)$.

X_0 - відрізок осі $Y[-1,1]$

$$D_H X = \begin{pmatrix} \sin t & 1 \\ 0 & -3t \end{pmatrix} X(t) + K_1 \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix},$$

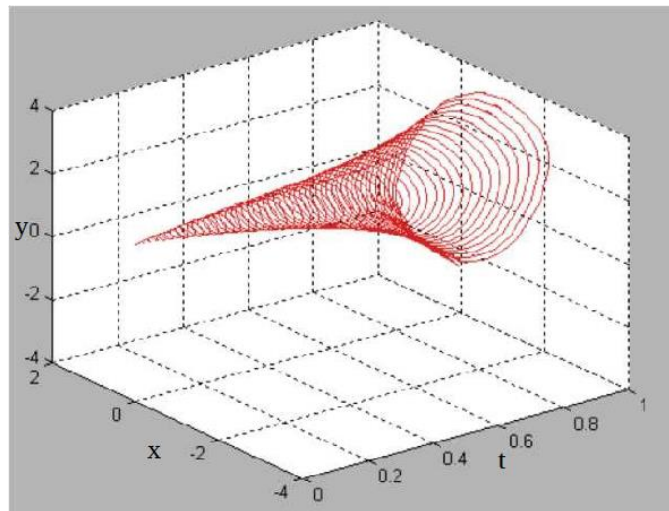


Рис. 6: Розв'язок лінійного диференціального рівняння з похідною Хукухари для приклада 6

Розділ 2

Добуток множин

2.1 Множення множин на основі скалярного добутку

Стандартної операції добутку множин не визначено в класичній літературі.

Але можна ввести способи побудови множини $X^2(t) = X(t) \cdot X(t)$, яку будемо розуміти як добуток багатозначного відображення на себе при кожному фіксованому значенні t .

Отже розглянемо варіанти операції добутку $X(t) \cdot Y(t)$, де $X(t)$, $Y(t)$ – багатозначні відображення.

Першою розглядатимемо операцію скалярного добутку двох багатозначних відображень. Оскільки елементами множин $X(t)$ та $Y(t)$ при фіксованому t є векторні величини $x(t) \in X(t)$ та $y(t) \in Y(t)$, то при однаковій розмірності векторів $x(t)$, $y(t)$ можна знайти їх скалярний добуток. Перебравши всі елементи із $X(t)$ та всі елементи із $Y(t)$, ми отримаємо всі елементи множини $X(t) \cdot Y(t)$. Зауважимо, що елементи множини $X(t) \cdot Y(t)$ є скалярам, що означає, що отримана множина завжди матиме вимірність R^1 .

2.2 Декартовий добуток

Для множин $X(t)$, $Y(t)$ можна використовувати операцію декартового добутку. Ця операція збільшує розмірність простору до $\mathbb{R}^{2n}$. Запишемо операцію декартового добутку для $X(t) \times X(t)$. В цьому випадку множини повинні мати певну розмірність. Запишемо рівняння з декартовим добутком $X(t) \times X(t)$ та виконаємо деякі перетворення:

$$A \cdot X + Q \cdot X^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} & q_{1n+1} & \cdots & q_{12n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} & q_{nn+1} & \cdots & q_{n2n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} + \\
&+ \begin{pmatrix} q_{11}x_1 + \cdots + q_{1n}x_n + q_{1n+1}x_1 + \cdots + q_{12n}x_n \\ \vdots \\ q_{n1}x_1 + \cdots + q_{nn}x_n + q_{nn+1}x_1 + \cdots + q_{n2n}x_n \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} x_1(a_{11} + q_{11} + q_{1n+1}) & \cdots & x_n(a_{1n} + q_{1n} + q_{12n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(a_{n1} + q_{n1} + q_{nn+1}) & \cdots & x_n(a_{nn} + q_{nn} + q_{n2n}) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} (a_{11} + q_{11} + q_{1n+1}) & \cdots & (a_{1n} + q_{1n} + q_{12n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1} + q_{n1} + q_{nn+1}) & \cdots & (a_{nn} + q_{nn} + q_{n2n}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} (1) & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & + \cdots + Q \cdot (n) & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \cdot X.
\end{aligned}$$

Таким чином бачимо, що введення декартового добутку для визначення квадрата багатозначного відображення не вводить нелінійність, оскільки праву частину можна виразити як деяку нову матрицю, помножену на $X(t)$. Тобто рівняння залишається лінійним. Отже варіант декартового добутку надалі ми не будемо використовувати.

Проілюструємо визначені способи отримання добутку множин наступними прикладами.

2.3 Операція «*»

Введемо операцію "*" на множинах $X(t)$, $Y(t)$ за наступним означенням:

$$X(t) * Y(t) = \{z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)) \mid z_i(t) = x_i(t) \cdot y_i(t),$$

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t)),$$

$$x(t) \in X(t), y(t) \in Y(t)\}.$$

Таким чином $X^2(t) = X(t) * X(t)$ має ту ж розмірність, що і $X(t)$, а матриця Q має ту ж розмірність, що і матриця $A(t)$.

Як ми побачимо, множина X^2 , побудована за допомогою операції "*", не завжди є опуклою.

2.4 Приклади

Проілюструємо визначені способи отримання добутку множин наступними прикладами.

Приклад 7.

$x_1 = [a_1, b_1], a_1 = (0, 4), b_1 = (4, 0)$ - відрізок в $\mathbb{R}^2$

$x_2 = [a_2, b_2], a_2 = (-3, 1), b_2 = (1, 3)$ - відрізок в $\mathbb{R}^2$

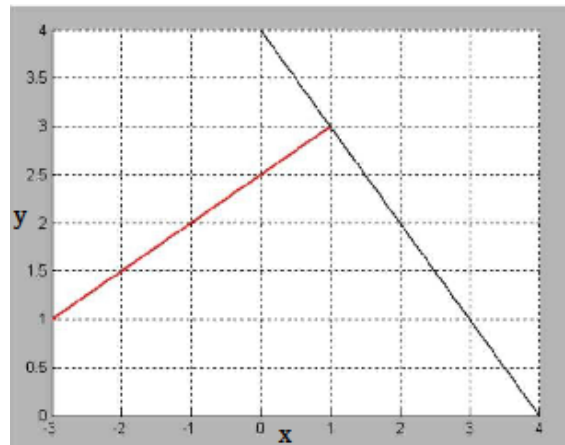


Рис. 7: Початкові множини для прикладу 7

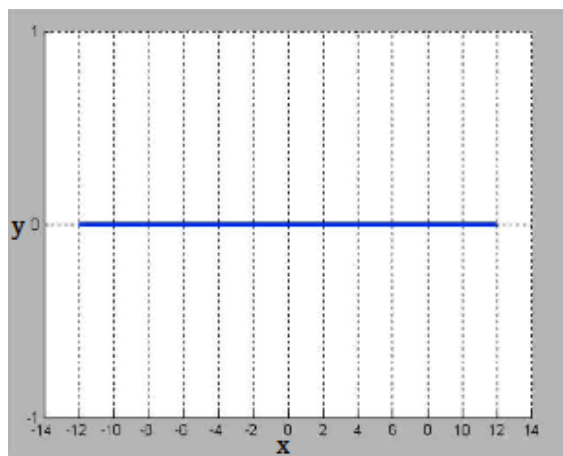


Рис. 8: Скалярний добуток для прикладу 7

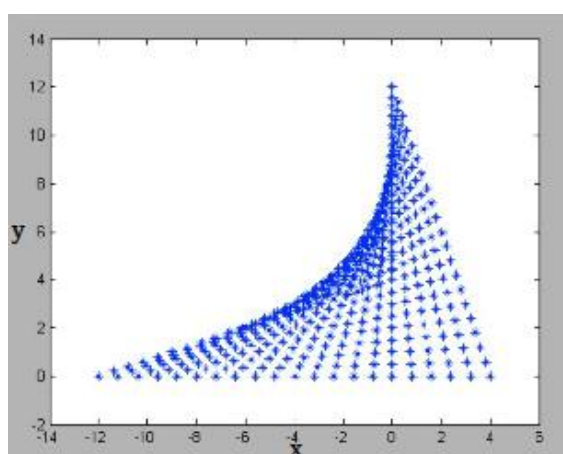


Рис. 9: Операція покоординатного добутку для прикладу 7

Приклад 8.

$x1 = [a, b], a = (-3, 1), b = (-1, 2)$ - відрізок в $\mathbb{R}^2$

$x2 = -3 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 3$ - квадрат в $\mathbb{R}^2$

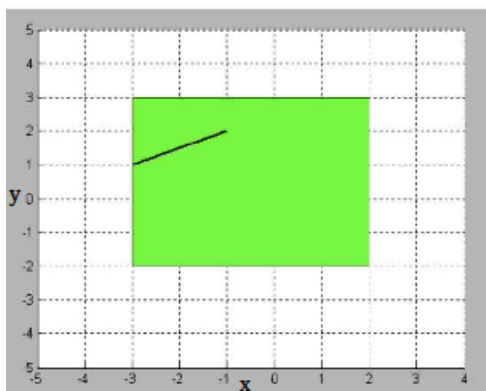


Рис. 10: Початкові множини для прикладу 8

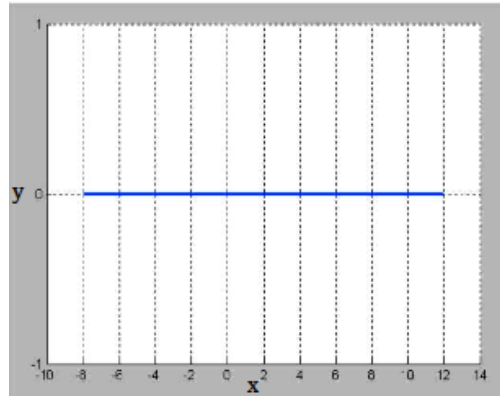


Рис. 11: Скалярний добуток для прикладу 8

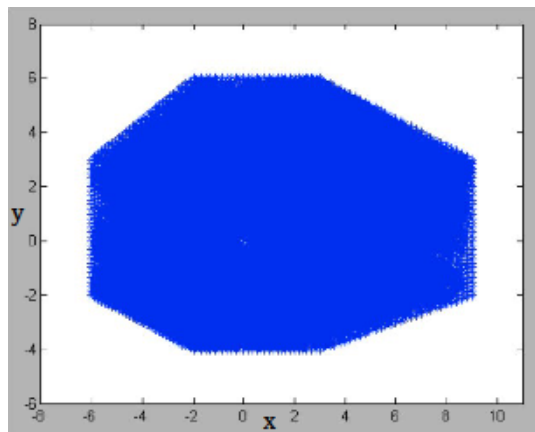


Рис. 12: Операція покоординатного добутку для прикладу 8

Приклад 9.

$x_1 = -4 \leq x \leq -1, y = 1$ - відрізок в $\mathbb{R}^2$

$x_2 = c = (2, 3), r = 1$ - круг в $\mathbb{R}^2$

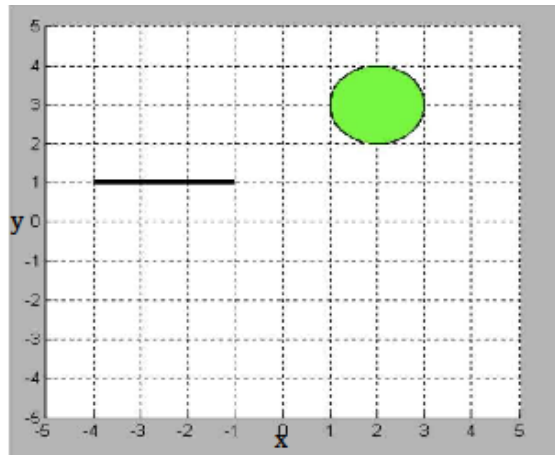


Рис. 13: Початкові множини для прикладу 9

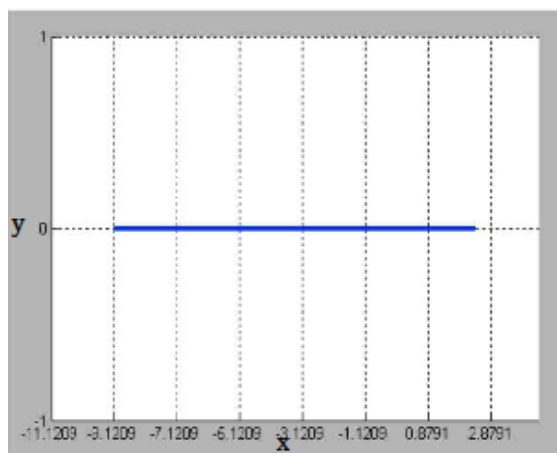


Рис. 14: Скалярний добуток для прикладу 9

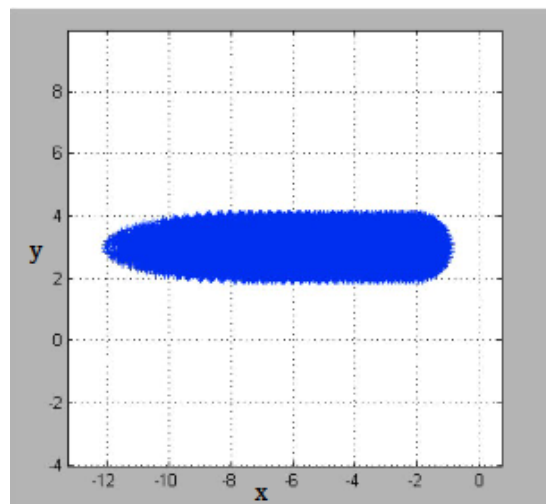


Рис. 15: Операція покоординатного добутку для прикладу 9

Розділ 3

Диференціальні рівняння з похідною Хукхари з квадратичною правою частиною

3.1 Постановка задачі

Розглянемо квадратичне диференціальне рівняння з похідною Хукхари виду:

$$D_H X(t) = A(t)X(t) + Q(t)co(X^2(t)) + B(t), \quad (5)$$

де $X(t) : \mathbb{R}^1 \rightarrow conv(\mathbb{R}^n)$, $A(t)$ - матриця розмірності $n \times n$, $Q(t)$ - матриця, розмірність якої залежить від введеного способу отримання множини $X^2(t)$, $co(X^2(t))$ - опукла оболонка множини $X^2(t)$, $t \in [t_0, T]$, $B(t)$ - неперервне багатозначне відображення.

Нехай задано $X(t_0) = X_0$.

3.2 Алгоритм побудови числового розв'язку квадратичного диференціального рівняння з похідною Хукхари

Розглянемо квадратичне диференціальне рівняння з похідною Хукхари (6):

Розв'язком цього диференціального рівняння є відображення $X(t)$.
Запишемо розв'язок рівняння (5) в інтегральній формі:

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t [A(s)X(s) + Q(s)co(X^2(s)) + B(s)] ds.$$

Розіб'ємо проміжок $[t_0, t_1]$ на n частин кроком

$$\Delta t = \frac{t_1 - t_0}{n}.$$

Тоді на кожному з отриманих проміжків

$$X(t + \Delta t) = X(t) + \int_{t_0}^{t+\Delta t} [A(s)X(s) + Q(s)co(X^2(s)) + B(s)]ds, \quad X(t_0) = X_0$$

Скористаємося формулою числового інтегрування

$$X(t + \Delta t) = X(t) + \Delta t[A(t)X(t) + Q(t)co(X^2(t)) + B(t)], \quad X(t_0) = X_0$$

Візьмемо опорну функцію від обох частин:

$$C(X(t + \Delta t), \psi) = C(X(t), \psi) + \Delta t[A(t)X(t) + Q(t)co(X^2(t)) + B(t)], \psi.$$

Скористаємося властивостями опорної функції [1]. Нехай A, B - компактні множини. Тоді:

$$C(A + B, \psi) = C(A, \psi) + C(B, \psi)$$

$$C(\lambda A, \psi) = C(A, \lambda \psi)$$

$$C(A, \lambda \psi) = \lambda C(A, \psi), \lambda \geq 0$$

$$C(M A, \psi) = C(A, M^T \psi),$$

де M - матриця $n \times n$.

Отримаємо:

$$C(X(t + \Delta t), \psi) = C(X(t), \psi) + \Delta t[C(X(t), A(t)^T \psi) + C(co(X^2(t)), Q(t)^T \psi) + C(B(t), \psi)].$$

Отримана формула і буде розрахунковою формулою для розв'язання диференціального рівняння з похідною Хукухари.

Далі приведемо безпосередньо алгоритм розв'язку поставленої задачі.

Розіб'ємо коло $[0, 2\pi]$ на m частин і отримаємо m значень кута γ . Вектор ψ визначимо наступним чином:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \psi_1 = \cos \gamma, \quad \psi_2 = \sin \gamma.$$

Затабулюємо для кожного значення кута γ значення опорної функції $C(X_0, \psi)$ початкової множини X_0 .

В кожний момент часу ми отримаємо значення для наступної таблиці:

γ	$C(X(t), \psi)$	$C(X(t), A^T \psi)$	$C(X(t + \Delta t), \psi)$	$C(X^2(t), Q^T \psi)$	$C(B(t), \psi)$
0					
$\gamma_1 = 2\pi/m$					
...					
$\gamma_m = 2\pi$					

Стовбець $C(X(t), A^T \psi)$ розраховується наступним чином:

$$C(X(t), A^T \psi) = C\left(X(t), \frac{A^T \psi}{\|A^T \psi\|}\right) \|A^T \psi\|,$$

де для компоненти:

$$\frac{A^T \psi}{\|A^T \psi\|}$$

ми повинні знайти такий вектор ψ , на якому буде досягатися мініму норми різниці:

$$\min_j \left\| \psi_j - \frac{A^T(t_k) \psi_j}{\|A^T(t_k) \psi_j\|} \right\|$$

Тут змінюється вектор ψ , а отже і кут γ . Тому знайдені значення слід записувати в рядок таблиці з відповідним γ .

Отже, в кожний момент часу t ми отримуємо m значень опорної функції і m значень опорного вектору ψ , які визначають m точок на межі множини, яка утворює багатозначне відображення $X(t)$ в кожний момент часу. Але самі точки ми отримати не зможемо, оскільки опорна функція визначає цілу опорну гіперплощину і невідомо яка саме точка цієї гіперплощини є точкою межі множини. Проте ми зможемо побудувати наближення цих множин у вигляді

описаних багатокутників, вершинами яких будуть точки перетину гіперплощин, які визначаються опорними функціями і опорними векторами. Для знаходження кожної i -тої вершини багатокутника для множини, що утворюється відображенням $X(t)$ в конкретний момент часу, ми будемо розв'язувати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1\psi_1^i + x_2\psi_2^i = C(X(t), \psi^i), \\ x_1\psi_1^{i+1} + x_2\psi_2^{i+1} = C(X(t), \psi^{i+1}), \end{cases}$$

Описаний вище алгоритм реалізований у пакеті комп'ютерної математики Octave 8.4.0 (див. Додаток В).

3.3 Тестові приклади

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь (6):

$$D_H X(t) = A(t)X(t) + Q(t)\cos(X^2(t)) + B(t),$$

з початковою умовою:

$$X(t_0) = X_0.$$

Використовуючи описаний вище алгоритм, побудуємо для різних значень $A(t)$, $Q(t)$ і множини $B(t)$ графік розв'язків рівняння виду (6) на якому синім будемо зображати графік початкової множини $X(t_0)$, а червоним будемо зображати побудовані множини досяжності в конкретний момент часу.

Приклад 10.

$$A = \begin{pmatrix} \sin t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

B - коло $r = 2$, з центром в початку координат

X_0 - одиничне коло з центром в точці $(1, 1)$

$$D_H X(t) = \begin{pmatrix} \sin t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} co(X^2(t)) + S_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Графіки розв'язків рівняння при способі задання $X^2(t)$ через скалярний добуток елементів множини $X(t)$ має вигляд, $t \in [0, 0.2]$:

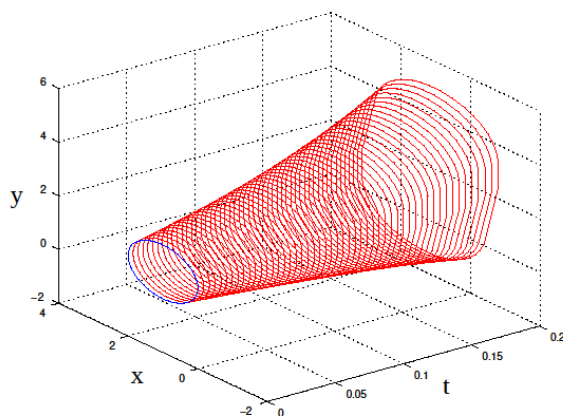


Рис. 16: Розв'язок квадратичного диференціального рівняння з похідною
Хукухара де X^2 означений через скалярний добуток для приклада 10

Графік розв'язків рівняння при способі задання $X^2(t)$ через операцію покоординатного добутку елементів множини $X(t)$ має вигляд, $t \in [0, 0.14]$:

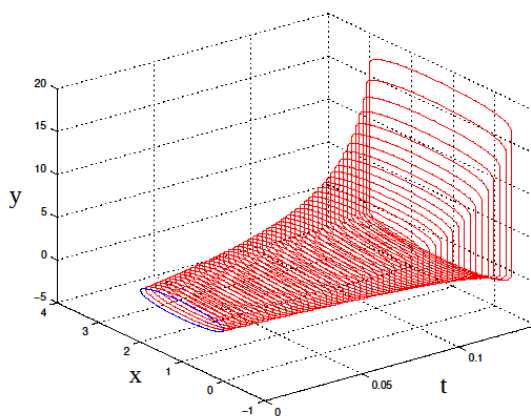


Рис. 17: Розв'язок квадратичного диференціального рівняння з похідною
Хукухара де X^2 означений через операцію покоординатного добутку для
прикладу 10

Зауважимо, що у першому випадку побудови графіків розв'язків рівняння ми брали проміжок часу $t \in [t_0, T]$, де $t_0 = 0$, $T = 0,2$, а в другому випадку побудови графіків ми брали проміжок часу, де $t_0 = 0$, $T = 0,14$. Це пояснюється тим, що у випадку задання $X^2(t)$ через операцію покоординатного добутку елементів множини $X(t)$, кінцева інтегральна воронка розширюється значно швидше ніж у випадку задання $X^2(t)$ через скалярний добуток елементів множини $X(t)$. Тому для наглядності побудованого графіку було вирішено зменшити проміжок часу.

Приклад 11.

$$A = \begin{pmatrix} \sin t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

B - коло $r = 2$, з центром в початку координат

X_0 - квадрат з одиничною півтороною з центром в точці $(1, 1)$

$$D_H X(t) = \begin{pmatrix} \sin t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} co(X^2(t)) + S_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Графіки розв'язків рівняння при способі задання $X^2(t)$ через скалярний добуток елементів множини $X(t)$ має вигляд, $t \in [0, 0.2]$:

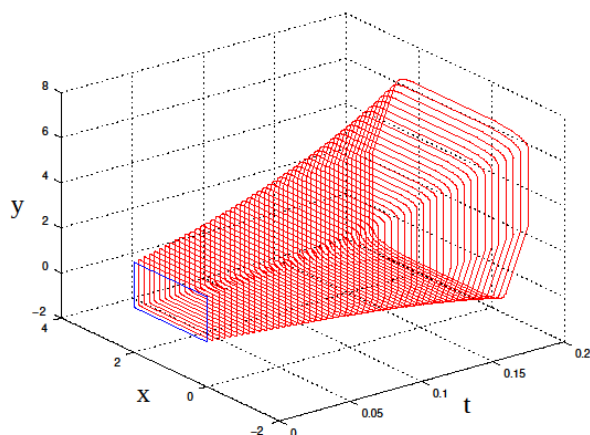


Рис. 18: Розв'язок квадратичного диференціального рівняння з похідною
Хукухара де X^2 означений через скалярний добуток для приклада 11

Графік розв'язків рівняння при способі задання $X^2(t)$ через операцію покоординатного добутку елементів множини $X(t)$ має вигляд, $t \in [0, 0.14]$:

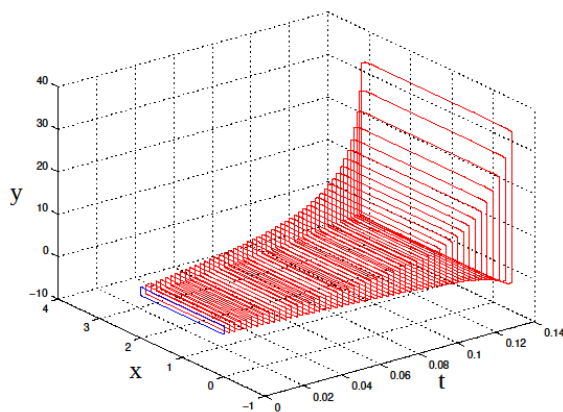


Рис. 19: Розв'язок квадратичного диференціального рівняння з похідною
Хукухара де X^2 означений через операцію покоординатного добутку для
прикладу 11

Приклад 12.

$$A = \begin{pmatrix} \sin t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

B - коло $r = 2$, з центром в початку координат

X_0 - відрізок по осі Y довжиною $[-1, 1]$

$$D_H X(t) = \begin{pmatrix} \sin t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} co(X^2(t)) + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Графік розв'язків рівняння при способі задання $X^2(t)$ через скалярний добуток елементів множини $X(t)$ має вигляд, $t \in [0, 0.2]$:

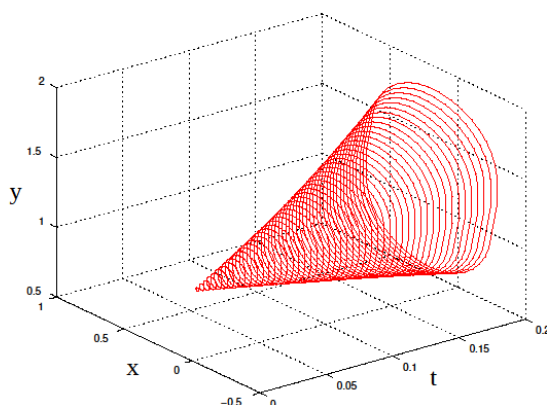


Рис. 20: Розв'язок квадратичного диференціального рівняння з похідною
Хукухара де X^2 означений через скалярний добуток для приклада 12

Графік розв'язків рівняння при способі задання $X^2(t)$ через операцію покоординатного добутку елементів множини $X(t)$ має вигляд, $t \in [0, 0.14]$:

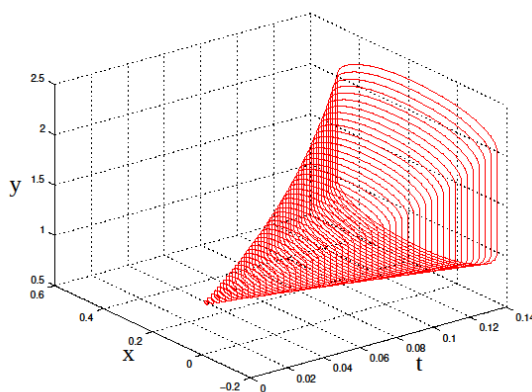


Рис. 21: Розв'язок квадратичного диференціального рівняння з похідною
Хукухара де X^2 означений через операцію покоординатного добутку для
прикладу 12

Приклад 13.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \sin t & t \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

B - квадрат з довжиною півсторони $r = 2$ з центром в точці $(3, 0)$

X_0 - коло радіусом $r = 3$ з центром в точці $(2, 3)$

$$D_H X(t) = \begin{pmatrix} \sin t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} co(X^2(t)) + K_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Графік розв'язків рівняння при способі задання $X^2(t)$ через скалярний
добуток елементів множини $X(t)$ має вигляд, $t \in [0, 0.2]$:

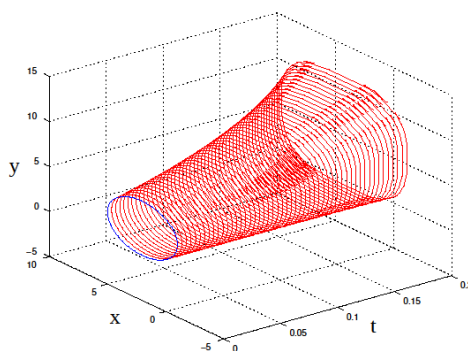


Рис. 22: Розв'язок квадратичного диференціального рівняння з похідною
Хукухара де X^2 означений через скалярний добуток для прикладу 13

Графік розв'язків рівняння при способі задання $X^2(t)$ через операцію
покоординатного добутку елементів множини $X(t)$ має вигляд, $t \in [0, 0.03]$:

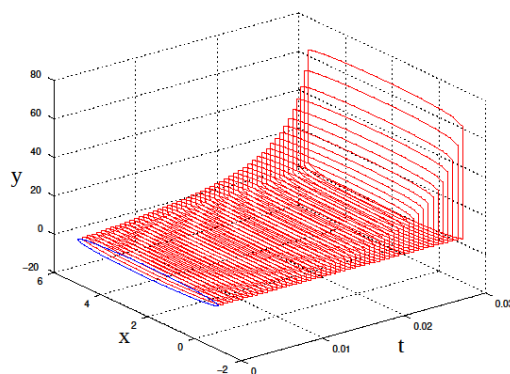


Рис. 23: Розв'язок квадратичного диференціального рівняння з похідною Хукухара де X^2 означений через операцію покоординатного добутку для приклада 13

Приклад 14.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \sin t & t \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

B - квадрат з довжиною півсторони $r = 2$ з центром в точці $(3, 0)$

X_0 - квадрат з одиничною півтороною з центром в точці $(2, 3)$

$$D_H X(t) = \begin{pmatrix} \sin t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} co(X^2(t)) + K_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Графік розв'язків рівняння при способі задання $X^2(t)$ через скалярний добуток елементів множини $X(t)$ має вигляд, $t \in [0, 0.2]$:

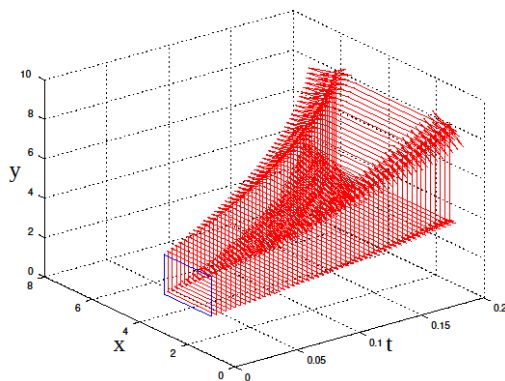


Рис. 24: Розв'язок квадратичного диференціального рівняння з похідною
Хукухара де X^2 означений через скалярний добуток для приклада 14

Графік розв'язків рівняння при способі задання $X^2(t)$ через операцію покоординатного добутку елементів множини $X(t)$ має вигляд, $t \in [0, 0.03]$:

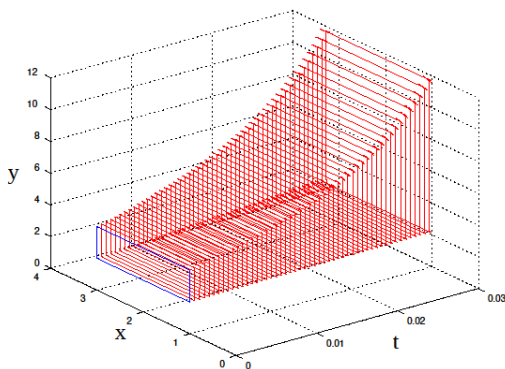


Рис. 25: Розв'язок квадратичного диференціального рівняння з похідною
Хукухара де X^2 означений через операцію покоординатного добутку для
прикладу 14

Приклад 15.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \sin t & t \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

B - квадрат з довжиною півсторони $r = 2$ з центром в точці $(3, 0)$

X_0 - відрізок по осі Y довжиною $[-1, 1]$

$$D_H X(t) = \begin{pmatrix} \sin t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} co(X^2(t)) + K_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Графік розв'язків рівняння при способі задання $X^2(t)$ через скалярний добуток елементів множини $X(t)$ має вигляд, $t \in [0, 0.2]$:

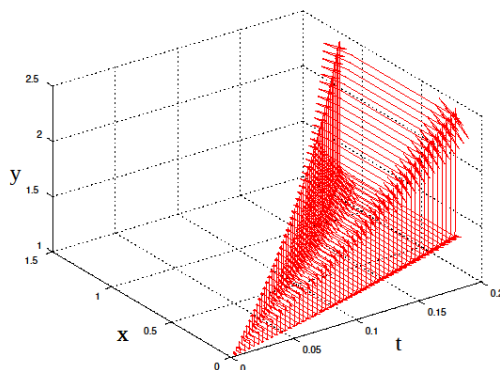


Рис. 26: Розв'язок квадратичного диференціального рівняння з похідною
Хукухара де X^2 означений через скалярний добуток для приклада 15

Графік розв'язків рівняння при способі задання $X^2(t)$ через операцію покоординатного добутку елементів множини $X(t)$ має вигляд, $t \in [0, 0.03]$:

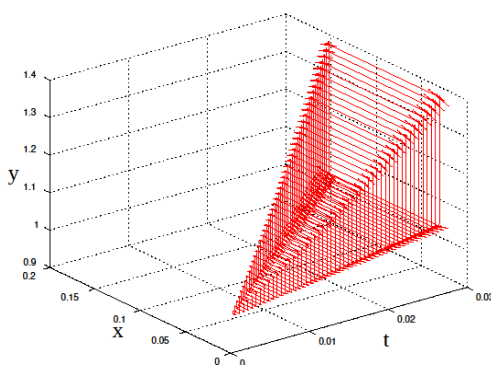


Рис. 27: Розв'язок квадратичного диференціального рівняння з похідною
Хукухара де X^2 означений через операцію покоординатного добутку для
прикладу 15

ВИСНОВКИ

В данній роботі було вивчено основні теоретичні відомості щодо диференціальних рівнянь з похідною Хукухари. Було розглянуто лінійні диференціальні рівняння з похідною Хукухари, для яких було реалізовано алгоритм побудови числових розв'язків в середовищі MatLab. Алгоритм було проілюстровано модельними прикладами.

Виконана постановка задачі для квадратичних диференціальних рівнянь з похідною Хукухари. Обговорено можливі варіанти побудови множини $X^2(t)$, які наочно проілюстровано на конкретних прикладах. Для квадратичного диференціального рівняння з похідною Хукухари, в якому $X^2(t)$ задається через скалярний добуток елементів та в якому $X^2(t)$ задається через операцію покоординатного добутку елементів множини $X(t)$, розроблено алгоритм побудови числового розв'язку та виконана його реалізація в середовищі MatLab. Для конкретних прикладів з різними способами побудови множини $X^2(t)$, реалізовано розроблений алгоритм побудови числових розв'язків квадратичного диференціального рівняння з похідною Хукухари та зображено графіки розв'язків.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Арсірій А. В., Кічмаренко О. Д., Скрипник Н. В. Множиннозначний аналіз та лінійні задачі керування: методичні вказівки та варіанти контрольних робіт для студентів 3–6 курсів. Одеса: Астропринт, 2008. 82 с.
- [2] Плотніков М. В., Скрипник Н. В. Дифференціальні рівняння з "чіткою" и нечіткою множиннозначною правою частиною : асимптотичні методи : монографія Одеса: Астропринт, 2009. 192 с.
- [3] Malinovsky A. A. Second type Hukuhara differentiable solutions to the delay set-valued differential equations. *Appl. Math. Comput.*, 2012. Т. 218. № 18. Р. 9427–9437.
- [4] Ocheretnyuk E. V., Slinko V. I. Estimates of the Volume of Solutions of Differential Equations with Hukuhara Derivative. *Український математичний журнал*, 2017, Т. 69. № 2. С. 189-214.
- [5] Мартинюк А. А. Дробно-подобная производная Хукухары и её свойства. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, 2019. №4. С. 10-16.
- [6] Скрипник Н.В. Умови існування базових розв’язків лінійних множиннозначних рівнянь/ Скрипник Н. В., Комлева Т. О., Плотнікова А. В., Плотнікова Л. І. *Укр. мат. журн.*, 2021. Т. 73. № 5. С.651-673
- [7] Плотников В.А., Кичмаренко О.Д. Усреднение управляемых уравнений с производной Хукухары. Нелінійні коливання. 2006, N 3. С. 376-385.
- [8] Плотников В.А., Кичмаренко О.Д. Усреднение уравнений с производной Хукухары, многозначным управлением и запаздыванием. *Вісник Одеськ. нац. ун-ту*. 2007. Т. 12, вип. 7. Матем. і мех. С. 130 – 139.
- [9] Kichmarenko O.D. Averaging of differential equations with Hukuhara derivative with maxima. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2009. V.57, № 3. Р. 447-457.

[10] Кічмаренко О.Д., Сапожніков В.В. Метод усереднення диференціально-різницевих включень. Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки та математики – 2023» до 95-річчя від дня народження академіка НАН України Я. С. Підстригача та 45-річчя створеного ним Інституту прикладних проблем механіки і математики НАН України (23 – 25 травня 2023 р.). Львів, 2023. С. 382.

ДОДАТОК А

В теорії множиннозначних відображень виникає питання, що розуміти під похідною від множиннозначних відображення. Основною причиною, за якою виникають складності для введення данного поняття, є нелінійність простору $conv(\mathbb{R}^n)$ непустих компактних підмножин евклідового простору $\mathbb{R}^n$, та відсутність операції різниці в цьому просторі. Але, оскільки операція різниці в багатьох випадках дуже необхідна, то існує декілька підходів до визначення різниці множин. Розглянемо один із них.

Означення 1 [2]. Нехай $X, Y \in conv(\mathbb{R}^n)$. Множина $Z \in conv(\mathbb{R}^n)$ така, що $X = Y + Z$, називається різницею Хукухари множин X і Y і позначається $X \overset{h}{-} Y$.

Лема 1 [2]. Різниця Хукухари, якщо вона існує, визначається єдиним чином.

Лема 2 [2]. Нехай $X, Y, Z, U \in conv(\mathbb{R}^n)$, $\alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тоді

1) $(X + Y) \overset{h}{-} (Z + U) = (X \overset{h}{-} Z) + (Y \overset{h}{-} U)$, якщо різниці $X \overset{h}{-} Z$ та $Y \overset{h}{-} U$ існують;

2) $(X \overset{h}{-} Y) \overset{h}{-} (Z \overset{h}{-} U) = (X \overset{h}{-} Z) \overset{h}{-} (Y \overset{h}{-} U)$, якщо різниці $(X \overset{h}{-} Z) \overset{h}{-} (Y \overset{h}{-} U)$ та $Z \overset{h}{-} U$ існують;

3) $(X \overset{h}{-} Y) \overset{h}{-} (Z \overset{h}{-} U) = (X \overset{h}{-} Z) + (U \overset{h}{-} Y)$, якщо різниці $X \overset{h}{-} Z$, $U \overset{h}{-} Y$ та $Z \overset{h}{-} U$ існують;

4) $X \overset{h}{-} U = (X \overset{h}{-} Y) + (Y \overset{h}{-} U)$, якщо різниці $X \overset{h}{-} Y$ та $Y \overset{h}{-} U$ існують;

5) $\lambda (X \overset{h}{-} Y) = \lambda X \overset{h}{-} \lambda Y$, якщо різниця $X \overset{h}{-} Y$ існує;

6) $(\alpha X + \beta Y) \stackrel{h}{-} (\lambda U + \mu Z) = (\alpha - \lambda)X + \lambda(X \stackrel{h}{-} U) + (\beta - \mu)Y + \mu(Y \stackrel{h}{-} Z)$, якщо $\lambda \geq 0, \mu \geq 0, \alpha - \lambda \geq 0, \beta - \mu \geq 0$ та різниці $X \stackrel{h}{-} U, Y \stackrel{h}{-} V$ існують;

7) $h(X \stackrel{h}{-} U, Y \stackrel{h}{-} V) \leq h(X, Y) + h(U, V)$, якщо різниці $X \stackrel{h}{-} U$ и $Y \stackrel{h}{-} V$ існують;

8) $h(\lambda X, \lambda Y) = \lambda h(X \stackrel{h}{-} Y, 0)$, якщо $\lambda \geq 0$ і різниця $X \stackrel{h}{-} Y$ існує.

Лема 3 [2]. Операція різниці неперервна відносно метрики Хаусдорфа: якщо послідовності $\{X_m\}_{m=1}^{\infty}$ та $\{Y_m\}_{m=1}^{\infty}$ збігаються до X та Y і різниці $X_m \stackrel{h}{-} Y_m$ існують при будь-яких $m \in \mathbb{N}$, то різниця $X \stackrel{h}{-} Y$ існує і послідовність $\{X_m \stackrel{h}{-} Y_m\}_{m=1}^{\infty}$ збігається до $X \stackrel{h}{-} Y$.

Зауваження 1 [2]. Очевидно, що в загальному випадку $X \stackrel{h}{-} Y \neq X + (-1)Y$ (наприклад, коли $X = Y = S_1(0)$) і різниця $X \stackrel{h}{-} Y$ існує тільки тоді, коли деякий зсув Y міститься в X , тобто якщо $\text{diam } X \geq \text{diam } Y$.

ДОДАТОК Б

Існує декілька підходів до визначення різниці і тому існує не менше кількість підходів до визначення похідної, які мають як свої позитивні, так і свої негативні сторони. Зупинимось на понятті похідної Хукухари.

Нехай $I = [t_0, T]$ — проміжок в $\mathbb{R}$.

Означення 1 [2]. Багатозначне відображення $X : I \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ називається диференційованим за Хукухарою в точці $t \in I$, якщо існує $D_H X(t) \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ така, що границі

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(X(t + \Delta t) \overset{h}{-} X(t) \right) \text{ і } \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(X(t) \overset{h}{-} X(t - \Delta t) \right)$$

існують і дорівнюють $D_H X(t)$. Множина $D_H X(t)$ при цьому називається похідною Хукухари багатозначного відображення $X : I \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ в точці t .

Зауважимо, що в данному означенні зроблено припущення, що для всіх достатньо малих $\Delta t > 0$ різниці $X(t + \Delta t) \overset{h}{-} X(t)$, $X(t) \overset{h}{-} X(t - \Delta t)$ існують.

Лема 1 [2]. Нехай багатозначні відображення $X, Y : I \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ диференційовані в точці $t \in I$. Тоді

1) багатозначне відображення $X + Y : I \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ диференційоване в точці t , при цьому справедлива рівність

$$D_H(X + Y)(t) = D_H X(t) + D_H Y(t);$$

2) якщо в околі J точки t існує різниця $\left(X \overset{h}{-} Y \right)(\cdot)$, то багатозначне відображення $X \overset{h}{-} Y : J \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ диференційоване в точці t , при цьому справедлива рівність

$$D_H \left(X \overset{h}{-} Y \right)(t) = D_H X(t) \overset{h}{-} D_H Y(t);$$

3) для будь-якого $\lambda \in \mathbb{R}$ багатозначне відображення $\lambda X : I \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ диференційоване в точці t , при цьому справедлива рівність

$$D_H(\lambda X)(t) = \lambda D_H X(t).$$

Означення 2 [2] . Багатозначне відображення $X : I \rightarrow conv(\mathbb{R}^n)$ називається диференційоване на I , якщо воно диференційоване в усіх точках $t \in I$.

Лема 2 [2] . Довільне диференційоване багатозначне відображення $X : I \rightarrow conv(\mathbb{R}^n)$ неперервне.

Лема 3 [2] . Багатозначне відображення $X : I \rightarrow conv(\mathbb{R}^n)$ постійне тоді і тільки тоді, коли $D_H X(t) \equiv \{0\}$.

Лема 4 [2] . Нехай багатозначне відображення $X : I \rightarrow conv(\mathbb{R}^n)$ неперервне. Тоді для кожного $t \in [t_0, T]$ інтеграл $G(t) = \int_{t_0}^t X(s)ds$ диференційований і $D_H G(t) = X(t)$.

Лема 5 [2] . Нехай багатозначне відображення $X : I \rightarrow conv(\mathbb{R}^n)$ неперервно диференційоване, тоді багатозначне відображення $D_H X : I \rightarrow conv(\mathbb{R}^n)$ інтегроване і

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t D_H X(s)ds.$$

Означення 3 [2] . Багатозначне відображення $X : I \rightarrow conv(\mathbb{R}^n)$ називається вимірним на I , якщо для будь-якої непорожньої множини $K \in conv(\mathbb{R}^n)$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ множина $\{t \in I : h(X(t), K) \leq \varepsilon\}$ вимірна за Лебегом.

Означення 4 [2] . Багатозначне відображення $X : I \rightarrow conv(\mathbb{R}^n)$ називається абсолютно неперервним на проміжку I , якщо існують множина $X_0 \in conv(\mathbb{R}^n)$ і інтегроване багатозначне відображення $f : I \rightarrow conv(\mathbb{R}^n)$ такі, що

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t f(s)ds.$$

Зауваження 2 [2]. Якщо багатозначне відображення $X : I \rightarrow conv(\mathbb{R}^n)$ вимірне і існує сумована функція $k(\cdot)$ така, що для майже всіх $t \in I$ виконується нерівність $|X(t)| \leq k(t)$, то багатозначне відображення $G(t) = \int_{t_0}^t X(s)ds$ абсолютно неперервне на I і $D_H G(t) = X(t)$ майже всюди на I . Крім

того, якщо багатозначне відображення $X : I \rightarrow conv(\mathbb{R}^n)$ абсолютно неперервне, то багатозначне відображення $D_H X(\cdot)$ визначене майже всюди на I , інтегроване і справедлива рівність

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t D_H X(s) ds.$$

ДОДАТОК В

```

function fastHukuhara()
% Time
t_0 = 0; %start time point
t_1 = 5; %end time point

% X
function X = initialX(psi)
    cx=[-1 1];
    %circle
    X = norm(psi) + cx*psi;
    %square
    %X = abs(psi(1))+abs(psi(2))+cx*psi;
    %range on axis Y [-1,1]
    %X = psi(2);
end
% A
function A = matrixA(t)
    A = [sin(t)*sin(t) -1; 0 -sin(t)];
end
% B
function B = matrixB(psi, t)
    % Calculating the center of B at current time point
    cb = [sin(t) cos(t)];

    % Circle
    B = norm(psi) + cb*psi;

```

```

    % Square
    %B = abs(psi(1)) + abs(psi(2)) + centerB*psi;

    % Range on axis Y [-1,1]
    %B = psi(2);
end

n = 50; %number of steps in range [t_0, t_1]
delta = (t_1-t_0)/n;
gammaSteps = 36; %number of gamma angles in range [0, 2pi]
gamma = 0:(2*pi/gammaSteps):(2*pi); %gamma angles
len = length(gamma);
psis = [cos(gamma);sin(gamma)]; % Calculating vectors psi

%Calculating support funtion for X at initial time point
C_X = zeros(len, n);
k = 1;
for psi = psis
    C_X(k,1) = initialX(psi);
    k = k+1;
end

%Solving an equation
for k = 1:n
    % Calculating current time point
    currentT = t_0 + k*delta;

    % Defining matrix A at current time point

```

```

A = matrixA(currentT);

for p = 1:length(psis)
    psi = psis(:,p);
    C = A'*psi / norm(A'*psi);
    minNorm = norm(C - psi);
    minC_X = C_X(p, k);
    for q = 1:length(psis)
        currentPsi = psis(:,q);
        currentNorm = norm(C - currentPsi);
        if minNorm > currentNorm
            minNorm = currentNorm;
            minC_X = C_X(q, k);
        end
    end
    C_AX(p) = minC_X * norm(A'*psi);
    C_B(p) = matrixB(psi, currentT);
    C_X(p,k+1) = C_X(p,k) + delta*(C_AX(p)+C_B(p));%+C_BU(i));
end
end

%Circumscribed polygon%
for k = 0:n
    for i = 1:len-1
        AA=[psis(1,i) psis(2,i); psis(1,i+1) psis(2,i+1)];
        FF=[C_X(i,k+1); C_X(i+1,k+1)];
        X(:,i,k+1)=AA\FF;
    end
    X(:,i+1,k+1)=X(:,1,k+1);

```

end

%Plots building%

for k = 0:n

for i = 1:len-1

p = k*(len-1)+i+k;

xx(p) = X(1,i+1,k+1);

yy(p) = X(2,i+1,k+1);

time(p) = t_0 + k*delta;

end

p = k*(len-1)+k+1;

q = (k+1)*len;

xx(q) = xx(p);

yy(q) = yy(p);

time(q) = time(p);

end;

% Draw initial set X

%myaa(8);

w = gammaSteps+1;

plot3(time(1:w), xx(1:w), yy(1:w), 'b');

hold on

% Draw the sequence of result sets

for i = 1:n

plot3(time(w*i:w*(i+1)), xx(w*i:w*(i+1)), yy(w*i:w*(i+1)), 'r');

hold on

end

grid on

end

ДОДАТОК Г

```

function quadratic_hukuhara()
%  $DhX(t) = A(t)X(t) + Q(t)X^2(t) + B(t)$ 
% ----- Parameters definition start ----- %
% Time bounds
t_0 = 0; %start time point
t_1 = 0.4; %end time point

global PRECISION;
PRECISION = 1;
% X
function X = initialX(psi)
    cx=[1 1];
    %circle
    X = norm(psi) + cx*psi;
    %square
    %X = abs(psi(1))+abs(psi(2))+cx*psi;
    %range on axis Y [-1,1]
    %X = psi(2);
end
% X2
function convX2 = initialX2()
    %i1 = interval1([0 -1], [0 1]);
    i1 = circle1([1 1], 1);
    convX2 = calculateX2(i1);
end
% Q
function Q = matrixQ(t)

```

```

        Q = [-1 t; sin(t) 0];
    end
% A
    function A = matrixA(t)
        A = [sin(t) 1; 0 -3*t];
    end
% B
    function B = matrixB(psi, t)
        % Calculating the center of B at current time point
        cb = [-1 t];

        % Circle
        %B = norm(psi) + cb*psi;

        % Square
        side = 2;
        B = side*(abs(psi(1)) + abs(psi(2))) + cb*psi;

        % Range on axis Y [-1,1]
        % B = psi(2);
    end
% ----- Parameters definition end ----- %
    function X = get_X_from_CX(CX, psis)
        len = length(psis);
        X = zeros(2, len);
        for r = 1:len-1
            AA=[psis(1,r) psis(2,r); psis(1,r+1) psis(2,r+1)];
            FF=[CX(r); CX(r+1)];
            X(:,r)=AA\FF;

```

```

end
X(:,len)=X(:,1);
end

```

```

function X2 = calculateX2(X)
    %X2 = setStarSet(X', X');
    X2(:,1) = scalar1(X', X');
    X2(:,2) = 0;
    X2 = X2';
    %convX2 = convhull1(X2);
    %convX2 = convX2';
end

```

```

function drawX(X, t, color)
    convhullX = X';
    %convhullX = convhull1(X');
    %convhullX(length(convhullX),:) = convhullX(1,:);
    t_array = zeros(1, length(convhullX));
    t_array(:) = t;
    plot3(t_array, convhullX(:,1), convhullX(:,2), color);
end

```

```

n = 50; %number of steps in range [t_0, t_1]
delta = (t_1-t_0)/n;
gammaSteps = 36; %number of gamma angles in range [0, 2pi]
gamma = 0:(2*pi/gammaSteps):(2*pi); %gamma angles
len = length(gamma);
psis = [cos(gamma);sin(gamma)]; % Calculating vectors psi

```

```

%Calculating support funtion for X at initial time point
X = zeros(2, len, n);
C_X = zeros(len, n);
k = 1;
for psi = psis
    C_X(k,1) = initialX(psi);
    k = k+1;
end
X(:, :, 1) = get_X_from_CX(C_X(:, 1), psis);

X2 = initialX2();

%Solving an equation
for k = 1:n
    % Calculating current time point
    t = t_0 + k*delta;

    Q = matrixQ(t);

    % Defining matrix A at current time point
    A = matrixA(t);

    lenX2 = length(X2);
    Q_X2 = zeros(2, lenX2);
    for p = 1:lenX2
        Q_X2(:, p) = Q * X2(:, p);
    end

    for p = 1:length(psis)

```

```
psi = psis(:,p);
```

```
C_Q_X2 = 0; %psi'*Q_X2(:,1);
```

```
for q = 2:lenX2
```

```
    current_C_Q_X2 = psi'*Q_X2(:,q);
```

```
    if current_C_Q_X2 > C_Q_X2
```

```
        C_Q_X2 = current_C_Q_X2;
```

```
    end
```

```
end
```

```
C = A'*psi / norm(A'*psi);
```

```
minNorm = norm(C - psi);
```

```
minC_X = C_X(p, k);
```

```
for q = 1:length(psis)
```

```
    currentPsi = psis(:,q);
```

```
    currentNorm = norm(C - currentPsi);
```

```
    if minNorm > currentNorm
```

```
        minNorm = currentNorm;
```

```
        minC_X = C_X(q, k);
```

```
    end
```

```
end
```

```
C_AX = minC_X * norm(A'*psi);
```

```
C_B = matrixB(psi, t);
```

```
C_X(p,k+1) = C_X(p,k) + delta*(C_AX + C_B + C_Q_X2);
```

```
end
```

```
Xt = get_X_from_CX(C_X(:,k+1), psis);
```

```
X(:, :, k+1) = Xt;
```

```
    X2 = calculateX2(Xt);  
end  
  
drawX(X(:, :, 1), t_0, 'b');  
hold on  
for k = 2:n+1  
    drawX(X(:, :, k), t_0 + (k-1)*delta, 'r');  
    hold on  
end  
grid on  
end
```