Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Факультет математики, фізики та інформаційних технологій

Кафедра диференціальних рівнянь, геометрії та топології

Дипломна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

на тему: «Дослідження коливності та неколивності розв'язків диференціальних рівнянь вищих порядків»

«Exploration of Oscillatory and non-oscillatory solutions of higher-order differential equations»»

Виконала: студентка денної форми навчання спеціальності 111 Математика

Москаленко Анастасія Ігорівна

Керівник: кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри диференціальних рівнянь, геометрії та топології

Шарай Н. В. ____________________
(підпис)

Рецензент: доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри диференціальних рівнянь, геометрії та топології Євтухов В. М.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ___ від ______________ р.

Завідувач кафедри

________ ___________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Захищено на засіданні ЕК №_______

протокол № ____ від ____________ р.

Оцінка_____________/___ ___/_____
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Голова ЕК

__________ _____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Одеса – 2019

ЗМІСТ

ВСТУП

Диференціальні рівняння винайдені Ньютоном (1642—1727). Ньютон вважав цей свій винахід настільки важливим, що зашифрував його у вигляді анаграми, смисл якої в сучасних термінах можна вільно передати так: «закони природи виражаються диференціальними рівняннями».

Основним аналітичним досягненням Ньютона було розкладання всіляких функцій в ступеневі ряди (сенс другої, довгої анаграми Ньютона в тому, що для розв'язку будь-якого рівняння потрібно підставити в рівняння ряд і прирівняти члени однакового степеня). Особливе значення мала тут відкрита ним формула бінома Ньютона (зрозуміло, не тільки з цілими показниками, для яких формулу знав, наприклад, Вієт (1540—1603), але і, що особливо важливе, з дробовими і негативними показниками). Ньютон розклав в «ряди Тейлора» всі основні елементарні функції (раціональні, радикали, тригонометричні, експоненту і логарифм). Це, разом з складеною ним таблицею первісних дозволяло йому, за його словами, порівнювати площі будь-яких фігур «за половину чверті години».

Ньютон вказав, що коефіцієнти його рядів пропорційні послідовним похідним функції, але не зупинявся на цьому детально, оскільки він справедливо вважав, що всі обчислення в аналізі зручніше проводити не за допомогою кратних диференціювань, а шляхом обчислення перших членів ряду. Для Ньютона зв'язок між коефіцієнтами ряду і похідними був скоріше засобом обчислення похідних, чим засобом складання ряду. Одним з найважливіших досягнень Ньютона є його теорія сонячної системи, викладена в «Математичних принципах натуральної філософії» («Principia») без допомоги математичного аналізу. Зазвичай вважають, що Ньютон відкрив за допомогою свого аналізу закон всесвітнього тяжіння. Насправді Ньютону (1680) належить лише доказ еліптичності орбіт в полі тяжіння за законом зворотних квадратів: сам цей закон був вказаний Ньютону Гуком (1635—1703) і, мабуть, вгадувався ще декількома вченими.

З величезного числа робіт XVIII століття з диференціальних рівнянь виділяються роботи Ейлера (1707—1783) і Лагранжа (1736—1813). У цих роботах була передусім розвинена теорія малих коливань, а отже — теорія лінійних систем диференціальних рівнянь; попутно виникли основні поняття лінійної алгебри (власні числа і вектори в n-мірному випадку).

Характеристичне рівняння лінійного оператора довго називали секулярним, оскільки саме з такого рівняння визначаються секулярні (вікові, тобто повільні в порівнянні з річним рухом) збурення планетних орбіт згідно з теорією малих коливань Лагранжа. Услід за Ньютоном Лаплас і Лагранж, а пізніше Гаус (1777—1855) розвивають також методи теорії збуджень.

Коли була доведена нерозв'язність алгебраїчних рівнянь в радикалах, Жозеф Ліувілль (1809—1882) побудував аналогічну теорію для диференціальних рівнянь, встановивши неможливість розв’язків низки рівнянь (зокрема таких класичних, як лінійні рівняння другого порядку) в елементарних функціях і квадратурі. Пізніше Софус Лі (1842—1899), аналізуючи питання про інтегрування рівнянь в квадратурі, прийшов до необхідності детально досліджувати групи дифеоморфізмів (що отримали згодом ім'я груп Лі) — так з теорії диференціальних рівнянь виникла одна з найплідніших областей сучасної математики, подальший розвиток якої був тісно пов'язаний зовсім з іншими питаннями (алгебри Лі ще раніше розглядали Сімеон-Дені Пуассон (1781—1840) і, особливо, Карл Густав Якоб Якобі (1804—1851)).

Новий етап розвитку теорії диференціальних рівнянь починається з робіт Анрі Пуанкаре (1854—1912), створена ним «якісна теорія диференціальних рівнянь» разом з теорією функцій комплексних змінних привела до заснування сучасної топології. Якісна теорія диференціальних рівнянь, або, як тепер її частіше називають, теорія динамічних систем, зараз розвивається найактивніше і має найважливіші застосування теорії диференціальних рівнянь в природознавстві.Нехай задано диференціальне рівняння

$$[p(x)y']' + q(x)y = 0 \tag{1}$$

Вважатимемо, що коефіцієнти $p'(x)$ та $q(x)$ безперервні в інтервалі

$\Im =< x_0, +\infty >$ та $p(x) > 0$. Розв’язки рівняння (1) називається коливним, якщо воно має в інтервалі $\mathcal{J}$ нескінченну множину нулів. Розв'язки $y(x) \equiv 0$ задовольняє цій умові. Якщо усі Розв'язки рівняння (1) коливаються в $\mathcal{J}$, то коротко говорять, що рівняння (1) є коливним.

У літературі для встановлення умов коливності розв'язки рівняння (1) використовувалися наступні методи:

a. перетворення рівняння (1) в рівняння Ріккаті (цей метод використовується найчастіше);

b. розкладання диференціального рівняння (1) на систему та її перетворення до полярних координат;

c. метод власних значень [27], [33].

Результати цього дослідження в цій роботі не розглядаються.

Можна також отримати ряд загальних результатів шляхом комбінації методів а) та в) з використанням перетворення $y = f(x)z$. При цьому передбачається, що $f(x)$ двічі неперервно диференційовна функція, $f(x) > 0$ при $x\epsilon\mathcal{J}$ [8], [26].

Помітимо, що результати, отримані в цій роботі, дозволяють досліджувати рівняння

$$y'' + r(x)y' + S(x)y = 0 \tag{2}$$

де $r(x)$ та $S(x)$ безперервні в $\mathcal{J}$. Рівняння (2) можна представити у вигляді

$$\left[\exp\left\{\int_{x_0}^{x} r(t)dt\right\} y'\right]' + \exp\left\{\int_{x_0}^{x} r(t)dt\right\} S(x)y = 0$$

чи шляхом перетворення

$$y = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} r(t)dt\right\}$$

звести до рівняння

$$u'' + S(x)u = 0 \tag{3}$$

в якому $S(x) = S(x) - \frac{1}{4}r^2(x) - \frac{1}{2}r'(x)$

Особливу увагу в літературі приділяється рівнянню (3), тобто рівнянню (1) у випадку $p(x) \equiv 1$.

ВИСНОВОК

У даній роботі були розглянуті основні теореми і властивості коливання диференціальних рівнянь вищих порядків. Спираючись на поставлені завдання спочатку роботи, вдалося визначити, як поводяться рішення рівнянь при тих чи інших умовах.

У **першому розділі** було розглянуто питання про коливне і не коливне диференціальне рівняння виду:

$$[p(x)y']' + q(x)y = 0 \tag{1}$$

Вважатимемо, що коефіцієнти $p'(x)$ та $q(x)$ безперервні в інтервалі

$\mathfrak{I} =< x_0, +\infty >$ та $p(x) > 0$. Розв'язки рівняння (1) називається коливним, якщо воно має в інтервалі $\mathcal{J}$ нескінченну множину нулів. Розв'язки $y(x) \equiv 0$ задовольняє цій умові. Якщо усі Розв'язки рівняння (1) коливаються в $\mathcal{J}$, то коротко говорять, що рівняння (1) є коливним.

У літературі для встановлення умов коливності розв'язки рівняння (1) використовувалися наступні методи:

перетворення рівняння (1) в рівняння Ріккаті (цей метод використовується найчастіше);

розкладання диференціального рівняння (1) на систему та її перетворення до полярних координат;

метод власних значень [27], [33].

У **другому розділі** були розглянуті тепер так звані критерії порівняння, початок яких є в класичній роботі С. Штурма [38]. Важливу роль тут відіграє теорема порівняння, отримана пізніше з деякими змінами іншими авторами та не лише для диференціального рівняння (1), а також для системи двох диференціальному рівнянь першого порядку. Наприклад, H. Bocher [3], [4], Ельшин [6], G. Landolino [9], E. Kamke [16], [17], C.O. Oakley [28], W.T. Reid [36].

У **третьому розділі та четвертому розділі** були встановленні достатні умови коливності розв'язків рівняння (1) та в завершальній частині роботи ми ще покажемо, як використати перетворення до полярних координат для встановлення достатніх умов коливності розв'язків рівняння (1). Це перетворення вперше було вказане H. Prufer [32].

Для простоти в цьому розділі формулюватимемо достатні умови для диференціального рівняння (1.3). У четвертому розділі було дослідження властивостей квадратичних форм.

Знайдемо найменше та найбільше значення квадратичної форми

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\mathrm{i},k=1}^{n} a_{\mathrm{i}k} x_\mathrm{i} x_k \quad (a_{\mathrm{i}k} = a_{k\mathrm{i}})$$

за умови

$$\mathcal{J}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1 \tag{4.1}$$

Передусім, легко переконатися в тому, що серед точок $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що задовольняють умові (4.1), дійсно, є такі, в яких функція f приймає, відповідно, найменше та найбільше зі своїх значень. Якщо одну зі змінних, наприклад x_n, виразити з (4.1) через інші, то справа зведеться до розгляду двох безперервних функцій

$$f\left(x_1, x_2, \dots, \pm\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_{n-1}^2}\right)$$

у замкнутій $(n-1)$ - мірній сфері

до яких застосуємо теорему Вейєрштрасса .

Все це було доведено з докладними поясненнями і доказами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Barrett L.H. : Behavior of solutions of second order selfadjoint differential equations, Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955), 247-251.

2. Bohl P. : Uber eine Differentialgleichung der Storungstheorie, I. Reine Angew. Math. 131 (1906), 268-321.

3. Bocher M. : Application of a method of d'alembert to the proof of Sturm's theorem of comprasion, Irans. Amer. Math. Soc. 1 (1900), 414-420.

4. Bocher M. : An elementary proof of a theorem of Sturm, Irans. Amer. Math. Soc. 2 (1901), 150-151.

5. Borivka O. : Theorie analytique et constructive des transformations differentielles liniaires du second ordre, Bull. Math. Soc Roum. Sci. 1 (49), No 2 (1957), 125-130.

6. Єльшин М.І. Метод фаз і класичний метод порівняння, Док. Акад. Наук СССР 68 (1949), 813-816.

7. Fite W.B. : Concerning the zeros of the solutions of certain differential equations, irans. Amer. Math. Soc. 19 (1918), 341-352.

8. Gagliardo E. : Sui criteri di oszillatione per gli integrali di un equazione differenziale lineare del secondo ordine, Boll. Un. Mat. Ital. Ser lll, lX, (1954), 177-189.

9. Lanololino G. : Sul teorema di confront di sturn, Boll. Un. Mat. Ser lll, 2 (1947), 16-19.

10. Hartman P. : On linear second order differential equations with small confficients, Amer. I, Math. LXXlll (1951), 955-962.

11. Hartman P. : On non oscillatory linear differential equations of second order, Amer. I. Math. LXXlV (1952), 389-400.

12. Hartman P. : On the linear logarithmico-exponential differential equation of the second order. Amer. I. Math. LXX (1948), 764-779.

13. Hartman P. – Wintner A. : On non conservative linear oscillators of low frequency. Amer. I. Math. LXX (1948), 529-539.

14. Hille E. : Non-oscillation theorems, Irans. Amer. Math. Soc. 64 (1948), 234-252.

15. Ielcin M. : Sur le problem d'oscillation pour l'equation differentielle liniare du deunieme ordre, CR. (Doklady) Acad. Sci. URSS 18 (1938), 141-145.

16. Kamke E. : Uber sturms verglichsatze fur homogeme lineare differentialgleichungen zuciter ordnung und systeme von zwei differentialgleichungen erster ordnung. Math. Z. (1940), 788-795

17. Kamke E. : A new proof of sturm's comparison theorems, Amer. Math. Monthly 46 (1939), 417-421.

18. Kneser A. : Untersuchungen uber die wellen Nullstellen der integrale linearer differentialgleichungen Math. Am. 42 (1893), 409-435.

19. Кондратьєв В.Л. Достатні умови не коливних і коливних розвязків рівняння $y'' + p(x)y = 0$. Док. Акад. Наук СССР 113 (1957), 742-745.

20. Loutoch M. : Sur une theorie des criteres comparatifs sur l'oscillation des integrals de l'equation differentielle $u'' = p(x)u$, Spisy Prir. Fok. MU Brno, 365 (1955), 255-267.

21. Leighton W. : On self-adjoint differential equations od second order, I. London. Math. Soc. 27 (1952), 37-47.

22. Leighton W. : On self-adjoint differential equations od second order, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 35 (1949), 656-657.

23. Leighton W. : Principal quadratic functionals and self-adjoint second order differential equations, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 35 (1949), 192-193.

24. Leighton W. : The detection of the oscillation of solutions of a second order linear differential equation, Duke Math. I. 17 (1950), 57-62.

25. Mikusinski J.G. : On Fite's oscillation theorems, colloq. Math. ll (1949), 34-39.

26. Moore R. : The behavior of solutions of a linear differential equation of second order, Pacific I. Math. V (1955), 125-145.

27. Nehari Z. : Oscillation criteria for second order linear differential equations, Irans, Amer. Math. Soc. 85 (1957), 428-445.

28. Oakley C.O. : A note on the metods of sturm, Anm of Math. Ser lll, 31 (1930), 660-662.

29. Olech C. : Opial Z, Wazewski T. Sutr le problemme d'oscilattion des integrals de lequation $y'' + g(t)y = 0$ Bull. Acad. Polon. Sci. cl lll, V (1957), 621-626.

30. Петропавловськая Р.В. Про коливання розв'язків рівняння $u'' + p(x)y = 0$, Докл. Акад. Наук СССР 105 (1955), 29-31.

31. Potter R.L. : On self-adjoint differential equations of seconf order, Pacific I. Math. 3 (1953),467-491.

32. Prufer H. : Neue herleitung der sturm-liourilleshen reihenentuicklung stetiger Funktionen, Math. Am. 95 (1926), 499-518.

33. Putnam C.R. : Note on some oscillation criteria, Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955), 950-952.

34. Putman C.R. : An oscillation criteria involving a minimum principle, duke. Math. I 16 (1949), 633-636.

35. Rab M. : Poznamka k otazce o oscilacninch clastnostech reseni diferencialme revnice $y'' + A(x)y = 0$. Casopis pro pest. Mat. 82 (1957), 342-348.

36. Reid W.T. : A comparison theorem for self-adjoint differential equations of second order, Am of Math. 65 (1957), 197-202.

37. Собол И.М. Дослідження асимптотичної поведінки розв'язків лінійного диференціального рівняння другого порядку за допомогою помірне координат, Мат. Сб. 28 (70), (1951), 707-714.

38. Sturm C. : Sur les equations differentielles lineaires du second ordre, I. Math. Pures Appl. 1 (1836), 106-186.

39. Wintner. A. : A criterion of oscillatory stability, quart. Appl. Math. Vll (1949), 115-117.

40. Wintner A. :On the non existence of conjugate points, Amer. I. Math. LXXlll (1951), 368-380.

41. Wintner A. : On the compression theorem of Kneser-Hille, Math. Sec 5 (1957), 255-260.

42. Zlovmal M. : Oscillations criterions, Casopis pro pest. Mat. 75 (1950), 213-218.

43. Зубова А.Ф. Про коливання розв'язків рівняння другого порядку, Вісник Ленінград Унів. 211 (1957), 168-174.

44. Milos Rab. : Kriterien fur die oscillation der losungen der differentialgleichung $[p(x)y']' + q(x)y = 0$, casopis pro pestovani matematiky, roc 84 (1959), Praha.