

В. І. Коляда, А. О. Кореновський, Р. В. Шанін

АНАЛІЗ ФУР'Є У ВПРАВАХ

ПРАКТИКУМ



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І. І. МЕЧНИКОВА
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

**В. І. Коляда, А. О. Кореновський,
Р. В. Шанін**

АНАЛІЗ ФУР'Є У ВПРАВАХ

ПРАКТИКУМ
для студентів
факультету математики, фізики та інформаційних технологій
спеціальностей 111 «Математика»
та 113 «Прикладна математика»

ОДЕСА
ОНУ
2022

УДК 517.518:517.443(076.2)
К629

Автори:

В. І. Коляда, доктор фізико-математичних наук, професор;

А. О. Кореновський, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичного аналізу Одеського національного університету імені І. І. Мечникова;

Р. В. Шанін, доктор фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного аналізу Одеського національного університету імені І. І. Мечникова.

Рецензенти:

Д. В. Дмитришин, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики та інформаційних технологій Одеського національного політехнічного університету;

В. В. Реут, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри математичного та комп'ютерного моделювання Одеського національного університету імені І. І. Мечникова.

Рекомендовано до друку науково-методичною радою

ОНУ імені І. І. Мечникова.

Протокол № 5 від 21 жовтня 2021 р.

Коляда В. І.

К629 Аналіз Фур'є у вправах : практикум / В. І. Коляда, А. О. Кореновський, Р. В. Шанін. – Одеса : Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2021. – 116 с.

ISBN 978-617-689-517-6

Практикум є доповненням до курсу «Вступ до аналізу Фур'є». У ньому наведені розв'язки запропонованих у цьому курсі вправ. Збережена нумерація вправ, а також присутні посилання на твердження, формули і приклади з названого курсу.

Практикум призначений для студентів спеціальностей 111 – математика та 113 – прикладна математика, які використовують аналіз Фур'є при розв'язанні задач аналізу, математичної фізики, тощо.

УДК 517.518:517.443(076.2)

ISBN 978-617-689-517-6

© В. І. Коляда, А. О. Кореновський,
Р. В. Шанін, 2022

© Одеський національний університет
імені І. І. Мечникова, 2022

Зміст

1 Вправи до розділу "Ряди Фур'є"	5
2 Вправи до розділу "Перетворення Фур'є"	61
3 Вправи до розділу "Поліноми Лежандра"	99
Література	116

1. Вправи до розділу

”Ряди Фур’є”

1.1. Побудувати графіки наступних періодичних функцій.

1.1.a. $f(x) = x \quad (-1 < x < 1), \quad f(x+2) = f(x).$

1.1.b. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ \cos x, & 0 < x < \pi, \end{cases} \quad f(x+2\pi) = f(x).$

1.1.c. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ 2, & 0 < x < 2\pi, \end{cases} \quad f(x+3\pi) = f(x).$

Побудова графіків цих функцій елементарна і тому ми її опускаємо.

1.2. Обчислити коефіцієнти Фур’є заданих функцій (всі функції припускаються 2π -періодичними).

1.2.a. $f(x) = x \quad (-\pi < x < \pi).$

Решение. Оскільки функція непарна, то $a_n = 0$ ($n = 0, 1, \dots$). Для $n = 1, 2, \dots$ обчислимо

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \sin nx \, dx & v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right] \Bigg|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{n} x \cos nx \Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx \right] = -\frac{2}{n} (-1)^n = 2 \frac{(-1)^{n-1}}{n}. \end{aligned}$$

1.2.b. $f(x) = x^2 \quad (-\pi < x < \pi).$

Розв'язок. Оскільки функція парна, то $b_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$). Обчислимо

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3} \pi^2, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left[\begin{array}{ll} u = x^2 & du = 2x dx \\ dv = \cos nx dx & v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right] \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{n} x^2 \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \right] \\ &= -\frac{4}{\pi n} \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \sin nx dx & v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right] \Big|_0^{\pi} \\ &= -\frac{4}{\pi n} \left[-\frac{x}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] = \frac{4}{n^2} (-1)^n. \end{aligned}$$

1.2.c. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$

Розв'язок.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = 1, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \frac{1}{n} (-\cos nx) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi n} (1 - (-1)^n) \\ &= \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{2}{\pi n}, & n = 2k - 1 \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

1.2.d. $f(x) = x \quad (0 < x < 2\pi).$

Розв’язок.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \, dx = 2\pi, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = \cos nx \, dx \quad v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right] \Big|_0^{2\pi} = -\frac{1}{\pi n} \int_0^{2\pi} \sin nx \, dx = 0, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = \sin nx \, dx \quad v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right] \Big|_0^{2\pi} \\ &= -\frac{1}{\pi n} x \cos nx \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi n} \int_0^{2\pi} \cos nx \, dx = -\frac{2}{n} \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

1.3. Побудувати ряди Фур’є для кожної з наступних функцій.

1.3.a. $f(x) = |x| \quad (-1 < x < 1).$

Розв’язок. Оскільки функція парна, то $b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$. Обчислимо

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \int_0^1 x \, dx = 1, \\ a_n &= 2 \int_0^1 x \cos \pi n x \, dx = 2 \left[\begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = \cos \pi n x \, dx \quad v = \frac{1}{\pi n} \sin \pi n x \end{array} \right] \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{\pi n} x \sin \pi n x \Big|_0^1 - \frac{2}{\pi n} \int_0^1 \sin \pi n x \, dx = \frac{2}{\pi^2 n^2} \cos \pi n x \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1) = \frac{2}{\pi^2} \cdot \begin{cases} -\frac{2}{n^2}, & n = 2k - 1, \\ 0, & n = 2k. \end{cases} \end{aligned}$$

Відповідь.

$$|x| \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\pi x.$$

1.3.b.
$$f(x) = \begin{cases} -3, & -2 < x < 0, \\ 3, & 0 < x < 2. \end{cases}$$

Розв'язок. f непарна, $L = 2$, $a_n = 0$,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} 2 \int_0^2 3 \sin \frac{\pi n x}{2} dx = 3 \int_0^2 \sin \frac{\pi n x}{2} dx \\ &= -\frac{6}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{2} \Big|_0^2 = \frac{6}{\pi n} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{12}{\pi n}, & n = 2k - 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Відповідь.

$$f(x) \sim \frac{12}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{\pi(2n-1)}{2} x.$$

1.4. Побудувати періодичне продовження тих із вказаних функцій, для яких це можливо. Якщо це неможливо, то вказати звуження області визначення так, щоб це виявилось можливим (і при цьому ряди Фур'є не змінились).

1.4.a.
$$f(x) = x \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

Розв'язок. Оскільки $f(-1) = -1 \neq 1 = f(1)$, то періодичне продовження даної функції неможливе. Для того, щоб це стало можливим, достатньо розглянути звуження даної функції на $(-1, 1]$ або $[-1, 1)$.

1.4.b.
$$f(x) = x \quad (-1 \leq x < 1).$$

Розв'язок. Задана функція допускає періодичне продовження.

1.4.c.
$$f(x) = x^2 \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

Розв'язок. Оскільки $f(-1) = 1 = f(1)$, то задана функція допускає періодичне продовження.

1.4.d. $f(x) = x^3 \quad (-2 \leq x \leq 2).$

Розв’язок. Оскільки $f(-2) = -8 \neq 8 = f(2)$, то періодичне продовження цієї функції неможливе. Для того, щоб це виявилось можливим, достатньо розглянути звуження даної функції на $(-2, 2]$ або $[-2, 2)$.

1.5. Побудувати косинус- і синус-ряди для наступних функцій.

1.5.a. $f(x) = 1 \quad \text{на} \quad (0, a).$

Розв’язок. Парне продовження є функцією, що тотожно дорівнює 1. Оскільки це – тригонометричний поліном, то

$$f(x) \sim 1.$$

Непарне продовження. Оскільки функція непарна, то $a_n = 0$ ($n = 0, 1, \dots$). Обчислимо

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{a} \int_0^a 1 \cdot \sin \frac{\pi n x}{a} dx = -\frac{2}{a} \frac{a}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{a} \Big|_0^a \\ &= \frac{2}{\pi n} (1 - \cos \pi n) = \frac{2}{\pi n} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{4}{\pi n}, & n = 2k - 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Відповідь.

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{\pi(2n-1)}{a} x.$$

1.5.b. $f(x) = x \quad \text{на} \quad (0, a).$

Розв’язок. Парне продовження. Обчислимо

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{a} \int_0^a x dx = a, \\ a_n &= \frac{2}{a} \int_0^a x \cos \frac{\pi n x}{a} dx = \frac{2}{a} \left[\begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = \cos \frac{\pi n x}{a} dx \quad v = \frac{a}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{a} \end{array} \right] \Big|_0^a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{a} \left[\frac{a}{\pi n} x \sin \frac{\pi n x}{a} \Big|_0^a - \frac{a}{\pi n} \int_0^a \sin \frac{\pi n x}{a} dx \right] \\
&= \frac{2}{\pi n} \frac{a}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{a} \Big|_0^a = -\frac{2a}{\pi^2 n^2} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\frac{4a}{\pi^2 n^2}, & n = 2k - 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Відповідь.

$$f(x) \sim \frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{\pi(2n-1)}{a} x.$$

Непарне продовження. Обчислимо

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{a} \int_0^a x \sin \frac{\pi n x}{a} dx = \frac{2}{a} \left[\begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = \sin \frac{\pi n x}{a} dx \quad v = -\frac{a}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{a} \end{array} \right] \Big|_0^a \\
&= \frac{2}{a} \left[-\frac{a}{\pi n} x \cos \frac{\pi n x}{a} \Big|_0^a + \frac{a}{\pi n} \int_0^a \cos \frac{\pi n x}{a} dx \right] \\
&= \frac{2}{a} \left[-\frac{a^2}{\pi n} \cos \pi n + \frac{a}{\pi n} \frac{a}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{a} \Big|_0^a \right] = \frac{2a}{\pi n} (-1)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Відповідь.

$$f(x) \sim \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin \frac{\pi n}{a} x.$$

1.5.с.

$$f(x) = \sin x \quad \text{на} \quad (0, 1).$$

Розв'язок. Парне продовження.

$$\begin{aligned}
a_0 &= 2 \int_0^1 \sin x dx = -2 \cos x \Big|_0^1 = 2(1 - \cos 1), \\
a_n &= 2 \int_0^1 \sin x \cos \pi n x dx = \int_0^1 [\sin(\pi n + 1)x - \sin(\pi n - 1)x] dx \\
&= -\frac{1}{\pi n + 1} \cos(\pi n + 1)x \Big|_0^1 + \frac{1}{\pi n - 1} \cos(\pi n - 1)x \Big|_0^1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{\pi n + 1} [\cos(\pi n + 1) - 1] + \frac{1}{\pi n - 1} [\cos(\pi n - 1) - 1] \\
 &= -\frac{1}{\pi n + 1} (\cos \pi n \cos 1 - \sin \pi n \sin 1 - 1) + \frac{1}{\pi n - 1} (\cos \pi n \cos 1 + \sin \pi n \sin 1 - 1) \\
 &= \frac{1}{\pi n + 1} (1 - (-1)^n \cos 1) - \frac{1}{\pi n - 1} (1 - (-1)^n \cos 1) \\
 &= (1 - (-1)^n \cos 1) \left(\frac{1}{\pi n + 1} - \frac{1}{\pi n - 1} \right) = -2 (1 - (-1)^n \cos 1) \frac{1}{\pi^2 n^2 - 1}.
 \end{aligned}$$

Відповідь.

$$f(x) \sim 1 - \cos 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n \cos 1}{\pi^2 n^2 - 1} \cos \pi n x.$$

Непарне продовження.

$$\begin{aligned}
 b_n &= 2 \int_0^1 \sin x \sin \pi n x \, dx = \int_0^1 [\cos(\pi n - 1)x - \cos(\pi n + 1)x] \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi n - 1} \sin(\pi n - 1)x \Big|_0^1 - \frac{1}{\pi n + 1} \sin(\pi n + 1)x \Big|_0^1 \\
 &= \frac{1}{\pi n - 1} \sin(\pi n - 1) - \frac{1}{\pi n + 1} \sin(\pi n + 1) = \frac{(-1)^{n-1} \sin 1}{\pi n - 1} - \frac{(-1)^n \sin 1}{\pi n + 1} \\
 &= (-1)^{n-1} \sin 1 \left(\frac{1}{\pi n - 1} + \frac{1}{\pi n + 1} \right) = (-1)^{n-1} \sin 1 \frac{2\pi n}{\pi^2 n^2 - 1}.
 \end{aligned}$$

Відповідь.

$$f(x) \sim 2\pi \sin 1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{\pi^2 n^2 - 1} \sin \pi n x.$$

1.5.d. $f(x) = \sin x$ на $(0, \pi)$.

Розв’язок. Парне продовження.

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{4}{\pi}, \quad a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2x \, dx = 0, \\
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(n+1)x - \sin(n-1)x] \, dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n+1} \cos(n+1)x \Big|_0^\pi + \frac{1}{n-1} \cos(n-1)x \Big|_0^\pi \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n+1} ((-1)^{n+1} - 1) + \frac{1}{n-1} ((-1)^{n-1} - 1) \right] \\
&= \frac{1}{\pi} ((-1)^{n-1} - 1) \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{n^2 - 1} ((-1)^{n-1} - 1) \\
&= \frac{2}{\pi} \cdot \begin{cases} -\frac{2}{n^2 - 1}, & n = 2k, \\ 0, & n = 2k + 1, \end{cases} \\
a_{2n} &= -\frac{2}{\pi} \frac{2}{(2n)^2 - 1} = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{4n^2 - 1} \quad (n = 1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

Відповідь.

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos 2nx.$$

Непарне продовження. Оскільки непарне продовження цієї функції є тригонометричним поліномом $\sin x$, то

$$f(x) \sim \sin x.$$

1.6. Побудувати ряди Фур'є наступних функцій.

1.6.а. $f(x) = x$ на $(-2, 2)$.

Розв'язок. Оскільки функція непарна, то $a_n = 0$ ($n = 0, 1, \dots$). Обчислимо

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{2} \int_0^2 x \sin \frac{\pi nx}{2} dx = \left[\begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = \sin \frac{\pi nx}{2} dx \quad v = -\frac{2}{\pi n} \cos \frac{\pi nx}{2} \end{array} \right] \Big|_0^2 \\
&= -\frac{2}{\pi n} x \cos \frac{\pi nx}{2} \Big|_0^2 + \frac{2}{\pi n} \int_0^2 \cos \frac{\pi nx}{2} dx = \frac{4}{\pi n} (-1)^{n-1} + \frac{4}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi nx}{2} \Big|_0^2 \\
&= \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.
\end{aligned}$$

Відповідь.

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin \frac{\pi n}{2} x.$$

$$1.6.b. \quad f(x) = \begin{cases} x, & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, \\ 1-x, & \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Розв’язок. 2-періодичне продовження цієї функції непарне і тому $a_n = 0$ ($n = 0, 1, \dots$). Обчислимо

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{1} \int_0^1 f(x) \sin \pi n x \, dx = 2 \int_0^{1/2} x \sin \pi n x \, dx + 2 \int_{1/2}^1 (1-x) \sin \pi n x \, dx \\ &= 2 (1 + (-1)^{n-1}) \int_0^{1/2} x \sin \pi n x \, dx. \end{aligned}$$

Якщо $n = 2k$, то $b_n = 0$, а при $n = 2k - 1$ маємо

$$\begin{aligned} b_{2k-1} &= 4 \int_0^{1/2} x \sin \pi(2k-1)x \, dx \\ &= 4 \left[\begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = \sin \pi(2k-1)x \, dx \quad v = -\frac{1}{\pi(2k-1)} \cos \pi(2k-1)x \end{array} \right]_0^{1/2} \\ &= \frac{-4}{\pi(2k-1)} x \cos \pi(2k-1)x \Big|_0^{1/2} + \frac{4}{\pi(2k-1)} \int_0^{1/2} \cos \pi(2k-1)x \, dx \\ &= -\frac{2}{\pi(2k-1)} \cos \pi \left(k - \frac{1}{2} \right) + \frac{4}{\pi^2(2k-1)^2} \sin \pi(2k-1)x \Big|_0^{1/2} \\ &= \frac{4}{\pi^2(2k-1)^2} \sin \pi \left(k - \frac{1}{2} \right) = \frac{4}{\pi^2} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

Відповідь.

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin(2n-1)\pi x.$$

1.7. Побудувати ряд Фур’є функції $(\cos x)^n$.

Розв’язок. Представимо функцію $(\cos x)^n$ у вигляді тригонометричного полінома. Для цього, скориставшись формулою бінома Ньютона,

отримаємо

$$(\cos x)^n = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ikx} e^{-i(n-k)x} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(2k-n)x},$$

де $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – біноміальні коефіцієнти. Далі будемо використовувати рівності $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ і $e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2 \cos \varphi$.

Якщо парне $n = 2m$, то

$$\begin{aligned} (\cos x)^{2m} &= \frac{1}{4^m} \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} e^{2i(k-m)x} \\ &= \frac{1}{4^m} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{k} e^{2i(k-m)x} + \frac{1}{4^m} \binom{2m}{m} + \frac{1}{4^m} \sum_{k=m+1}^{2m} \binom{2m}{k} e^{2i(k-m)x} \\ &= \frac{1}{4^m} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{k} \left(e^{2i(k-m)x} + e^{-2i(k-m)x} \right) + \frac{1}{4^m} \binom{2m}{m} \\ &= \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{k} \cos 2(m-k)x + \frac{1}{4^m} \binom{2m}{m}. \end{aligned}$$

Якщо ж непарне $n = 2m - 1$, то

$$\begin{aligned} (\cos x)^{2m-1} &= \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=0}^{2m-1} \binom{2m-1}{k} e^{i(2k-2m+1)x} \\ &= \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m-1}{k} e^{i(2k-2m+1)x} + \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=m}^{2m-1} \binom{2m-1}{k} e^{i(2k-2m+1)x} \\ &= \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m-1}{k} \left(e^{i(2k-2m+1)x} + e^{-i(2k-2m+1)x} \right) \\ &= \frac{1}{2^{2m-2}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m-1}{k} \cos(2m-2k-1)x. \end{aligned}$$

Отже, отримали наступне представлення

$$(\cos x)^n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2} \right] - 1} \binom{n}{k} \cos(n-2k)x + B_n,$$

где

$$B_n = \begin{cases} 2^{-n} \binom{n}{n/2}, & n - \text{парне}, \\ 0, & n - \text{непарне}. \end{cases}$$

1.8.a. Довести, що сукупність функцій $\left\{ \sqrt{(1/\pi)} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right\}_{n=0}^{\infty}$ утворює ортогональну систему на $[-\pi, \pi]$.

Розв’язок.

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x \cdot \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)x - \cos(n+m+1)x] \, dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \pi, & n = m, \end{cases} \\ & \left\| \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right\|_2 = \sqrt{\pi}, \quad \left\| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right\|_2 = 1. \end{aligned}$$

1.8.b. Застосовуючи результат попередньої вправи 1.8.a та нерівність Бесселя, навести альтернативне доведення рівності

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x \, dx = 0 \quad (f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]).$$

Розв’язок. Із нерівності Бесселя (1.22) випливає, що коефіцієнти Фур’є $c_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x \, dx$ функції $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ прямують до нуля.

1.9. Показати, що застосування нерівності Бесселя до системи функцій $\left\{ \sqrt{(2/\pi)} \sin nx \right\}_{n=1}^{\infty}$ тягне нерівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x) \, dx,$$

де

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Розв'язок.

$$\int_0^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x] \, dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \frac{\pi}{2}, & n = m. \end{cases}$$

Це означає, що система $\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx \right\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормована на $[0, \pi]$. Для $f \in \mathcal{R}[0, \pi]$ її коефіцієнти Фур'є за цією системою дорівнюють

$$c_n = \int_0^{\pi} f(x) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Нерівність Бесселя $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \leq \|f\|_2^2$ набуває вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \right)^2 \leq \int_0^{\pi} f^2(x) \, dx.$$

Помноживши цю нерівність на $\frac{2}{\pi}$ та поклавши $B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$, отримуємо потрібну нерівність.

1.10. Нехай $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ ($0 < x < 2\pi$). Для кожного $n \in \mathbb{N}$, знайти тригонометричний поліном T_n порядку n , який мінімізує норму

$$\|f - T_n\|_2 = \left(\int_0^{2\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Розв'язок. За властивістю мінімальності коефіцієнтів Фур'є, T_n – частинна сума ряду Фур'є функції f порядку n . Ряд Фур'є був побудований у прикладі 1.12

$$\frac{\pi - x}{2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx.$$

Тому $T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sin kx$.

1.11. Нехай f – 2π -періодична неперервна функція. Для довільних α, β, γ покладемо

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - \alpha - \beta \cos x - \gamma \cos 10x]^2 \, dx.$$

Довести, що F досягає мінімуму в єдиній точці $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ і знайти цю точку, якщо:

1.11.a. $f(x) = \cos^2 x$;

1.11.b. $f(x) = x^2$;

1.11.c. $f(x) = \sin x$;

1.11.d. $f(x) = 1 - 2 \cos x$;

1.11.e. $f(x) = |x|$;

1.11.f. $f(x) = |\sin x|$.

Розв’язок. Якщо заданий тригонометричний поліном

$$T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n A_k \cos kx + B_k \sin kx,$$

то

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x) dx - \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) T_n(x) dx \\ &= \frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (A_k^2 + B_k^2) - A_0 a_0 - 2 \sum_{k=1}^n (A_k a_k + B_k b_k) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \frac{1}{2} (A_0 - a_0)^2 \\ &+ \sum_{k=1}^n \left[(A_k - a_k)^2 + (B_k - b_k)^2 \right] - \frac{1}{2} a_0^2 - \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2), \end{aligned}$$

де a_k, b_k – коефіцієнти Фур’є функції f .

Нам задані $\alpha = \frac{A_0}{2}$, $\beta = A_1$, $\gamma = A_{10}$, а всі інші A_k, B_k дорівнюють нулю. Тому отримана рівність при $n = 10$ набуває такого вигляду

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - \alpha - \beta \cos x - \gamma \cos 10x]^2 dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \frac{1}{2} (2\alpha - a_0)^2 + (\beta - a_1)^2 + (\gamma - a_{10})^2 - \frac{1}{2} a_0^2 - a_1^2 - a_{10}^2.$$

Звідси випливає, що функція $F(\alpha, \beta, \gamma)$ набуває найменшого значення при $\alpha_0 = \frac{a_0}{2}$, $\beta_0 = a_1$, $\gamma_0 = a_{10}$, і при цьому

$$F(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{1}{2} a_0^2 - a_1^2 - a_{10}^2.$$

1.11.a. Представимо $f(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$. Тоді потрібні нам коефіцієнти Фур'є функції f дорівнюють $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_{10} = 0$. Тому $\alpha_0 = \frac{1}{2}$, $\beta_0 = 0$, $\gamma_0 = 0$,

$$F\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^4 x dx - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1.$$

1.11.b. Обчислимо коефіцієнти Фур'є функції $f(x) = x^2$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3} \pi^2,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left[\begin{array}{ll} u = x^2 & du = 2x dx \\ dv = \cos nx dx & v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right] \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{n} x^2 \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \right] \\ &= -\frac{4}{\pi n} \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \sin nx dx & v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right] \Big|_0^{\pi} \\ &= -\frac{4}{\pi n} \left[-\frac{x}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] = \frac{4}{n^2} (-1)^n, \end{aligned}$$

$$a_1 = -4, a_{10} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}, \alpha_0 = \frac{\pi^2}{3}, \beta_0 = -4, \gamma_0 = \frac{1}{25},$$

$$F(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx - \frac{2}{9} \pi^4 - 16 - \frac{1}{625}$$

$$= \frac{8}{45}\pi^4 - \frac{10001}{625} \approx 17,3 - 16,0 = 1,3.$$

1.11.c. Потрібні нам коефіцієнти Фур’є $a_0 = a_1 = a_{10} = 0$, тому $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0$,

$$F(0,0,0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx = 1.$$

1.11.d. Маємо $a_0 = 2$, $a_1 = -2$, $a_{10} = 0$, і тому $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = -2$, $\gamma_0 = 0$,

$$F(1,-2,0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - 2 \cos x)^2 \, dx - 2 - 4$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - 4 \cos x + 4 \cos^2 x) \, dx - 6 = 2 + \frac{8}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx - 6 = 0.$$

1.11.e. Раніше вже був побудований ряд Фур’є для даної функції

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x.$$

Маємо $a_0 = \pi$, $a_1 = -\frac{4}{\pi}$, $a_{10} = 0$, і тому $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$, $\beta_0 = -\frac{4}{\pi}$, $\gamma_0 = 0$,

$$F\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{4}{\pi}, 0\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx - \frac{\pi^2}{2} - \frac{16}{\pi^2} = \frac{2}{3}\pi^2 - \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{16}{\pi^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{16}{\pi^2}.$$

1.11.f. Раніше вже був побудований ряд Фур’є для даної функції

$$|\sin x| \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos 2kx.$$

Маємо $a_0 = \frac{4}{\pi}$, $a_1 = 0$, $a_{10} = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{99}$, і тому $\alpha_0 = \frac{2}{\pi}$, $\beta_0 = 0$, $\gamma_0 = -\frac{4}{99\pi}$,

$$F\left(\frac{2}{\pi}, 0, -\frac{4\pi}{99}\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx - \frac{8}{\pi^2} - \left(\frac{4}{99\pi}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{8}{\pi^2} - \frac{16}{9801\pi^2} = 1 - \frac{78424}{9801\pi^2}.$$

1.12. Те ж саме для

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [x - \alpha - \beta \cos x - \gamma \sin 2x]^2 dx.$$

Розв'язок. Тут потрібно застосувати отриману у вправі 1.11 рівність до функції $f(x) = x$, де $n = 2$, $\alpha = \frac{A_0}{2}$, $\beta = A_1$, $\gamma = B_2$. Отримаємо, що функція

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [x - \alpha - \beta \cos x - \gamma \sin 2x]^2 dx$$

набуває найменшого значення при $\alpha_0 = \frac{a_0}{2}$, $\beta_0 = a_1$, $\gamma_0 = b_2$ і, подібно тому, як і у вправі 1.11,

$$F(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{1}{2}a_0^2 - a_1^2 - b_2^2.$$

Раніше вже був побудований ряд Фур'є функції $f(x) = x$, де $|x| < \pi$,

$$x \sim 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx.$$

Маємо $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $b_2 = -1$ і тому $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 0$, $\gamma_0 = -1$,

$$F(0, 0, -1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx - 1 = \frac{2}{3}\pi^2 - 1.$$

1.13. Припустимо, що 2π -періодична неперервна функція f така, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ існують такі числа α_n, β_n , що

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - \alpha_n - \beta_n \sin x]^2 dx \leq \frac{1}{n}.$$

Визначити f .

Розв'язок. Оскільки функції $\varphi_0(x) \equiv 1$, $\varphi_1(x) = \sin x$ утворюють ортогональну на $[-\pi, \pi]$ систему, то, за мінімальною властивістю коефіцієнтів Фур'є $c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$, $c_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx$, маємо

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - c_0 - c_1 \sin x]^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - \alpha_n - \beta_n \sin x]^2 dx \leq \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Оскільки f неперервна, то звідси випливає, що $f(x) = c_0 + c_1 \sin x$ при всіх $x \in \mathbb{R}$. Тому

$$f(x) = \alpha + \beta \sin x, \quad \text{де довільні } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

1.14. Припустимо, що 2π -періодична неперервна функція f така, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ існують такі числа $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$, що

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - \alpha_n - \beta_n \cos x - \gamma_n \sin x]^2 dx \leq \frac{1}{n}.$$

Визначити f .

Розв’язок. Оскільки функції $\varphi_0(x) \equiv 1$, $\varphi_1(x) = \cos x$, $\varphi_2(x) = \sin x$ утворюють ортогональну на $[-\pi, \pi]$ систему, то, за мінімальною властивістю коефіцієнтів Фур’є

$$c_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad c_1 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx, \quad c_2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx,$$

маємо

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - c_0 - c_1 \cos x - c_2 \sin x]^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - \alpha_n - \beta_n \cos x - \gamma_n \sin x]^2 dx \leq \frac{1}{n},$$

де $n = 1, 2, \dots$. Оскільки f неперервна, то звідси випливає, що $f(x) = c_0 + c_1 \cos x + c_2 \sin x$ при всіх $x \in \mathbb{R}$. Тому

$$f(x) = \alpha + \beta \cos x + \gamma \sin x, \quad \text{де довільні } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

1.15. Нехай функція f інтегровна за Ріманом на $[a, b]$. Обчислити

1.15.a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos^2 nx dx.$

Розв’язок. Представимо

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \cos^2 nx dx &= \int_a^b f(x) \frac{1 + \cos 2nx}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b f(x) dx + \frac{1}{2} \int_a^b f(x) \cos 2nx dx. \end{aligned}$$

За лемою Рімана – Лебега, останній інтеграл прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$.
Тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int_a^b f(x) \, dx.$$

1.15.b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos^3 nx \, dx.$

Розв’язок. Використавши тотожність

$$\begin{aligned} \cos^3 nx &= \cos nx \frac{1 + \cos 2nx}{2} = \frac{1}{2} \cos nx + \frac{1}{2} \cos nx \cos 2nx \\ &= \frac{1}{2} \cos nx + \frac{1}{4} \cos(2n-1)x + \frac{1}{4} \cos(2n+1)x, \end{aligned}$$

представимо

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \cos^3 nx \, dx &= \frac{1}{2} \int_a^b f(x) \cos nx \, dx \\ &+ \frac{1}{4} \int_a^b f(x) \cos(2n-1)x \, dx + \frac{1}{4} \int_a^b f(x) \cos(2n+1)x \, dx. \end{aligned}$$

За лемою Рімана – Лебега, всі інтеграли справа прямують до нуля при $n \rightarrow \infty$. Тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos^3 nx \, dx = 0.$$

1.16. Довести, що модулі *всіх* екстремальних значень (максимумів і мінімумів) ядра Діріхле D_n не менші за $\frac{1}{2}$. Довести, що на інтервалі $[-\pi, \pi]$ існує принаймні $2n+1$ екстремальних значень функції D_n .

Розв’язок. Знайдемо корені ядра Діріхле $D_n(u) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}}$, які належать до $(0, \pi]$. Маємо $\sin(n+\frac{1}{2})u = 0$, тобто $u = \frac{l\pi}{n+\frac{1}{2}} \in (0, \pi)$ при $l = 1, \dots, n$. Покладемо $u_l = \frac{l\pi}{n+\frac{1}{2}}$ ($l = 1, \dots, n$). Оскільки між будь-якими двома коренями диференційовної функції існує принаймні один екстремум, то на інтервалі $(0, \pi)$ ядро Діріхле має принаймні $n-1$ екстремум. Тоді для $l = 1, \dots, n-1$ із нерівності $\sin t \leq \min(1, t)$ ($0 < t < \frac{\pi}{2}$) випливає

$$|A_l| \equiv \max_{u_l < u < u_{l+1}} |D_n(u)| = \left| D_n \left(\frac{u_l + u_{l+1}}{2} \right) \right| = \left| D_n \left(\frac{2l+1}{2n+1} \pi \right) \right|$$

$$= \left| \frac{\sin \frac{2n+1}{2} \frac{2l+1}{2n+1} \pi}{2 \sin \frac{2l+1}{2n+1} \frac{\pi}{2}} \right| = \frac{1}{2 \sin \frac{2l+1}{2n+1} \frac{\pi}{2}} \geq \max \left(\frac{1}{2}, \frac{2n+1}{2l+1} \frac{1}{\pi} \right).$$

Маємо $A_1 \leq -\frac{2n+1}{3\pi}$, $A_2 \geq \frac{2n+1}{5\pi}$.

Покажемо, що точка π також є екстремальною для ядра Діріхле. Маємо

$$D'_n(u) = - \sum_{k=1}^n k \sin ku, \quad D'_n(\pi) = 0,$$

$$D''_n(u) = - \sum_{k=1}^n k^2 \cos ku, \quad D''_n(\pi) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^2.$$

Якщо $n = 2s$, то $D''_{2s}(\pi) = \sum_{i=1}^s [(2i-1)^2 - (2i)^2] < 0$, а при $n = 2s+1$ маємо

$$\begin{aligned} D''_{2s+1}(\pi) &= \sum_{i=1}^s [(2i-1)^2 - (2i)^2] + (2s+1)^2 \\ &= - \sum_{i=1}^s (4i-1) + (2s+1)^2 = -4 \frac{s+1}{2} s + s + 4s^2 + 4s + 1 = 2s^2 + 3s + 1 > 0. \end{aligned}$$

Отже, оскільки $D'_n(\pi) = 0$, $D''_n(\pi) \neq 0$, то точка $x_0 = \pi$ є екстремальною. При цьому

$$D_n(\pi) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (-1)^k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = 2s, \\ -\frac{1}{2}, & n = 2s-1, \end{cases} \quad |D_n(\pi)| = \frac{1}{2} \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Таким чином, на $(0, \pi]$ ядро Діріхле має принаймні n екстремумів. В силу парності, стільки ж екстремумів має ядро Діріхле і на $[-\pi, 0)$, а якщо врахуємо, що 0 також є точкою екстремума ядра Діріхле, то отримаємо, що кількість екстремальних точок у ядра Діріхле на $[-\pi, \pi]$ не менше, ніж $2n+1$.

1.17. Нехай f кусково гладка на інтервалі $(0, a)$. Довести, що косинус- та синус-ряди функції f збігаються до $f(x_0)$, якщо x_0 точка неперервності f , а якщо x_0 – точка розриву f , то обидва ряди збігаються в точці x_0 до $\frac{1}{2}[f(x_0+) + f(x_0-)]$.

Розв’язок. Продовжимо функцію f на $(-a, 0)$ парним чином, а потім $2a$ -періодично на всю числову вісь. Отриману в результаті функцію позначимо через g . Покладемо $g(2ka) = f(0+)$, $g((2k+1)a) = f(a-)$ ($k \in \mathbb{Z}$),

ці границі $f(0+)$ і $f(a-)$ у кусково гладкої на $(0, a)$ функції f існують. Функція g кусково гладка на $\mathbb{R}$. Її коефіцієнти Фур'є $b_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$),

$$a_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a g(x) \cos \frac{n\pi}{a} x dx = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos \frac{n\pi}{a} x dx \quad (n = 0, 1, \dots),$$

тобто a_n – коефіцієнти косинус-ряду функції f . Ряд Фур'є функції g має вигляд

$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{a} x.$$

Цей же ряд є також косинус-рядом функції f і, таким чином, достатньо показати, що

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{a} x = \frac{1}{2} [f(x_0+) + f(x_0-)]$$

при будь-якому $x_0 \in (0, a)$; якщо f неперервна в точці x_0 , то права частина останньої рівності дорівнює $f(x_0)$. Функція $g_1(t) = g\left(\frac{a}{\pi}t\right)$ парна, кусково неперервна і 2π -періодична. Її коефіцієнти Фур'є $b'_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$),

$$\begin{aligned} a'_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g_1(t) \cos nt dt = \frac{2}{a} \int_0^a g_1\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos \frac{n\pi}{a} x dx \\ &= \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \cos \frac{n\pi}{a} x dx = a_n \quad (n = 0, 1, \dots). \end{aligned}$$

Якщо $x_0 \in (0, a)$, то $t_0 = \frac{\pi}{a}x_0 \in (0, \pi)$ і $g_1(t_0\pm) = g(x_0\pm) = f(x_0\pm)$. Застосувавши теорему Діріхле 1.29 до функції g_1 в точці t_0 , знаходимо

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{a} x_0 &= \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos nt_0 + b'_n \sin nt_0) \\ &= \frac{1}{2} [g_1(t_0+) + g_1(t_0-)] = \frac{1}{2} [g(x_0+) + g(x_0-)] = \frac{1}{2} [f(x_0+) + f(x_0-)]. \end{aligned}$$

Міркування для синус-ряду аналогічні, лише замість парного продовження функції f на $(-a, 0)$ потрібно взяти її непарне продовження і покласти, наприклад, $g(ka) = 0$ ($k \in \mathbb{Z}$).

1.18. Довести наступну теорему.

Теорема. Припустимо, що 2π -періодична функція f кусково неперервна. Якщо в точці x_0 функція f має ліву та праву похідні, то ряд Фур’є функції f в точці x_0 збігається до $\frac{1}{2}[f(x_0+) + f(x_0-)]$.

Доведення. Будемо використовувати позначення із доведення теореми Діріхле 1.29. Доведемо, що інтеграл

$$I_n^{(1)}(x_0) = \int_0^\pi [f(x_0 + t) - f(x_0+)] D_n(t) dt$$

прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$. Справді, оскільки f в точці x_0 має праву похідну, то знайдуться такі додатні M і δ , що

$$|f(x_0 + t) - f(x_0+)| < Mt \quad (t \in (0, \delta)).$$

Тоді для функції

$$g(t) = \frac{f(x_0 + t) - f(x_0+)}{2 \sin \frac{t}{2}} \quad (t \in (0, \pi])$$

із нерівності $u < \frac{\pi}{2} \sin u$ ($u \in (0, \frac{\pi}{2})$), отримуємо

$$|g(t)| \leq \frac{Mt}{2 \sin \frac{t}{2}} \leq \frac{\pi M}{2} \quad (t \in (0, \delta)),$$

тобто функція g обмежена на $(0, \delta)$. Легко бачити, що g обмежена також і на $[\delta, \pi]$. Звідси випливає, що $g \in \mathcal{R}[0, \pi]$. Із леми 1.28 випливає, що $I_n^{(1)}(x_0) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Аналогічно отримуємо, що $I_n^{(2)}(x_0) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), і тим самим завершується доведення теореми.

1.19. Пояснити чому ряд Фур’є для $\sqrt[3]{x}$ на інтервалі $(-\pi, \pi)$ збігається до $\sqrt[3]{x}$ для всіх x з інтервалу $(-\pi, \pi)$.

Розв’язок. 2π -періодичне продовження f цієї функції кусково неперервне і тому, згідно з теоремою з попередньої вправи 1.18, ряд Фур’є цієї функції в кожній точці $x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}$ збігається до $\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = f(x)$. Якщо ж $x = 0$, то, в силу непарності функції f , її коефіцієнти $a_n = 0$ ($n = 0, 1, \dots$) і тому доданки ряду Фур’є при $x = 0$ обертаються в нуль. Це означає, що і сам ряд Фур’є в точці нуль збігається до значення $f(0) = 0$. Отже, ряд Фур’є збігається до $\sqrt[3]{x}$ в кожній точці $x \in (-\pi, \pi)$.

1.20. *Ліпшицьові функції.* Функція f називається *ліпшицьовою* порядку $\alpha > 0$ в точці x_0 , якщо на деякому відкритому інтервалі, який містить в собі x_0 , справедлива нерівність

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha,$$

де C – деяка додатня стала.

1.20.a. Показати, що $f(x) = x^{1/3}$ є ліпшицьовою порядку $1/3$ в точці 0 .

Розв'язок. $|x^{1/3} - 0| = |x|^{1/3}$, тобто $\alpha = \frac{1}{3}$, $C = 1$.

1.20.b. Показати, що $f(x) = x \cos(1/x)$ при $x \neq 0$ і дорівнює 0 при $x = 0$ є ліпшицьовою порядку 1 в точці 0 .

Розв'язок. $|x \cos \frac{1}{x} - 0| \leq |x|$, тобто $\alpha = 1$, $C = 1$.

1.20.c. Довести, що якщо f диференційовна в точці x_0 , то вона є ліпшицьовою порядку 1 в точці x_0 .

Розв'язок. Оскільки існує

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

то знайдеться таке δ , що

$$|f(x) - f(x_0)| \leq (|f'(x_0)| + 1)|x - x_0| \quad (|x - x_0| < \delta),$$

тобто $\alpha = 1$, $C = |f'(x_0)| + 1$.

1.20.d. Показати, що функції з 1.20.a і 1.20.b є ліпшицьовими в кожній точці x (порядок може бути різним для різних x).

Розв'язок. Обидві функції диференційовні в кожній точці $x_0 \neq 0$, і, отже, в цих точках вони ліпшицьові порядку 1 . При $x_0 = 0$ умови Ліпшиця встановлені у вправах 1.20.a і 1.20.b.

1.21. Обчислити

1.21.a.
$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) \sin 100t \, dt.$$

Розв'язок. Оскільки $D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) \sin 100t \, dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 100t \, dt + \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \sin 100t \, dt.$$

В силу ортогональності тригонометричної системи, всі інтеграли в правій частині дорівнюють нулю. Тому $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) \sin 100t \, dt = 0$.

1.21.b.
$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) \cos 100t \, dt.$$

Розв’язок.

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) \cos 100t \, dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 100t \, dt + \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \cos 100t \, dt. \quad (\text{A.1})$$

Якщо $n < 100$, то, в силу ортогональності тригонометричної системи, всі інтеграли в правій частині дорівнюють нулю. Тому $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) \cos 100t \, dt = 0$ при $n < 100$. Якщо ж $n \geq 100$, то в рівності (A.1) доданок з номером $k = 100$ дорівнює π , а всі останні дорівнюють нулю. Таким чином,

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) \cos 100t \, dt = \begin{cases} 0, & n < 100, \\ \pi, & n \geq 100. \end{cases}$$

1.22. Обчислити $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n^2(t) \, dt$ при $n = 100$.

Розв’язок.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n^2(t) \, dt &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right) \left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n \cos jt \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{4} + \sum_{k=1}^n \cos kt + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \cos kt \cos jt \right) dt \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \, dt + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \cos jt \, dt \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kt \, dt = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n 1 = \frac{1}{2} + n. \end{aligned}$$

При $n = 100$ отримуємо $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n^2(t) \, dt = \frac{1}{2} + 100 = 100,5$.

1.23. Нехай $g(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t/2)}{t}, & t \neq 0, \\ 1/2, & t = 0. \end{cases}$

Обчислити $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)g(t) dt$.

Розв'язок. Розглянемо 2π -періодичне продовження звуження функції g на $[-\pi, \pi]$, його також позначимо через g . Тоді $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)g(t) dt$ є частинною сумою ряду Фур'є функції g порядку n в точці $x = 0$. Якщо ми покажемо, що функція g диференційовна в точці $x = 0$, то за теоремою Діріхле 1.29 отримаємо, що її ряд Фур'є збігається в цій точці до значення функції. Покажемо, що функція g диференційовна в точці $x = 0$. Для цього, застосовуючи правило Лопіталя, отримаємо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin \frac{x}{2}}{x} - \frac{1}{2}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2} - \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} - \frac{1}{2}}{2x} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{x}{2} - 1}{x} = 0. \end{aligned}$$

Це означає, що $g'(0) = 0$. Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)g(t) dt = g(0) = \frac{1}{2}$.

1.24. Нехай $f(x) = 1 - x^2$ ($x \in [-\pi, \pi]$).

1.24.a. Обчислити a_0 , a_n , b_n ($n \in \mathbb{N}$).

Розв'язок. Раніше були обчислені коефіцієнти Фур'є a'_n, b'_n функції $g(x) = x^2$:

$$a'_0 = \frac{2}{3}\pi^2, \quad a'_n = \frac{4}{\pi^2}(-1)^n, \quad b'_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Звідси випливає, що

$$a_0 = 1 - a'_0 = 1 - \frac{2}{3}\pi^2, \quad a_n = -a'_n = \frac{4}{\pi^2}(-1)^{n-1}, \quad b_n = -b'_n = 0.$$

1.24.b. До яких значень ряд Фур'є функції f збігається в точках $x = 5\pi$ і $x = 6\pi$?

Розв'язок. 2π -періодичне продовження функції f неперервне і кусково гладке. За теоремою Діріхле 1.29, його ряд Фур'є збігається до значення функції в кожній точці. Зокрема, в точці $x = 5\pi$ ряд Фур'є збігається до значення 2π -періодичного продовження в цій точці, яке дорівнює π^2 .

В точці $x = 6\pi$ періодичне продовження дорівнює нулю і тому ряд Фур’є в цій точці збігається до нуля.

1.25. Побудувати ряд Фур’є 1-періодичної функції

$$f(x) = \begin{cases} x - [x], & x \notin \mathbb{Z}, \\ \frac{1}{2}, & x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

До яких значень збігається ряд Фур’є в точках $x = 5$, $x = 3$, і $x = 1, 5$?

Розв’язок. Функція $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$ непарна, тому її коефіцієнти Фур’є $a'_n = 0$. Звідси випливає, що коефіцієнти Фур’є a_n функції f дорівнюють $a_0 = a'_0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $a_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$). Обчислимо b_n :

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \int_0^1 x \sin 2\pi n x \, dx = 2 \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \sin 2\pi n x \, dx & v = -\frac{1}{\pi n} \cos 2\pi n x \end{array} \right] \Big|_0^1 \\ &= 2 \left[-\frac{1}{2\pi n} x \cos 2\pi n x \Big|_0^1 + \frac{1}{2\pi n} \int_0^1 \cos 2\pi n x \, dx \right] = -\frac{1}{\pi n} \cos 2\pi n = -\frac{1}{\pi n}. \end{aligned}$$

Отримали

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 2\pi n x.$$

Оскільки функція f кусково гладка, то, за теоремою Діріхле 1.29, її ряд Фур’є збігається до $\frac{f(x-) + f(x+)}{2}$ в кожній точці, тобто,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 2\pi n x = \frac{f(x-) + f(x+)}{2} = f(x).$$

Зокрема, $f(5) = f(3) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

1.26.a. Показати, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} \quad (0 < x < 2\pi).$$

Розв’язок. Покладемо $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ ($0 < x < 2\pi$) і продовжимо функцію f на $\mathbb{R}$ 2π -періодичним чином. Отримана функція непарна і тому

$a_n = 0$ ($n = 0, 1, \dots$). Обчислимо

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx \, dx = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x \sin nx \, dx \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \sin nx \, dx & v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right] \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{n} x \cos nx \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \cos nx \, dx \right] = \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Таким чином, ряд Фур'є функції f має вигляд

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

Якщо $0 < x < 2\pi$, то функція $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ диференційовна в точці x і, за теоремою Діріхле 1.29, ряд Фур'є функції f в точці x збігається до $f(x)$. Тому маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} \quad (0 < x < 2\pi).$$

1.26.b. Обчислити $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ для $-2\pi < x < 0$.

Розв'язок. Якщо $-2\pi < x < 0$, то періодично продовжена функція f має вигляд $f(x) = \frac{\pi-(x+2\pi)}{2} = -\frac{\pi+x}{2}$. Оскільки f диференційовна в точці $x \in (-2\pi, 0)$, то, за теоремою Діріхле 1.29, її ряд Фур'є збігається до $f(x)$. Таким чином,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = -\frac{\pi + x}{2} \quad (-2\pi < x < 0).$$

1.26.c. Довести, що

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k} \quad (0 < x < \pi).$$

Розв'язок. Функцію $g(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ ($0 < x < \pi$) продовжимо на $(-\pi, 0)$ непарним чином, а потім 2π -періодично на всю числову вісь. Оскільки

отримана функція непарна, то її коефіцієнти Фур’є $a_n = 0$ ($n = 0, 1, \dots$).
Обчислимо

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \sin nx \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx \equiv I_1^{(n)} - I_2^{(n)}. \end{aligned}$$

Маємо

$$\begin{aligned} I_1^{(n)} &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = -\frac{1}{2n} \cos nx \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2n} (\cos n\pi - 1) \\ &= \frac{1}{2n} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{1}{n}, & n = 2k + 1, \end{cases} \\ I_2^{(n)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \sin nx \, dx & v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} x \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx \right] = -\frac{1}{n} \cos n\pi = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \\ b_n &= I_1^{(n)} - I_2^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n = 2k, \\ 0, & n = 2k + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким чином,

$$g(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k}.$$

Якщо $0 < x < \pi$, то, за теоремою Діріхле 1.29, ряд Фур’є функції g збігається до $g(x)$, тобто

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k} \quad (0 < x < \pi).$$

1.26.d. Показати, що з вправ 1.26.a і 1.26.c випливає

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \quad (0 < x < \pi).$$

Розв'язок. Якщо $0 < x < \pi$, то, на основі вправ 1.26.a і 1.26.c,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \frac{\pi - x}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \quad (0 < x < \pi). \end{aligned}$$

1.26.e. Розвинути в ряд Фур'є функцію $\frac{\pi}{4} \operatorname{sign} x$ ($|x| < \pi$). Довести рівність із вправи 1.26.d, використовуючи це розвинення і теорему Діріхле 1.29.

Розв'язок. Функція $h(x) = \frac{\pi}{4} \operatorname{sign} x$ ($|x| < \pi$) непарна. Тому $a_n = 0$ ($n = 0, 1, \dots$). Обчислимо

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \left. \frac{-1}{2n} \cos nx \right|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2n} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{1}{n}, & n = 2k-1 \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

За теоремою Діріхле 1.29 маємо

$$\frac{\pi}{4} \operatorname{sign} x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \quad (0 < |x| < \pi).$$

Зокрема, якщо $0 < x < \pi$, то $\operatorname{sign} x = 1$ і тому

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \quad (0 < x < \pi).$$

1.27. Нехай $f_1(x) = x$ ($x \in (-\pi, \pi]$). Побудувати ряд Фур'є функції f_1 .

Розв'язок. Раніше вже був побудований ряд Фур'є

$$f_1(x) = x \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \quad (|x| \leq \pi).$$

1.28. Теорему 1.41 про почленне інтегрування ряду Фур'є сформулюємо у наступному вигляді.

Теорема. Нехай 2π -періодична функція $f \in \mathcal{PC}$ на $\mathbb{R}$ і

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Тоді для будь-якого $x \in [-\pi, \pi]$ справедлива рівність

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{a_0}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} (\cos nx - 1) \right),$$

причому ряд справа збігається рівномірно на $\mathbb{R}$.

Застосовуючи вправу 1.27 і інтегрування, розвинути в ряди Фур’є функції

1.28.а.
$$f_2(x) = x^2 \quad (x \in (-\pi, \pi]).$$

Розв’язок. Функція f_1 задовольняє умови цієї теореми, згідно з якою для будь-якого $x \in [-\pi, \pi]$ справедлива рівність

$$\begin{aligned} f_2(x) = x^2 &= 2 \int_0^x t dt = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (\cos nx - 1) \\ &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (|x| \leq \pi). \end{aligned}$$

Обчислимо

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^3}{3} = \frac{2}{3} \pi^2.$$

Тому маємо

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\pi^2}{3} = -4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2},$$

тобто

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad (|x| \leq \pi). \quad (\text{A.2})$$

1.28.b. $f_3(x) = x^3 \quad (x \in (-\pi, \pi]).$

Розв'язок. Інтегруючи почленно ряд в правій частині рівності (A.2) та використовуючи розвинення функції $f(x) = x$, знаходимо

$$\begin{aligned} x^3 &= 3 \int_0^x t^2 dt = 3 \left(\frac{\pi^2}{3} x + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{1}{n} \sin nx \right) \\ &= \pi^2 x + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx \\ &= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\pi^2 - \frac{6}{n^2} \right) \sin nx \quad (|x| < \pi). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

1.28.c. $f_4(x) = x^4, \quad (x \in (-\pi, \pi]).$

Розв'язок. Інтегруючи почленно ряд (A.3), отримуємо

$$x^4 = 4 \int_0^x t^3 dt = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left(\pi^2 - \frac{6}{n^2} \right) \cos nx + C,$$

а сталу C знайдемо, обчислюючи

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2}{5} \pi^4,$$

звідки $C = \frac{a_0}{2} = \frac{\pi^4}{5}$. Таким чином,

$$x^4 = \frac{\pi^4}{5} + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left(\pi^2 - \frac{6}{n^2} \right) \cos nx \quad (|x| \leq \pi).$$

1.29. Застосовуючи розвинення в ряд Фур'є функції f_2 із вправи 1.28.a, обчислити

1.29.a.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Розв’язок. Поклавши $x = \pi$ в рівності (A.2), отримаємо $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$

1.29.b.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Розв’язок. Поклавши $x = 0$ в рівності (A.2), маємо $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$

1.30. Нехай f – 2π -періодична функція. Припустимо, що $f \in C^r(\mathbb{R})$ ($r \geq 1$) (тобто, що f має неперервну похідну $f^{(r)}$). Довести, що

$$|a_n(f)| + |b_n(f)| = \frac{1}{n^r} \left(\left| a_n \left(f^{(r)} \right) \right| + \left| b_n \left(f^{(r)} \right) \right| \right)$$

для кожного $n \geq 1$.

Розв’язок. При доведенні теореми 1.36 була отримана рівність

$$a_n(f') = nb_n(f), \quad b_n(f') = -na_n(f).$$

З цієї рівності маємо

$$\begin{aligned} |a_n(f)| + |b_n(f)| &= \frac{1}{n} (|a_n(f')| + |b_n(f')|) = \frac{1}{n^2} (|a_n(f'')| + |b_n(f'')|) \\ &= \dots = \frac{1}{n^r} \left(\left| a_n \left(f^{(r)} \right) \right| + \left| b_n \left(f^{(r)} \right) \right| \right), \end{aligned}$$

що і потрібно довести.

1.31. Нехай f – 2π -періодична, неперервно диференційовна функція. Довести, що

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - S_n(x)| = \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{n}} \quad (n \geq 1),$$

де $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ ($S_n(x)$ означає n -ю частинну суму ряду Фур’є функції f).

Розв’язок. Застосуємо доведену в попередній вправі 1.30 рівність і отримаємо

$$|f(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx) \right|$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (|a_k(f)| + |b_k(f)|) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k(f')|}{k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|b_k(f')|}{k} \equiv A_n^{(1)} + B_n^{(1)}. \quad (\text{A.4})$$

Оцінимо $A_n^{(1)}$. Оскільки $a_k(f')$ – коефіцієнти Фур'є, то ряд із квадратів цих коефіцієнтів збігається. Тому залишки цього ряду

$$\left(\varepsilon_n^{(1)}\right)^2 \equiv \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k(f'))^2$$

прямують до нуля при $n \rightarrow \infty$. Для оцінки $A_n^{(1)}$ застосуємо нерівність Коші

$$A_n^{(1)} \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k(f'))^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} = \varepsilon_n^{(1)} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2}.$$

Оскільки

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n},$$

то

$$A_n^{(1)} \leq \frac{\varepsilon_n^{(1)}}{n^{1/2}}.$$

Аналогічно отримуємо

$$B_n^{(1)} \leq \frac{\varepsilon_n^{(2)}}{n^{1/2}}.$$

Оскільки (A.4) справедлива для всіх x , то, поклавши $\varepsilon_n = \varepsilon_n^{(1)} + \varepsilon_n^{(2)}$, отримуємо потрібну нерівність.

1.32. Нехай $f \in C^r(\mathbb{R})$ ($r \geq 1$) – 2π -періодична функція. Довести, що

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - S_n(x)| = \frac{\varepsilon_n}{n^{r-1/2}} \quad (n \geq 1),$$

де $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Розв'язок. Як і в попередній вправі 1.31, маємо

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k(f^{(r)})|}{k^r} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|b_k(f^{(r)})|}{k^r} \equiv A_n^{(r)} + B_n^{(r)}.$$

Подальші оцінки $A_n^{(r)}$ і $B_n^{(r)}$ також аналогічні. При цьому використовується наступна нерівність

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2r}} \leq \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^{2r}} = \frac{1}{2r-1} \frac{1}{n^{2r-1}}.$$

1.33.a. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ збігається рівномірно на $\mathbb{R}$.

Розв’язок. Оскільки $\left| \frac{\sin nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ збігається, то заданий ряд збігається рівномірно за ознакою Вейерштрасса.

1.33.b. Нехай $f(x)$ – сума даного ряду. Чи є цей ряд рядом Фур’є функції f ?

Розв’язок. Позначимо

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}.$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ збігається рівномірно, то він є рядом Фур’є своєї суми.

1.33.c. Довести, що $f \in C^1(\mathbb{R})$, і ряд Фур’є для f' може бути отриманим почленним диференціюванням початкового ряду.

Розв’язок. Продиференціювавши почленно рівномірно збіжний на $\mathbb{R}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$, отримуємо $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$. Цей ряд також збігається рівномірно за ознакою Вейерштрасса, і, отже, його сума неперервна і він є рядом Фур’є своєї суми.

1.33.d. Показати, що f' кусково гладка, неперервна, і

$$f''(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad (x \in (0, 2\pi))$$

(застосувати теорему про почленне інтегрування до ряду в правій частині і вправу 1.26.a).

Розв’язок. Позначимо

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

і застосуємо теорему про почленне інтегрування ряду Фур'є:

$$\int_0^x \varphi(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} + C,$$

а підставивши в цю рівність $x = 0$, переконуємось в тому, що $C = 0$. Отримали рівність

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t) dt,$$

із якої, в силу неперервності φ , випливає, що $f'(x) = \varphi(x)$ неперервна на $\mathbb{R}$. Отже, ряд Фур'є функції f' може бути отриманим шляхом почленного диференціювання ряду Фур'є функції f .

1.33.е. Визначити f .

Розв'язок. Раніше був побудований ряд Фур'є функції

$$\frac{\pi - x}{2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad (0 < x < 2\pi)$$

(див. приклад 1.12 і вправу 1.26.а). 2π -періодичне продовження цієї функції непарне і кусково гладке. Нехай $0 < x < 2\pi$. Інтегруючи почленно останній ряд, маємо

$$\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{4}x^2 = \int_0^x \frac{\pi - t}{2} dt = C - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2},$$

де C – стала. При $x = \pi$ отримуємо $\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{4} = C - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = C + \frac{\pi^2}{12}$, звідки знаходимо $C = \frac{\pi^2}{6}$. Таким чином

$$\varphi(x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2}x + \frac{1}{4}x^2 \quad (0 < x < 2\pi),$$

її 2π -періодичне продовження кусково гладке і

$$f''(x) = \varphi'(x) = -\frac{\pi - x}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad (0 < x < 2\pi).$$

На завершення,

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t) dt = \int_0^x \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2}t + \frac{1}{4}t^2 \right) dt$$

$$= \frac{\pi^2}{6}x - \frac{\pi^2}{4}x^2 + \frac{x^3}{12} + C \quad (0 < x < 2\pi),$$

а при $x = \pi$ маємо $f(0) = 0 = \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi^3}{4} + \frac{\pi^3}{12} + C$, звідки $C = 0$. Отже,

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6}x - \frac{\pi^2}{4}x^2 + \frac{x^3}{12} \quad (0 < x < 2\pi),$$

і, очевидно, при $x = 0$ і $x = 2\pi$ ця рівність залишається справедливою.

1.34. Довести, що якщо f кусково неперервна на (a, b) і $\|f\|_2 = 0$, то $f(x) = 0$, за виключенням, хіба що, скінченної кількості точок.

Розв’язок. Достатньо показати, що $f(x_0) = 0$ в кожній точці неперервності функції f . Припустимо протилежне. Нехай, наприклад, $f(x_0) > 0$. Знайдемо такий окіл $\Delta \equiv (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, що для всіх x із цього околу справедлива нерівність $f(x) \geq \frac{1}{2}f(x_0)$. Тоді отримаємо

$$\|f\|_2^2 = \int_a^b f^2(x) dx = \int_{(a,b) \setminus \Delta} f^2(x) dx + \int_{\Delta} f^2(x) dx \geq \delta \left(\frac{1}{2}f(x_0) \right)^2 > 0,$$

що протирічить умові.

1.35. Довести наступну теорему.

Теорема. Нехай f – періодична функція. Якщо f має k неперервних похідних, то при деякій додатній сталій C коефіцієнти Фур’є функції f задовольняють нерівності

$$|A_n| \leq \frac{C}{n^k}, \quad |B_n| \leq \frac{C}{n^k}$$

при всіх n .

Розв’язок. Див. вправу 1.30.

1.36. Нехай $f(x) = \begin{cases} Ax + B, & -\pi \leq x < 0, \\ \cos x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$ Для яких значень A і B ряд Фур’є функції f збігається рівномірно до f на $[-\pi, \pi]$?

Розв’язок. Теорема 1.38 про рівномірну збіжність ряду Фур’є гарантує рівномірну збіжність за умовою неперервності і кускової гладкості функції f . Для того щоб 2π -періодичне продовження даної функції f задовольняло ці властивості, необхідно і достатньо, щоб функція $Ax + B$ в точці $x = 0$ набувала значення, яке дорівнює 1, а при $x = -\pi$ – значення

–1. Ці вимоги, очевидно, виконуються при $A = \frac{2}{\pi}$, $B = 1$. Якщо ж A чи B відмінні від вказаних, то 2π -періодичне продовження отриманої функції розривне, і тому її ряд Фур'є не є рівномірно збіжним.

1.37. Нехай $f(x) = \pi x - x|x|$ ($x \in (-\pi, \pi]$), і нехай f періодично продовжена з періодом 2π на $\mathbb{R}$. Чи буде ряд Фур'є функції f збігатись рівномірно?

Розв'язок. Оскільки f неперервна, кусково гладка і $f(\pi) = f(-\pi)$, то її 2π -періодичне продовження також неперервне і кусково гладке. За теоремою 1.38 про рівномірну збіжність, ряд Фур'є цієї функції збігається рівномірно.

1.38. Нехай $g(x) = \begin{cases} \cos x, & -\pi < x < 0, \\ \sin x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

1.38.а. Побудувати ряд Фур'є функції g .

Розв'язок. Обчислимо коефіцієнти Фур'є цієї функції

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \cos x dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx \\ &= \frac{1}{\pi} (-\cos x) \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi} ((-1) - 1) = \frac{2}{\pi}, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \cos x \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \cos(n+1)x dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \cos(n-1)x dx \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(n+1)x dx - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(n-1)x dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{n+1} \cos(n+1)x \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n-1} \cos(n-1)x \Big|_0^{\pi} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{n+1} ((-1)^{n+1} - 1) + \frac{1}{n-1} ((-1)^{n-1} - 1) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} ((-1)^{n+1} - 1) \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{n^2 - 1} \begin{cases} -2, & n = 2k, \\ 0, & n = 2k + 1 \end{cases} \quad (n > 1), \\
 a_1 &= \frac{1}{2\pi} \left[\pi - \frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^\pi = \frac{1}{2}, \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \cos x \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \sin nx \, dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \sin(n+1)x \, dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \sin(n-1)x \, dx + \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos(n-1)x \, dx - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos(n+1)x \, dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{n+1} \cos(n+1)x \right]_{-\pi}^0 - \frac{1}{n-1} \cos(n-1)x \Big|_{-\pi}^0 \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{n+1} (1 - (-1)^{n+1}) - \frac{1}{n-1} (1 - (-1)^{n-1}) \right] \\
 &= -\frac{1}{2\pi} (1 - (-1)^{n+1}) \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \right) \\
 &= -\frac{1}{\pi} \frac{n}{n^2 - 1} \begin{cases} 0, & n = 2k + 1, \\ 2, & n = 2k \end{cases} \quad (n > 1), \\
 b_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \sin 2x \, dx + \frac{1}{2\pi} \pi = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Ряд Фур’є даної функції має вигляд

$$\begin{aligned}
 g(x) &\sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{4k^2 - 1} \cos 2kx - \frac{2k}{4k^2 - 1} \sin 2kx \\
 &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} (\cos 2kx + k \sin 2kx).
 \end{aligned}$$

1.38.b. Означимо функцію

$$h(x) = \int_{-\pi}^x g(t) \, dt + \alpha \sin \frac{x}{2} \quad (-\pi < x \leq \pi),$$

$h(x + 2\pi) = h(x)$. При якому значенні α ряд Фур'є функції h збігається рівномірно до h на $[-\pi, \pi]$?

Розв'язок. Обчислимо

$$\varphi(x) \equiv \int_{-\pi}^x g(t) dt = \begin{cases} \sin x, & -\pi < x < 0, \\ 1 - \cos x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Для того щоб 2π -періодичне продовження функції $h(x) = \varphi(x) + \alpha \sin \frac{x}{2}$ було неперервним (воно, очевидно, кусково гладке), параметр α потрібно підібрати так, щоб виконувалась рівність $h(-\pi) = h(\pi)$. Оскільки $h(-\pi) = \varphi(-\pi) - \alpha = -\alpha$, $h(\pi) = \varphi(\pi) + \alpha = 2 + \alpha$, то отримуємо наступну умову $2 + \alpha = -\alpha$, із якої знаходимо $\alpha = -1$. Якщо ж $\alpha \neq -1$, то отримана функція не є неперервною і тому її ряд Фур'є не буде рівномірно збіжним.

1.39.a. Які із наведених нижче рядів є рядами Фур'є?

$$\begin{aligned} 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}; \\ 4) \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}. \end{aligned}$$

1.39.b. Які з цих рядів збігаються рівномірно на $\mathbb{R}$?

Розв'язок. Перший, другий та шостий ряди збігаються рівномірно за ознакою Вейєрштрасса і тому вони є рядами Фур'є своїх сум, відповідно. Для третього ряду раніше була отримана рівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} \quad (0 < x < 2\pi).$$

(див. приклад 1.12 і вправу 1.26.a). 2π -періодичне продовження цієї функції не є неперервним і тому даний ряд є рядом Фур'є, але не є рівномірно збіжним. Аналогічно, раніше був побудований ряд Фур'є

$$x \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \quad (|x| < \pi).$$

(див. приклад 1.11). Тому п'ятий ряд є рядом Фур'є функції $-\frac{x}{2}$ ($|x| < \pi$), але збігається цей ряд нерівномірно, оскільки 2π -періодичне продовження

функції не є неперервним. Четвертий ряд не є рядом Фур’є, оскільки його коефіцієнти не прямують до нуля.

1.40. Нехай $\{g_n\}$ – ортогональна система на відрізку $[a, b]$. Нехай f – неперервна функція на $[a, b]$, і $\{c_n\}$ – її коефіцієнти Фур’є за системою $\{g_n\}$.

1.40.а. Довести, що послідовність квадратичних норм

$$\left\| f - \sum_{n=0}^N c_n g_n \right\|_2$$

спадає зі зростанням N .

Розв’язок. Для довільної ортогональної на $[a, b]$ системи $\Phi = \{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ тотожність Бесселя (1.21) набуває вигляду

$$\int_a^b [f(x) - S_N(x)]^2 dx = \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{n=0}^N c_n^2 \|g_n\|_2^2,$$

де $S_N(x) = \sum_{n=0}^N c_n g_n(x)$, а коефіцієнти Фур’є c_n визначаються рівністю $c_n = \frac{1}{\|g_n\|_2^2} \int_a^b f(x) g_n(x) dx$. Ліва частина цієї тотожності дорівнює

$$\left\| f - \sum_{n=0}^N c_n g_n \right\|_2^2,$$

а права частина, очевидно, спадає зі зростанням N .

1.40.б. Довести, що *рівність Парсеваля*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \|g_n\|_2^2 = \int_a^b f^2(x) dx$$

справедлива тоді і лише тоді, коли $\{g_n\}$ – повна ортогональна система на $[a, b]$.

Розв’язок. Це твердження миттєво впливає із наведеного в попередній вправі 1.40.а аналогу тотожності Бесселя (див. доведення теореми 1.44).

1.41. Використовуючи повноту тригонометричної системи, тобто рівність

$$\frac{1}{2}A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^2 + B_n^2] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx,$$

де A_n, B_n – звичайні коефіцієнти Фур'є функції f , довести, що тригонометрична система з періодом $2a$ є повною на $[-a, a]$, і що системи синусів та косинусів повні ортогональні системи на $[0, a]$.

Розв'язок. Функція f неперервна на $[-\pi, \pi]$ тоді і лише тоді, коли функція $g(t) = f\left(\frac{\pi t}{a}\right)$ неперервна на $[-a, a]$. Нехай a_n, b_n – коефіцієнти Фур'є функції g за тригонометричною системою на $[-a, a]$. Тоді $a_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a g(t) \cos \frac{\pi n t}{a} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos n x dx = A_n$, і, аналогічно, $b_n = B_n$, де A_n, B_n – звичайні коефіцієнти Фур'є функції f на $[-\pi, \pi]$. Задану рівність, яка означає повноту звичайної тригонометричної системи на $[-\pi, \pi]$, перепишемо у вигляді

$$2\pi \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^2 + B_n^2] = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{\pi}{a} \int_{-a}^a g^2(t) dt.$$

Звідси отримуємо, що

$$2a \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + a \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^2 + b_n^2] = \int_{-a}^a g^2(t) dt.$$

Це означає, що для тригонометричної системи на $[-a, a]$ виконується рівність Парсеваля із вправи 1.40.b, і, таким чином, ця система є повною.

Для доведення повноти на $[0, a]$ системи косинусів неперервну на $[0, a]$ функцію f продовжимо парним чином і отримаємо неперервну на $[-a, a]$ функцію g . При цьому, в силу парності g , її коефіцієнти Фур'є $b_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$), $a_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a g(t) \cos \frac{\pi n t}{a} dt = \frac{2}{a} \int_0^a f(t) \cos \frac{\pi n t}{a} dt$ ($n = 0, 1, \dots$). Оскільки тригонометрична система повна $[-a, a]$, то, як показано вище, справедлива рівність

$$2a \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + a \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \int_{-a}^a g^2(t) dt = 2 \int_0^a f^2(t) dt.$$

Звідси випливає рівність

$$a \left(\frac{a_0}{2} \right)^2 + \frac{a}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \int_0^a f^2(t) dt.$$

Це означає, що для системи косинусів на $[0, a]$ виконується рівність Парсеваля із вправи 1.40.b, і, таким чином, ця система є повною.

Для доведення повноти на $[0, a]$ системи синусів задамо неперервну на $[0, a]$ функцію f . Оскільки f обмежена, то існує таке M , що $|f(x)| \leq M$ ($x \in [0, a]$). Задамо довільне $\varepsilon > 0$ і покладемо $\delta = \frac{\varepsilon^2}{32M^2}$. Можемо вважати ε настільки малим, що $\delta < \frac{a}{2}$. Покладемо $f_1(x) = f(x)$ ($x \in [\delta, a - \delta]$), $f_1(0) = f_1(a) = 0$, а на відрізках $[0, \delta]$ і $[a - \delta, a]$ функцію f_1 означимо лінійним чином. Тоді, очевидно, $|f_1(x)| \leq M$ ($x \in [0, a]$). Через g позначимо непарне продовження функції f_1 на $[-a, a]$. Зрозуміло, що g неперервна на $[-a, a]$. Нехай $\beta_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{\pi n x}{a} dx$ – коефіцієнти Фур’є функції f за системою синусів на $[0, a]$. Оскільки функція g непарна на $[-a, a]$, то її коефіцієнти Фур’є за тригонометричною системою на $[-a, a]$ дорівнюють $a_n = 0$, $b_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a g(x) \sin \frac{\pi n x}{a} dx = \frac{2}{a} \int_0^a f_1(x) \sin \frac{\pi n x}{a} dx$. Застосовуючи мінімальну властивість коефіцієнтів Фур’є (теорему Грама 1.24), отримуємо

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{k=1}^n \beta_k \sin \frac{\pi k x}{a} \right\|_2 &\leq \left\| f - \sum_{k=1}^n b_k \sin \frac{\pi k x}{a} \right\|_2 \\ &\leq \|f - f_1\|_2 + \left\| f_1 - \sum_{k=1}^n b_k \sin \frac{\pi k x}{a} \right\|_2. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Для оцінки першого доданку в правій частині (A.5) скористаємось тим, що функції f і f_1 співпадають на $[\delta, a - \delta]$. Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} \|f - f_1\|_2^2 &= \int_0^a (f(x) - f_1(x))^2 dx \\ &= \int_0^{\delta} (f(x) - f_1(x))^2 dx + \int_{a-\delta}^a (f(x) - f_1(x))^2 dx \leq 2 \cdot 4M^2\delta = \frac{\varepsilon^2}{4}. \end{aligned}$$

Далі, оскільки тригонометрична система повна на $[-a, a]$ і функція g непарна, то, згідно з означенням, її ряд Фур'є збігається до g в середньому, тобто

$$\int_{-a}^a \left(g(x) - \sum_{k=1}^n b_k \sin \frac{\pi k x}{a} \right)^2 dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Звідси, в силу рівності

$$\left\| f_1 - \sum_{k=1}^n b_k \sin \frac{\pi k x}{a} \right\|_2^2 = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \left(g(x) - \sum_{k=1}^n b_k \sin \frac{\pi k x}{a} \right)^2 dx,$$

випливає, що знайдеться такий номер N , що при кожному $n \geq N$ другий доданок справа в (А.5) менший, ніж $\frac{\varepsilon}{2}$. Таким чином, з (А.5) випливає, що

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n \beta_k \sin \frac{\pi k x}{a} \right\|_2 < \varepsilon \quad (n \geq N),$$

тобто ряд Фур'є функції f за системою синусів збігається до f в середньому на $[0, a]$. Це й означає, що система синусів повна на $[0, a]$.

1.42. Рівність Парсеваля можна застосовувати для обчислення сум числових рядів. Наприклад, застосовуючи рівність із вправи 1.41 до функції $f(x) = \frac{\pi^2 - 3x^2}{12}$, знайти суму числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Розв'язок. Використовуючи результат вправи 1.2.b, маємо

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

Звідси випливає, що

$$\frac{\pi^2 - 3x^2}{12} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos nx.$$

Застосувавши рівність Парсеваля, отримуємо

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\pi^2 - 3x^2}{12} \right)^2 dx = \frac{2}{144\pi} \int_0^{\pi} (\pi^4 - 6\pi^2 x^2 + 9x^4) dx \\ &= \frac{1}{72\pi} \left(\pi^5 - 6\pi^2 \frac{\pi^3}{3} + 9 \frac{\pi^5}{5} \right) = \frac{\pi^4}{90}. \end{aligned}$$

Відповідь. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

1.43. Показати, що $\{\sin nx\}_{n=2}^{\infty}$ є неповною ортогональною системою на $[0, \pi]$.

Розв’язок. Оскільки функція $f(x) = \sin x$ ортогональна на $[0, \pi]$ до всіх функцій $g_n = \sin nx$ ($n = 2, 3, \dots$), то її коефіцієнти Фур’є $c_n = 0$ ($n = 2, 3, \dots$). Тому ліва частина рівності Парсеваля (див. вправу 1.40.b) дорівнює $\sum_{n=2}^{\infty} c_n^2 \|g_n\|_2^2 = 0$. В то же час, права частина рівності Парсеваля дорівнює $\int_0^{\pi} f^2(x) dx = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} > 0$. Таким чином, для даної системи і неперервної функції f рівність Парсеваля не виконується, і, отже, ця система не є повною.

1.44.a. Довести, що довільна ортонормована на $[a, b]$ система функцій $\{g_n\}$ повна тоді і лише тоді, коли для будь-яких двох кусково неперервних на (a, b) функцій f і g виконується рівність $\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n = \int_a^b f(x)g(x) dx$ (де c_n і d_n – коефіцієнти Фур’є f і g відносно $\{g_n\}$).

Розв’язок. Відзначимо спочатку, що в означенні 1.43 повноти ортогональної системи замість неперервних функцій f можна брати кусково неперервні функції.

Нехай ортонормована система $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ повна на $[a, b]$, функції f, g кусково неперервні і c_n, d_n – їх коефіцієнти Фур’є, відповідно. Тоді

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=1}^n c_k g_k(x) \right) \left(g(x) - \sum_{j=1}^n d_j g_j(x) \right) dx \\ &= \int_a^b f(x)g(x) dx - \sum_{k=1}^n c_k d_k - \sum_{j=1}^n c_j d_j + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_k d_j \int_a^b g_k(x)g_j(x) dx \\ &= \int_a^b f(x)g(x) dx - \sum_{k=1}^n c_k d_k. \end{aligned} \tag{A.6}$$

Звідси та з нерівності Шварца (теорема 23) випливає

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx - \sum_{k=1}^n c_k d_k \right|^2 \leq \int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=1}^n c_k g_k(x) \right)^2 dx \cdot \int_a^b \left(g(x) - \sum_{j=1}^n d_j g_j(x) \right)^2 dx.$$

Оскільки система $\{g_n\}$ повна, то обидва інтеграли в правій частині прямують до нуля при $n \rightarrow \infty$. Тому прямує до нуля і ліва частина, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Навпаки, поклавши $g = f$ в рівності

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n = \int_a^b f(x)g(x) dx,$$

отримаємо, що виконується рівність Парсеваля, із якої випливає повнота системи $\{g_n\}$.

1.44.b. Узагальнити цей результат на випадок ортогональних систем функцій.

Розв'язок. У випадку довільної ортогональної системи $\{g_n\}$ (тобто $c_k = \frac{1}{\|g_k\|_2^2} \int_a^b f(x)g_k(x) dx$, $d_k = \frac{1}{\|g_k\|_2^2} \int_a^b g(x)g_k(x) dx$) аналог рівності (А.6) має такий вигляд

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=1}^n c_k g_k(x) \right) \left(g(x) - \sum_{j=1}^n d_j g_j(x) \right) dx \\ &= \int_a^b f(x)g(x) dx - \sum_{k=1}^n c_k d_k \|g_k\|_2^2 - \sum_{j=1}^n c_j d_j \|g_j\|_2^2 \\ &+ \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_k d_j \int_a^b g_k(x)g_j(x) dx = \int_a^b f(x)g(x) dx - \sum_{k=1}^n c_k d_k \|g_k\|_2^2. \end{aligned}$$

Повторюючи міркування із розв’язку попередньої вправи 1.44.а, отримуємо, що необхідною і достатньою умовою повноти системи $\{g_n\}$ є рівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n \|g_n\|_2^2 = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

1.45. Нехай $f_n(x) = \sum_{k=1}^n (\cos kx - \sin kx) + 1$. Обчислити $\int_{-\pi}^{\pi} f_n^2(x) dx$.

Розв’язок. Тригонометрична система повна, а отже для неї виконується рівність Парсеваля. Для тригонометричної системи рівність Парсеваля набуває такого вигляду

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx,$$

де a_k, b_k – коефіцієнти Фур’є функції f . Оскільки f_n – тригонометричний поліном, то він також є і рядом Фур’є, його коефіцієнти $a_0 = 2$, $a_k = 1$, $b_k = -1$ при $1 \leq k \leq n$, а всі інші a_k, b_k дорівнюють нулю. Тому

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_n^2(x) dx = \pi \left(2 + \sum_{k=1}^n (1 + 1) \right) = 2\pi(n + 1).$$

1.46. Нехай $f(x) = e^{-x}$ ($-\pi < x \leq \pi$). Обчислити $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, де a_n – косинус-коефіцієнти функції f .

Розв’язок. Покладемо $\varphi(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$. Функція φ парна і її коефіцієнти Фур’є $\beta_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$),

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (e^{-x} \cos nx + e^x \cos nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-x} \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^x \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-x} \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 e^{-x} \cos nx dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-x} \cos nx \, dx = a_n \quad (n = 0, 1, \dots).$$

В силу рівності Парсеваля,

$$\frac{1}{\pi} \int \varphi^2(x) \, dx = \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.$$

Таким чином, потрібна сума дорівнює

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \frac{1}{4} \int_0^{\pi} (e^{-x} + e^x)^2 \, dx &= \frac{1}{2\pi} \int (2 + e^{2x} + e^{-2x}) \, dx \\ &= 1 + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \left[e^{2x} \Big|_0^{\pi} - e^{-2x} \Big|_0^{\pi} \right] = 1 + \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{4\pi}. \end{aligned}$$

1.47. Нехай f кусково гладка функція на $[0, \pi]$. Припустимо, що f задовольняє принаймні одну із умов

$$f(0) = f(\pi) = 0 \quad \text{або} \quad \int_0^{\pi} f(x) \, dx = 0.$$

Довести нерівність Стеклова

$$\int_0^{\pi} f^2(x) \, dx \leq \int_0^{\pi} (f')^2(x) \, dx.$$

В яких випадках вона обертається в рівність?

Розв'язок. Нехай спочатку $f(0) = f(\pi) = 0$. Продовжимо функцію f на $[-\pi, 0)$ непарним чином, а потім 2π -періодично. Отримаємо непарну, неперервну, кусково гладку функцію на $\mathbb{R}$. Якщо a_n, b_n – коефіцієнти Фур'є функції f , то $a_n = 0$ ($n = 0, 1, \dots$). Похідна f' парна, кусково неперервна і коефіцієнти Фур'є похідної дорівнюють $a'_n = nb_n, b'_n = -na_n = 0$. Застосуємо рівність Парсеваля і врахуємо, що функції f^2 і $(f')^2$ парні:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a'_n}{n} \right)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n)^2 \leq \frac{(a'_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left((a'_n)^2 + (b'_n)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f'(x))^2 dx.
 \end{aligned}$$

Звідси випливає потрібна нерівність. Далі, оскільки $a'_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = f(\pi) - f(-\pi) = 0$, $b'_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$), то отримана нерівність обертається в рівність тоді і лише тоді, коли всі $b_n = 0$ ($n = 2, 3, \dots$). Це означає, що $f(x) = \alpha \sin x$, де довільне $\alpha \in \mathbb{R}$.

Припустимо тепер, що $\int_0^{\pi} f(x) dx = 0$. Тоді продовжимо функцію f на $[-\pi, 0)$ парним чином, а потім 2π -періодично. Отримаємо парну, неперервну, кусково гладку функцію на $\mathbb{R}$. Її коефіцієнти Фур’є $b_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$),

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = 0.$$

Похідна f' непарна, кусково неперервна і коефіцієнти Фур’є похідної дорівнюють $a'_n = nb_n = 0$, $b'_n = -na_n$. Застосуємо рівність Парсеваля і врахуємо, що функції f^2 і $(f')^2$ парні:

$$\begin{aligned}
 &\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b'_n}{n} \right)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (b'_n)^2 \leq \frac{(a'_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left((a'_n)^2 + (b'_n)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f'(x))^2 dx.
 \end{aligned}$$

Звідси випливає потрібна нерівність. Далі, оскільки f' непарна, то $a'_n = 0$ ($n = 0, 1, \dots$), і отримана нерівність обертається в рівність тоді і лише тоді, коли всі $a_n = 0$ ($n = 0, 2, 3, \dots$). Це означає, що $f(x) = \beta \cos x$, де довільне $\beta \in \mathbb{R}$.

1.48. Нехай f — 2π -періодична, неперервна, кусково гладка функція і нехай

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0.$$

Довести нерівність Віртінгера

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 dx.$$

Розв'язок. Як і в попередній вправі 1.47, маємо $a'_n = nb_n$, $b'_n = -na_n$ ($n = 1, 2, \dots$), а з умови вправи випливає, що $a_0 = 0$. Тому, в силу рівності Парсеваля,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{b'_n}{n} \right)^2 + \left(\frac{a'_n}{n} \right)^2 \right) \leq \frac{(a'_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left((a'_n)^2 + (b'_n)^2 \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 dx. \end{aligned}$$

Відзначимо, що з неперервності f випливає, що

$$a'_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = f(\pi) - f(-\pi) = 0.$$

Тому отримана нерівність обертається в рівність тоді і лише тоді, коли $a_n = b_n = 0$ при всіх $n = 2, 3, \dots$. Це означає, що $f(x) = \alpha \sin x + \beta \cos x$ при будь-яких $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Зауваження. Легко бачити, що без припущення неперервності f нерівність Віртінгера втрачає силу, наприклад, для функції $f(x) = \operatorname{sign} x$ ($|x| \leq \pi$).

1.49. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ невідсумовний в сенсі середніх арифметичних, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$ не існує.

Розв’язок. Оскільки гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ з додатними доданками розбігається, то його частинні суми $S_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$). Але тоді, в силу зауваження 27, середні арифметичні $\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$).

1.50. Довести, що для середніх Фейєра справедлива рівність

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) [A_k \cos kx + B_k \sin kx],$$

де A_k, B_k – коефіцієнти Фур’є функції f .

Розв’язок. Нехай $S_j(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^j (A_k \cos kx + B_k \sin kx)$ – частинні суми ряду Фур’є. Тоді середні Фейєра

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n S_j(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \left[\frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^j (A_k \cos kx + B_k \sin kx) \right] \\ &= \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^n (A_k \cos kx + B_k \sin kx) \frac{1}{n+1} \sum_{j=k}^n 1 \\ &= \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^n \frac{n-k+1}{n+1} (A_k \cos kx + B_k \sin kx) \\ &= \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) (A_k \cos kx + B_k \sin kx). \end{aligned}$$

1.51. Припустимо, що 2π -періодична функція f кусково неперервна. Довести, що з умови $m \leq f(x) \leq M$ випливає нерівність $m \leq \sigma_n(x) \leq M$ для всіх x .

Розв’язок. Оскільки ядро Фейєра $F_n \geq 0$ і $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = 1$, то з умови $f(x) \leq M$, в силу (1.35), маємо

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_n(t) dt \leq M \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = M.$$

Аналогічно отримуємо, що з умови $f(x) \geq m$ випливає нерівність $\sigma_n(x) \geq m$.

1.52. Довести, що для будь-якого m

$$\left| \sum_{n=1}^m \frac{\sin nx}{n} \right| \leq \frac{1}{2}\pi + 1.$$

Розв'язок. Відзначимо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ є рядом Фур'є функції $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ ($0 < x < 2\pi$); при цьому $|f(x)| \leq \frac{\pi}{2}$. Застосовуючи отриманий у вправі 1.50 вираз для середніх Фейєра σ_m , маємо

$$\sigma_m(x) = \sum_{n=1}^m \left(1 - \frac{n}{m+1}\right) \frac{\sin nx}{n} = \sum_{n=1}^m \frac{\sin nx}{n} - \frac{1}{m+1} \sum_{n=1}^m \sin nx.$$

Використовуючи тепер вправу 1.51, маємо

$$\left| \sum_{n=1}^m \frac{\sin nx}{n} \right| \leq |\sigma_m(x)| + \left| \frac{1}{m+1} \sum_{n=1}^m \sin nx \right| \leq \frac{\pi}{2} + 1.$$

1.53. Нехай $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ – числовий ряд, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ – його частинні суми,

$$\sigma_n = \frac{S_0 + \dots + S_n}{n+1}$$

– середні арифметичні.

1.53.а. Показати, що

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) u_k.$$

Розв'язок. Змінюючи порядок підсумовування, отримуємо

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n S_i = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i u_k \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \sum_{i=k}^n 1 = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k (n+1-k) \\ &= \sum_{k=0}^n u_k \frac{n+1-k}{n+1} = \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) u_k. \end{aligned}$$

1.53.b. Показати, що $S_n = (n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1}$.

Розв’язок. Із вправи 1.53.a маємо

$$(n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1} = \sum_{k=0}^n S_k - \sum_{k=0}^{n-1} S_k = S_n.$$

1.53.c. Застосовуючи рівність із вправи 1.53.b, показати, що якщо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ підсумовний методом середніх арифметичних, то

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow 0 \quad \text{і} \quad \frac{u_n}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Розв’язок. Із вправи 1.53.b отримуємо

$$\frac{S_n}{n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sigma_n - \sigma_{n-1}.$$

Тому, якщо існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n \equiv \sigma$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = 1 \cdot \sigma - \sigma = 0$.

Від рівності $S_n = (n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1}$ віднімемо рівність $S_{n-1} = n\sigma_{n-1} - (n-1)\sigma_{n-2}$ і отримаємо

$$u_n = S_n - S_{n-1} = (n+1)\sigma_n - 2n\sigma_{n-1} + (n-1)\sigma_{n-2},$$

тобто

$$\frac{u_n}{n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sigma_n - 2\sigma_{n-1} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sigma_{n-2}.$$

Тому, якщо існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n \equiv \sigma$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = 1 \cdot \sigma - 2\sigma + 1 \cdot \sigma = 0$.

1.54. Показати, що

$$F_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos kt$$

(F_n – ядро Фейєра порядку n).

Розв’язок. В попередній вправі 1.53.a покладемо $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_k = \cos kx$ ($k = 1, 2, \dots$) і отримаємо потрібну рівність.

1.55.a. Показати, що для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ його середні арифметичні дорівнюють

$$\sigma_n(x) = -\frac{1}{2}x + \int_0^x F_n(t) dt.$$

Розв'язок. Представимо

$$\begin{aligned} F_n(t) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^k \cos it \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k \cos it. \end{aligned}$$

Інтегруємо від 0 до x :

$$\begin{aligned} \int_0^x F_n(t) dt &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k \int_0^x \cos it dt \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k \frac{\sin ix}{i}. \end{aligned}$$

Звідси отримуємо

$$-\frac{1}{2}x + \int_0^x F_n(t) dt = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(x) = \sigma_n(x),$$

де $S_0(x) = 0$, $S_k(x) = \sum_{i=1}^k \frac{\sin ix}{i}$ – частинні суми даного ряду.

1.55.b. Показати, що $\sigma_n(x) < \frac{\pi-x}{2}$ для всіх $0 < x < \pi$.

Розв'язок. Для доведення нерівності $\sigma_n(x) < \frac{\pi-x}{2}$ достатньо показати, що $\int_0^x F_n(t) dt < \frac{\pi}{2}$ ($0 < x < \pi$). Остання нерівність випливає із наступних властивостей ядра Фейєра: $F_n(t) \geq 0$, $\int_0^\pi F_n(t) dt = \frac{\pi}{2}$ і, оскільки ядро Фейєра є тригонометричним поліномом, то інтеграл від нього по будь-якому відрізку додатній.

1.56. Показати, що ряд $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ підсумовний до нуля в кожній точці $x \in [-\pi, \pi]$, виключаючи $x = 0$. Чи є він рядом Фур'є? Чи збігається цей ряд в деякій точці?

Розв'язок. Скористаємось доведеною у вправі 1.55.a рівністю

$$F_n(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k \cos it.$$

Якщо $t \neq 0$, $|t| \leq \pi$, то, як випливає із властивостей ядра Фейєра, $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t) = 0$. Це означає, що середні арифметичні частинних сум даного ряду прямують до нуля при $n \rightarrow \infty$. Якщо ж $t = 0$, то частинні суми даного ряду прямують до $+\infty$, а отже і їх середні арифметичні також прямують до $+\infty$.

Даний ряд не є рядом Фур’є, оскільки його коефіцієнти не прямують до нуля.

Цей ряд розбігається в кожній точці $x \neq 2k\pi$. Щоб це довести, достатньо показати, що його доданки не прямують до нуля. Доведемо це.

Якщо припустити, що існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos nx \equiv \alpha$, то, переходячи до границі при $n \rightarrow \infty$ в рівності

$$\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2 \cos nx \cos x,$$

отримаємо $\alpha + \alpha = 2\alpha \cos x$. Оскільки $\cos x \neq 1$, то звідси випливає, що $\alpha = 0$. Але тоді прийдемо до протиріччя, переходячи до границі в рівності $\cos^2 nx = \frac{1}{2}(1 + \cos 2nx)$. Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos nx$ при $x \neq 2k\pi$ не існує.

1.57. Показати, що для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ його середні арифметичні дорівнюють

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{\sin(n+2)x - \sin x}{4(n+1) \sin^2 \frac{x}{2}}$$

і $\sigma_n(x) \rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ для будь-якого $x \in [-\pi, \pi]$, $x \neq 0$.

Розв’язок.

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=1}^k \sin ix = \frac{1}{2(n+1) \sin \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=1}^k 2 \sin \frac{x}{2} \sin ix \\ &= \frac{1}{2(n+1) \sin \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=1}^k \left(\cos \left(i - \frac{1}{2} \right) x - \cos \left(i + \frac{1}{2} \right) x \right) \\ &= \frac{1}{2(n+1) \sin \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n+1} \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) x \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{4(n+1) \sin^2 \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n+1} 2 \sin \frac{x}{2} \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{4(n+1) \sin^2 \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n+1} (\sin(k+1)x - \sin kx) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{\sin(n+2)x - \sin x}{4(n+1) \sin^2 \frac{x}{2}}.
\end{aligned}$$

З цієї рівності відразу випливає, що при $0 < |x| \leq \pi$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}.$$

1.58. Довести, що кожна із систем

$$\left\{ \frac{1}{2}, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots \right\} \quad \text{і} \quad \{ \sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots \}$$

ортogonalна і повна на $[0, \pi]$.

Розв'язок. Ортогональність кожної системи легко перевіряється безпосереднім обчисленням. Для доведення повноти скористаємось повнотою тригонометричної системи на $[-\pi, \pi]$. Задамо $f \in \mathcal{C}[0, \pi]$ і продовжимо її на $[-\pi, 0]$ парним чином, а потім 2π -періодично на всю числову вісь. Тоді ряд Фур'є продовженої функції складається лише із косинусів і, в силу повноти тригонометричної системи, збігається до функції f за нормою на $[-\pi, \pi]$, а отже і на $[0, \pi]$. Тим самим встановлена повнота системи косинусів.

Для доведення повноти системи синусів неперервну на $[0, \pi]$ функцію f замінимо на $[0, \varepsilon]$ і на $[\pi - \varepsilon, \pi]$ так, щоб отримана функція була неперервною, а на вказаних відрізках лінійною і в точках 0 і π набувала нульових значень. Отриману функцію продовжимо на $[-\pi, 0]$ непарним чином, а потім 2π -періодично. Далі очевидно.

1.59. Нехай f — 2π -періодична і $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$. Припустимо, що $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається.

Вказівка. Використати середні арифметичні $\sigma_n(x)$. Маємо

$$\begin{aligned}
M \geq \sigma_n(0) &= \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1} \right) a_k + \frac{a_0}{2} \geq \\
&\geq \sum_{k=1}^N \left(1 - \frac{k}{n+1} \right) a_k + \frac{a_0}{2} \quad (n \geq N).
\end{aligned}$$

Розв’язок. Оскільки f обмежена, то $|f| \leq M$. Тоді для середніх Фейєра маємо наступну оцінку

$$|\sigma_n(x)| = \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_n(t) dt \right| \leq M \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = M.$$

Зокрема, при $x = 0$ для $n \geq N$ згідно з вказівкою, маємо

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) a_k \leq M \quad (n \geq N).$$

Спрямувавши в цій нерівності $n \rightarrow \infty$, отримуємо

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \leq M,$$

тобто частинні суми ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ обмежені. Оскільки доданки $a_n \geq 0$, то даний ряд збігається.

2. Вправи до розділу ”Перетворення Фур’є”

2.1. Обчислити перетворення Фур’є наступних функцій.

2.1.a.
$$\widehat{f}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Розв’язок. Оскільки функція f парна, то $\widehat{f}(0) = 2 \int_0^{\infty} f(x) dx = 2$,

$$\widehat{f}(\xi) = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos 2\pi\xi x dx = 2 \int_0^1 \cos 2\pi\xi x dx = \frac{2}{2\pi\xi} \sin 2\pi\xi x \Big|_0^1 = \frac{\sin 2\pi\xi}{\pi\xi}.$$

2.1.b.
$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ -1, & -1 < x < 0, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Розв’язок. Оскільки функція f непарна, то $\widehat{f}(0) = 0$,

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= -2i \int_0^{\infty} f(x) \sin 2\pi\xi x dx = -2i \int_0^1 \sin 2\pi\xi x dx = \\ &= \frac{2i}{2\pi\xi} \cos 2\pi\xi x \Big|_0^1 = -i \frac{1 - \cos 2\pi\xi}{\pi\xi} = -2i \frac{\sin^2 \pi\xi}{\pi\xi}. \end{aligned}$$

2.1.c.
$$f(x) = e^{-|x|}.$$

Розв’язок. Оскільки f парна, то $\widehat{f}(0) = 2 \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -2e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 2$,

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{-\infty}^0 e^{(1-2\pi i \xi)x} dx + \int_0^{\infty} e^{-(1+2\pi i \xi)x} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1-2\pi i\xi} e^{(1-2\pi i\xi)x} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{1+2\pi i\xi} e^{-(1+2\pi i\xi)x} \Big|_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{1-2\pi i\xi} + \frac{1}{1+2\pi i\xi} = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}.
\end{aligned}$$

2.1.d. $f(x) = e^{-|x|} \cos 2\pi x.$

Розв'язок. Оскільки f парна, то

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= 2 \int_0^{\infty} e^{-x} \cos 2\pi x \cos 2\pi \xi x \, dx \\
&= \int_0^{\infty} e^{-x} \cos 2\pi(\xi+1)x \, dx + \int_0^{\infty} e^{-x} \cos 2\pi(\xi-1)x \, dx.
\end{aligned}$$

Скориставшись рівністю

$$\int_0^{\infty} e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx = -\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \quad (\alpha < 0, \beta \in \mathbb{R}),$$

отримуємо

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{1+4\pi^2(\xi+1)^2} + \frac{1}{1+4\pi^2(\xi-1)^2}.$$

2.1.e. $f(x) = e^{-|x|} + i\Pi(x).$

Розв'язок. Користуючись лінійністю перетворення Фур'є і результатами прикладу 2.2 та вправи 2.1.c, отримуємо

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2} + i\frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}, & \xi \neq 0, \\ 2+i, & \xi = 0. \end{cases}$$

2.1.f. $f(x) = \Lambda(x) + ie^{-3|x|} \cos 2\pi x.$

Розв'язок. Як і у вправі 2.1.d, знайдемо перетворення Фур'є функції $\varphi(x) = e^{-3|x|} \cos 2\pi x$:

$$\widehat{\varphi}(\xi) = 2 \int_0^{\infty} e^{-3x} \cos 2\pi x \cos 2\pi \xi x \, dx = \int_0^{\infty} e^{-3x} \cos 2\pi(\xi+1)x \, dx$$

$$+ \int_0^{\infty} e^{-3x} \cos 2\pi(\xi - 1)x \, dx = \frac{3}{9 + 4\pi^2(\xi + 1)^2} + \frac{3}{9 + 4\pi^2(\xi - 1)^2}.$$

Користуючись лінійністю перетворення Фур’є і результатами прикладу 2.3, отримуємо

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{\Lambda}(\xi) + i\widehat{\varphi}(\xi) = \begin{cases} \frac{\sin^2 \pi \xi}{\pi^2 \xi^2} + 3i \left(\frac{1}{9 + 4\pi^2(\xi + 1)^2} + \frac{1}{9 + 4\pi^2(\xi - 1)^2} \right), & \xi \neq 0, \\ 1 + \frac{6i}{9 + 4\pi^2}, & \xi = 0. \end{cases}$$

2.2. Косинус-перетворення.

2.2.a. Довести, що якщо функція $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ парна, то

$$\widehat{f}(u) = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos 2\pi u x \, dx.$$

Розв’язок. Див. теорему 2.1.

2.2.b. Для функції $f \in \mathcal{A}(0, \infty)$ її косинус-перетворення $\widehat{f}_C$ означається рівністю $\widehat{f}_C(u) = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos 2\pi u x \, dx$. Довести, що косинус-перетворення функції f дорівнює перетворенню Фур’є парного продовження f .

Розв’язок. Якщо функція f парна, то потрібна рівність випливає із попередньої вправи 2.2.a.

2.3. Обчислити косинус-перетворення наступних функцій.

2.3.a. $f(x) = e^{-x}$.

Розв’язок. Згідно з вправами 2.1.c і 2.2.b, $\widehat{f}_C(u) = \frac{2}{1 + 4\pi^2 u^2}$.

2.3.b.
$$h(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Розв’язок.

$$\begin{aligned} \widehat{h}_C(u) &= 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos 2\pi u x \, dx = 2 \int_0^2 \cos 2\pi u x \, dx = 2 \frac{1}{2\pi u} \sin 2\pi u x \Big|_0^2 \\ &= \frac{\sin 4\pi u}{\pi u} \quad (u \neq 0), \quad \widehat{h}_C(0) = 2 \int_0^2 1 \, dx = 4. \end{aligned}$$

2.3.с.
$$k(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & 0 < x < 1/2, \\ 0, & x > 1/2. \end{cases}$$

Розв'язок.

$$\begin{aligned} \widehat{k}_C(u) &= 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos 2\pi u x \, dx = 2 \int_0^{1/2} (1 - 2x) \cos 2\pi u x \, dx \\ &= 2 \int_0^{1/2} \cos 2\pi u x \, dx - 2 \int_0^{1/2} x \cos 2\pi u x \, dx \\ &= 2 \frac{1}{2\pi u} \sin 2\pi u x \Big|_0^{1/2} - 4 \left[\begin{array}{l} U = x \quad dU = dx \\ dV = \cos 2\pi u x \, dx \quad V = \frac{1}{2\pi u} \sin 2\pi u x \end{array} \right] \Big|_0^{1/2} \\ &= \frac{1}{\pi u} \sin \pi u - 4 \frac{x}{2\pi u} \sin 2\pi u x \Big|_0^{1/2} + 4 \frac{1}{2\pi u} \int_0^{1/2} \sin 2\pi u x \, dx \\ &= \frac{\sin \pi u}{\pi u} - \frac{\sin \pi u}{\pi u} - \frac{2}{\pi u} \frac{1}{2\pi u} \cos 2\pi u x \Big|_0^{1/2} = \frac{1}{\pi^2 u^2} (1 - \cos \pi u) \\ &= 2 \frac{\sin^2 \frac{\pi u}{2}}{\pi^2 u^2} \quad (u \neq 0), \quad \widehat{k}_C(0) = 2 \int_0^{1/2} (1 - 2x) \, dx = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2.4. Обчислити перетворення Фур'є наступних функцій.

2.4.а.
$$f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

Розв'язок. Оскільки функція f парна, то

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= -2i \int_0^{\infty} f(x) \sin 2\pi \xi x \, dx = -2i \int_0^a x \sin 2\pi \xi x \, dx \\ &= -2i \left[-\frac{x}{2\pi \xi} \cos 2\pi \xi x \Big|_0^a + \frac{1}{2\pi \xi} \int_0^a \cos 2\pi \xi x \, dx \right] \\ &= \frac{i}{\pi \xi} \left(a \cos 2\pi \xi a - \frac{\sin 2\pi \xi a}{2\pi \xi} \right) \quad (\xi \neq 0), \quad \widehat{f}(0) = 0. \end{aligned}$$

2.4.b.
$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leq \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$$

Розв’язок. Оскільки функція f парна, то

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos 2\pi\xi x \, dx = 2 \int_0^{\pi} \cos x \cos 2\pi\xi x \, dx \\ &= \int_0^{\pi} \cos(1 + 2\pi\xi)x \, dx + \int_0^{\pi} \cos(1 - 2\pi\xi)x \, dx \\ &= \frac{1}{1 + 2\pi\xi} \sin(1 + 2\pi\xi)x \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{1 - 2\pi\xi} \sin(1 - 2\pi\xi)x \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{-1}{1 + 2\pi\xi} \sin 2\pi^2\xi + \frac{1}{1 - 2\pi\xi} \sin 2\pi^2\xi \\ &= \sin 2\pi^2\xi \left(\frac{1}{1 - 2\pi\xi} - \frac{1}{1 + 2\pi\xi} \right) = \frac{4\pi\xi}{1 - 4\pi^2\xi^2} \sin 2\pi^2\xi \quad \left(\xi \neq \pm \frac{1}{2\pi} \right), \\ \widehat{f}\left(\pm \frac{1}{2\pi}\right) &= 2 \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx = 2 \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \pi. \end{aligned}$$

2.4.c.
$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leq \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$$

Розв’язок. Оскільки функція f непарна, то

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= -2i \int_0^{\infty} f(x) \sin 2\pi\xi x \, dx = -2i \int_0^{\pi} \sin x \sin 2\pi\xi x \, dx \\ &= i \int_0^{\pi} \cos(2\pi\xi + 1)x \, dx - i \int_0^{\pi} \cos(2\pi\xi - 1)x \, dx \\ &= \frac{i}{2\pi\xi + 1} \sin(2\pi\xi + 1)x \Big|_0^{\pi} - \frac{i}{2\pi\xi - 1} \sin(2\pi\xi - 1)x \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{-i}{2\pi\xi + 1} \sin 2\pi^2\xi + \frac{i}{2\pi\xi - 1} \sin 2\pi^2\xi = i \sin 2\pi^2\xi \left(\frac{1}{2\pi\xi - 1} - \frac{1}{2\pi\xi + 1} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{-2i}{1-4\pi^2\xi^2} \sin 2\pi^2\xi \quad \left(\xi \neq \pm \frac{1}{2\pi} \right),$$

$$\widehat{f}\left(\pm \frac{1}{2\pi}\right) = \mp 2i \int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \mp 2i \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx = \mp \pi i.$$

2.4.d. $f(x) = |x|e^{-|x|}.$

Розв'язок.

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-|x|}e^{-2\pi i\xi x} \, dx = - \int_{-\infty}^0 x e^{(1-2\pi i\xi)x} \, dx + \int_0^{\infty} x e^{-(1+2\pi i\xi)x} \, dx \\ &= - \left[\begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = e^{(1-2\pi i\xi)x} \, dx \quad v = \frac{1}{1-2\pi i\xi} e^{(1-2\pi i\xi)x} \end{array} \right] \Bigg|_{-\infty}^0 \\ &\quad + \left[\begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = e^{-(1+2\pi i\xi)x} \, dx \quad v = \frac{-1}{1+2\pi i\xi} e^{-(1+2\pi i\xi)x} \end{array} \right] \Bigg|_0^{\infty} \\ &= \frac{-x}{1-2\pi i\xi} e^{(1-2\pi i\xi)x} \Bigg|_{-\infty}^0 + \frac{1}{1-2\pi i\xi} \int_{-\infty}^0 e^{(1-2\pi i\xi)x} \, dx \\ &\quad + \frac{-x}{1+2\pi i\xi} e^{-(1+2\pi i\xi)x} \Bigg|_0^{\infty} + \frac{1}{1+2\pi i\xi} \int_0^{\infty} e^{-(1+2\pi i\xi)x} \, dx \\ &= \frac{1}{(1-2\pi i\xi)^2} e^{(1-2\pi i\xi)x} \Bigg|_{-\infty}^0 - \frac{1}{(1+2\pi i\xi)^2} e^{-(1+2\pi i\xi)x} \Bigg|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{(1-2\pi i\xi)^2} + \frac{1}{(1+2\pi i\xi)^2} = 2 \cdot \frac{1-4\pi^2\xi^2}{(1+4\pi^2\xi^2)^2}. \end{aligned}$$

2.4.e. $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ -e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$

Розв'язок.

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^0 e^x e^{-2\pi i\xi x} \, dx - \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-2\pi i\xi x} \, dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^0 e^{(1-2\pi i\xi)x} dx - \int_0^{\infty} e^{-(1+2\pi i\xi)x} dx \\
 &= \frac{1}{1-2\pi i\xi} e^{(1-2\pi i\xi)x} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{1}{1+2\pi i\xi} e^{-(1+2\pi i\xi)x} \Big|_0^{\infty} \\
 &= \frac{1}{1-2\pi i\xi} - \frac{1}{1+2\pi i\xi} = \frac{4\pi i\xi}{1+4\pi^2\xi^2}.
 \end{aligned}$$

2.5. Обчислити перетворення Фур’є наступних функцій.

2.5.a.
$$f(x) = \Pi\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Розв’язок. Застосовуючи теорему 2.10 (ii) і приклад 2.2 до функції $\varphi_1(x) = \Pi\left(x - \frac{1}{2}\right)$, отримуємо

$$\begin{aligned}
 \widehat{\varphi}_1(\xi) &= e^{-\pi i\xi} \frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi} = \frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi} (\cos \pi\xi - i \sin \pi\xi) \\
 &= \frac{1}{2\pi\xi} (\sin 2\pi\xi + i \cos 2\pi\xi - i) = \frac{1}{2\pi i\xi} (1 - e^{-2\pi i\xi}) \quad (\xi \neq 0), \quad \widehat{\varphi}_1(0) = 1.
 \end{aligned}$$

2.5.b.
$$f(x) = \Pi\left(\frac{x - \frac{1}{2}a}{a}\right) \quad (a > 0).$$

Розв’язок. Покладемо $\varphi_2(x) = \Pi\left(\frac{x - \frac{1}{2}a}{a}\right) = \Pi\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right) = \varphi_1\left(\frac{x}{a}\right)$. Застосовуючи теорему 2.10 (iii) і вправу 2.5.a, отримуємо

$$\widehat{\varphi}_2(\xi) = a\widehat{\varphi}_1(a\xi) = \frac{1}{2\pi i\xi} (1 - e^{-2\pi i a\xi}) \quad (\xi \neq 0), \quad \widehat{\varphi}_2(0) = a.$$

2.5.c.
$$f(x) = \Pi(x) \operatorname{sign} x.$$

Розв’язок. Функція $\varphi_3(x) = \Pi(x) \operatorname{sign} x$ непарна і тому $\widehat{\varphi}_3(0) = 0$,

$$\widehat{\varphi}_3(\xi) = -2i \int_0^{1/2} \sin 2\pi\xi x dx = 2i \frac{1}{2\pi\xi} \cos 2\pi\xi x \Big|_0^{1/2} = \frac{i}{\pi\xi} (\cos \pi\xi - 1) \quad (\xi \neq 0).$$

2.5.d. $f(x) = e^{-c|x-b|} \quad (c > 0, b \in \mathbb{R}).$

Розв'язок. Покладемо $\psi_1(x) = e^{-|x|}$, $\psi_2(x) = e^{-|cx|} = \psi_1(cx)$, $\psi_3(x) = e^{-c|x-b|} = \psi_2(x-b)$. Застосовуючи вправу 2.1.c і теорему 2.10 (ii), (iii), отримуємо

$$\begin{aligned}\psi_1(x) = e^{-|x|} &\supset \widehat{\psi}_1(\xi) = \frac{2}{1 + 4\pi^2\xi^2}; \\ \psi_2(x) = e^{-|cx|} = \psi_1(cx) &\supset \widehat{\psi}_2 = \frac{1}{c} \widehat{\psi}_1\left(\frac{\xi}{c}\right) = \frac{2}{c} \frac{1}{1 + 4\pi^2\frac{\xi^2}{c^2}} = \frac{2c}{c^2 + 4\pi^2\xi^2}; \\ \psi_3(x) = e^{-c|x-b|} = \psi_2(x-b) &\supset \widehat{\psi}_3(\xi) = e^{-2\pi ib\xi} \widehat{\psi}_2(\xi) = \frac{2ce^{-2\pi ib\xi}}{c^2 + 4\pi^2\xi^2}.\end{aligned}$$

2.5.e. $f(x) = e^{-(x-b)^2/c} \quad (c > 0, b \in \mathbb{R}).$

Розв'язок. Позначимо гауссіан через $G(x) = e^{-\pi x^2}$. Тоді

$$f(x) = \exp\left(-\pi\left(\frac{x-b}{\sqrt{\pi c}}\right)^2\right) = G\left(\frac{x-b}{\sqrt{\pi c}}\right) = (\tau_b(\delta_{1/(\sqrt{\pi c})}G))(x),$$

де операції τ_h і δ_λ означені перед формулюванням теореми 2.10. Оскільки $\widehat{G}(\xi) = G(\xi)$ (див. теорему 2.9), то, застосовуючи теорему 2.10 (ii), (iii), отримуємо

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= (\tau_b(\delta_{1/(\sqrt{\pi c})}G))^\wedge(\xi) = \sqrt{\pi c} e^{-2\pi ib\xi} \widehat{G}(\sqrt{\pi c}\xi) \\ &= \sqrt{\pi c} e^{-2\pi ib\xi} e^{-\pi(\sqrt{\pi c}\xi)^2} = \sqrt{\pi c} e^{-\pi(\pi c^2\xi^2 + 2ib\xi)}.\end{aligned}$$

2.5.f. $f(x) = e^{-c|x|} \sin bx \quad (c > 0, b \in \mathbb{R}).$

Розв'язок. Оскільки функція непарна, то

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= -2i \int_0^\infty f(x) \sin 2\pi\xi x \, dx = -2i \int_0^\infty e^{-cx} \sin bx \sin 2\pi\xi x \, dx \\ &= -i \int_0^\infty e^{-cx} \cos(2\pi\xi - b)x \, dx + i \int_0^\infty e^{-cx} \cos(2\pi\xi + b)x \, dx.\end{aligned}$$

Обчислимо

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} e^{-cx} \cos \gamma x \, dx &= \left[\begin{array}{ll} u = e^{-cx} & du = -ce^{-cx} \, dx \\ dv = \cos \gamma x \, dx & v = \frac{1}{\gamma} \sin \gamma x \end{array} \right] \Big|_0^{\infty} \\
 &= \frac{1}{\gamma} e^{-cx} \sin \gamma x \Big|_0^{\infty} + \frac{c}{\gamma} \int_0^{\infty} e^{-cx} \sin \gamma x \, dx \\
 &= \frac{c}{\gamma} \left[\begin{array}{ll} u = e^{-cx} & du = -ce^{-cx} \, dx \\ dv = \sin \gamma x \, dx & v = -\frac{1}{\gamma} \cos \gamma x \end{array} \right] \Big|_0^{\infty} \\
 &= \frac{c}{\gamma} \left[-\frac{1}{\gamma} e^{-cx} \cos \gamma x \Big|_0^{\infty} - \frac{c}{\gamma} \int_0^{\infty} e^{-cx} \cos \gamma x \, dx \right] = \frac{c}{\gamma^2} - \frac{c^2}{\gamma^2} \int_0^{\infty} e^{-cx} \cos \gamma x \, dx,
 \end{aligned}$$

звідки випливає, що

$$\int_0^{\infty} e^{-cx} \cos \gamma x \, dx = \frac{c}{c^2 + \gamma^2}.$$

Легко бачити, що ця рівність залишається справедливою і при $\gamma = 0$.

Застосовуючи отриману рівність, знаходимо

$$\begin{aligned}
 \widehat{f}(\xi) &= i \left[\frac{c}{c^2 + (2\pi\xi + b)^2} - \frac{c}{c^2 + (2\pi\xi - b)^2} \right] \\
 &= -\frac{8\pi b c i \xi}{(c^2 + (2\pi\xi + b)^2)(c^2 + (2\pi\xi - b)^2)}.
 \end{aligned}$$

2.6. Довести, що $\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin cx \, dx = \frac{c}{a^2 + c^2}$ і $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos cx \, dx = \frac{a}{a^2 + c^2}$, де $a > 0$, $c \in \mathbb{R}$.

Розв’язок. Обчислимо

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin cx \, dx &= \left[\begin{array}{ll} u = e^{-ax} & du = -ae^{-ax} \, dx \\ dv = \sin cx \, dx & v = -\frac{1}{c} \cos cx \end{array} \right] \Big|_0^{\infty} \\
 &= -\frac{1}{c} e^{-ax} \cos cx \Big|_0^{\infty} - \frac{a}{c} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos cx \, dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{c} - \frac{a}{c} \left[\begin{array}{l} u = e^{-ax} \quad du = -ae^{-ax} dx \\ dv = \cos cx \, dx \quad v = \frac{1}{c} \sin cx \end{array} \right] \Big|_0^\infty \\
&= \frac{1}{c} - \frac{a}{c} \left[\frac{1}{c} e^{-ax} \sin cx \Big|_0^\infty + \frac{a}{c} \int_0^\infty e^{-ax} \sin cx \, dx \right] \\
&= \frac{1}{c} - \frac{a^2}{c^2} \int_0^\infty e^{-cx} \cos \gamma x \, dx,
\end{aligned}$$

звідки випливає, що

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin cx \, dx = \frac{c}{a^2 + c^2}.$$

Легко бачити, що ця рівність залишається справедливою і при $c = 0$.

Інша рівність цієї вправи доведена при розв'язанні попередньої вправи 2.5.f.

2.7. Використовуючи властивості перетворення Фур'є, обчислити перетворення Фур'є наступних функцій.

2.7.a.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \frac{1}{2}c, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2}c. \end{cases}$$

Розв'язок. Оскільки $f(x) = \Pi\left(\frac{x}{c}\right)$ і $\widehat{\Pi}(\xi) = \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi}$ ($\xi \neq 0$), $\widehat{\Pi}(0) = 1$ (див. (2.4)), то, згідно з теоремою 2.10 (iii),

$$\widehat{f}(\xi) = c\widehat{\Pi}(c\xi) = \frac{\sin \pi c\xi}{\pi \xi} \quad (\xi \neq 0), \quad \widehat{f}(0) = c.$$

2.7.b.

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{c}, & |x| < \frac{1}{2}c, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2}c. \end{cases}$$

Розв'язок. Будемо застосовувати теорему 2.10 (iv). Для цього позначимо через f_1 функцію із попередньої вправи 2.7.a. Тоді потрібно обчислити перетворення Фур'є функції $f(x) = f_1(x) \cos 2\pi \eta x$ при $\eta = \frac{1}{2c}$. Згідно

з теоремою 2.10 (iv), використовуючи результат вправи 2.7.а, при $|\xi| \neq \frac{c}{2}$ маємо

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \frac{1}{2} \left[\widehat{f}_1(\xi - \eta) + \widehat{f}_1(\xi + \eta) \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \pi c \left(\xi - \frac{1}{2c} \right)}{\pi \left(\xi - \frac{1}{2c} \right)} + \frac{\sin \pi c \left(\xi + \frac{1}{2c} \right)}{\pi \left(\xi + \frac{1}{2c} \right)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{2c}{\pi} \left[\frac{\sin \left(\pi c \xi - \frac{\pi}{2} \right)}{2c\xi - 1} + \frac{\sin \left(\pi c \xi + \frac{\pi}{2} \right)}{2c\xi + 1} \right] \\ &= \frac{c}{\pi} \frac{1}{4c^2\xi^2 - 1} [(2c\xi + 1)(-\cos \pi c\xi) + (2c\xi - 1) \cos \pi c\xi] = \frac{2c}{\pi} \frac{\cos \pi c\xi}{1 - 4c^2\xi^2}.\end{aligned}$$

Значення $\widehat{f}(\pm \frac{c}{2})$ обчислимо, користуючись неперервністю перетворення Фур’є:

$$\widehat{f}\left(\pm \frac{c}{2}\right) = \lim_{\xi \rightarrow \pm \frac{c}{2}} \widehat{f}(\xi) = \frac{2c}{\pi} \lim_{\xi \rightarrow \pm \frac{c}{2}} \frac{\cos \pi c\xi}{1 - 4c^2\xi^2} = \frac{c}{2}.$$

Безпосереднє обчислення. Оскільки функція f парна, то

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos 2\pi \xi x \, dx = 2 \int_0^{c/2} \cos \frac{\pi x}{c} \cos 2\pi \xi x \, dx \\ &= \int_0^{c/2} \cos \left(2\xi + \frac{1}{c} \right) \pi x \, dx + \int_0^{c/2} \cos \left(2\xi - \frac{1}{c} \right) \pi x \, dx \\ &= \frac{1}{\pi \left(2\xi + \frac{1}{c} \right)} \sin \left(2\xi + \frac{1}{c} \right) \pi x \Big|_0^{c/2} + \frac{1}{\pi \left(2\xi - \frac{1}{c} \right)} \sin \left(2\xi - \frac{1}{c} \right) \pi x \Big|_0^{c/2} \\ &= \frac{1}{\pi \left(2\xi + \frac{1}{c} \right)} \sin \left(\pi c\xi + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{\pi \left(2\xi - \frac{1}{c} \right)} \sin \left(\pi c\xi - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \cos \pi c\xi \left(\frac{1}{\pi \left(2\xi + \frac{1}{c} \right)} - \frac{1}{\pi \left(2\xi - \frac{1}{c} \right)} \right) = \cos \pi c\xi \cdot \frac{1}{\pi} \frac{-\frac{2}{c}}{4\xi^2 - \frac{1}{c^2}} = \frac{2c}{\pi} \frac{\cos \pi c\xi}{1 - 4c^2\xi^2}, \\ &\quad \widehat{f}\left(\pm \frac{1}{2}c\right) = \frac{c}{2}.\end{aligned}$$

$$2.7.c. \quad f(x) = \begin{cases} \cos^2 \frac{\pi x}{c}, & |x| < \frac{1}{2}c, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2}c. \end{cases}$$

Розв'язок. Як і при розв'язанні попередньої вправи 2.7.b, якщо через f_2 позначимо функцію з 2.7.b, то потрібно обчислити перетворення Фур'є функції $f(x) = f_2(x) \cos 2\pi\eta x$ при $\eta = \frac{1}{2c}$. Згідно з теоремою 2.10, маємо

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \frac{1}{2} \left[\widehat{f}_2(\xi - \eta) + \widehat{f}_2(\xi + \eta) \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{2c}{\pi} \left[\frac{\cos \pi c \left(\xi - \frac{1}{2c} \right)}{1 - 4c^2 \left(\xi - \frac{1}{2c} \right)^2} + \frac{\cos \pi c \left(\xi + \frac{1}{2c} \right)}{1 - 4c^2 \left(\xi + \frac{1}{2c} \right)^2} \right] \\ &= \frac{c}{\pi} \left[\frac{\cos \left(\pi c \xi - \frac{\pi}{2} \right)}{1 - 4c^2 \left(\xi^2 - \frac{\xi}{c} + \frac{1}{4c^2} \right)} + \frac{\cos \left(\pi c \xi + \frac{\pi}{2} \right)}{1 - 4c^2 \left(\xi^2 + \frac{\xi}{c} + \frac{1}{4c^2} \right)} \right] \\ &= \frac{c}{\pi} \left[\frac{\sin \pi c \xi}{1 - 4c^2 \xi^2 + 4c\xi - 1} - \frac{\sin \pi c \xi}{1 - 4c^2 \xi^2 - 4c\xi - 1} \right] \\ &= \frac{c}{\pi} \frac{1}{4c\xi} \sin \pi c \xi \left[\frac{1}{1 - c\xi} + \frac{1}{1 + c\xi} \right] = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \pi c \xi}{\xi (1 - c^2 \xi^2)} \quad \left(\xi \neq 0, \pm \frac{1}{c} \right). \end{aligned}$$

Значення $\widehat{f}(0)$ і $\widehat{f}(\pm \frac{1}{c})$ обчислимо, користуючись неперервністю перетворення Фур'є:

$$\widehat{f}(0) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \widehat{f}(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \pi c \xi}{\xi (1 - c^2 \xi^2)} = \frac{c}{2},$$

$$\widehat{f}\left(\pm \frac{1}{c}\right) = \lim_{\xi \rightarrow \pm \frac{1}{c}} \widehat{f}(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow \pm \frac{1}{c}} \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \pi c \xi}{\xi (1 - c^2 \xi^2)} = \frac{c}{4}.$$

Безпосереднє обчислення. Оскільки функція f парна, то

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= 2 \int_0^\infty f(x) \cos 2\pi \xi x \, dx = 2 \int_0^{c/2} \cos^2 \frac{\pi x}{c} \cos 2\pi \xi x \, dx \\ &= \int_0^{c/2} \cos 2\pi \xi x \, dx + \int_0^{c/2} \cos \frac{2\pi x}{c} \cos 2\pi \xi x \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi \xi} \sin 2\pi \xi x \Big|_0^{c/2} + \frac{1}{2} \int_0^{c/2} \cos 2\pi \left(\xi + \frac{1}{c} \right) x \, dx + \frac{1}{2} \int_0^{c/2} \cos 2\pi \left(\xi - \frac{1}{c} \right) x \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin \pi c \xi}{2\pi \xi} + \frac{1}{4\pi \left(\xi + \frac{1}{c}\right)} \sin 2\pi \left(\xi + \frac{1}{c}\right) x \Big|_0^{c/2} + \frac{1}{4\pi \left(\xi - \frac{1}{c}\right)} \sin 2\pi \left(\xi - \frac{1}{c}\right) x \Big|_0^{c/2} \\
&= \frac{\sin \pi c \xi}{2\pi \xi} + \frac{c}{4\pi} \left[\frac{1}{c\xi + 1} \sin(\pi c \xi + \pi) + \frac{1}{c\xi - 1} \sin(\pi c \xi - \pi) \right] \\
&= \frac{\sin \pi c \xi}{2\pi} \left[\frac{1}{\xi} - \frac{c}{2} \left(\frac{1}{c\xi + 1} + \frac{1}{c\xi - 1} \right) \right] = \frac{\sin \pi c \xi}{2\pi} \left[\frac{1}{\xi} - \frac{c}{2} \frac{2c\xi}{c^2\xi^2 - 1} \right] \\
&= \frac{\sin \pi c \xi}{2\pi} \left(\frac{1}{\xi} - \frac{c^2\xi}{c^2\xi^2 - 1} \right) = \frac{\sin \pi c \xi}{2\pi \xi (1 - c^2\xi^2)}, \\
\hat{f}(0) &= 2 \int_0^{c/2} \cos^2 \frac{\pi x}{c} dx = \int_0^{c/2} \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{c} \right) dx = \frac{c}{2}, \\
\hat{f}\left(\frac{1}{c}\right) &= \int_0^{c/2} \cos^2 \frac{2\pi x}{c} dx = \frac{1}{2} \int_0^{c/2} \left(1 + \cos \frac{4\pi x}{c} \right) dx = \frac{c}{4}.
\end{aligned}$$

2.7.d.
$$f(x) = \frac{1}{c} \Lambda\left(\frac{x}{c}\right) \quad (c > 0).$$

Розв’язок. Оскільки $f(x) = \Lambda\left(\frac{x}{c}\right)$ і $\hat{\Lambda}(\xi) = \frac{\sin^2 \pi \xi}{\pi^2 \xi^2}$ ($\xi \neq 0$), $\hat{\Lambda}(0) = 1$ (див. (2.5)), то, згідно з теоремою 2.10 (iii),

$$\hat{f}(\xi) = c \Lambda(c\xi) = \frac{\sin^2 \pi c \xi}{\pi^2 c \xi^2} \quad (\xi \neq 0), \quad \hat{f}(0) = c.$$

2.7.e.
$$f(x) = x^2 e^{-\pi x^2}.$$

Розв’язок. Представимо $f(x) = x^2 G(x)$, де G – гауссіан. Тоді, застосовуючи рівність (2.16) із наслідку 2.12, отримуємо

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(-2\pi i)^2} \left(\hat{G} \right)''(\xi).$$

Оскільки $\hat{G} = G$, то маємо

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= -\frac{1}{4\pi^2} \left(e^{-\pi \xi^2} \right)'' = -\frac{1}{4\pi^2} \left[(-2\pi \xi) \left(e^{-\pi \xi^2} \right) \right]' \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[e^{-\pi \xi^2} + \xi (-2\pi \xi) e^{-\pi \xi^2} \right] = \frac{1}{2\pi} (1 - 2\pi \xi^2) e^{-\pi \xi^2}.
\end{aligned}$$

Безпосереднє обчислення.

$$\begin{aligned}
 \widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \xi x} dx \\
 &= \left[\begin{array}{l} u = x e^{-2\pi i \xi x} \quad du = (e^{-2\pi i \xi x} - 2\pi i \xi x e^{-2\pi i \xi x}) dx \\ dv = x e^{-\pi x^2} dx \quad v = -\frac{1}{2\pi} e^{-\pi x^2} \end{array} \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \xi x} dx - i\xi \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \xi x} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \xi x} dx - i\xi \left[\begin{array}{l} u = e^{-2\pi i \xi x} \quad du = -2\pi i \xi e^{-2\pi i \xi x} dx \\ dv = x e^{-\pi x^2} dx \quad v = -\frac{1}{2\pi} e^{-\pi x^2} \end{array} \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \xi x} dx - \xi^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \xi x} dx \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi} - \xi^2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x^2 + 2i\xi x)} dx = \left(\frac{1}{2\pi} - \xi^2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi[(x+i\xi)^2 + \xi^2]} dx \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi} - \xi^2 \right) e^{-\pi \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dt = \left(\frac{1}{2\pi} - \xi^2 \right) e^{-\pi \xi^2}
 \end{aligned}$$

(остання рівність випливає з (2.13)).

2.7.f. $f(x) = (4\pi x^2 - 1) e^{-\pi x^2}.$

Розв'язок. Враховуючи результат вправи 2.7.e і теорему 2.9 про перетворення Фур'є гауссіану, маємо

$$\begin{aligned}
 \widehat{f}(\xi) &= 4\pi \left(\frac{1}{2\pi} - \xi^2 \right) e^{-\pi \xi^2} - e^{-\pi \xi^2} \\
 &= e^{-\pi \xi^2} - 4\pi \xi^2 e^{-\pi \xi^2} = (1 - 4\pi \xi^2) e^{-\pi \xi^2} = -f(\xi).
 \end{aligned}$$

2.8. Використовуючи рівність $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$, обчислити перетворення Фур’є функції $f(x) = \frac{\sin ax}{x}$ ($a > 0$).

Розв’язок. Із рівності $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ випливає, що

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x} dx = \begin{cases} 0, & b = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & b > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & b < 0. \end{cases}$$

Далі, застосовуючи рівність $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$, і враховуючи, що функція f парна, маємо

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos 2\pi\xi x dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} \cos 2\pi\xi x dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\sin(a + 2\pi\xi)x}{x} dx + \int_0^{\infty} \frac{\sin(a - 2\pi\xi)x}{x} dx \\ &= \begin{cases} 0, & a + 2\pi\xi = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & a + 2\pi\xi > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & a + 2\pi\xi < 0 \end{cases} + \begin{cases} 0, & a - 2\pi\xi = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & a - 2\pi\xi > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & a - 2\pi\xi < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & |\xi| = \frac{a}{2\pi}, \\ \pi, & |\xi| < \frac{a}{2\pi}, \\ 0, & |\xi| > \frac{a}{2\pi}. \end{cases} \end{aligned}$$

Відзначимо, що отримане перетворення Фур’є $\widehat{f}(\xi)$ є розривним. Це виявилось можливим, оскільки функція f не є абсолютно інтегрованою на $\mathbb{R}$.

2.9. Обчислити перетворення Фур’є наступних функцій.

2.9.a. $f(x) = e^{-a|x|}$ ($a > 0$).

Розв’язок. При розв’язанні вправи 2.5.f була отримана рівність

$$\int_0^{\infty} e^{-cx} \cos \gamma x dx = \frac{c}{c^2 + \gamma^2} \quad (c > 0).$$

Із неї, користуючись парністю функції f , отримуємо

$$\widehat{f}(\xi) = 2 \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos 2\pi\xi x dx = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\xi^2}.$$

2.9.b.

$$f(x) = e^{-4x^2 - 4x - 1}.$$

Розв'язок. Як і при розв'язанні вправи 2.5.e, маємо

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-4x^2 - 4x - 1} = e^{-(2x+1)^2} = e^{-\pi \left(\frac{x+1/2}{\sqrt{\pi}/2} \right)^2} = G \left(\frac{x+1/2}{\sqrt{\pi}/2} \right) \\ &= (\tau_{-1/2} (\delta_{2/\sqrt{\pi}} G))(x), \end{aligned}$$

де G – гауссіан. Оскільки $\widehat{G}(\xi) = G(\xi)$ (див. теорему 2.9), то, застосовуючи теорему 2.10 (ii), (iii), отримуємо

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= (\tau_{-1/2} (\delta_{2/\sqrt{\pi}} G))^\wedge(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2\pi i(-\frac{1}{2})\xi} \widehat{G} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \xi \right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\pi i \xi} e^{-\pi \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \xi \right)^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\pi i \xi - \frac{\pi^2}{4} \xi^2}. \end{aligned}$$

2.9.c.

$$f(x) = x e^{-x^2}.$$

Розв'язок. Позначимо

$$g(x) = e^{-x^2} = e^{-\pi \left(\frac{x}{\sqrt{\pi}} \right)^2} = G \left(\frac{x}{\sqrt{\pi}} \right),$$

де G – гауссіан. Оскільки $\widehat{G}(\xi) = G(\xi)$ (див. теорему 2.9), то, застосовуючи теорему 2.10 (iii), отримуємо

$$\widehat{g}(\xi) = \sqrt{\pi} \widehat{G}(\sqrt{\pi} \xi) = \sqrt{\pi} e^{-\pi (\sqrt{\pi} \xi)^2} = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 \xi^2}.$$

Далі, оскільки

$$f(x) = x e^{-x^2} = -\frac{1}{2} g'(x),$$

то, застосовуючи теорему 2.13, знаходимо

$$\widehat{f}(\xi) = \left(-\frac{1}{2} g' \right)^\wedge(\xi) = -\frac{1}{2} \cdot 2\pi i \xi \cdot \widehat{g}(\xi) = -\pi i \xi \cdot \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 \xi^2} = -\pi^{3/2} i \xi e^{-\pi^2 \xi^2}.$$

2.10. Нехай $H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$ Обчислити перетворення Фур’є наступних функцій.

2.10.а.
$$f(x) = H(x)e^{-ax} \quad (a > 0).$$

Розв’язок.

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_0^{\infty} e^{-(a+2\pi i \xi)x} dx \\ &= -\frac{1}{a+2\pi i \xi} e^{-(a+2\pi i \xi)x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+2\pi i \xi}. \end{aligned}$$

2.10.б.
$$f(x) = H(x)e^{-ax} \cos bx \quad (a > 0, b \neq 0).$$

Розв’язок. Застосовуючи отриману при розв’язанні вправи 2.5.f рівність, знаходимо

$$\widehat{f}(\xi) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_0^{\infty} e^{-(a+2\pi i \xi)x} \cos bx dx = \frac{a+2\pi i \xi}{(a+2\pi i \xi)^2 + b^2}.$$

2.10.с.
$$f(x) = H(x)e^{-ax} \sin bx \quad (a > 0, b \neq 0).$$

Розв’язок. Застосовуючи отриману при розв’язанні вправи 2.6 рівність, знаходимо

$$\widehat{f}(\xi) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_0^{\infty} e^{-(a+2\pi i \xi)x} \sin bx dx = \frac{b}{(a+2\pi i \xi)^2 + b^2}.$$

2.11. Нехай функція $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$. Обчислити перетворення Фур’є наступних функцій.

2.11.а.
$$f(-x).$$

Розв’язок. Покладемо $\varphi(x) = f(-x)$. Тоді

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(-x) e^{-2\pi i \xi x} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i(-\xi)t} dt = \widehat{f}(-\xi).$$

2.11.b. $f(x - x_0) \quad (x_0 \in \mathbb{R}).$

Розв'язок. Покладемо $\varphi(x) = f(x - x_0)$. Тоді

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0) e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \xi(t+x_0)} dt \\ &= e^{-2\pi i \xi x_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \xi t} dt = e^{-2\pi i \xi x_0} \widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

2.11.c. $f(x) e^{i \xi_0 x} \quad (\xi_0 \in \mathbb{R}).$

Розв'язок. Покладемо $\varphi(x) = f(x) e^{i \xi_0 x}$. Тоді

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i \xi_0 x} e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i (\xi - \frac{\xi_0}{2\pi}) x} dx = \widehat{f}\left(\xi - \frac{\xi_0}{2\pi}\right).$$

2.11.d. $f(x) \sin \xi_0 x.$

Розв'язок. Покладемо

$$\varphi(x) = f(x) \sin \xi_0 x = f(x) \frac{e^{i \xi_0 x} - e^{-i \xi_0 x}}{2i} = \frac{1}{2i} [f(x) e^{i \xi_0 x} - f(x) e^{-i \xi_0 x}].$$

Тоді, використовуючи результат попередньої вправи 2.11.c, отримаємо

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{2i} \left[\widehat{f}\left(\xi - \frac{\xi_0}{2\pi}\right) - \widehat{f}\left(\xi + \frac{\xi_0}{2\pi}\right) \right].$$

2.11.e. $f(3x) e^{ix}.$

Розв'язок. Покладемо $\varphi(x) = f(3x) e^{ix}$. Тоді

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(3x) e^{ix} e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(3x) e^{-2\pi i (\xi - \frac{1}{2\pi}) x} dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \frac{\xi - \frac{1}{2\pi}}{3} t} dt = \frac{1}{3} \hat{f} \left(\frac{2\pi\xi - 1}{6\pi} \right).$$

2.11.f. $f(2x)$.

Розв’язок. Покладемо $\varphi(x) = f(2x)$. Тоді

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(2x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \frac{\xi}{2} t} dt = \frac{1}{2} \hat{f} \left(\frac{\xi}{2} \right).$$

2.12. Припускаючи, що функція f неперервно диференційовна, f' кусково гладка, f, f', f'' і $x f'(x)$ абсолютно інтегровні на $\mathbb{R}$, застосувати перетворення Фур’є для розв’язання рівняння

$$f''(x) + x f'(x) + f(x) = 0, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0.$$

Розв’язок. Перепишемо дане рівняння у наступному вигляді

$$f''(x) + (x f(x))' = 0.$$

До обох частин цього рівняння будемо застосовувати перетворення Фур’є. Для цього, користуючись наслідком 2.14, відзначимо, що

$$f''(x) \supset (2\pi i)^2 \xi^2 \hat{f}(\xi) = -4\pi^2 \xi^2 \hat{f}(\xi).$$

Далі, застосовуючи послідовно теореми 2.13 і 2.11, маємо

$$(x f(x))' = 2\pi i \xi (x f(x))^\wedge(\xi) = 2\pi i \xi \left(-\frac{1}{2\pi i} \right) (\hat{f})'(\xi) = -\xi (\hat{f})'(\xi).$$

Позначимо $\varphi(\xi) = \hat{f}(\xi)$. Тоді початкове рівняння набуває такого вигляду

$$-4\pi^2 \xi^2 \varphi(\xi) - \xi \varphi'(\xi) = 0,$$

або, що те ж саме,

$$\varphi'(\xi) = -4\pi^2 \xi \varphi(\xi).$$

Загальний розв’язок цього рівняння має вигляд

$$\varphi(\xi) = C e^{-2\pi^2 \xi^2},$$

де C – стала. Таким чином,

$$\widehat{f}(\xi) = C e^{-2\pi^2 \xi^2} = C e^{-\pi(\sqrt{2\pi}\xi)^2} = C G\left(\sqrt{2\pi}\xi\right),$$

де G – гауссіан. Оскільки перетворення Фур'є гауссіану дорівнює самому гауссіану (див. теорему 2.9), то, застосовуючи обернене перетворення Фур'є (див. теорему 2.19) і використовуючи властивості перетворення Фур'є (див. теорему 2.10 (iii)), маємо

$$f(x) = \frac{C}{\sqrt{2\pi}} G\left(\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\right) = C_1 e^{-\pi\left(\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\right)^2} = C_1 e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

На завершення відзначимо, що з умови $f(0) = 1$ випливає, що $C_1 = 1$, і при цьому умова $f'(0) = 0$ також виконується. Таким чином, отримали розв'язок початкового рівняння

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

2.13. Якщо $\widehat{f}(u)$ – перетворення Фур'є функції $f(x)$, то будемо позначати це наступним чином $f(x) \supset \widehat{f}(u)$. Довести, що якщо f і $\widehat{f}$ неперервні і абсолютно інтегровні, то $\widehat{\widehat{f}}(x) \supset f(-x)$.

Розв'язок. Покладемо $\varphi(x) = \widehat{f}(x)$. Оскільки функції f і φ задовольняють умови теореми 2.19 про обернення перетворення Фур'є, то, згідно з цією теоремою,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t) e^{2\pi i x t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-2\pi i (-x)t} dt = \widehat{\varphi}(-x).$$

Поклавши в цій рівності $u = -x$, отримуємо потрібне твердження.

Використовуючи цей результат, перевірити, що

2.13.а.
$$\frac{1}{1+x^2} \supset \pi e^{-2\pi|u|}.$$

Розв'язок. У прикладі 2.4 було показано, що $e^{-2\pi|x|} \supset \frac{1}{\pi(1+\xi^2)}$. Оскільки функція $\frac{1}{1+x^2}$ абсолютно інтегровна, то, як показано у вправі 2.13,

$$\frac{1}{\pi(1+x^2)} \supset e^{-2\pi|\xi|}.$$

Помноживши на π , отримуємо потрібне.

2.13.b.
$$\frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2 x^2} \supset \Lambda(u).$$

Розв’язок. У прикладі 2.3 було показано, що $\Lambda(x) \supset \frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2 x^2}$ (див. (2.5)). Оскільки функція $\frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2 x^2}$ абсолютно інтегровна, то, як показано у вправі 2.13,

$$\frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2 x^2} \supset \Lambda(\xi).$$

2.14. Довести рівність
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi.$$

Розв’язок. У прикладі 2.23 було показано, що $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$. Оскільки функція під знаком інтегралу парна, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = 2 \frac{\pi}{2} = \pi.$$

2.15. Довести, що якщо друга похідна $f'' \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ і кусково неперервна, то $\widehat{f} \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$.

Розв’язок. Оскільки f'' кусково неперервна, то f' кусково гладка і тому функція f задовольняє умову наслідку 2.14 при $n = 2$. Згідно з цим наслідком, $(\widehat{f'')(\xi) = -4\pi^2 \xi^2 \widehat{f}(\xi)$. Далі, оскільки $f'' \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$, то, за теоремою 2.5, $|\widehat{f'')(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f''(x)| dx$ ($\xi \in \mathbb{R}$). Тому

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{4\pi^2 \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} |f''(x)| dx \quad (|\xi| \geq 1).$$

Звідси випливає, що $\widehat{f} \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$.

2.16. Припустимо, що функції $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ і кусково неперервні. Довести, що якщо $\widehat{f} = \widehat{g}$, то $f = g$, за виключенням, хіба що, скінченної кількості точок на будь-якому обмеженому інтервалі.

Розв’язок. Позначимо $\varphi = f - g$. Тоді $\varphi \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$, кусково неперервна і, згідно з умовою, $\widehat{\varphi} = \widehat{f} - \widehat{g} = 0$. Тоді, за теоремою 2.17 і зауваженням 2.18, з рівності (2.20) випливає, що $\varphi(x) = 0$ в кожній точці неперервності функції φ . Але кусково неперервна функція φ на будь-якому обмеженому інтервалі має не більше, ніж скінченну кількість точок розриву. Це і

означає, що $f(x) = g(x)$, за виключенням, хіба що, скінченної кількості точок на будь-якому обмеженому інтервалі.

2.17. Навести приклад неперервної, обмеженої функції, яка не є абсолютно інтегровною. Навпаки, навести приклад неперервної, абсолютно інтегровної функції, яка не є обмеженою.

Розв'язок. Першим прикладом може бути будь-яка функція, що тожно дорівнює відмінній від нуля сталій. Другим, більш цікавим прикладом може бути функція $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ($x \neq 0$), $f(0) = 1$, яка є неперервною, обмеженою і інтегровною на $\mathbb{R}$, але не є абсолютно інтегровною. З іншого боку, покладемо $f(x) = 0$ при $x \leq \frac{15}{8}$, для $k = 2, 3, \dots$ покладемо $f(k) = k$, $f(k \pm \frac{1}{k^3}) = 0$, а між будь-якими двома сусідніми точками, в яких функція f вже означена, будемо вважати функцію f лінійною. Отримана функція f , очевидно, невід'ємна, неперервна, необмежена на $\mathbb{R}$ і при цьому

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

2.18. Нехай кусково неперервна функція $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ має точки неусувного розриву і така, що $0 < \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$. Довести, що $\hat{f}$ не може бути абсолютно інтегровною.

Розв'язок. Відзначимо, що рівність (2.20) з теореми 2.17 залишається справедливою, якщо замість неперервності функції f на $\mathbb{R}$ припускати неперервність f лише в деякому околі точки x (див. доведення теореми 2.17). Тому і рівність (2.23) з теореми 2.19 також справедлива за припущенням неперервності f лише в деякому околі точки x .

Таким чином, якщо функція f кусково неперервна на $\mathbb{R}$ і $\hat{f}$ абсолютно інтегровна на $\mathbb{R}$, то рівність

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i2\pi x \xi} d\xi = f(x) \quad (\text{A.7})$$

справедлива у всіх точках неперервності функції f . Позначимо $\varphi(\xi) = \hat{f}(-\xi)$. Тоді ліва частина рівності (A.7) дорівнює $\hat{\varphi}(x)$ (див. зауважен-

ня 2.20) і тому

$$\widehat{\varphi}(x) = f(x) \quad (\text{A.8})$$

у всіх точках неперервності функції f . Оскільки перетворення Фур’є $\widehat{\varphi}$ неперервне в кожній точці (теорема 2.5), то рівність (A.8) неможлива, якщо кусково неперервна функція f має принаймні одну точку неусувного розриву. Це означає, що перетворення Фур’є не може бути абсолютно інтегровним на $\mathbb{R}$.

2.19.a. Довести, що $i\pi e^{-2\pi|x|} \operatorname{sign} x \supset \frac{u}{1+u^2}$.

Розв’язок. У вправі 2.4.e було показано, що

$$g(x) = -e^{-|x|} \operatorname{sign} x \supset \frac{4\pi i \xi}{1 + 4\pi^2 \xi^2}.$$

Звідси, застосовуючи властивості перетворення Фур’є (див. теорему 2.10), отримуємо

$$\begin{aligned} f(x) &= i\pi e^{-2\pi|x|} \operatorname{sign} x = -i\pi \left(-e^{-|2\pi x|} \operatorname{sign} 2\pi x \right) = -i\pi g(2\pi x) \\ &\supset -i\pi \frac{1}{2\pi} \widehat{g} \left(\frac{\xi}{2\pi} \right) = -\frac{i}{2} \frac{4\pi i \frac{\xi}{2\pi}}{1 + 4\pi^2 \frac{\xi^2}{4\pi^2}} = \frac{\xi}{1 + \xi^2}. \end{aligned}$$

2.19.b. Показати, що $\widehat{f}(u) = \frac{u}{1+u^2}$ не є абсолютно інтегровною.

Розв’язок. Функція $\widehat{f}(\xi) = \frac{\xi}{1+\xi^2}$ не є абсолютно інтегровною на $\mathbb{R}$ оскільки вона є перетворенням Фур’є функції f із попередньої вправи 2.19.a, яка має стрибок у точці 0, а така функція не може бути абсолютно інтегровною (див. вправу 2.18). Це також легко бачити і безпосередньо, оскільки функція $\widehat{f}(\xi) = \frac{\xi}{1+\xi^2}$ еквівалентна функції $\frac{1}{|\xi|}$ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

2.20.a. Використовуючи приклад 2.2 і основні властивості перетворення Фур’є, довести, що $\frac{i}{2}\Pi\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{i}{2}\Pi\left(x + \frac{1}{2}\right) \supset \frac{\sin^2 \pi u}{\pi u}$.

Розв’язок. У прикладі 2.2 було показано, що $\widehat{\Pi}(\xi) = \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi}$. Звідси, застосовуючи властивості перетворення Фур’є (див. теорему 2.10), отримуємо

$$\frac{i}{2}\Pi\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{i}{2}\Pi\left(x + \frac{1}{2}\right) \supset \frac{i}{2}e^{-2\pi i \frac{1}{2}\xi} \widehat{\Pi}(\xi) - \frac{i}{2}e^{-2\pi i (-\frac{1}{2})\xi} \widehat{\Pi}(\xi)$$

$$= \frac{i}{2} (e^{-\pi i \xi} - e^{\pi i \xi}) \widehat{\Pi}(\xi) = \sin \pi \xi \widehat{\Pi}(\xi) = \frac{\sin^2 \pi \xi}{\pi \xi}.$$

2.20.b. Показати, що $\widehat{f}(u) = \frac{\sin^2 \pi u}{\pi u}$ не є абсолютно інтегрованою.

Розв'язок. Оскільки функція $\Pi(x - \frac{1}{2}) - \Pi(x + \frac{1}{2})$ має стрибки в точках $-1, 0$ і 1 , то її перетворення Фур'є не може бути абсолютно інтегровним (див. вправу 2.18).

2.21. Довести наступну теорему.

Теорема. Нехай функція $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ і кусково неперервна. Якщо f двостороннє ліпшицьова в точці x , то

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(u) e^{2\pi i u x} du = \frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)].$$

Доведення. Будемо використовувати позначення із доведення теореми Діріхле 2.25. Рівність (2.26) перепишемо у наступному вигляді

$$I_A(x) - \frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi_x(t) \frac{\sin 2\pi A t}{t} dt,$$

де

$$I_A(x) = \int_{-A}^A \widehat{f}(u) e^{2\pi i u x} du,$$

$$\varphi_x(t) = [f(x+t) - f(x+)] + [f(x-t) - f(x-)].$$

Тоді

$$\begin{aligned} & I_A(x) - \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\infty} [f(x+t) - f(x+)] \frac{\sin 2\pi A t}{t} dt + \int_0^{\infty} [f(x-t) - f(x-)] \frac{\sin 2\pi A t}{t} dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[I_A^{(1)}(x) + I_A^{(2)}(x) \right]. \end{aligned}$$

Покажемо, що права частина цієї рівності прямує до 0 при $A \rightarrow \infty$. Оцінимо $I_A^{(1)}(x)$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і, користуючись умовою теореми, знайдемо таке $\delta_1 < (\frac{\alpha \varepsilon}{4B})^{1/\alpha}$ ($\delta_1 < 1$), що

$$|f(x+t) - f(x+)| \leq B t^\alpha \quad (0 < t < \delta_1).$$

Нехай $K > 1$. Представимо

$$I_A^{(1)}(x) = \int_0^{\delta_1} + \int_{\delta_1}^K + \int_K^\infty = I_{A,K}^{(1,1)}(x) + I_{A,K}^{(1,2)}(x) + I_{A,K}^{(1,3)}(x)$$

і оцінимо кожний із інтегралів окремо. Маємо

$$\left| I_{A,K}^{(1,1)}(x) \right| \leq B \int_0^{\delta_1} t^{\alpha-1} dt = B \frac{\delta_1^\alpha}{\alpha} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Далі,

$$\begin{aligned} \left| I_{A,K}^{(1,3)}(x) \right| &\leq \frac{1}{K} \int_K^\infty |f(x+t)| dt + |f(x+)| \left| \int_K^\infty \frac{\sin 2\pi A t}{t} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{K} \int_{-\infty}^\infty |f(u)| du + |f(x+)| \left| \int_{2\pi AK}^\infty \frac{\sin u}{u} du \right|. \end{aligned}$$

Оскільки кожний із двох доданків в правій частині прямує до нуля при $K \rightarrow \infty$, то можемо обрати K настільки великим, що кожний із доданків буде меншим ніж $\frac{\varepsilon}{4}$. Залишається оцінити $I_{A,K}^{(1,2)}(x)$. Для цього відзначимо, що функція $\frac{f(x+t)-f(x+)}{t}$ інтегровна на $[\delta_1, K]$. Тому, за лемою Рімана – Лебега 2.6,

$$I_{A,K}^{(1,2)}(x) = \int_{\delta_1}^K \frac{f(x+t) - f(x+)}{t} \sin 2\pi A t dt \rightarrow 0 \quad (A \rightarrow \infty).$$

Тому знайдеться таке A_0 , що при будь-якому $A > A_0$ виконується нерівність $\left| I_{A,K}^{(1,2)}(x) \right| < \frac{\varepsilon}{4}$. Із отриманих оцінок $I_{A,K}^{(1,k)}(x)$ ($k = 1, 2, 3$) випливає, що $\left| I_A^{(1)}(x) \right| < \varepsilon$ при $A > A_0$. Аналогічно отримуємо, що $I_A^{(2)}(x) \rightarrow 0$ при $A \rightarrow \infty$ і тим самим завершується доведення теореми.

2.22. Неахай $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ і неперервна. Відомо, що

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} 1 - \xi^2, & |\xi| \leq 1, \\ 0, & |\xi| > 1. \end{cases}$$

Знайти f .

Розв'язок. Оскільки виконуються умови теореми 2.19 про обернення перетворення Фур'є, то, за цією теоремою,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = 2 \int_0^1 (1 - \xi^2) \cos 2\pi \xi x d\xi \\
 &= 2 \int_0^1 \cos 2\pi \xi x d\xi - 2 \int_0^1 \xi^2 \cos 2\pi \xi x d\xi \\
 &= 2 \frac{1}{2\pi x} \sin 2\pi \xi x \Big|_0^1 - 2 \left[\begin{array}{ll} u = \xi^2 & du = 2\xi d\xi \\ dv = \cos 2\pi \xi x d\xi & v = \frac{1}{2\pi x} \sin 2\pi \xi x \end{array} \right] \Big|_0^1 \\
 &= \frac{\sin 2\pi x}{\pi x} - 2 \frac{1}{2\pi x} \xi^2 \sin 2\pi \xi x \Big|_0^1 + 1 \frac{1}{2\pi x} 2 \int_0^1 \xi \sin 2\pi \xi x d\xi \\
 &= \frac{\sin 2\pi x}{\pi x} - \frac{\sin 2\pi x}{\pi x} + \frac{2}{\pi x} \left[\begin{array}{ll} u = \xi & du = d\xi \\ dv = \sin 2\pi \xi x d\xi & v = -\frac{1}{2\pi x} \cos 2\pi \xi x \end{array} \right] \Big|_0^1 \\
 &= -\frac{2}{\pi x} \frac{1}{2\pi x} \xi \cos 2\pi \xi x \Big|_0^1 + \frac{2}{\pi x} \frac{1}{2\pi x} \int_0^1 \cos 2\pi \xi x d\xi \\
 &= -\frac{1}{\pi^2 \xi^2} \cos 2\pi x + \frac{1}{\pi^2 \xi^2} \frac{1}{2\pi x} \sin 2\pi \xi x \Big|_0^1 = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\sin 2\pi x}{2\pi x} - \cos 2\pi x \right)
 \end{aligned}$$

при $x \neq 0$, і

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi = 2 \int_0^1 (1 - \xi^2) d\xi = 2 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}.$$

2.23. Нехай $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ і неперервна. Відомо, що

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} 1 - |\xi|, & |\xi| \leq 1, \\ 0, & |\xi| > 1. \end{cases}$$

Знайти f .

Розв’язок. Відзначимо, що $\widehat{f}(\xi) = \Lambda(\xi)$. Як і в попередній вправі 2.22, виконуються умови теореми 2.19 про обернення перетворення Фур’є. За цією теоремою,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = 2 \int_0^1 (1 - \xi) \cos 2\pi \xi x d\xi \\ &= 2 \int_0^1 \cos 2\pi \xi x d\xi - 2 \int_0^1 \xi \cos 2\pi \xi x d\xi \\ &= 2 \frac{1}{2\pi x} \sin 2\pi \xi x \Big|_0^1 - 2 \left[\begin{array}{l} u = \xi \quad du = d\xi \\ dv = \cos 2\pi \xi x d\xi \quad v = \frac{1}{2\pi x} \sin 2\pi \xi x \end{array} \right] \Big|_0^1 \\ &= \frac{\sin 2\pi x}{\pi x} - 2 \frac{1}{2\pi x} \xi \sin 2\pi \xi x \Big|_0^1 + 2 \frac{1}{2\pi x} \int_0^1 \sin 2\pi \xi x d\xi \\ &= \frac{\sin 2\pi x}{\pi x} - \frac{\sin 2\pi x}{\pi x} + \frac{1}{\pi x} \left(-\frac{1}{2\pi x} \right) \cos 2\pi \xi x \Big|_0^1 \\ &= -\frac{1}{2\pi^2 x^2} (\cos 2\pi x - 1) = \frac{1 - \cos 2\pi x}{2\pi^2 x^2} = \frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2 x^2} \quad (x \neq 0), \\ f(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) d\xi = 2 \int_0^1 (1 - \xi) d\xi = 2 \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 1. \end{aligned}$$

2.24. Використовуючи формулу обернення перетворення Фур'є, довести наступні рівності.

$$\mathbf{2.24.a.} \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos \xi x}{a^2 + \xi^2} d\xi = \frac{\pi}{2a} e^{-a|x|} \quad (x \in \mathbb{R}, a > 0).$$

Розв'язок. У вправі 2.9.a для функції $f(x) = e^{-a|x|}$ було обчислене її перетворення Фур'є $\hat{f}(\xi) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 \xi^2}$. Оскільки виконуються умови теореми 2.19 про обернення перетворення Фур'є, то, за цією теоремою,

$$\begin{aligned} e^{-a|x|} &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) d\xi = 2 \int_0^{\infty} \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 \xi^2} \cos 2\pi \xi x d\xi \\ &= 2 \frac{2a}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{a^2 + u^2} \cos ux du = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos ux}{a^2 + u^2} du. \end{aligned}$$

Звідси випливає потрібна рівність.

$$\mathbf{2.24.b.} \quad \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 \xi^2} \cos \xi x d\xi = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (x \in \mathbb{R}, \sigma > 0).$$

Розв'язок. Скористаємось тим, що перетворення Фур'є гауссіану дорівнює самому гауссіану (див. теорему 2.9). Оскільки гауссіан задовольняє умови теореми 2.19 про обернення перетворення Фур'є, то, за цією теоремою,

$$e^{-\pi x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi \xi^2} e^{2\pi i \xi x} d\xi = 2 \int_0^{\infty} e^{-\pi \xi^2} \cos 2\pi \xi x d\xi.$$

Покладемо в цій рівності $x = \frac{y}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ і отримаємо

$$\begin{aligned} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} &= 2 \int_0^{\infty} e^{-\pi \xi^2} \cos \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} \xi y d\xi \\ &= 2 \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\pi \frac{\sigma^2}{2\pi} u^2} \cos uy du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sigma \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2} \cos uy du. \end{aligned}$$

Звідси випливає потрібна рівність.

$$2.24.c. \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} \cos(2\xi x) d\xi = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Розв’язок. В правій частині потрібної рівності – функція $\Lambda(x)$ із прикладу 2.3. У цьому прикладі було показано, що $\widehat{\Lambda}(\xi) = \frac{\sin^2 \pi \xi}{\pi^2 \xi^2}$. Оскільки виконуються умови теореми 2.19 про обернення перетворення Фур’є, то, за цією теоремою,

$$\Lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\Lambda}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \pi \xi}{\pi^2 \xi^2} \cos 2\pi \xi x d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} \cos 2ux du,$$

що і потрібно було довести.

2.24.d. Із вправи 2.24.c отримати рівність

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} d\xi = \frac{\pi}{2}.$$

Розв’язок. Потрібну рівність отримаємо, якщо у вправі 2.24.c покладемо $x = 0$.

2.25. Знайти таку неперервну і абсолютно інтегровну на $[0, \infty)$ функцію f , що

$$\int_0^{\infty} f(x) \cos \xi x dx = \frac{1}{1 + \xi^2} \quad (\xi \in \mathbb{R}).$$

Чи є f означеною однозначно?

Розв’язок. У прикладі 2.4 було показано, що для функції $f(x) = e^{-2\pi|x|}$ її перетворення Фур’є дорівнює $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + \xi^2}$. Це означає, що

$$2 \int_0^{\infty} e^{-2\pi x} \cos 2\pi \xi x dx = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + \xi^2},$$

або, що те ж саме,

$$\int_0^{\infty} e^{-u} \cos \xi u du = \frac{1}{1 + \xi^2}.$$

Таким чином, один із розв’язків даного функціонального рівняння – функція $f(x) = e^{-x}$. Припустимо, що існує інша функція g , яка також задовольняє дане рівняння. Позначимо через h парне продовження функції

$f - g$. Тоді, очевидно, функція h неперервна і абсолютно інтегровна на $\mathbb{R}$. Тому її перетворення Фур'є

$$\widehat{h}(\xi) = 2 \int_0^{\infty} h(x) \cos 2\pi \xi x \, dx = 0$$

при будь-якому ξ . Оскільки функція h задовольняє умови теореми 2.19 про обернення перетворення Фур'є, то, за цією теоремою,

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\xi) e^{2\pi i \xi x} \, d\xi = 0,$$

а це означає, що $f = g$. Таким чином, заданим рівнянням функція $f(x) = e^{-x}$ визначається однозначно.

2.26. Знайти таку неперервну і абсолютно інтегровну на $[0, \infty)$ функцію f , що

$$\int_0^{\infty} f(x) \cos \xi x \, dx = \frac{1 - \cos \xi}{\xi^2} \quad (\xi \in \mathbb{R}).$$

Чи є f означеною однозначно?

Розв'язок. Відзначимо, що

$$\frac{1 - \cos \xi}{\xi^2} = 2 \frac{\sin^2 \frac{\xi}{2}}{\xi^2} = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \pi \frac{\xi}{2\pi}}{\pi^2 \left(\frac{\xi}{2\pi}\right)^2} = \frac{1}{2} \widehat{\Lambda} \left(\frac{\xi}{2\pi} \right),$$

де функція Λ означена у прикладі 2.3. Це означає, що

$$\frac{1 - \cos \xi}{\xi^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(x) e^{-2\pi i \frac{\xi}{2\pi} x} \, dx = \int_0^1 (1 - x) \cos \xi x \, dx.$$

Таким чином, один із розв'язків даного функціонального рівняння – функція $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$ Доведення єдиності цього розв'язку таке ж, як і в попередній вправі 2.25.

2.27. Використовуючи перетворення Фур'є функції Π із прикладу 2.2 і тотожність Планшереля (2.33), довести, що

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} \, d\xi = \frac{\pi}{2}.$$

Розв’язок. Згідно з прикладом 2.2 і тотожністю Планшереля (2.33),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Pi^2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi \xi}{\pi^2 \xi^2} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt.$$

Оскільки інтеграл в лівій частині дорівнює 1, а функція під знаком інтегралу в правій частині парна, то звідси випливає потрібна рівність.

2.28. Нехай $\widehat{g}(\xi) = \frac{\xi \cos \xi - \sin \xi}{\xi^2}$.

2.28.а. Застосовуючи правило диференціювання перетворення Фур’є, знайти g .

Розв’язок. Відзначимо, що $\widehat{g}(\xi) = \left(\frac{\sin \xi}{\xi} \right)'$. Оскільки, як показано у прикладі 2.2, $\Pi(x) \supset \frac{\sin \pi x}{\pi x}$, то, застосовуючи властивості перетворення Фур’є (див. теорему 2.10 (i), (iii)), маємо $\Pi(\pi x) \supset \frac{1}{\pi} \frac{\sin \xi}{\xi}$. Позначимо $f(x) = \pi \Pi(\pi x)$. Тоді функція f задовольняє умови теореми 2.11 про диференціювання перетворення Фур’є. Використовуючи рівність (2.14) із цієї теореми, маємо

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\xi) &= \left(\frac{\sin \xi}{\xi} \right)' = (\widehat{f})'(\xi) = -2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &= -2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} x \pi \Pi(\pi x) e^{-2\pi i \xi x} dx. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$g(x) = -2\pi i x \pi \Pi(\pi x) = \begin{cases} -2\pi^2 i x, & |x| \leq \frac{1}{2\pi}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2\pi}. \end{cases}$$

2.28.б. Обчислити інтеграл

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \right]^2 dx.$$

Розв’язок. Згідно з попередньою вправою 2.28.а і тотожністю Планшереля (2.33), враховуючи непарність функції $\widehat{g}(\xi) = \frac{\xi \cos \xi - \sin \xi}{\xi^2}$, отримуємо

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \right]^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx$$

$$= 2\pi^4 \int_{-\frac{1}{2\pi}}^{\frac{1}{2\pi}} x^2 dx = 4\pi^4 \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^{\frac{1}{2\pi}} = \frac{\pi}{6}.$$

2.29. Довести тотожність

$$\frac{x \sin \pi x}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \pi(1 - x)}{1 - x} + \frac{\sin \pi(1 + x)}{1 + x} \right] \quad (x \neq \pm 1).$$

Розв'язок. Застосовуючи до правої частини елементарні перетворення, отримуємо ($x \neq \pm 1$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \pi(1 - x)}{1 - x} + \frac{\sin \pi(1 + x)}{1 + x} \right] &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \pi x}{1 - x} - \frac{\sin \pi x}{1 + x} \right] \\ &= \frac{(1 + x) \sin \pi x - (1 - x) \sin \pi x}{2(1 - x^2)} = \frac{x \sin \pi x}{1 - x^2}. \end{aligned}$$

Застосовуючи цю тотожність, обчислити

2.29.а.
$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{1 - x^2} dx.$$

Розв'язок. Застосовуючи теорему 2.25 до функції Π , із рівності (2.24) при $x = 0$ знаходимо

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\Pi}(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi} d\xi = \Pi(0) = 1$$

(інтеграл Діріхле). Звідси випливає, що $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ при будь-якому $a > 0$. Тому, використовуючи тотожність із вправи 2.29, отримуємо

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{1 - x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin \pi(1 - x)}{1 - x} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin \pi(1 + x)}{1 + x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^1 \frac{\sin \pi t}{t} dt + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{\sin \pi t}{t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi t}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{\sin \pi t}{t} dt = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

2.29.b.
$$\int_0^{\infty} \left(\frac{x \sin \pi x}{1 - x^2} \right)^2 dx.$$

Розв’язок. Покладемо $f(\xi) = \frac{\xi \sin \pi \xi}{1 - \xi^2}$, $g(x) = \Pi(x) \cos 2\pi x$. Тоді, застосовуючи послідовно теорему 2.10 (iv), рівність $\widehat{\Pi}(\xi) = \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi}$ (див. (2.4) в прикладі 2.2) і рівність із вправи 2.29, отримуємо

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{2} [\widehat{\Pi}(\xi - 1) + \widehat{\Pi}(\xi + 1)] = \frac{\pi}{2} \left[\frac{\sin \pi(\xi - 1)}{\pi(\xi - 1)} + \frac{\sin \pi(\xi + 1)}{\pi(\xi + 1)} \right] = \frac{1}{\pi} f(\xi).$$

Оскільки функція g абсолютно інтегровна на $\mathbb{R}$, то до неї можемо застосувати тотожність Планшереля (2.33), згідно з якою

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\xi) d\xi &= \pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) dx \\ &= 2\pi^2 \int_0^{1/2} \cos^2 2\pi x dx = \pi^2 \int_0^{1/2} (1 + \cos 4\pi x) dx = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

Звідси, в силу парності функції f^2 , випливає, що

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{x \sin \pi x}{1 - x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

2.30. Нехай $W(t, \alpha)$ – ядро Гаусса – Вейерштрасса (його властивості див. в лемі 2.16). Позначимо праву частину рівності (2.18) (див. лему 2.15) через

$${}_{\alpha}W * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - t)W(t, \alpha) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)W(x - s, \alpha) ds.$$

Нехай функція $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ обмежена і кусково неперервна. Довести, що ${}_{\alpha}W * f(x)$ рівномірно по x на $\mathbb{R}$ прямує до нуля при $\alpha \rightarrow \infty$.

Розв’язок. Оскільки $W(x - s, \alpha) \leq \frac{1}{\alpha}$ при будь-яких x і s , то

$$|{}_{\alpha}W * f(x)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(s)W(x - s, \alpha) ds \right| \leq \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} |f(s)| ds \rightarrow 0 \quad (\alpha \rightarrow \infty).$$

2.31. Припускаючи, що функція $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$, довести, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} |{}_a W * f(x)| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

Розв'язок. Змінюючи порядок інтегрування і враховуючи також рівність $\int_{-\infty}^{\infty} W(t, \alpha) dt = 1$ (див. лему 2.16 (i)), отримуємо

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |{}_a W * f(x)| dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(s) W(x-s, \alpha) ds \right| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} |f(s)| W(x-s, \alpha) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(s)| ds \int_{-\infty}^{\infty} W(x-s, \alpha) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(s)| ds. \end{aligned}$$

2.32. Нехай функція $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ неперервна і $m \leq f(x) \leq M$ ($x \in \mathbb{R}$). Довести, що $m \leq {}_a W * f(x) \leq M$ ($x \in \mathbb{R}$).

Розв'язок. Оскільки $\int_{-\infty}^{\infty} W(t, \alpha) dt = 1$, то з умови $f(x) \leq M$ випливає, що

$${}_a W * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) W(t, \alpha) dt \leq M \int_{-\infty}^{\infty} W(t, \alpha) dt = M.$$

Аналогічно, з умови $f(x) \geq m$ отримуємо нерівність ${}_a W * f(x) \geq m$.

2.33. Користуючись означенням згортки, довести, що $\Pi * \Pi(x) = \Lambda(x)$.

Розв'язок. Згідно з означенням згортки,

$$\Pi * \Pi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(x-y) \Pi(y) dy = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Pi(x-y) dy = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \Pi(t) dt.$$

Звідси видно, що $\Pi * \Pi(x)$ дорівнює довжині відрізка, який є перетином відрізків $[x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}]$ і $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Таким чином, $\Pi * \Pi(x) = x + \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) =$

$x + 1$ при $-1 \leq x \leq 0$ і $\Pi * \Pi(x) = \frac{1}{2} - (x - \frac{1}{2}) = -x + 1$ при $0 < x \leq 1$.

Отже,

$$\Pi * \Pi(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} = \Lambda(x).$$

2.34. Обчислити згортку $\left[\frac{1}{a^2+x^2}\right] * \left[\frac{1}{b^2+x^2}\right]$.

Розв’язок. Вважаємо, що $a, b > 0$. Позначимо $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Як показано у вправі 2.13.а,

$$\frac{1}{1+x^2} \supset \pi e^{-2\pi|\xi|}.$$

Тому, використовуючи теорему 2.10 (i), (iii), для функції $f(x) = \frac{1}{a^2} \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}$ маємо

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{a^2} a \pi e^{-2\pi a|\xi|} = \frac{\pi}{a} e^{-2\pi a|\xi|}.$$

Аналогічно, для функції $g(x) = \frac{1}{b^2+x^2}$ маємо

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{\pi}{b} e^{-2\pi b|\xi|}.$$

Далі, скористаємось рівністю (2.32) з теореми 2.31 і отримаємо

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi) = \frac{\pi^2}{ab} e^{-2\pi(a+b)|\xi|}.$$

Застосовуючи тепер рівність (2.23) з теореми 2.19, будемо мати

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f * g}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = \frac{\pi^2}{ab} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi(a+b)|\xi|} e^{2\pi i \xi x} d\xi \\ &= \frac{\pi^2}{ab} \left[\int_{-\infty}^0 e^{2\pi(ix+a+b)\xi} d\xi + \int_0^{\infty} e^{2\pi(ix-a-b)\xi} d\xi \right] \\ &= \frac{\pi^2}{ab} \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{ix+a+b} e^{2\pi(ix+a+b)\xi} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{1}{ix-a-b} e^{2\pi(ix-a-b)\xi} \Big|_0^{\infty} \right] \\ &= \frac{\pi}{2ab} \left[\frac{1}{ix+(a+b)} - \frac{1}{ix-(a+b)} \right] \\ &= -\frac{\pi(a+b)}{ab} \frac{1}{-x^2-(a+b)^2} = \frac{\pi(a+b)}{ab(x^2+(a+b)^2)}. \end{aligned}$$

Легко бачити, що функції f , g , $f * g$, $\widehat{f}$, $\widehat{g}$ і $\widehat{f * g}$ задовольняють умови теорем 2.19 і 2.31.

2.35. Нехай функція $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ і нехай

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u) \frac{1 - \cos u}{u^2} du \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Виразити $\widehat{g}$ в термінах $\widehat{f}$.

Розв'язок. Представимо

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u) \frac{1 - \cos u}{u^2} du e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos u}{u^2} du \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u) e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos u}{u^2} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \xi(t+u)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi u} \frac{1 - \cos u}{u^2} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \xi t} dt = \widehat{f}(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi u} \frac{1 - \cos u}{u^2} du. \end{aligned}$$

Скориставшись отриманою у вправі 2.26 рівністю $\frac{1 - \cos u}{u^2} = \frac{1}{2} \widehat{\Lambda}\left(\frac{u}{2\pi}\right)$ і формулою (2.23) обернення перетворення Фур'є, отриманою в теоремі 2.19, маємо

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\xi) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi u} \widehat{\Lambda}\left(\frac{u}{2\pi}\right) du = \frac{1}{2} \widehat{f}(\xi) 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\Lambda}(v) e^{2\pi i(-2\pi \xi)v} dv \\ &= \pi \widehat{f}(\xi) \Lambda(-2\pi \xi) = \begin{cases} 0, & |\xi| > \frac{1}{2\pi}, \\ \pi(1 - 2\pi|\xi|) \widehat{f}(\xi), & |\xi| \leq \frac{1}{2\pi}. \end{cases} \end{aligned}$$

Легко бачити, що зміна порядку інтегрування і застосування теореми 2.19 були законними.

Відповідь.

$$\widehat{g}(\xi) = \begin{cases} \pi(1 - 2\pi|\xi|) \widehat{f}(\xi), & |\xi| \leq \frac{1}{2\pi}, \\ 0, & |\xi| > \frac{1}{2\pi}. \end{cases}$$

2.36. Використовуючи перетворення Фур’є, розв’язати рівняння.

2.36.а.
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t) dt = e^{-4\pi x^2}.$$

Розв’язок. Позначимо $\varphi(x) = f * f(x) = e^{-\pi(2x)^2} = G(2x)$, де G – гауссіан. Оскільки перетворення Фур’є гауссіану дорівнює самому гауссіану (див. теорему 2.9), то використовуючи теорему 2.10 (i), (iii), отримаємо

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{2}\widehat{G}\left(\frac{\xi}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{-\pi\left(\frac{\xi}{2}\right)^2}.$$

З іншого боку, в силу рівності (2.32) з теореми 2.31,

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{f * f}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{f}(\xi) = \left(\widehat{f}\right)^2(\xi).$$

Таким чином,

$$\left(\widehat{f}\right)^2(\xi) = \frac{1}{2}e^{-\pi\left(\frac{\xi}{2}\right)^2}.$$

Звідси випливає, що

$$\widehat{f}(\xi) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{2}\left(\frac{\xi}{2}\right)^2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\pi\left(\frac{\xi}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}G\left(\frac{\xi}{2\sqrt{2}}\right).$$

Тому, в силу формули (2.23) обернення перетворення Фур’є з теореми 2.19,

$$f(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}2\sqrt{2}G\left(2\sqrt{2}x\right) = \pm 2e^{-8\pi x^2}.$$

Відповідь.

$$f(x) = \pm 2e^{-8\pi x^2}.$$

2.36.б.
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t) dt = \frac{1}{1+x^2}.$$

Розв’язок. Позначимо $\varphi(x) = f * f(x)$. Тоді, в силу рівності (2.32) з теореми 2.31,

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{f * f}(\xi) = \left(\widehat{f}\right)^2(\xi).$$

З іншого боку, у вправі 2.13.а показано, що для функції $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$ справедлива рівність $\widehat{\varphi}(\xi) = \pi e^{-2\pi|\xi|}$. Тому маємо $\left(\widehat{f}\right)^2(\xi) = \pi e^{-2\pi|\xi|}$, звідки випливає, що $\widehat{f}(\xi) = \pm\sqrt{\pi}e^{-\pi|\xi|}$. Застосовуючи тепер формулу (2.33) обернення перетворення Фур'є з теореми 2.19, отримуємо

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = \pm\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi|\xi|} e^{2\pi i \xi x} d\xi \\ &= \pm\sqrt{\pi} \left[\int_{-\infty}^0 e^{\pi(2ix+1)\xi} d\xi + \int_0^{\infty} e^{\pi(2ix-1)\xi} d\xi \right] \\ &= \pm\sqrt{\pi} \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2ix+1} e^{\pi(2ix+1)\xi} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{1}{2ix-1} e^{\pi(2ix-1)\xi} \Big|_0^{\infty} \right] \\ &= \pm \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{2ix+1} - \frac{1}{2ix-1} \right] = \mp \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2}{-4x^2-1} = \pm \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{1+4x^2}. \end{aligned}$$

Відповідь.

$$f(x) = \pm \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{1+4x^2}.$$

3. Вправи до розділу ”Поліноми Лежандра”

3.1. Довести, що кожна із систем

$$\{P_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{і} \quad \{P_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$$

3.1.а. Ортогональна на $[0, 1]$.

Розв’язок. Оскільки P_{2n-1} складається лише з непарних, а P_{2n} — лише із парних степенів x (див. пропозицію 3.1 (ii)), то обидва добутки многочленів $P_{2m-1}P_{2n-1}$ і $P_{2m}P_{2n}$ складаються лише з парних степенів x , тобто парні функції. В силу ортогональності на $[-1, 1]$ системи $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ поліномів Лежандра (теорема 3.4), маємо

$$\begin{aligned} \int_0^1 P_{2m-1}(x)P_{2n-1}(x) dx &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_{2m-1}(x)P_{2n-1}(x) dx \\ &= \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{1}{2} \frac{2}{2(2n-1)+1} = \frac{1}{4n-1}, & m = n. \end{cases} \end{aligned}$$

Аналогічно,

$$\begin{aligned} \int_0^1 P_{2m}(x)P_{2n}(x) dx &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_{2m}(x)P_{2n}(x) dx \\ &= \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{1}{2} \frac{2}{2(2n)+1} = \frac{1}{4n+1}, & m = n. \end{cases} \end{aligned}$$

3.1.б. Повна на $[0, 1]$.

Розв’язок. Відзначимо, що для парної на $[-\pi, \pi]$ функції φ її середні Фейєра $\sigma_n(x)$ в теоремі 1.51 є многочленами по косинусам. Це означає,

що і в теоремі Вейєрштрасса 1.52 тригонометричний многочлен T можна обрати таким, що складається лише з косинусів. Але оскільки степені косинусів розвиваються в ряд Тейлора по парним степеням x , то в теоремі Вейєрштрасса 3.8 про наближення неперервної функції алгебраїчними поліномами, парну і неперервну на $[-\pi, \pi]$ функцію φ можемо рівномірно наблизити алгебраїчним поліномом, який складається лише з парних степенів x . Якщо ж функція φ непарна, неперервна і $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$, то аналогічні аргументи показують, що її можна рівномірно на $[-\pi, \pi]$ наблизити многочленом, який складається лише з непарних степенів x .

Для доведення повноти на $[0, 1]$ системи $\{P_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ візьмемо довільну неперервну на $[0, 1]$ функцію f ; її парне продовження також будемо позначати через f . Позначимо

$$S_{2n}(x) = \sum_{k=0}^n c_k P_{2k}(x),$$

де c_k – коефіцієнти Фур'є – Лежандра функції f за системою $\{P_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ на $[0, 1]$. Задамо $\varepsilon > 0$ і оберемо такий алгебраїчний поліном Q степені $2m$, який складається лише з парних степенів x , що

$$|f(x) - Q(x)| < \varepsilon \quad (x \in [-1, 1]).$$

Оскільки многочлен Q складається лише з парних степенів x , то його можна представити у вигляді

$$Q(x) = \sum_{k=0}^m \alpha_k P_{2k}(x).$$

Але тоді, за мінімальною властивістю частинних сум ряду Фур'є, при $n \geq m$ отримаємо

$$\int_0^1 [f(x) - S_{2n}(x)]^2 dx \leq \int_0^1 [f(x) - Q(x)]^2 dx < \varepsilon^2.$$

Це означає, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 [f(x) - S_{2n}(x)]^2 dx = 0,$$

тобто, що система $\{P_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ повна на $[0, 1]$.

Для доведення повноти на $[0, 1]$ системи $\{P_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ візьмемо довільну на $[0, 1]$ функцію f і позначимо

$$S_{2n-1}(x) = \sum_{k=1}^n c_k P_{2k-1}(x),$$

де c_k – коефіцієнти функції f за системою $\{P_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ на $[0, 1]$. Задамо $\varepsilon > 0$ і оберемо таку неперервну на $[0, 1]$ функцію g , що $g(0) = g(1) = 0$ і $\int_0^1 [f(x) - g(x)]^2 dx < \varepsilon^2$. Непарне продовження функції g на $[-1, 1]$ також позначимо через g . Далі, побудуємо такий алгебраїчний поліном Q степені $2m - 1$, який складається лише з непарних степенів x , що

$$|g(x) - Q(x)| < \varepsilon \quad (x \in [-1, 1]).$$

Оскільки многочлен Q складається лише з непарних степенів x , то його можна представити у вигляді

$$Q(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_k P_{2k-1}(x).$$

Але тоді, за мінімальною властивістю частинних сум ряду Фур’є, при $n \geq m$ отримаємо

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_0^1 [f(x) - S_{2n-1}(x)]^2 dx \right\}^{1/2} \\ & \leq \left\{ \int_0^1 [f(x) - g(x)]^2 dx \right\}^{1/2} + \left\{ \int_0^1 [g(x) - S_{2n-1}(x)]^2 dx \right\}^{1/2} \\ & \leq \varepsilon + \left\{ \int_0^1 [f(x) - Q(x)]^2 dx \right\}^{1/2} < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Це означає, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 [f(x) - S_{2n-1}(x)]^2 dx = 0,$$

тобто, що система $\{P_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ повна на $[0, 1]$.

3.2. Представити функцію $f(x) = \frac{1}{\sqrt{10-6x}}$ у вигляді ряду за поліномами Лежандра на відрізку $[-1, 1]$.

Розв'язок. Маємо

$$\frac{1}{\sqrt{10-6x}} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{1-2\frac{x}{3}+\frac{1}{9}}} = \frac{1}{3} F\left(x, \frac{1}{3}\right).$$

Тому (див. (3.29))

$$\frac{1}{\sqrt{10-6x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x)}{3^{n+1}} \quad (|x| \leq 1).$$

3.3. Використати рекурентні формули для поліномів Лежандра до розв'язання наступних задач.

3.3.a. Показати, що

$$P_n(0) = -\frac{n-1}{n} P_{n-2}(0) \quad (n \geq 2),$$

і обчислити $P_n(0)$.

Розв'язок. Для $n \geq 2$ маємо (див. (3.5))

$$nP_n(x) - (2n-1)xP_{n-1}(x) + (n-1)P_{n-2}(x) = 0. \quad (\text{A.9})$$

Покладемо $x = 0$. Тоді отримаємо

$$nP_n(0) = -(n-1)P_{n-2}(0).$$

Звідси

$$P_n(0) = -\frac{n-1}{n} P_{n-2}(0).$$

Далі, $P_0(0) = 1$, $P_1(0) = 0$. Тому, за індукцією,

$$P_{2k-1}(0) = 0,$$

$$\begin{aligned} P_{2k}(0) &= (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2^k k!} = -\frac{2k-1}{2k} \cdot (-1)^{k-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-3)}{2^{k-1} (k-1)!} \\ &= -\frac{2k-1}{2k} P_{2k-2}(0) \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

3.3.b. Показати, що $P'_n(0) = nP_{n-1}(0)$.

Розв’язок. Диференціюючи рівність (А.9), отримаємо

$$nP'_n(x) - (2n-1)P_{n-1}(x) - (2n-1)xP'_{n-1}(x) + (n-1)P'_{n-2}(x) = 0.$$

При $x = 0$ звідси маємо

$$nP'_n(0) - (2n-1)P_{n-1}(0) + ((n-1)P'_{n-2}(0) = 0.$$

Далі, за другою рекурентною формулою (3.9),

$$P'_n(0) - P'_{n-2}(0) = (2n-1)P_{n-1}(0).$$

Із двох останніх рівностей випливає, що

$$P'_n(0) = nP_{n-1}(0).$$

3.4. Розвинути кожен із наступних функцій в ряди за поліномами Лежандра двома способами:

- 1) використовуючи формулу Родригеса (3.6) і вправу 3.3.a;
- 2) використовуючи рекурентну формулу (3.9) і вправу 3.3.a.

3.4.a.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Розв’язок. Перший спосіб. Див. приклад 3.7.

Другий спосіб. Маємо

$$c_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x)P_0(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 dx = \frac{1}{2},$$

$$c_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 f(x)P_n(x) dx = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_0^1 P_n(x) dx.$$

За другою рекурентною формулою (3.9), враховуючи, що $P_n(1) = 1$ (див. пропозицію 3.1 (iii)), маємо

$$\int_0^1 P_n(x) dx = \frac{1}{2n+1} \left[\int_0^1 P'_{n+1}(x) dx - \int_0^1 P'_{n-1}(x) dx \right]$$

$$= \frac{P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0)}{2n+1}.$$

Застосовуючи рівність із вправи 3.3.а, отримуємо, що $c_{2k} = 0$. Далі,

$$\begin{aligned} c_{2k+1} &= \frac{1}{2} (P_{2k}(0) - P_{2k+2}(0)) = \frac{1}{2} (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2^k k!} \left[1 + \frac{2k+1}{2(k+1)} \right] \\ &= \frac{(-1)^k (4k+3)}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2^{k+1} (k+1)!}. \end{aligned}$$

3.4.b.
$$f_2(x) = \operatorname{sign} x \quad (|x| \leq 1).$$

Розв'язок. За допомогою попередньої вправи. Оскільки $f_2(x) = 2(f(x) - \frac{1}{2})$, де функція f із попередньої вправи 3.4.а, то

$$c_{2k} = 0, \quad c_{2k+1} = (-1)^k \frac{(4k+3)(2k)!}{(2k+2)2^{2k}(k!)^2} \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Перший спосіб. Оскільки функція f_2 непарна, то $c_0 = 0$. Для $n \geq 1$, застосовуючи формулу Родригеса, отримуємо

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2n+1}{2^{n+1}n!} \left[\int_0^1 \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n dx - \int_{-1}^0 \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n dx \right] \\ &= \frac{2n+1}{2^{n+1}n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2-1)^n \Big|_0^1 - \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2-1)^n \Big|_{-1}^0 \right]. \end{aligned}$$

Покладемо $\varphi(x) = (x^2-1)^n$. Очевидно, $\varphi^{(n-1)}(\pm 1) = 0$. Далі, за формулою біному Ньютона,

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} x^{2j}.$$

Похідні порядку $n-1$ степеневі функції x^{2j} в точці $x=0$ дорівнюють нулю, окрім випадку, коли $2j = n-1$. Для парного n цей випадок неможливий і тому $c_{2k} = 0$. Нехай $n = 2k+1$. Тоді

$$c_{2k+1} = \frac{4k+3}{2^{2k+2}(2k+1)!} 2(-1) \frac{d^{2k}}{dx^{2k}} \varphi(0)$$

$$= (-1)^k \frac{4k+3}{2^{2k+1}(2k+1)!} \frac{(2k+1)!}{k!(k+1)!} (2k)! = (-1)^k \frac{4k+3}{2^{2k+1}} \frac{(2k)!}{k!(k+1)!}.$$

Другий спосіб. Маємо

$$c_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx = \left(n + \frac{1}{2}\right) \left[\int_0^1 P_n(x) dx - \int_{-1}^0 P_n(x) dx \right].$$

Застосовуючи другу рекурентну формулу (3.9) і враховуючи, що $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$ (див. пропозицію 3.1 (iii)), для $n \geq 1$ отримуємо

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} \left[\int_0^1 (P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)) dx - \int_{-1}^0 (P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)) dx \right] \\ &= P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0). \end{aligned}$$

В силу рівності із вправи 3.3.а, маємо $c_{2k} = 0$,

$$\begin{aligned} c_{2k+1} &= (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2^k k!} \left[1 + \frac{2k+1}{2(k+1)} \right] \\ &= \frac{(-1)^k (4k+3)}{2^{k+1}} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

3.4.с. $f_3(x) = |x| \quad (|x| \leq 1).$

Розв’язок. Перший спосіб. Оскільки функція f_3 парна, то $c_{2k+1} = 0$, $c_0 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$. Далі, застосовуючи формулу Родригеса (3.6), для $k = 1, 2, \dots$ маємо

$$\begin{aligned} c_{2k} &= \frac{4k+1}{2^{2k}(2k)!} \int_0^1 x \frac{d^{2k}}{dx^{2k}} (x^2 - 1)^{2k} dx \\ &= \frac{4k+1}{2^{2k}(2k)!} \left[\begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = \frac{d^{2k}}{dx^{2k}} (x^2 - 1)^{2k} \quad v = \frac{d^{2k-1}}{dx^{2k-1}} (x^2 - 1)^{2k} \end{array} \right] \Bigg|_0^1 \\ &= \frac{4k+1}{2^{2k}(2k)!} \left[x \frac{d^{2k-1}}{dx^{2k-1}} (x^2 - 1)^{2k} \Bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{d^{2k-1}}{dx^{2k-1}} (x^2 - 1)^{2k} dx \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{4k+1}{2^{2k}(2k)!} \frac{d^{2k-2}}{dx^{2k-2}} (x^2-1)^{2k} \Big|_0^1 \\
&= \frac{4k+1}{2^{2k}(2k)!} \frac{d^{2k-2}}{dx^{2k-2}} \sum_{j=0}^{2k} (-1)^j \binom{2k}{j} x^{2j} \Big|_{x=0} \\
&= (-1)^{k-1} \frac{4k+1}{2^{2k}(2k)!} \binom{2k}{k-1} (2k-2)! \\
&= (-1)^{k-1} \frac{4k+1}{2^{2k}(2k)!} \frac{(2k)!}{(k-1)!(k+1)!} (2k-2)! \\
&= (-1)^{k-1} \frac{4k+1}{2^{k+1}(k+1)!} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2k-1}.
\end{aligned}$$

Другий спосіб. Оскільки функція f_3 парна, то $c_{2k+1} = 0$ ($k = 0, 1, \dots$).

Насамперед, $c_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |x| dx = \frac{1}{2}$. Далі, застосовуючи другу рекурентну формулу (3.9) і враховуючи, що $P_n(1) = 1$ (див. пропозицію 3.1 (iii)), маємо

$$\begin{aligned}
c_{2k} &= 2 \left(2k + \frac{1}{2} \right) \int_0^1 x P_{2k}(x) dx = \int_0^1 x (P'_{2k+1}(x) - P'_{2k-1}(x)) dx \\
&= \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = (P'_{2k+1}(x) - P'_{2k-1}(x)) dx & v = P_{2k+1}(x) - P_{2k-1}(x) \end{array} \right] \Big|_0^1 \\
&= \int_0^1 P_{2k-1}(x) dx - \int_0^1 P_{2k+1}(x) dx \\
&= \frac{1}{4k-1} \int_0^1 (P'_{2k}(x) - P'_{2k-2}(x)) dx - \frac{1}{4k+3} \int_0^1 (P'_{2k+2}(x) - P'_{2k}(x)) dx \\
&= \frac{1}{4k-1} [P_{2k}(x)|_0^1 - P_{2k-2}(x)|_0^1] - \frac{1}{4k+3} [P_{2k+2}(x)|_0^1 - P_{2k}(x)|_0^1] \\
&= \frac{1}{4k-1} [P_{2k-2}(0) - P_{2k}(0)] - \frac{1}{4k+3} [P_{2k}(0) - P_{2k+2}(0)].
\end{aligned}$$

Використовуючи рівність із вправи 3.3.а, отримуємо

$$c_{2k} = \frac{1}{4k-1} \left[-\frac{2k}{2k-1} - 1 \right] P_{2k}(0) - \frac{1}{4k+3} \left[1 + \frac{2k+1}{2k+2} \right] P_{2k}(0)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(-\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+2} \right) P_{2k}(0) = -\frac{4k+1}{(2k-1)(2k+2)} P_{2k}(0) \\
 &= (-1)^{k-1} \frac{4k+1}{2k-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2^{k+1}(k+1)!} \quad (k = 1, 2, \dots).
 \end{aligned}$$

3.5. Показати, що

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{j \leq n/2} \frac{(-1)^j (2n-2j)! x^{n-2j}}{j!(n-j)!(n-2j)!}.$$

Розв’язок. Застосовуючи формулу Родригеса (3.6), розвинення $(x^2 - 1)^n$ за формулою біному Ньютона і рівність

$$\frac{d^n}{dx^n} x^k = \begin{cases} 0, & k < n, \\ \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n}, & k \geq n, \end{cases}$$

маємо

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = \frac{1}{2^n n!} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \frac{d^n}{dx^n} x^{2(n-j)} \\
 &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{j \leq n/2} (-1)^j \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{(2n-2j)!}{(2n-2j-n)!} x^{2n-2j-n} \\
 &= \frac{1}{2^n} \sum_{j \leq n/2} (-1)^j \frac{(2n-2j)!}{j!(n-j)!(n-2j)!} x^{n-2j}.
 \end{aligned}$$

3.6. Показати, що

$$\int_{-1}^1 |P_n(x)| dx \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

де C – деяка стала.

Розв’язок. Застосовуючи нерівність Шварца (теорема 23) і співвідношення ортогональності поліномів Лежандра (теорема 3.4), маємо

$$\int_{-1}^1 |P_n(x)| dx \leq \sqrt{2} \left(\int_{-1}^1 |P_n(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \sqrt{2} \left(\frac{2}{2n+1} \right)^{1/2} \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}.$$

3.7. Нехай f – неперервно диференційовна функція на відрізку $[-1, 1]$. Довести, що для коефіцієнтів Фур'є функції f за системою Лежандра справедлива оцінка

$$|c_n| \leq \frac{A}{\sqrt{n}} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

де A – деяка стала.

Вказівка: використати рекурентну формулу, пропозицію 3.1 (iii) і вправу 3.6.

Розв'язок. При $n = 1$ потрібна нерівність випливає з наступної

$$|c_1| = \left| \frac{3}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_1(x) dx \right| \leq 3 \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|.$$

Нехай $n \geq 2$. Із рекурентної формули (3.9) маємо

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) [P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\begin{array}{l} u = f(x) \quad du = f'(x) dx \\ dv = (P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)) dx \quad v = P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x) \end{array} \right] \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{2} \left[f(x) (P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 f'(x) (P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)) dx \right]. \end{aligned}$$

За пропозицією 3.1 (iii), подвійна підстановка в правій частині дорівнює нулю. Оскільки f' обмежена на $[-1, 1]$, то знайдеться така стала C , що $|f(x)| \leq C$ для всіх $x \in [-1, 1]$. Тому, використовуючи результат вправи 3.6, отримуємо

$$\begin{aligned} |c_n| &\leq \frac{C}{2} \int_{-1}^1 (|P_{n+1}(x)| + |P_{n-1}(x)|) dx \\ &\leq \frac{C}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} \right) \leq \frac{2\sqrt{2}C}{\sqrt{n}} \quad (n \geq 2). \end{aligned}$$

3.8. Показати, що

$$|P_n''(x)| \leq \frac{1}{2}n^4 \quad (|x| \leq 1).$$

Розв’язок. Потрібну нерівність будемо доводити за індукцією. При $n = 1$ вона, очевидно, справедлива, оскільки $P_1''(x) = 0$. При $n = 1$ маємо $P_2''(x) = \left(\frac{1}{2^2 2!} \frac{d^2}{dx^2} (x^2 - 1)^2\right)'' = 3 \leq \frac{1}{2}2^4$, так що і при $n = 2$ потрібна нерівність справедлива.

При $n \geq 1$ із рекурентної формули (3.9) маємо

$$P_{n+1}''(x) - P_{n-1}''(x) = (2n+1)P_n'(x).$$

Звідси випливає, що

$$|P_{n+1}''(x)| \leq |P_{n-1}''(x)| + (2n+1)|P_n'(x)|.$$

Оцінюючи останній доданок справа за допомогою (3.26), отримаємо

$$|P_{n+1}''(x)| \leq |P_{n-1}''(x)| + (2n+1)\frac{n(n+1)}{2}.$$

Згідно з припущенням індукції,

$$|P_{n-1}''(x)| \leq \frac{(n-1)^4}{2}.$$

Тому достатньо показати, що

$$\frac{(n-1)^4}{2} + (2n+1)\frac{n(n+1)}{2} \leq \frac{(n+1)^4}{2}.$$

Аля ця нерівність після елементарних перетворень зводиться до наступної

$$6n^3 - 3n^2 + 7n \geq 0,$$

яка, очевидно, справедлива при $n \geq 1$.

3.9. Довести рівності

$$\begin{aligned} (1-x^2) \frac{d}{dx} P_n(x) &= \frac{n(n+1)}{2n+1} [P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)] \\ &= -nxP_n(x) + nP_{n-1}(x) = (n+1)xP_n(x) - (n+1)P_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Розв'язок. Перший спосіб. Оскільки поліноми Лежандра $P_n(x)$ задовольняють диференціальне рівняння Лежандра (3.18), то

$$(1 - x^2) P_n''(x) = 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

Перепишемо цю рівність у наступному вигляді

$$\frac{d}{dx} [(1 - x^2) P_n'(x)] = -n(n+1)P_n(x)$$

і проінтегруємо її від x до 1. В результаті отримаємо

$$-(1 - x^2) P_n'(x) = -n(n+1) \int_x^1 P_n(t) dt.$$

Використовуючи (3.9), інтеграл в правій частині цієї рівності можемо перетворити до вигляду

$$\begin{aligned} \int_x^1 P_n(t) dt &= \frac{1}{2n+1} \int_x^1 [P_{n+1}'(t) - P_{n-1}'(t)] dt \\ &= \frac{1}{2n+1} [(P_{n+1}(1) - P_{n-1}(1)) - (P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x))] \\ &= \frac{1}{2n+1} (P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)). \end{aligned}$$

Цим доведена перша рівність даної вправи. Дві інші рівності є простим наслідком співвідношень (3.5).

Другий спосіб (доведення першої рівності). Маємо

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^2 - 1)^{n+1} &= (x^2 - 1) \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^2 - 1)^n \\ &+ 2(n+1)x \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n + n(n+1) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n \\ &= 2^n n! (x^2 - 1) \frac{d}{dx} P_n(x) + 2nx \cdot 2^n n! P_n(x) + n(n+1) \Phi_n(x), \end{aligned}$$

де

$$\Phi_n(x) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n.$$

Згідно з (3.8),

$$\Phi_n(x) = \frac{2^n n!}{2n+1} (P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)).$$

Таким чином, за формулою Родригеса (3.6),

$$\begin{aligned} 2(n+1)P_{n+1}(x) &= (x^2 - 1) \frac{d}{dx} P_n(x) \\ &+ 2(n+1)xP_n(x) + \frac{n(n+1)}{2n+1} (P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)). \end{aligned}$$

За рекурентною формулою (3.5),

$$2(n+1)xP_n(x) = \frac{2(n+1)}{2n+1} [(n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)].$$

3.10. Використовуючи рівності із вправи 3.9, довести, що

$$(1-x) [P'_n(x) + P'_{n+1}(x)] = (n+1) [P_n(x) - P_{n+1}(x)].$$

Розв’язок. Із отриманих у вправі 3.9 рівностей маємо

$$\begin{aligned} (1-x^2) P'_n(x) &= (n+1)xP_n(x) - (n+1)P_{n+1}(x), \\ (1-x^2) P'_{n+1}(x) &= -(n+1)xP_{n+1}(x) + (n+1)P_n(x). \end{aligned}$$

Додаючи ці дві рівності, отримуємо

$$(1-x^2) [P'_n(x) + P'_{n+1}(x)] = (1+x)(n+1) [P_n(x) - P_{n+1}(x)].$$

Звідси, очевидно, випливає потрібна рівність.

3.11. Використовуючи інтегральне перетворення Лапласа, довести оцінку

$$|P_n(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} [1 - (1-x^2) \sin^2 \varphi]^{n/2} d\varphi \quad (|x| \leq 1).$$

Розв’язок. Перепишемо інтегральне перетворення Лапласа (3.21) у наступному вигляді

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [x + i(1-x^2)^{1/2} \cos \varphi]^n d\varphi,$$

де i – уявна одиниця. Звідси при $|x| \leq 1$ отримуємо

$$\begin{aligned}
 |P_n(x)| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [x + i(1-x^2)^{1/2} \cos \varphi]^n d\varphi \right| \\
 &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [x^2 + (1-x^2) \cos^2 \varphi]^{n/2} d\varphi \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [x^2 + (1-x^2)(1 - \sin^2 \varphi)]^{n/2} d\varphi \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [1 - (1-x^2) \sin^2 \varphi]^{n/2} d\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} [1 - (1-x^2) \sin^2 \varphi]^{n/2} d\varphi
 \end{aligned}$$

(остання рівність елементарна).

3.12*. Довести оцінку

$$|P_n(x)| \leq \frac{C}{\sqrt{n(1-x^2)}} \quad (|x| < 1),$$

де C – деяка стала.

Розв’язок. Використовуючи отриману у вправі 3.11 оцінку, застосовуючи послідовно нерівності $\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi$ ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$) і $e^t \geq 1 + t$ ($t \in \mathbb{R}$), при $|x| \leq 1$ знаходимо

$$\begin{aligned}
 |P_n(x)| &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} [1 - (1-x^2) \sin^2 \varphi]^{n/2} d\varphi \\
 &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[1 - (1-x^2) \frac{4}{\pi^2} \varphi^2 \right]^{n/2} d\varphi \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} e^{-(1-x^2) \frac{4}{\pi^2} \varphi^2 \cdot \frac{n}{2}} d\varphi \\
 &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{2n(1-x^2)}{\pi^2} \varphi^2} d\varphi.
 \end{aligned}$$

Але із рівності (2.13) при $a > 0$ маємо

$$\int_0^\infty e^{-a\varphi^2} d\varphi = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \int_0^\infty e^{-\pi t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-\pi t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

і, таким чином,

$$|P_n(x)| \leq \frac{2}{\pi} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n(1-x^2)/\pi^2}} = \frac{\sqrt{\pi/2}}{\sqrt{n(1-x^2)}}.$$

Література

1. В. И. Коляда, А. А. Кореновский. Введение в анализ Фурье. Одесса, ОНУ, 2014. – 140 с.

Навчальне видання

Коляда Віктор Іванович
Кореновський Анатолій Олександрович
Шанін Руслан Васильович

АНАЛІЗ ФУР'Є У ВПРАВАХ

ПРАКТИКУМ
для студентів
факультету математики, фізики та інформаційних
технологій спеціальностей 111 «Математика»
та 113 «Прикладна математика»

В авторській редакції

Підп. до друку 19.02.2022. Формат 60x84/16.
Ум.-друк. арк. 6,74. Наклад 17 пр.
Зам. № 2420.

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.
65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12, Україна
Тел.: (048) 723 28 39, e-mail: druk@onu.edu.ua