

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова  
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій  
Кафедра методів математичної фізики

## Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Задача повздовжнього зсуву для смуги, що послаблена  
тріщиною»

«The antiplane problem of the elasticity theory for a strip  
weakened by a crack»

Виконав: здобувач денної форми навчання  
спеціальності 113 Прикладна математика  
Освітня програма «Прикладна математика»  
Зайцев Микола Дмитрович

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Журавльова З. Ю. \_\_\_\_  
Рецензент: доктор фіз.-мат. наук, проф. Вайсфельд Н. Д.

Рекомендовано до захисту:

Захищено на засіданні ЕК № \_\_\_\_\_

Протокол засідання кафедри

Протокол № \_\_\_\_ від \_\_\_\_\_ 2024 р.

№ \_\_\_\_ від \_\_\_\_\_ 2024 р.

Оцінка \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_

Завідувач кафедри

Голова ЕК

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Одеса — 2024 р.

# ЗМІСТ

<b>Вступ</b>	3
<b>1 Основна частина</b>	4
1.1 Загальні відомості . . . . .	4
1.2 Постановка задачі . . . . .	4
1.3 Математичне формулювання задачі . . . . .	5
1.4 Аналітичний розв'язок задачі . . . . .	6
1.4.1 Зведення задачі до одновимірної . . . . .	6
1.4.2 Розв'язання крайової задачі у просторі трансформант	8
1.4.3 Обернення інтегрального перетворення . . . . .	10
1.4.4 Сингулярне інтегральне рівняння для відшукування не- відомої функції стрибка . . . . .	12
1.4.5 Коефіцієнти інтенсивності напружень . . . . .	16
<b>2 Графічні результати</b>	19
2.1 Необхідні параметри та функції . . . . .	19
2.2 Графічні результати та їх аналіз . . . . .	19
<b>Висновки</b>	29
<b>Список літератури</b>	30

## ВСТУП

Дана робота присвячена антиплоскій задачі теорії пружності для смуги що послаблена тріщиною, побудові аналітичного розв'язку задачі при прикладанні навантаження, вивченню переміщень та напружень через побудову графічних розрахунків по області для даної задачі при заданих навантаженнях та для конкретних параметрів матеріалів та розташувань тріщини.

Мета – дослідження напружено-деформівного стану пружної смуги, що знаходиться в умовах антиплоскої деформації та послаблена тріщиною, а також коефіцієнтів інтенсивності напружень.

Об'єкт – пружна смуга, що послаблена тріщиною, в умовах антиплоскої деформації.

Предмет – напружено-деформівний стан пружної смуги, що послаблена тріщиною, в умовах антиплоскої деформації.

Методи досліджень – метод інтегральних перетворень, функції Гріна, метод ортогональних поліномів.

Актуальність теми. Антиплоскі задачі теорії пружності займають важливе місце в механіці деформівного твердого тіла, що пов'язано з їх роллю при моделюванні різноманітних інженерних задач.

## РОЗДІЛ 1

### ОСНОВНА ЧАСТИНА

#### 1.1 Загальні відомості

Постановка антиплоскої задачі теорії пружності. До тіла прикладене зовнішнє навантаження, направлене вздовж осі  $Oz$  і яке не залежить від змінної  $z$ . Переміщення вздовж вісей  $Ox$  та  $Oy$  малі, ми можемо вважати що вони дорівнюють нулю, тобто  $u = v = 0$ ,  $w = w(x,y)$ . З трьох рівнянь Ламе перші два перетворюються на тотожність, а останнє має вид:

$$G\Delta w + Z = 0, \quad \Delta w = -\frac{Z}{G}$$

За законом Гука будуть відмінні від нуля тільки два напруження:

$$\tau_{xz} = G\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = G\frac{\partial w}{\partial y}$$

#### 1.2 Постановка задачі

Розглядається пружна смуга  $-\infty < x < \infty$ ,  $0 < y < a$ , що знаходиться в умовах антиплоскої деформації. На грань  $y = a$  діє навантаження інтенсивності  $p(x)$ . Грань  $y = 0$  знаходиться в умовах зчеплення. Усередині смуги на відріжку  $x = 0$ ,  $c_0 < y < c_1$  розташована тріщина, на береги якої діє навантаження  $q(y)$ .

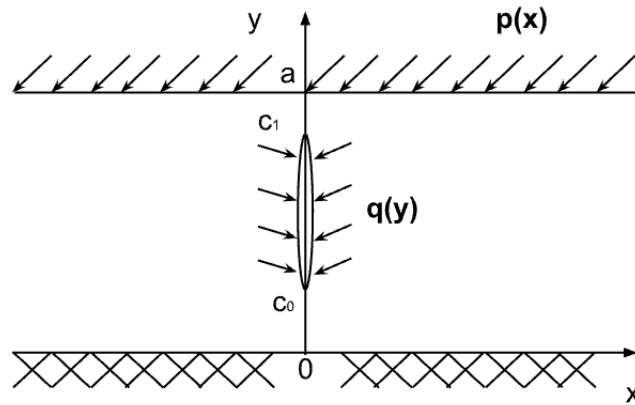


Рис. 1.1. Візуалізація антиплоскої задачі теорії пружності для нескінченної смуги, що послаблена тріщиною

### 1.3 Математичне формулювання задачі

Крайову задачу можна записати наступним чином:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < y < a \\ w|_{y=0} = 0, \quad \tau_{yz}|_{y=a} = p(x) \\ w \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \pm\infty \\ \langle w(0,y) \rangle = w(-0,y) - w(+0,y) = \chi(y) \\ \langle \tau_{xz}(0,y) \rangle = \tau_{xz}(-0,y) - \tau_{xz}(+0,y) = 0 \\ \tau_{xz}|_{x=\pm 0} = q(y) \end{array} \right.$$

або у термінах переміщень

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < y < a \\ w|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y}|_{y=a} = \frac{p(x)}{G} \\ w \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \pm\infty \\ \langle w(0,y) \rangle = w(-0,y) - w(+0,y) = \chi(y) \\ \langle \frac{\partial w}{\partial x}(0,y) \rangle = \frac{\partial w}{\partial x}(-0,y) - \frac{\partial w}{\partial x}(+0,y) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x}|_{x=\pm 0} = \frac{q(y)}{G} \end{array} \right.$$

## 1.4 Аналітичний розв'язок задачі

### 1.4.1 Зведення задачі до одновимірної

Для того, щоб застосувати інтегральне перетворення за узагальненою схемою[1], його потрібно застосувати по тій змінній, по якій терплять стрибок переміщення, тобто в даному випадку – по  $x$ . За даною змінною можна застосувати повне перетворення Фур'є

$$w_\alpha(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x,y)e^{i\alpha x} dx$$

Формула оберненого інтегрального перетворення має наступний вигляд

$$w(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} w_\alpha(y)e^{-i\alpha x} d\alpha$$

Помножимо обидві частини диференціального рівняння крайової задачі на  $e^{i\alpha x}$  та проінтегруємо по  $x$  у межах від  $-\infty$  до  $+\infty$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} \right] e^{i\alpha x} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} e^{i\alpha x} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} e^{i\alpha x} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} e^{i\alpha x} dx + \frac{d^2}{d^2 y} w_\alpha(y) \end{aligned}$$

Перший інтеграл інтегруємо по частинам за узагальненою схемою, враховуючи крайову умову за змінною  $x$  ( $w(x,0) = 0$ ), те, що на нескінченності переміщення та напруження прямують до нуля ( $w|_{x \rightarrow \infty} = 0$ ,  $w'|_{x \rightarrow \infty} = 0$ ) та умови на тріщині:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} w''(x,y)e^{i\alpha x} dx &= \left( \int_{-\infty}^{-0} + \int_{+0}^{+\infty} \right) w''(x,y)e^{i\alpha x} dx = [w'(x,y)e^{i\alpha x}] \Big|_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow -0} + \\
&+ [w'(x,y)e^{i\alpha x}] \Big|_{x \rightarrow +0}^{x \rightarrow +\infty} - i\alpha \left( \int_{-\infty}^{-0} + \int_{+0}^{+\infty} \right) w'(x,y)e^{i\alpha x} dx = \\
&= [w'(-0,y) - w'(0,y)] - i\alpha \left( [w(x,y)e^{i\alpha x}] \Big|_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow -0} + [w(x,y)e^{i\alpha x}] \Big|_{x \rightarrow +0}^{x \rightarrow +\infty} - \right. \\
&- i\alpha \left. \int_{-\infty}^{-0} + \int_{+0}^{+\infty} w(x,y)e^{i\alpha x} dx \right) = \langle w'(0,y) \rangle - i\alpha \langle w(0,y) \rangle - \\
&- \alpha^2 \int_{-\infty}^{+\infty} w(x,y)e^{i\alpha x} dx = -i\alpha\chi(y) - \alpha^2 w_\alpha(y)
\end{aligned}$$

Таким чином рівняння у просторі трансформант приймає вигляд

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 w_\alpha(y)}{d^2 y} - \alpha^2 w_\alpha(y) &= f(y), \\
f(y) &= \begin{cases} i\alpha\chi(y), & c_0 < y < c_1 \\ 0, & y \notin (c_0, c_1) \end{cases}
\end{aligned}$$

Застосовуючи інтегральне перетворення Фур'є до крайових умов вихідної задачі за змінною  $y$  отримуємо

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} w(x,0)e^{i\alpha x} dx &= w_\alpha(0) = 0 \\
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial w(x,a)}{\partial y} e^{i\alpha x} dx &= \frac{dw_\alpha(a)}{dy} = \frac{p_\alpha}{G}, \quad p_\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)e^{i\alpha x} dx
\end{aligned}$$

В результаті приходимо до наступної одновимірної крайової задачі у просторі трансформант

$$\begin{cases} \frac{d^2 w_\alpha}{d^2 y} - \alpha^2 w_\alpha = f(y), & 0 < y < a \\ w_\alpha(0) = 0, & \frac{dw_\alpha(a)}{dy} = \frac{p_\alpha}{G} \end{cases}$$

## 1.4.2 Розв'язання крайової задачі у просторі трансформант

Одновимірною крайовою задачею є неоднорідною крайовою задачею, тому її розв'язок можна побудувати за формулою:

$$w_\alpha(y) = \int_0^a f(\eta)G(y,\eta) d\eta + 0 \cdot \psi_0(y) + \frac{p_\alpha}{G} \cdot \psi_1(y)$$

Функцію Гріна будемо будувати за наступною формулою

$$G(y, \eta) = \Phi(y, \eta) - \psi_0(y)U_0[\Phi(y, \eta)] - \psi_1(y)U_1[\Phi(y, \eta)]$$

Побудуємо фундаментальну базисну систему розв'язків (ФБСР). Відповідно визначенню, ФБСР крайової задачі складають функції  $\psi_0(y)$ ,  $\psi_1(y)$  такі, що

$$\begin{cases} \frac{d^2\psi_0}{d^2y} - \alpha^2\psi_0 = 0 \\ \psi_0(0) = 1, \psi_0'(a) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d^2\psi_1}{d^2y} - \alpha^2\psi_1 = 0 \\ \psi_1(0) = 0, \psi_1'(a) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \psi_0(y) &= C_{00}sh|\alpha|(a-y) + \\ &+ C_{01}ch|\alpha|(a-y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_1(y) &= C_{10}sh|\alpha|y + \\ &+ C_{11}ch|\alpha|y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_0'(y) &= -C_{00}|\alpha|ch|\alpha|(a-y) - \\ &- C_{01}|\alpha|sh|\alpha|(a-y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_1'(y) &= C_{10}|\alpha|ch|\alpha|y + \\ &+ C_{11}|\alpha|sh|\alpha|y \end{aligned}$$

$$\psi_0'(a) = 0 \implies C_{00} = 0$$

$$\psi_1(0) = 0 \implies C_{11} = 0$$

$$\psi_0(0) = 1 \implies C_{01} = \frac{1}{ch|\alpha|a}$$

$$\psi_1'(a) = 1 \implies C_{10} = \frac{1}{|\alpha|ch|\alpha|a}$$

$$\psi_0 = \frac{ch(|\alpha|(a-y))}{ch(|\alpha|a)}$$

$$\psi_1 = \frac{sh(|\alpha|y)}{|\alpha|ch(|\alpha|y)}$$

$$\psi_0 = \frac{e^{-|\alpha|y} + e^{-|\alpha|(2a-y)}}{(1 + e^{-2|\alpha|a})}$$

$$\psi_1 = \frac{e^{-|\alpha|(a-y)} - e^{-|\alpha|(a+y)}}{|\alpha|(1 + e^{-2|\alpha|a})}$$

Фундаментальна функцію, що відповідає даному рівнянню, має наступний вигляд

$$\Phi(y, \eta) = -\frac{1}{2|\alpha|}e^{-|\alpha||y-\eta|}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\text{sign}(y-\eta)}{2}e^{-|\alpha||y-\eta|}$$

Підставимо фундаментальну функцію у крайові функціонали задачі

$$U_0[\Phi(y, \eta)] = \Phi(0, \eta) = -\frac{1}{2|\alpha|}e^{-|\alpha|\eta}$$

$$U_1[\Phi(y, \eta)] = \frac{\partial\Phi}{\partial\eta}(a, \eta) = -\frac{1}{2}e^{-|\alpha|(a-\eta)}$$

Тоді функція Гріна має наступний вигляд

$$G(y, \eta) = -\frac{1}{2|\alpha|}e^{-|\alpha||y-\eta|} + \frac{1}{2|\alpha|}e^{-|\alpha|\eta} \frac{\text{ch}(|\alpha|(a-y))}{\text{ch}(|\alpha|a)} - \frac{1}{2|\alpha|}e^{-|\alpha|(a-\eta)} \frac{\text{sh}(|\alpha|y)}{2\text{ch}(|\alpha|y)} =$$

$$= -\frac{1}{2|\alpha|}e^{-|\alpha||y-\eta|} + \frac{1}{2|\alpha|} \frac{e^{-|\alpha|(\eta+y)} + e^{-|\alpha|(2a+\eta-y)} - e^{-|\alpha|(2a-\eta-y)} + e^{-|\alpha|(2a-\eta+y)}}{1 + e^{-2|\alpha|a}}$$

Розв'язок крайової задачі у просторі трансформант можна записати наступним чином:

$$w_\alpha(y) = \frac{1}{2|\alpha|} \int_0^a f(\eta) \left[ -e^{-|\alpha||y-\eta|} + \frac{e^{-|\alpha|(\eta+y)} + e^{-|\alpha|(2a+\eta-y)} - e^{-|\alpha|(2a-\eta-y)} + e^{-|\alpha|(2a-\eta+y)}}{1 + e^{-2|\alpha|a}} \right] d\eta +$$

$$+ \frac{p_\alpha}{G} \frac{e^{-|\alpha|(a-y)} - e^{-|\alpha|(a+y)}}{|\alpha|(1 + e^{-2|\alpha|a})}$$

### 1.4.3 Обернення інтегрального перетворення

Застосуємо формулу обернення до розв'язку у просторі трансформант

$$w(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2|\alpha|} \int_0^a f(\eta) \left[ -e^{-|\alpha||y-\eta|} + \frac{e^{-|\alpha|(\eta+y)} + e^{-|\alpha|(2a+\eta-y)} - e^{-|\alpha|(2a-\eta-y)} + e^{-|\alpha|(2a-\eta+y)}}{1 + e^{-2|\alpha|a}} \right] d\eta + \frac{1}{G} \frac{e^{-|\alpha|(a-y)} - e^{-|\alpha|(a+y)}}{|\alpha|(1 + e^{-2|\alpha|a})} \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi) e^{i|\alpha|\xi} d\xi \right) e^{-i|\alpha|x} d\alpha$$

Змінимо порядок інтегрування

$$w(x,y) = \frac{1}{4\pi} \int_0^a \chi(\eta) d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\alpha) i \left[ -e^{-|\alpha||y-\eta|} + \frac{e^{-|\alpha|(\eta+y)} + e^{-|\alpha|(2a+\eta-y)} - e^{-|\alpha|(2a-\eta-y)} + e^{-|\alpha|(2a-\eta+y)}}{1 + e^{-2|\alpha|a}} \right] e^{-i|\alpha|x} d\alpha + \frac{1}{G} \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|\alpha|(a-y)} - e^{-|\alpha|(a+y)}}{\alpha(1 + e^{-2|\alpha|a})} e^{-i|\alpha|(\xi-x)} d\alpha$$

Представимо  $e^{-i\alpha x}$  у вигляді  $\cos(\alpha x) - i\sin(\alpha x)$

$$w(x,y) = \frac{1}{4\pi} \int_0^a \chi(\eta) d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\alpha) i \left[ -e^{-|\alpha||y-\eta|} + \frac{e^{-|\alpha|(\eta+y)} + e^{-|\alpha|(2a+\eta-y)} - e^{-|\alpha|(2a-\eta-y)} + e^{-|\alpha|(2a-\eta+y)}}{1 + e^{-2|\alpha|a}} \right] (\cos(\alpha x) - i\sin(\alpha x)) d\alpha + \frac{1}{G} \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|\alpha|(a-y)} - e^{-|\alpha|(a+y)}}{\alpha(1 + e^{-2|\alpha|a})} (\cos\alpha(\xi - x) - i\sin\alpha(\xi - x)) d\alpha$$

Скористаємося парністю функції, позбудемося модуля  $\alpha$

$$w(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{c_0}^{c_1} \chi(\eta) d\eta \int_0^{\infty} \left[ -e^{-\alpha|y-\eta|} + \frac{e^{-\alpha(\eta+y)} + e^{-\alpha(2a+\eta-y)} - e^{-\alpha(2a-\eta-y)} + e^{-\alpha(2a-\eta+y)}}{1 + e^{-2\alpha a}} \right] \sin(\alpha x) d\alpha + \frac{2}{G} \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi) d\xi \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha(a-y)} - e^{-\alpha(a+y)}}{\alpha(1 + e^{-2\alpha a})} \cos\alpha(\xi - x) d\alpha$$

Для обчислення інтегралів вигляду  $\int_0^\infty e^{-\alpha z} \sin(\alpha X) d\alpha$  скористаємось формулою з довідника[2] № 3.893(1)

Тоді отримуємо

$$w(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{c_0}^{c_1} \chi(\eta) \left[ \frac{x}{(y-\eta)^2 + x^2} + \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha(\eta+y)} + e^{-\alpha(2a+\eta-y)} - e^{-\alpha(2a-\eta-y)} + e^{-\alpha(2a-\eta+y)}}{1 + e^{-2\alpha a}} \sin(\alpha x) d\alpha \right] d\eta + \frac{2}{G} \int_{-\infty}^\infty p(\xi) d\xi \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha(a-y)} - e^{-\alpha(a+y)}}{\alpha(1 + e^{-2\alpha a})} \cos \alpha(\xi - x) d\alpha$$

Друга частина - слабкозбіжний інтеграл, отже можемо скористатися формулою [3]  $\int_0^\infty a(x) dx = \int_0^\infty \tilde{a}(x) dx + \left( \int_0^A a(x) dx - \int_0^\infty \tilde{a}(x) dx \right)$ . Також скористаємось формулою з довідника[2] № 3.951(3) для обчислення інтегралів вигляду  $\int_0^\infty \frac{e^{-\gamma x} - e^{-\beta x}}{x} \cos(bx) dx$

$$w(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{c_0}^{c_1} \chi(\eta) \left[ \frac{x}{(y-\eta)^2 + x^2} + \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha(\eta+y)} + e^{-\alpha(2a+\eta-y)} - e^{-\alpha(2a-\eta-y)} + e^{-\alpha(2a-\eta+y)}}{1 + e^{-2\alpha a}} \sin(\alpha x) d\alpha \right] d\eta + \frac{1}{\pi G} \int_{-\infty}^\infty p(\xi) \ln \frac{(\xi-x)^2 + (a+y)^2}{(\xi-x)^2 + (a-y)^2} d\xi + \frac{2}{\pi G} \int_{-\infty}^\infty p(\xi) \left( \int_0^A \frac{e^{-\alpha(a+y)} - e^{-\alpha(a-y)}}{\alpha(1 + e^{-2\alpha a})} \cos(\alpha(\xi-x)) d\alpha - \int_0^A \frac{e^{-\alpha(a+y)} - e^{-\alpha(a-y)}}{\alpha} \cos(\alpha(\xi-x)) d\alpha \right) d\xi$$

Отримуємо формули для напружень

$$\begin{aligned} \tau_{xz}(x,y) = & \frac{G}{2\pi} \int_{c_0}^{c_1} \chi(\eta) \left[ \frac{(y-\eta)^2 - x^2}{((y-\eta)^2 + x^2)^2} + \right. \\ & \left. + \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha(\eta+y)} + e^{-\alpha(2a+\eta-y)} - e^{-\alpha(2a-\eta-y)} + e^{-\alpha(2a-\eta+y)}}{1 + e^{-2\alpha a}} \alpha \cos(\alpha x) d\alpha \right] d\eta + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty p(\xi) \left( \frac{-2\xi + 2x}{(\xi-x)^2 + (a+y)^2} - \frac{-2\xi + 2x}{(\xi-x)^2 + (a-y)^2} \right) d\xi + \\ & + \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^\infty p(\xi) \left( \int_0^A \frac{e^{-\alpha(a+y)} - e^{-\alpha(a-y)}}{\alpha(1 + e^{-2\alpha a})} \alpha \sin(\alpha(\xi-x)) d\alpha - \right. \\ & \left. - \int_0^A \frac{e^{-\alpha(a+y)} - e^{-\alpha(a-y)}}{\alpha} \alpha \sin(\alpha(\xi-x)) d\alpha \right) d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz}(x,y) = & \frac{1}{2\pi} \int_{c_0}^{c_1} \chi(\eta) \left[ \frac{2x(y-\eta)}{((y-\eta)^2 + x^2)^2} + \right. \\ & \left. + \int_0^\infty \frac{-e^{-\alpha(\eta+y)} + e^{-\alpha(2a+\eta-y)} - e^{-\alpha(2a-\eta-y)} - e^{-\alpha(2a-\eta+y)}}{1 + e^{-2\alpha a}} \sin(\alpha x) d\alpha \right] d\eta + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty p(\xi) \left( \frac{2(a+y)}{(\xi-x)^2 + (a+y)^2} - \frac{2(a-y)}{(\xi-x)^2 + (a-y)^2} \right) d\xi + \\ & + \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^\infty p(\xi) \left( \int_0^A \frac{-e^{-\alpha(a+y)} - e^{-\alpha(a-y)}}{\alpha(1 + e^{-2\alpha a})} \alpha \cos(\alpha(\xi-x)) d\alpha - \right. \\ & \left. - \int_0^A \frac{-e^{-\alpha(a+y)} - e^{-\alpha(a-y)}}{\alpha} \alpha \cos(\alpha(\xi-x)) d\alpha \right) d\xi \end{aligned}$$

#### 1.4.4 Сингулярне інтегральне рівняння для відшукування невідомої функції стрибка

Отримані вирази для переміщень та напружень не є остаточним результатом, так як вони містять невідому функцію стрибка  $\chi(\eta)$ . Для її знаходження потрібно реалізувати умову на тріщині  $\tau_{xz}|_{x=\pm 0} = q(y)$ ,  $c_0 < y < c_1$  що приведе до сингулярного інтегрального рівняння

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \int_{c_0}^{c_1} \chi(\eta) \left[ \frac{1}{(y-\eta)^2} + \right. \\
& \left. + \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha(\eta+y)} + e^{-\alpha(2a+\eta-y)} - e^{-\alpha(2a-\eta-y)} + e^{-\alpha(2a-\eta+y)}}{1 + e^{-2\alpha a}} \alpha d\alpha \right] d\eta = \\
& = q(y) - \frac{2}{G} \int_{-\infty}^\infty p(\xi) d\xi \int_0^\infty \alpha \frac{e^{-\alpha(a-y)} + e^{-\alpha(a+y)}}{\alpha(1 + e^{-2\alpha a})} \cos(\alpha x) d\alpha
\end{aligned}$$

Дане рівняння можна розв'язати методом ортогональних поліномів[4]. Для зручності введемо такі позначення

$$\begin{aligned}
K(y, \eta) &= \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha(\eta+y)} + e^{-\alpha(2a+\eta-y)} - e^{-\alpha(2a-\eta-y)} + e^{-\alpha(2a-\eta+y)}}{1 + e^{-2\alpha a}} \alpha d\alpha \\
f(y) &= q(y) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty p(\xi) \left( \frac{-2\xi}{\xi^2 + (a+y)^2} - \frac{-2\xi}{\xi^2 + (a-y)^2} \right) d\xi + \\
& + \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^\infty p(\xi) \left( \int_0^A \frac{e^{-\alpha(\eta+y)} - e^{-\alpha(\eta-y)}}{\alpha(1 + e^{-2\alpha a})} \alpha \sin \alpha \xi d\alpha - \right. \\
& \left. - \int_0^A \frac{e^{-\alpha(\eta+y)} - e^{-\alpha(\eta-y)}}{\alpha} \alpha \sin \alpha \xi d\alpha \right) d\xi
\end{aligned}$$

Тоді рівняння набуде наступного компактного вигляду

$$\frac{G}{2\pi} \int_{c_0}^{c_1} \chi(\eta^*) \left[ \frac{1}{(y^* - \eta^*)^2} + K(y^*, \eta^*) \right] d\eta^* = f(y^*), \quad c_0 < y^* < c_1$$

Виконаємо заміну змінних для переходу до проміжку  $[-1, 1]$

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{2\eta^* - (c_0 + c_1)}{c_1 - c_0}, & d\eta &= \frac{2d\eta^*}{c_1 - c_0} \\
y &= \frac{2y^* - (c_0 + c_1)}{c_1 - c_0}
\end{aligned}$$

$$\frac{G}{2\pi} \int_{-1}^1 \tilde{\chi}(\eta) \left[ \frac{1}{(y-\eta)^2} + \tilde{K}(y, \eta) \right] d\eta = \tilde{f}(y), \quad -1 < y < 1$$

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}(\eta) &= \chi\left(\frac{(c_1 - c_0)\eta + (c_1 + c_0)}{2}\right) \\ \tilde{K}(y, \eta) &= \frac{(c_1 - c_0)^2}{4} K\left(\frac{(c_1 - c_0)y + (c_1 + c_0)}{2}, \frac{(c_1 - c_0)\eta + (c_1 + c_0)}{2}\right) \\ \tilde{f}(y) &= \frac{c_1 - c_0}{2} f\left(\frac{(c_1 - c_0)y + (c_1 + c_0)}{2}\right)\end{aligned}$$

Враховуючи що

$$\frac{d^2}{dy^2} \ln |y - \eta| = -\frac{d^2}{dy^2} \ln |y - \eta| = -\frac{d}{dy} \operatorname{sgn}(y - \eta) \frac{1}{|y - \eta|} = \frac{d}{dy} \frac{1}{y - \eta} = \frac{1}{(y - \eta)^2}$$

Перепишемо рівняння у вигляді

$$\frac{G}{2\pi} \left( \frac{d^2}{dy^2} \int_{-1}^1 \tilde{\chi}(\eta) \ln \frac{1}{|y - \eta|} d\eta + \int_{-1}^1 \tilde{\chi}(\eta) \tilde{K}(y, \eta) d\eta \right) = \tilde{f}(y), \quad -1 < y < 1$$

Відповідно до методу ортогональних поліномів, враховуючи особливості розв'язку на кінцях проміжку інтегрування, будемо шукати невідому функцію  $\tilde{\chi}(\eta)$  у вигляді ряду

$$\tilde{\chi}(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{1 - \eta^2} U_n(\eta)$$

де  $U_n(\eta)$  – поліноми Чебишева другого роду. Підставимо вираз у сингулярне інтегральне рівняння

$$\begin{aligned}& \frac{G}{2\pi} \left( \frac{d^2}{dy^2} \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{1 - \eta^2} U_n(\eta) \ln \frac{1}{|y - \eta|} d\eta + \right. \\ & \left. + \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{1 - \eta^2} U_n(\eta) \tilde{K}(y, \eta) d\eta \right) = \tilde{f}(y), \quad -1 < y < 1\end{aligned}$$

Змінимо порядок сумовування та інтегрування

$$\begin{aligned} & \frac{G}{2\pi} \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{d^2}{dy^2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\eta^2} U_n(\eta) \ln \frac{1}{|y-\eta|} d\eta + \right. \\ & \left. + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{-1}^1 \sqrt{1-\eta^2} U_n(\eta) \tilde{K}(y, \eta) d\eta \right) = \tilde{f}(y), \quad -1 < y < 1 \end{aligned}$$

Скористаємося спектральним співвідношенням[4]

$$\frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-y|} \sqrt{1-y^2} U_n(y) dy = -\pi(n+1)U_n(x), \quad -1 \leq x \leq 1$$

Тоді рівняння набуде вигляду

$$\begin{aligned} -\frac{G}{2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+1)U_n(y) - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{-1}^1 \sqrt{1-\eta^2} U_n(\eta) \tilde{K}(y, \eta) d\eta \right) = \\ = \tilde{f}(y), \quad -1 < y < 1 \end{aligned}$$

Домножимо обидві частини на  $\sqrt{1-y^2}U_m(y)$  та проінтегруємо по  $y$  на проміжку  $[-1, 1]$

$$\begin{aligned} & -\frac{G}{2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+1) \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} U_m(y) U_n(y) dy - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} U_m(y) \int_{-1}^1 \sqrt{1-\eta^2} U_n(\eta) \tilde{K}(y, \eta) d\eta dy \right) = \\ & = \int_{-1}^1 \tilde{f}(y) \sqrt{1-y^2} U_m(y) dy, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Скористаємося ортогональністю поліномів Чебишева 2-го роду

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} U_m(y) U_n(y) dy = \begin{cases} \|U_m\|^2, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

Отримаємо

$$\begin{aligned}
 & -\frac{G}{2} \left( c_m(m+1) \|U_m\|^2 - \right. \\
 & \left. -\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} U_m(y) \int_{-1}^1 \sqrt{1-\eta^2} U_n(\eta) \tilde{K}(y, \eta) d\eta dy \right) = \\
 & = \int_{-1}^1 \tilde{f}(y) \sqrt{1-y^2} U_m(y) dy, \quad m = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Введемо позначення

$$\begin{aligned}
 A_m &= -\frac{G}{2} (m+1) \|U_m\|^2 \\
 D_{mn} &= \frac{G}{2\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} U_m(y) \int_{-1}^1 \tilde{K}(y, \eta) \sqrt{1-\eta^2} U_n(\eta) d\eta dy \\
 f_m &= \int_{-1}^1 \tilde{f}(y) \sqrt{1-y^2} U_m(y) dy
 \end{aligned}$$

Тоді рівняння можна записати у такому компактному вигляді

$$A_m c_m + \sum_{n=0}^{\infty} D_{mn} c_n = f_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Ми отримали нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Для отримання графічних результатів дану систему можна розв'язати методом редукції[5], розглядаючи спочатку  $n, m = \overline{0, N}$ , потім збільшувати кількість рівнянь на  $dN$  та перевіряти критерій збіжності  $\left| c_n^{(N)} - c_n^{(N+dN)} \right| < \varepsilon, n = \overline{0, N}; \left| c_n^{(N+dN)} \right| < \varepsilon, n = \overline{N+1, N+dN}$ .

### 1.4.5 Коефіцієнти інтенсивності напружень

Для обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) запишемо напруження  $\tau_{xz}|_{x=\pm 0} = q(y), c_0 < y < c_1$  у наступному вигляді

$$\tau_{xz}(0, y^*) = \frac{G}{2\pi} \int_{c_0}^{c_1} \chi(\eta^*) \frac{1}{(y^* - \eta^*)^2} d\eta^* + \tau_{xz}^0(0, y^*), \quad c_0 < y^* < c_1$$

де  $\tau_{xz}^0(0, y^*)$  - регулярна частина

Після заміни змінних

$$\eta = \frac{2\eta^* - (c_0 + c_1)}{c_1 - c_0}, \quad d\eta = \frac{2d\eta^*}{c_1 - c_0}$$

$$y = \frac{2y^* - (c_0 + c_1)}{c_1 - c_0}$$

вираз для функції напруження набуде вигляду

$$\tau_{xz}(0, y) = \frac{G}{2\pi} \frac{2d}{c_1 - c_0} \frac{d^2}{dy^2} \int_{-1}^1 \tilde{\chi}(\eta) \ln \frac{1}{|y - \eta|} d\eta + \tilde{\tau}_{xz}^0(0, y), \quad -1 < y < 1$$

Позначимо  $\lambda = \frac{G}{c_1 - c_0}$ . Підставимо вираз для функції  $\tilde{\chi}(\eta)$  та змінимо порядок сумовування та інтегрування

$$\tau_{xz}(0, y) = \frac{\lambda}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{d^2}{dy^2} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \eta^2} U_n(\eta) \ln \frac{1}{|y - \eta|} d\eta +$$

$$+ \tilde{\tau}_{xz}^0(0, y), \quad -1 < y < 1$$

КІН обчислюються за формулою

$$K_{\pm} = \lim_{y \rightarrow \pm 1 \pm 0} \sqrt{\pi(c_1 - c_0)(\pm y - 1)} \tau_{xz}(0, y)$$

Підставимо вираз для  $\tau_{xz}(0, y)$  та скористаємось спектральним співвідношення[4]

$$\frac{1}{\pi} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x - y|} \sqrt{1 - y^2} U_n(y) dy =$$

$$= \frac{|x| U_n(x)}{\sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x^2 - 1} U_n'(x) \operatorname{sgn} x - 0.5(n + 1) U_n(x), \quad |x| > 1$$

Тоді, враховуючи, що

$$U_n(1) = n + 1, \quad U_n(-1) = (-1)^n(n + 1)$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \pm 1 \pm 0} \sqrt{\pi(c_1 - c_0)}(\pm y - 1) \left( \frac{1}{\pi} \frac{d^2}{dy^2} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \eta^2} U_n(\eta) \ln \frac{1}{|y - \eta|} d\eta \right) = \\ = \frac{G}{2} \sqrt{\pi(b_1 - b_0)} (\pm 1)^n (n + 1) \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

В результаті отримаємо формули для обчислення КІН

$$\begin{aligned} K_- &= \lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{\pi(c_1 - c_0)} (-1)^n (n + 1) \frac{1}{\sqrt{2}} \\ K_+ &= \lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{\pi(c_1 - c_0)} (n + 1) \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

## РОЗДІЛ 2

### ГРАФІЧНІ РЕЗУЛЬТАТИ

#### 2.1 Необхідні параметри та функції

Для побудови графіків ми повинні задати функції навантажень  $p(x)$  та  $q(y)$ , значення модуля зсуву  $G$  яке залежить від обраного матеріалу, значення  $a$  від якого залежить розташування верхньої грані смуги, а також значення  $c_0, c_1$  для обрання положення тріщини. Розрахунки та побудову графіків будемо виконувати за допомогою програми на мові Python використовуючи пакети `scipy` для інтегрування та `matplotlib` для побудови графіків.

#### 2.2 Графічні результати та їх аналіз

Побудуємо графічні результати для даної задачі при обранні сталі як матеріала смуги. Значення модулю зсуву для сталі  $G = 79.3$  ГПа. Також оберемо  $a = 10$ ,  $c_0 = 4$ ,  $c_1 = 6$ . Задамо функції навантажень  $p(x) = (x + 1)^2$  на проміжку  $(-1, 1)$ , та  $q(y) = \cos(y)$  на проміжку  $(-1, 1)$ .

Розглянемо графік функції стрибка переміщень на тріщині  $\chi(\eta)$ .

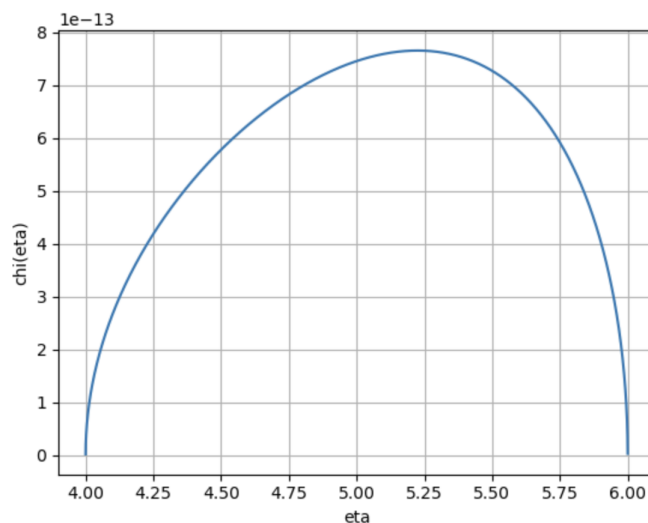


Рис. 2.1. Функція стрибка  $\chi(\eta)$ .

Ми можемо бачити що функція стрибка зростає при наближенні до верхньої грані смуги, так як зростає вплив навантаження  $p(x)$ .

Розглянемо графіки функції переміщень  $w(x,y)$  :

- По вісі  $Ox$  для трьох значень  $y \in (0, 5, 10)$ .
- По вісі  $Oy$  для трьох значень  $x \in (-0.01, 0, 0.01)$ .
- Тривимірний графік функції переміщення  $w(x,y)$

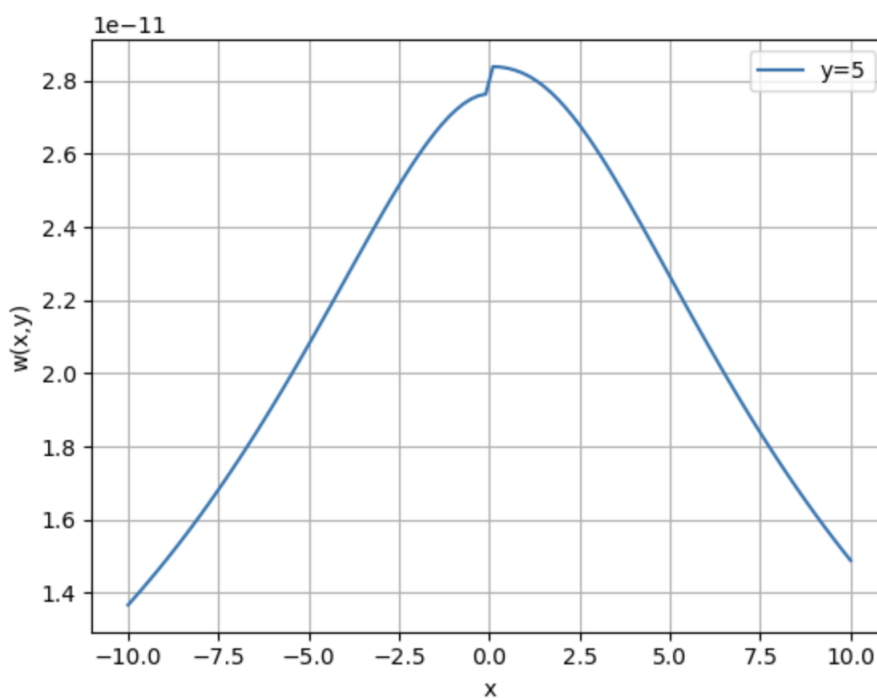


Рис. 2.2. Функція переміщення  $w(x,y)$  при  $y = 5$

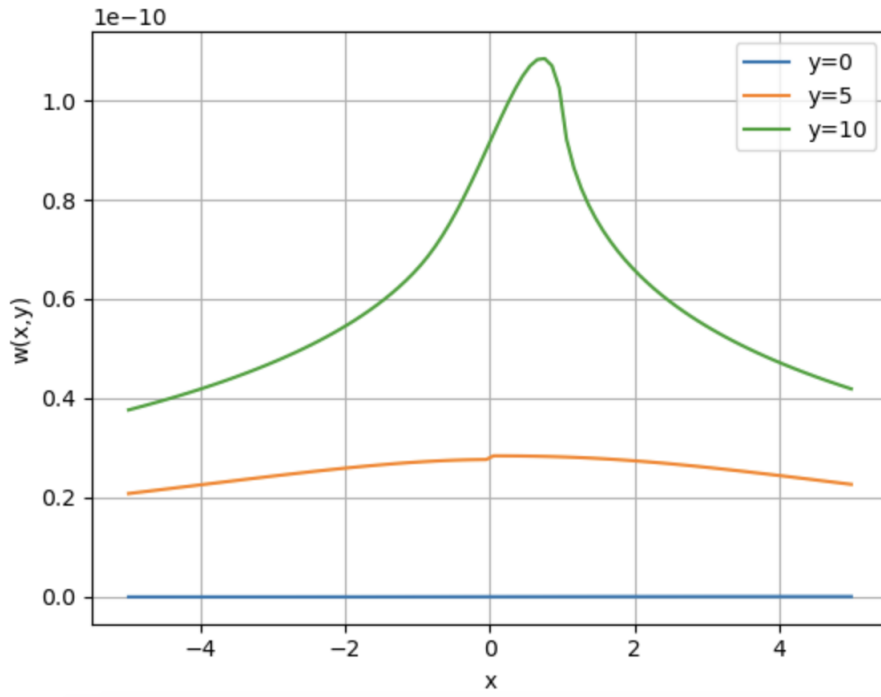


Рис. 2.3. Функція переміщення  $w(x,y)$  при  $y \in (0, 5, 10)$

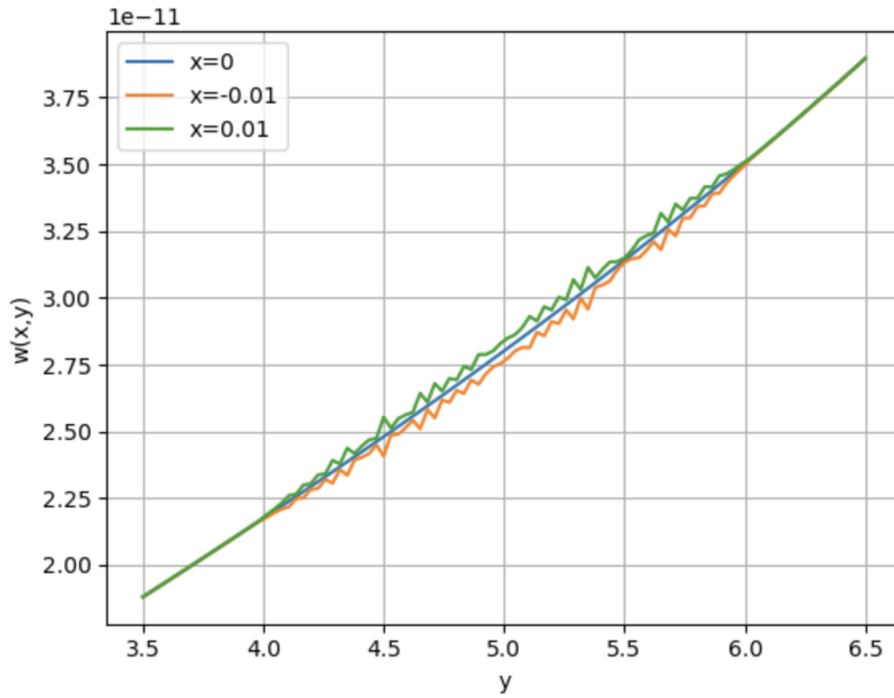


Рис. 2.4. Функція переміщення  $w(x,y)$  при  $x \in (-0.01, 0, 0.01)$

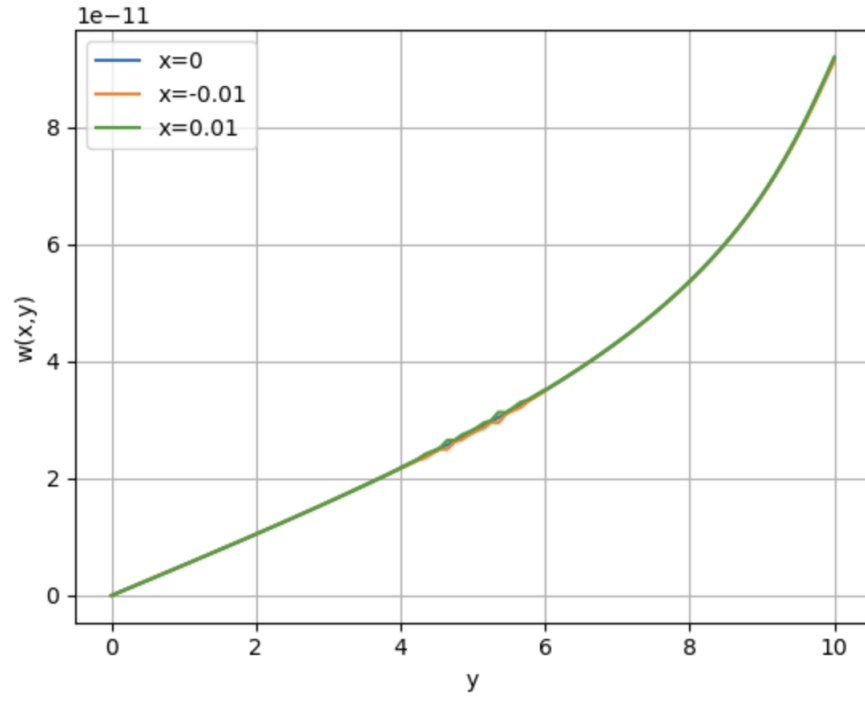


Рис. 2.5. Функція переміщення  $w(x,y)$  при  $x \in (-0.01, 0, 0.01)$

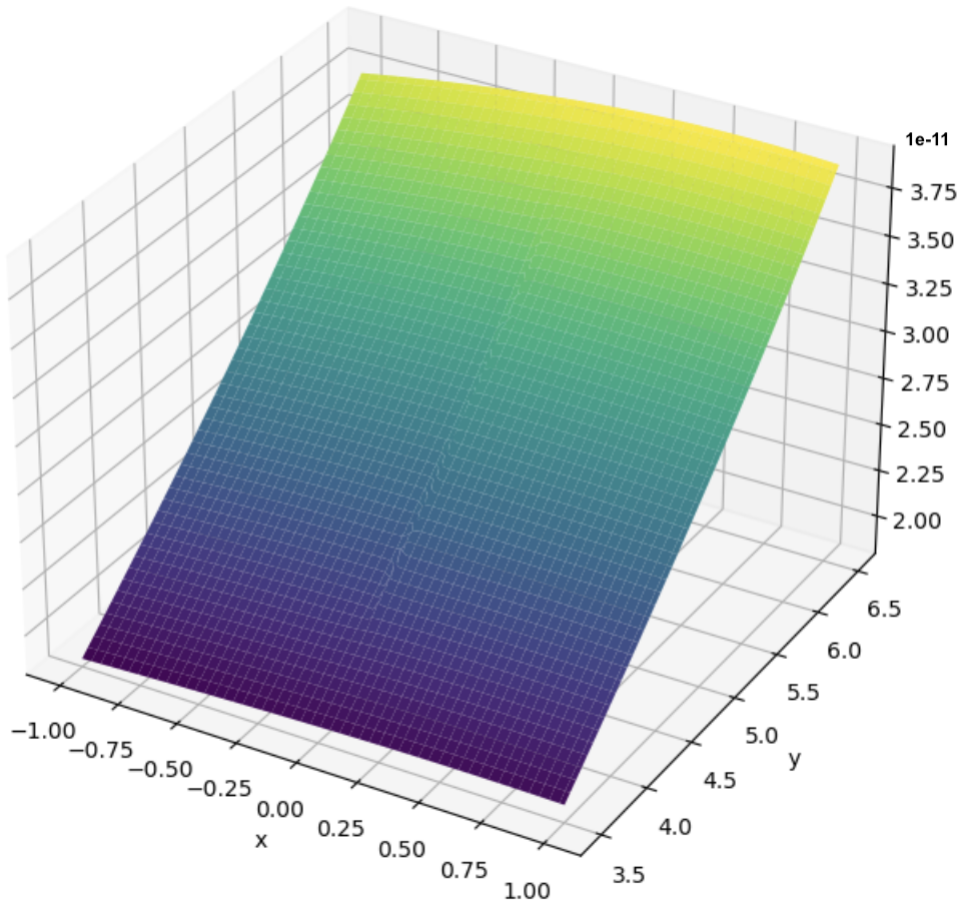


Рис. 2.6. Функція переміщення  $w(x,y)$

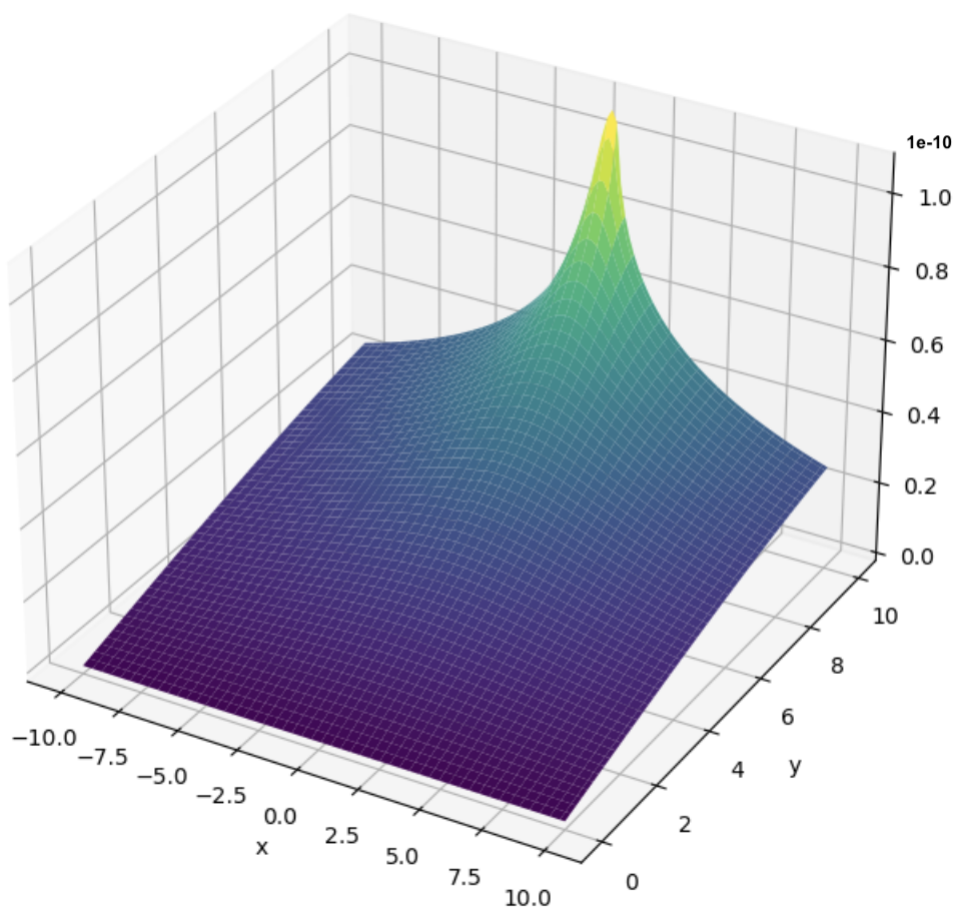


Рис. 2.7. Функція переміщення  $w(x,y)$

На графіках переміщень ми можемо бачити виконання крайової умови  $w(x,0) = 0$  та стрибок функції переміщення  $\langle w(0,y) \rangle$  при проходженні через тріщину. Також можемо бачити вплив навантажень  $q(y)$  на края тріщини та  $p(x)$  на верхню грань смуги.

Розглянемо графіки функції напружень  $\tau_{xz}$ :

- По вісі  $Ox$  для трьох значень  $y \in (0, 5, 9.9)$ .
- Тривимірний графік функції напруження  $\tau_{xz}$

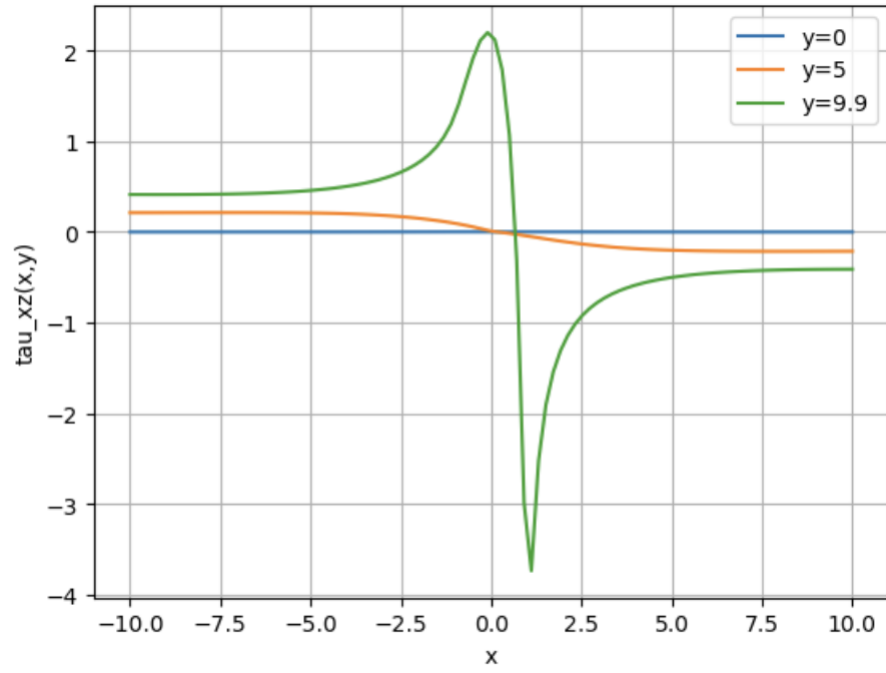


Рис. 2.8. Функція напруження  $\tau_{xz}$  при  $y \in (0, 5, 9.9)$

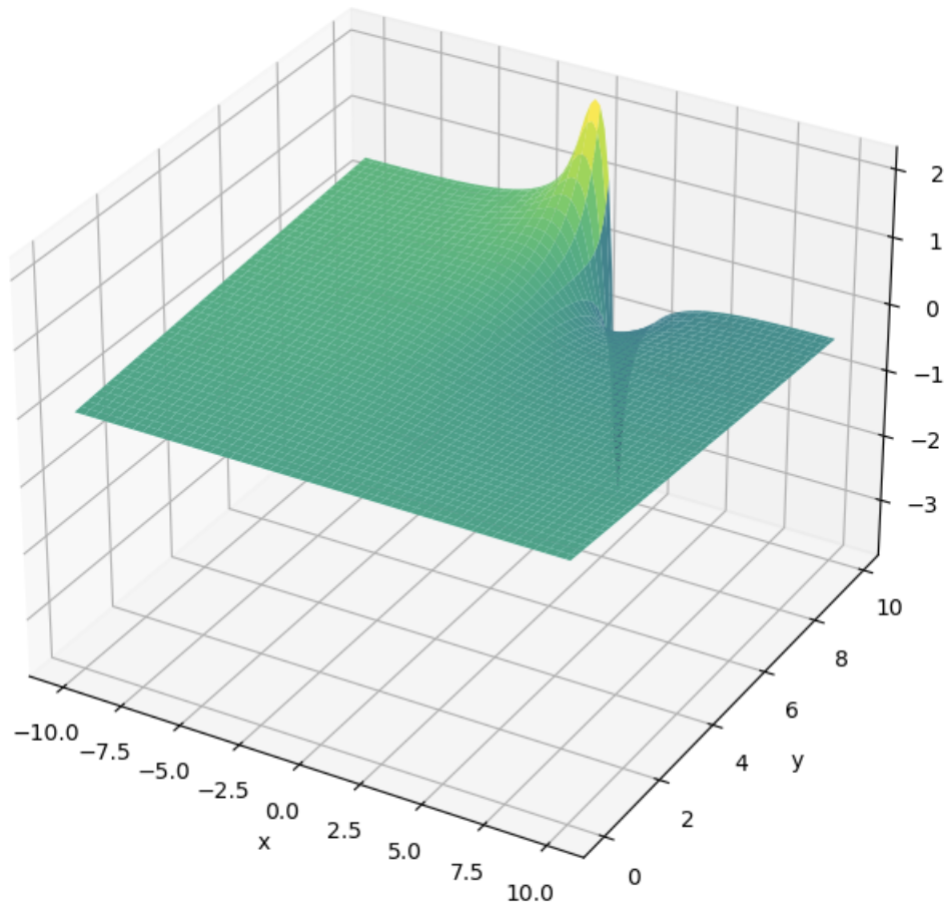


Рис. 2.9. Функція напруження  $\tau_{xz}$

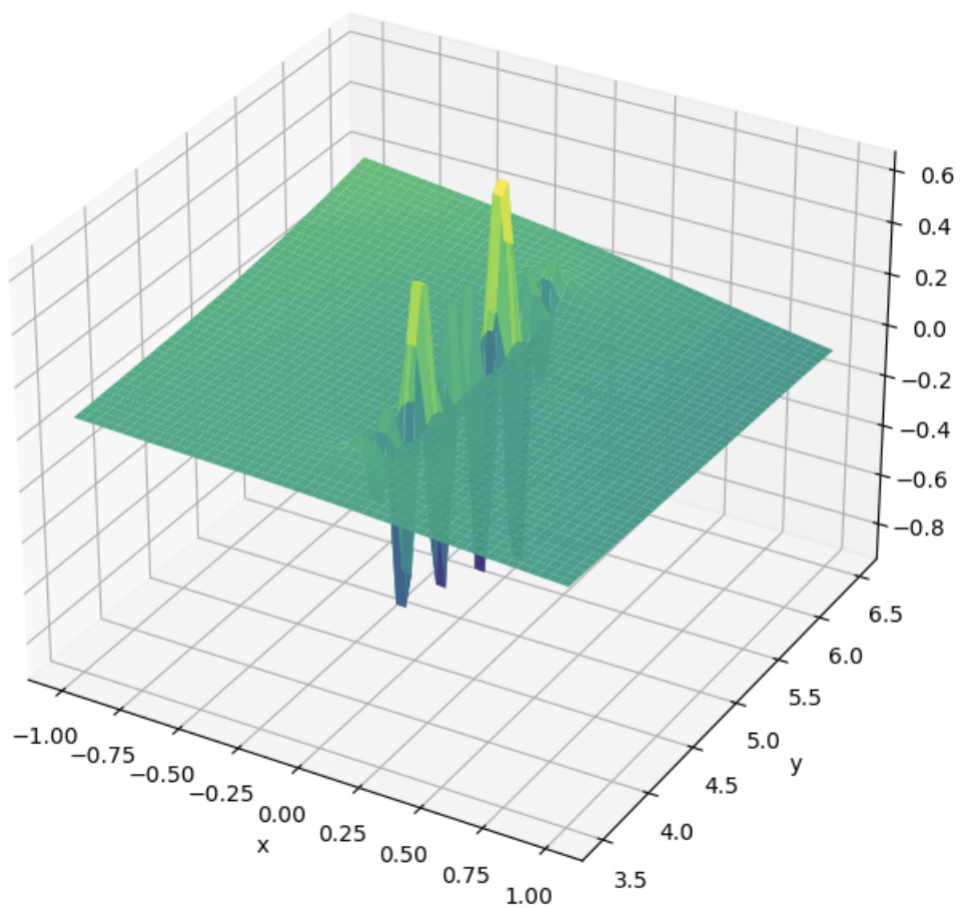


Рис. 2.10. Функція напруження  $\tau_{xz}$

На графіках напружень ми можемо бачити вплив навантажень  $q(y)$  на края тріщини та  $p(x)$  на верхню грань смуги.

Розглянемо графіки функції напружень  $\tau_{yz}$ :

- По вісі  $Ox$  для трьох значень  $y \in (0, 5, 8)$ .
- Тривимірний графік функції напруження  $\tau_{yz}$

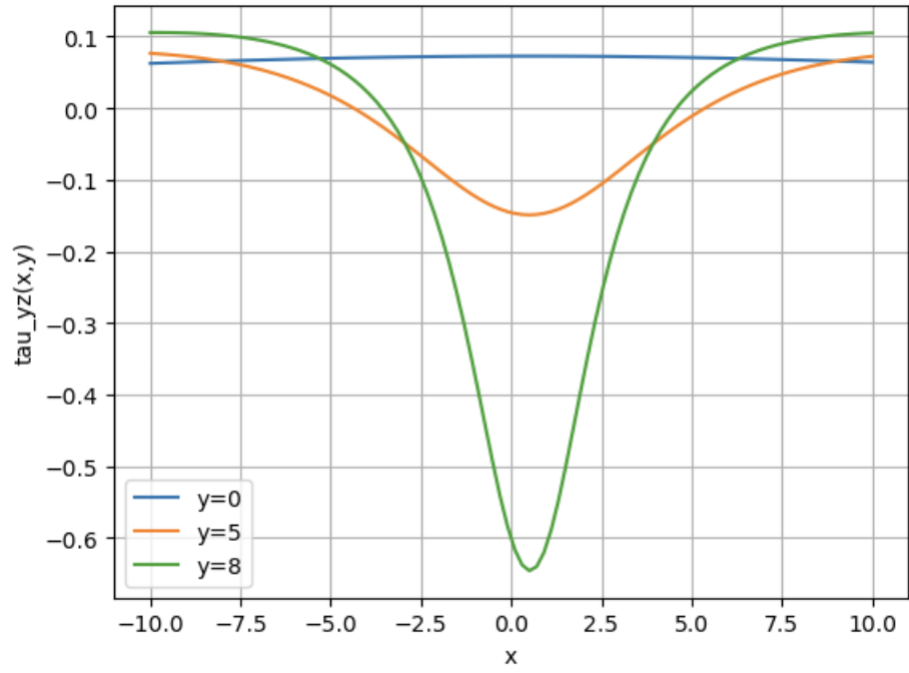


Рис. 2.11. Функція напруження  $\tau_{yz}$  при  $y \in (0, 5, 8)$

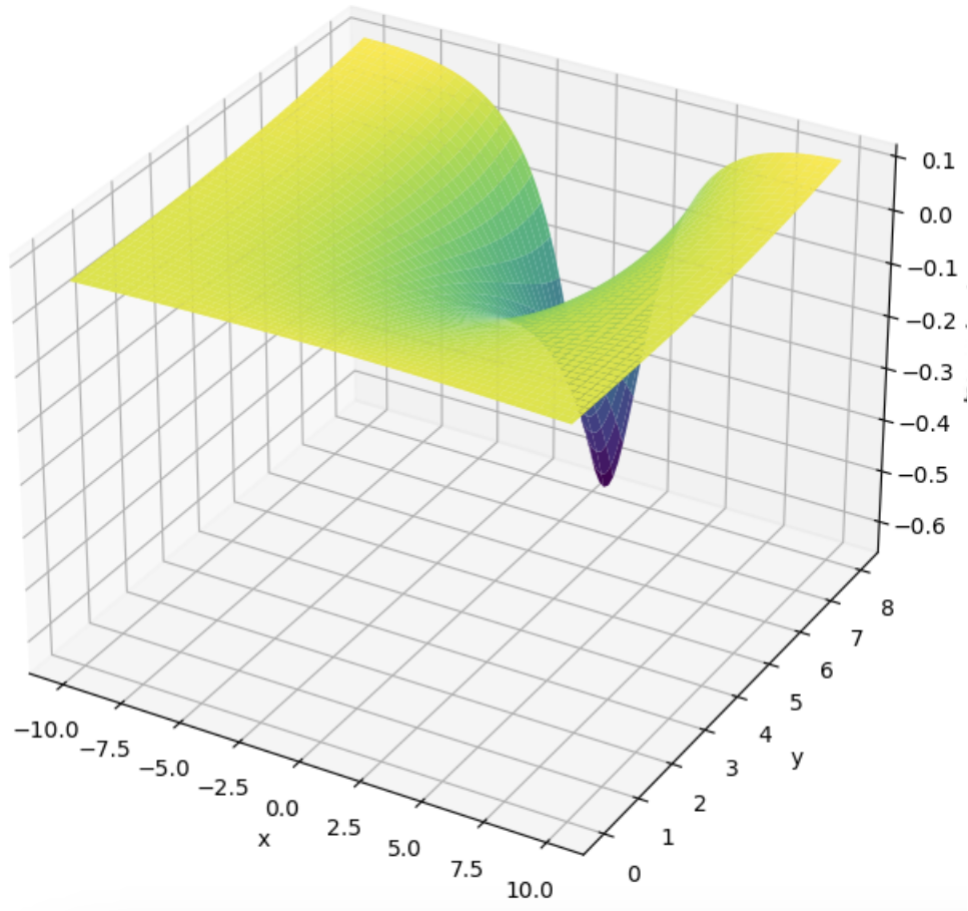


Рис. 2.12. Функція напруження  $\tau_{yz}$

На графіку напружень ми можемо бачити вплив навантаження  $p(x)$  на верхню грань смуги.

Розглянемо графіки коефіцієнтів інтенсивності напружень  $K_+$  та  $K_-$  для двох випадків:

- При зміні положення тріщини
- При розтягуванні тріщини

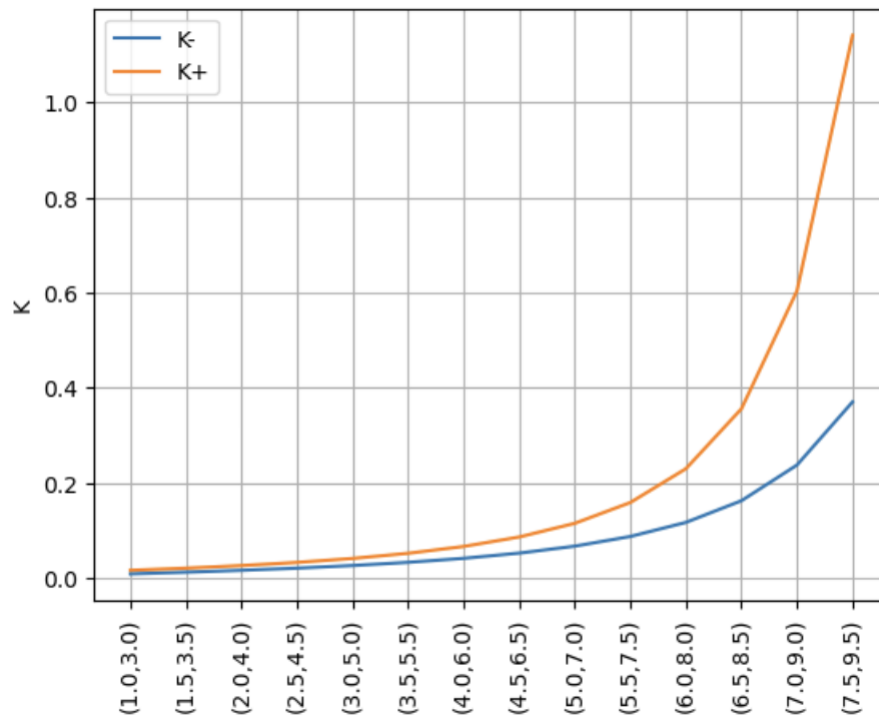


Рис. 2.13.  $K_+$  та  $K_-$  при переміщенні положення тріщини

Значення  $K_+$  та  $K_-$  є від'ємними при  $s_0 < 1$  та  $s_1 < 3$ , отже випадок, коли тріщина ближче до защемленої грані, не можна розглядати у цьому методі розв'язання.

Використаний метод розв'язання дозволяє обчислити КІНи при наближенні до зчепленої грані  $y = 0$  не менше, ніж  $a/10$ , та при наближенні до навантаженої грані  $y = a$  не менше, ніж  $a/20$ .

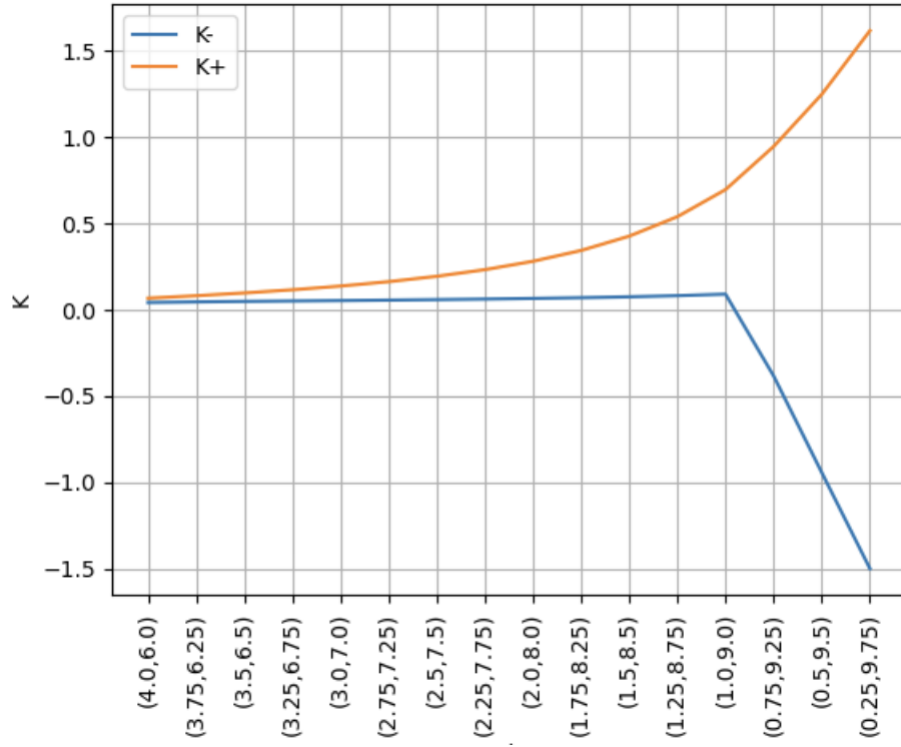


Рис. 2.14.  $K_+$  та  $K_-$  при розтягуванні тріщини

На графіку ми можемо бачити вплив напруження  $p(x)$  при наближенні края тріщини до верхньої грані смуги

## ВИСНОВКИ

У роботі було розв'язано антиплоську задачу теорії пружності для навантаженої смуги, що послаблена тріщиною. Розв'язання задачі було зведено до розв'язання сингулярного інтегро-диференціального рівняння відносно невідомої функції стрибка переміщень. Дане рівняння було розв'язано за методом ортогональних поліномів. Було продемонстровано та проаналізовано графіки функції переміщень та напружень усередині смуги. Було обчислено та побудовано графіки зміни коефіцієнтів інтенсивності напружень при зміні довжини та положення тріщини.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Рівняння математичної фізики : навч.-метод. посібн. для студ. спец. «Прикладна математика» / Н. Д. Вайсфельд, В. В. Реут. – Одеса : Одеськ. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2018. – 194 с.
2. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. Table of integrals, series, and products, 6th edition. Academic Press, 2000. 1163 p.
3. Вайсфельд Н.Д., Журавльова З.Ю., Реут В.В. Плоскі мішані задачі теорії пружності для півнескінченної смуги // Монографія. Одеса, Одес. нац. ун-т ім. І.І. Мечникова, 2019. – 160 с.
4. Moiseyev N. G., Popov G.Ya. The antiplane problem of a crack with edges touching planes where the constants of elasticity change. Journal of Applied Mathematics and Mechanics Volume 58, Issue 4, 1994, 713-725 p.
5. Рівняння математичної фізики. Метод ортогональних многочленів : навчальний посібник / Г. Я. Попов, В. В. Реут, М. Г. Моїсєєв, Н. Д. Вайсфельд. – Одеса : Астропринт, 2010. – 120 с.