

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І. І. МЕЧНИКОВА
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

В. М. Євтухов, Н. В. Шарай

МАТЕМАТИЧНІ АСПЕКТИ МІКРОЕКОНОМІКИ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
спеціальностей 111 Математика, 113 Прикладна математика,
051 Економіка, 071 Облік і оподаткування,
072 Фінанси, банківська справа та страхування,
073 Менеджмент, 075 Маркетинг

ОДЕСА
ОНУ
2025

УДК 519.86:330.101.542(075.8)
Є273

Автори:

В. М. Євтухов, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь;

Н. В. Шарай, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь.

Рецензенти:

О. М. Станжицький, доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри загальної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка; академік Академії наук вищої школи України;

О. В. Шебаніна, доктор економічних наук, професор кафедри економічної кібернетики, комп'ютерних наук та інформативних технологій Миколаївського національного аграрного університету.

*Рекомендовано до видання вченою радою
ОНУ імені І. І. Мечникова.
Протокол № 11 від 26 травня 2025 р.*

Євтухов В. М.

Є273 Математичні аспекти мікроекономіки [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів першого (бакалавр.) рівня вищ. освіти спец. 111 Математика, 113 Прикладна математика, 051 Економіка, 071 Облік і оподаткування, 072 Фінанси, банківська справа та страхування, 073 Менеджмент, 075 Маркетинг / В. М. Євтухов, Н. В. Шарай. – Електронні текстові дані (1 файл : 3,6 МБ). – Одеса : Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2025. – 158 с.

ISBN 978-966-186-357-5

Навчальний посібник з курсу «Математичні аспекти мікроекономіки» розрахований на студентів першого (бакалаврського) рівня підготовки спеціальностей 111 Математика, 113 Прикладна математика, 051 Економіка, 071 Облік і аудит, 072 Фінанси та банківська справа, 073 Менеджмент, 075 Маркетинг, покликаний на-дати допомогу в освоєнні вибіркового курсу «Математичні аспекти мікро- і макроекономіки»

УДК 519.86:330.101.542(075.8)

ISBN 978-966-186-357-5

© Євтухов В. М., Шарай Н. В., 2025
© Одеський національний університет
імені І. І. Мечникова, 2025

Зміст

ПЕРЕДМОВА	5
ТЕМА 1. Теорія споживача. Елементи теорії відношень	
1.1. Бінарні відношення та їх основні властивості	7
1.2. Відношення переваг споживача та їх властивості	10
1.3. Відношення байдужості , крива байдужості та гранична норма заміщення	14
1.4. Приклади переваг споживача та їх криві байдужості	17
<i>Контрольні питання до теми 1</i>	<i>22</i>
ТЕМА 2. Елементи теорії вибору та виявлені переваги	
2.1. Ситуації вибору, правила вибору, виявлені переваги. Аксіома Хауттекера	24
2.2. Основні теореми теорії вибору	25
<i>Контрольні питання до теми 2</i>	<i>27</i>
ТЕМА 3. Переваги споживача і функція корисності	
3.1. Подання переваг функцією корисності	28
3.2. Деякі приклади функцій корисності	30
3.3. Властивості диференційованої функції корисності. Гранична норма заміщення в термінах функції корисності	33
3.4. Умови існування функції корисності	37
3.5. Контрприклад лексікографічного впорядкування	38
3.6. Основні властивості функції корисності	42
3.7. Властивості диференційованої функції корисності. Гранична норма заміщення в термінах функції корисності	47
<i>Контрольні питання до теми 3</i>	<i>50</i>
ТЕМА 4. Бюджетні обмеження споживача	
4.1. Бюджетні обмеження споживача. Бюджетна множина	51
4.2. Вплив зовнішніх факторів на зміну бюджетної кривої	54
<i>Контрольні питання до теми 4</i>	<i>58</i>
ТЕМА 5. Вибір раціонального споживача.	
Основні характеристики вибору споживача	
5.1. Задача споживача. Функція попиту Маршалла	59
5.2. Властивості функції попиту Маршалла	62
5.3. Непряма функція корисності	64
5.4. Двоїста задача споживача або задача споживача	66
5.5. Функція витрат та її властивості	67
5.6. Функція грошової корисності, непрямої грошової корисності та їх властивості	71
<i>Контрольні питання до теми 5</i>	<i>74</i>

ТЕМА 6. Еластичність функції в точці. Цінова еластичність попиту.

Еластичність попиту по доходу

6.1. Еластичність функції однієї змінної	76
6.2. Властивості еластичності	79
6.3. Еластичність елементарних функцій однієї змінної	81
6.4. Еластичність диференційованих функцій багатьох змінних	82
6.5. Економічне значення еластичності	83
6.5.1. Цінова еластичність попиту	84
6.5.2. Еластичність попиту по доходу	85

<i>Контрольні питання до теми 6</i>	85
---	----

ТЕМА 7. Елементи теорії оптимізації

7.1. Принцип Лагранжа. Достатні умови існування локального та глобального максимуму задачі оптимізації	87
7.2. Диференціальні умови оптимальності в задачі математичного програмування	91
7.3. Леми про умову (7.6)	95
7.4. Достатні умови оптимальності другого порядку для задачі (7.1)-(7.2). Сідлова точка	97
7.5. Теорема про огинаючу	103
7.6. Аналіз задачі 1 та задачі 2 як задач оптимізації	104

<i>Контрольні питання до теми 7</i>	108
---	-----

ТЕМА 8. Вибір споживача. Порівняна статика поведінки споживача

8.1. Порівняна статика поведінки споживача	109
8.2. Основні теореми порівняльної статистики поведінки споживача	116
8.3. Геометричний зміст рівняння Слуцького. Різницевий аналог рівняння. Ефект заміщення. Ефект доходу	120
8.4. Основні рівняння теорії порівняльної статистики поведінки споживача в термінах функції корисності	123
8.5. Властивості матриці Гесе	127
8.6. Розв'язання загального рівняння порівняльної статистики поведінки споживача	129
8.7. Аналіз розв'язок загального рівняння порівнян. статистики поведінки споживача	130

<i>Контрольні питання до теми 8</i>	133
---	-----

ТЕМА 9. Теорія виробника

9.1. Технологічна множина та її властивості	134
9.2. Задача виробника та її властивості	140
9.3. Відновлення технологічної множини за функцією прибутку	144
9.4. Функція витрат та її властивості	150

<i>Контрольні питання до теми 8</i>	156
---	-----

Література	157
-------------------------	-----

ПЕРЕДМОВА

Сучасна мікроекономіка є складною та динамічною галуззю економічної науки, що вимагає від дослідників та практиків глибокого розуміння як теоретичних, так і практичних аспектів. Це особливо важливо у світі, де рішення, прийняті на рівні індивіда, підприємства та ринку, впливають на глобальні економічні процеси. У цьому контексті математичні моделі і методи стають незамінним інструментом для аналізу і прогнозування економічних явищ. Мікроекономіка допомагає розкрити основи прийняття рішень, а також функціонування ринків і цінових механізмів. Однак, для того щоб повноцінно оволодіти мікроекономічними концепціями, необхідно мати чітке уявлення про математичні методи, які лежать в основі цієї дисципліни.

Цей посібник покликаний ознайомити читача з основними математичними концепціями та методами, що використовуються в мікроекономіці. Ми прагнемо надати чітке та доступне пояснення ключових інструментів, таких як функції попиту і пропозиції, споживчий та виробничий вибір, а також концепції оптимізації та рівноваги.

У посібнику кожна тема буде розглянута з акцентом на практичні завдання, що допоможуть не лише зрозуміти теорію, але і навчитися застосовувати математичні підходи до реальних економічних ситуацій. Ми рекомендуємо читачеві активно взаємодіяти з матеріалом, виконуючи запропоновані вправи і приклади, адже саме практика сприяє глибшому засвоєнню знань.

Історія мікроекономіки тісно пов'язана з розвитком математичних методів. Вже в XVIII столітті, коли класична економічна теорія формувалася під впливом таких мислителів як Адам Сміт і Давид Рікардо, з'явилися перші фундаментальні ідеї, котрі пізніше стали основою для моделей, що описують економічну поведінку. Протягом XIX століття економісти, такі як Альфред Маршал, почали використовувати графіки та математичні функції для більш точного опису ринкових процесів, що призвело до значного прогресу в розумінні економічних явищ.

На початку XX століття з розвитком теорії ігор і неокласичної економіки, математика стала важливим інструментом для аналізу стратегічних взаємодій між економічними агентами. Сьогодні математичне моделювання стало невід'ємною частиною економічної науки, доповнюючи теоретичні концепції реальними даними та статистичними методами.

Цей початковий посібник призначений для студентів, викладачів, а також усіх, хто цікавиться мікроекономікою і прагне набратися впевненості у використанні математичних методів у цьому контексті. Сподіваємося, що набір цих знань сприятиме вашому подальшому навчанню і розвитку у галузі економічних наук.

Бажаємо вам успіхів у вивченні математичних аспектів мікроекономіки!

Мета цього курсу – побудова математичних моделей мікроекономіки, які описують взаємодію структурних та функціональних складових економіки або поведінку окремої такої складової у ринковому середовищі. Сила кожної такої

моделі – усунення деталей, що не стосуються справи, дозволяють економісту зосередити увагу на істотно важливих рисах економічної реальності, які він намагається зрозуміти.

Центральною фігурою мікроекономічної теорії є споживач і тому побудові моделей його поведінки буде присвячена перша частина нашого курсу.

Під *споживачем* будемо розуміти суб'єкт економічного процесу, який переслідує єдину ціль єдиними засобами з урахуванням деяких додаткових умов.

В основі проведеного тут аналізу, що дозволяє пояснювати поведінку людей, лежать такі два природні принципи.

- ◆ **Принцип упорядкування:** споживач відповідно до своїх суб'єктивних переваг, що задовольняють певним умовам, упорядковує споживчі набори (кошики), серед яких він здійснює вибір.
- ◆ **Принцип оптимізації:** споживач вибирає найкращий набір з-поміж тих, які може собі дозволити.

Таким чином, для даного споживача в кожній конкретній ситуації вибору слід передусім описати спосіб упорядкування їм споживчих наборів (кошиків), а також обмеження, яким мають задовольняти його допустимі вибори. Після цього з урахуванням принципу оптимізації необхідно вже провести аналіз, який припускає передбачати його поведінку.

ТЕМА 1. Теорія споживача. Елементи теорії відношень

Для опису суб'єктивних переваг споживача може бути використане математичне поняття бінарного відношення.

1.1. Бінарні відношення та їх основні властивості

Припустимо, що поставлено певне відношення (в інтуїтивно ясному значенні) між певними парами об'єктів. *Основна ідея* означення полягає в тому, щоб реалізувати це відношення у вигляді множини всіх пар пов'язаних ним об'єктів, а точніше у вигляді деякої множини впорядкованих пар.

Означення 1.1. Нехай X – довільна множина. **Бінарним відношенням** на X називається будь-яка підмножина декартового добутку $X \times X$. Якщо $\mathcal{R}$ – відношення на X , то записи $(x, y) \in \mathcal{R}$ та $x\mathcal{R}y$ вважають еквівалентними. Якщо $x\mathcal{R}y$ то кажуть, що x знаходиться у відношенні $\mathcal{R}$ до y .

Областю визначення відношення $\mathcal{R}$ називається множина всіх перших координат, що входять в $\mathcal{R}$ елементів, а областю значень називається множина їхніх других координат.

Обернене відношення до відношення $\mathcal{R}$, що позначається як $\mathcal{R}^{-1}$, можна одержати, якщо змінити порядок координат усередині кожної пари:

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in \mathcal{R}\} \text{ і } x\mathcal{R}y \text{ тоді і тільки тоді, коли } y\mathcal{R}^{-1}x.$$

Область визначення зворотного до $\mathcal{R}$ відношення завжди збігається з областю значень відношення $\mathcal{R}$, а область значень $\mathcal{R}^{-1}$ збігається з областю визначення $\mathcal{R}$.

Композицією відношень $\mathcal{R}$ та $\mathcal{S}$ називається відношення $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ (іноді позначається через $\mathcal{R}\mathcal{S}$), що складається з усіх пар (x, z) , таких, що для деякого y $(x, y) \in \mathcal{S}$ та $(y, z) \in \mathcal{R}$. Операція композиції, власне кажучи, некомутативна. Наприклад, якщо $\mathcal{R} = \{(1, 2)\}$ і $\mathcal{S} = \{(0, 1)\}$, то $\mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \{(0, 2)\}$, а $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ порожньо.

Тотожнім відношенням на множині X (тотожність на X) будемо вважати множину всіх пар виду (x, x) , де $x \in X$. Позначається воно через Δ або $\Delta(X)$. Назва пояснюється тим фактом, що $\Delta \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \Delta = \mathcal{R}$ для будь-якого відношення $\mathcal{R}$ в X . Тотожне відношення називається також діагоналлю; це найменування підказано його розташуванням у $X \times X$.

Нехай $\mathcal{R}$ – відношення та A – деяка множина. Множина

$$\mathcal{R}[A] = \{y : x\mathcal{R}y \text{ для деякого } x \in A\}$$

називається множиною всіх $\mathcal{R}$ -образів точок множини A . Якщо A – вся область визначення $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}[A]$ збігається з областю значень $\mathcal{R}$. Якщо $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$, де $\mathcal{R}$ та $\mathcal{S}$ – відношення, то $\mathcal{R}[A] \subset \mathcal{S}[A]$ для будь-якого A .

Алгебра відношень широко розроблена; їй належить наступна (теорема?).

Теорема 1.1. Нехай $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ та $\mathcal{T}$ – відношення. Тоді:

$$(a) (\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R} \text{ та } (\mathcal{R} \circ \mathcal{S})^{-1} = \mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{R}^{-1};$$

$$(b) \mathcal{R} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{T}) = (\mathcal{R} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{T} \text{ та } (\mathcal{R} \circ \mathcal{S})[A] = \mathcal{R}[\mathcal{S}[A]];$$

$$(c) \mathcal{R}[A \cup B] = \mathcal{R}[A] \cup \mathcal{R}[B] \text{ та } \mathcal{R}[A \cap B] = \mathcal{R}[A] \cap \mathcal{R}[B].$$

Більш загальне твердження: якщо для кожного елемента a непорожньої множини індексів A задана деяка множина X_a , то:

$$(d) \mathcal{R}[\cup\{X_a : a \in A\}] = \cup\{\mathcal{R}[X_a] : a \in A\} \text{ і } \mathcal{R}[\cap\{X_a : a \in A\}] = \cap\{\mathcal{R}[X_a] : a \in A\}.$$

Д о в е д е н н я. ■ Доведемо, наприклад, рівність $(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})^{-1} = \mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{R}^{-1}$. Пара (z, x) є елементом $(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})^{-1}$ тоді і лише тоді, коли $(x, z) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$, а останнє має місце в тому і лише в тому випадку, коли $(x, y) \in \mathcal{S}$ і $(y, z) \in \mathcal{R}$. Отже, $(z, x) \in (\mathcal{R} \circ \mathcal{S})^{-1}$ тоді і тільки тоді, коли $(z, y) \in \mathcal{R}^{-1}$ та $(y, x) \in \mathcal{S}^{-1}$ для деякого y . ■

Декілька спеціальних типів відношень зустрічаються настільки часто, що їм дані власні імена.

Означення 1.2. Бінарне відношення $\mathcal{R}$ на множині X називається:

- 1) **повним**, якщо для будь-яких $x, y \in X$ виконано або $x\mathcal{R}y$, або $y\mathcal{R}x$ (або те й інше);
- 2) **транзитивним**, якщо для будь-яких трьох елементів $x, y, z \in X$, з того, що $x\mathcal{R}y$ й $y\mathcal{R}z$, випливає виконання $x\mathcal{R}z$;
- 3) **рефлексивним**, якщо для будь-якого $x \in X$ виконано $x\mathcal{R}x$;
- 4) **нерефлексивним**, якщо не існує $x \in X$, такого, що виконано $x\mathcal{R}x$;
- 5) **симетричним**, якщо з того, що виконано $x\mathcal{R}y$, випливає виконання $y\mathcal{R}x$;
- 6) **асиметричним**, якщо з $x\mathcal{R}y$ та $y\mathcal{R}x$ випливає, що $x = y$;
- 7) **від'ємно-транзитивним**, якщо для будь-яких трьох елементів $x, y, z \in X$, з $x\mathcal{R}y$ випливає, що виконується або $x\mathcal{R}z$, або $z\mathcal{R}y$;
- 8) **циклічним**, якщо з $x_1\mathcal{R}x_2, x_2\mathcal{R}x_3, \dots, x_{n-1}\mathcal{R}x_n$ випливає, що виконується $x_n\mathcal{R}x_1$;
- 9) **ациклічним**, якщо з $x_1\mathcal{R}x_2, x_2\mathcal{R}x_3, \dots, x_{n-1}\mathcal{R}x_n$ випливає, що не виконується $x_n\mathcal{R}x_1$.

Пояснимо сенс введених типів відносин і наведемо відповідні приклади.

Повнота відношення $\mathcal{R}$ на множині X означає сумісність будь-яких двох елементів цієї множини за даною властивістю. Так, наприклад, якщо ми розглядаємо відношення $\mathcal{R}_1$ "бути братом" на множині населення планети Земля, то, очевидно, що це відношення не має властивості повноти.

Якщо ж ми розглянемо в тієї множині відношення $\mathcal{R}_2$ "не нижче ростом, ніж", то матимемо повне відношення. Більше того, ясно, що відношення $\mathcal{R}_2$ на множині, що розглядається, є рефлексивним, транзитивним, але не симетричним. Тим не менш, у випадку, коли два індивідууми x і y мають однаковий зріст, виконується як $x\mathcal{R}_2y$, так і $y\mathcal{R}_2x$. Що ж до відношення $\mathcal{R}_1$, то воно, не будучи повним, є симетричним, транзитивним та нерефлексивним.

Звернемо також увагу, що повне відношення не обов'язково має бути транзитивним. Дійсно, нехай, наприклад, множина X складається з трьох осіб, перший з яких повинен віддати деяку суму грошей другому, другий – третьому, а третій – першому. Введемо на цій множині відношення $\mathcal{R}_3$ "винен деяку суму

грошей". Зрозуміло, що це відношення має властивість повноти, але транзитивним воно не є.

Назва від'ємно-транзитивного відношення на множині X походить від наступного його альтернативного запису

$$\neg(x\mathcal{R}z) \wedge \neg(z\mathcal{R}y) \Rightarrow \neg(x\mathcal{R}y)$$

Якщо на множині населення Землі запровадити відношення $\mathcal{R}_4$ "вище за ростом, ніж", то отримаємо приклад від'ємного транзитивного, асиметричного та ациклічного відношення.

З розглянутих вище прикладів видно, що відношення можуть бути відношеннями не тільки одного, а кількох типів одночасно. Найчастіші з таких відношень отримали спеціальні назви.

Означення 1.3. Відношення $\mathcal{R}$ на множині X називається:

- 1) відношенням квазіпорядку, якщо воно рефлексивне та транзитивне;
- 2) відношенням еквівалентності, якщо воно рефлексивно, симетрично і транзитивно (симетричний квазіпорядок);
- 3) відношенням часткового порядку, якщо воно рефлексивне, транзитивне та антисиметричне (антисиметричний квазіпорядок);
- 4) відношенням лінійного порядку, якщо воно повне та часткового порядку;
- 5) відношенням толерантності, якщо воно рефлексивне та симетричне.

Особливу увагу звернемо на те, як влаштовано відношення еквівалентності. Для його опису потрібно наступне

Означення 1.4. Нехай $\mathcal{R}$ – відношення еквівалентності на множині X . Підмножина A множини X називається **класом еквівалентності** (класом $\mathcal{R}$ - еквівалентності), якщо існує елемент $x \in A$ такий, що A співпадає з множиною всіх $y \in X$, для яких $x\mathcal{R}y$.

Іншими словами, A є класом еквівалентності в тому і тільки в тому випадку, коли є $x \in A$ для якого $A = \mathcal{R}[\{x\}]$. Фундаментальний результат про відносини еквівалентності полягає в тому, що сімейство $\mathcal{U}$ всіх класів еквівалентності диз'юнктно і що точка x знаходиться до точки y в відношенні $\mathcal{R}$ у тому і тільки в тому випадку, коли x та y належать одному класу еквівалентності. Множина всіх пар (x, y) , для яких x і y належать деякому класу $A \in \mathcal{U}$ просто $A \times A$. Це дозволяє дати наступне коротке формулювання основного результату.

Теорема 1.2. Відношення $\mathcal{R}$ є відношенням еквівалентності тоді і тільки тоді, коли існує диз'юнкте сімейство $\mathcal{U}$ таке, що $\mathcal{R} = \bigcup \{A \times A : A \in \mathcal{U}\}$.

Д о в е д е н н я. ■ Нехай $\mathcal{R}$ – відношення еквівалентності на множині X . У силу його транзитивності з $x\mathcal{R}y$ і $y\mathcal{R}z$ випливає $x\mathcal{R}z$. Звідси ясно, що якщо $x\mathcal{R}y$, то $\mathcal{R}[\{y\}] \subset \mathcal{R}[\{x\}]$. Але $\mathcal{R}$ також і симетрично ($x\mathcal{R}y \in y\mathcal{R}x$). Тому, якщо $x\mathcal{R}y$, то

$\mathfrak{R}[\{x\}] = \mathfrak{R}[\{y\}]$. Далі, коли z входить і в $\mathfrak{R}[\{x\}]$ і в $\mathfrak{R}[\{y\}]$, то матимемо $\mathfrak{R}[\{x\}] = \mathfrak{R}[\{z\}] = \mathfrak{R}[\{y\}]$. Отже, будь-які два класи еквівалентності або збігаються, або не перетинаються. Якщо y і z належать класу еквівалентності $\mathfrak{R}[\{x\}]$, то, оскільки $\mathfrak{R}[\{y\}] = \mathfrak{R}[\{x\}]$, отримуємо, що $y\mathfrak{R}z$; іншими словами, $\mathfrak{R}[\{x\}] \times \mathfrak{R}[\{x\}] \subset \mathfrak{R}$. Тому об'єднання множин $A \times A$ за всіма класами еквівалентності $A \in \mathfrak{U}$ є підмножиною множини $\mathfrak{R}$, та з рефлексивності випливає, що якщо $x\mathfrak{R}y$, то $(x, y) \in \mathfrak{R}[\{x\}] \times \mathfrak{R}[\{x\}]$. Отже, $\mathfrak{R} = \bigcup \{A \times A : A \in \mathfrak{U}\}$.

Прямий доказ зворотного твердження опускаємо. ■

Прикладом відношення еквівалентності може бути, наприклад, задане на множині населення Землі, відношення $\mathfrak{R}_5$ "мати такий же зріст, як і ...".

1.2. Відношення переваг споживача та їх властивості

Всюди надалі під споживачем розумітимемо групу індивідумів, що разом розподіляють свій дохід на придбання благ (не виключається випадок, коли група складається з одного члена). Поняття блага (товару) в мікроекономіці має досить широкий зміст: блага розрізняють не лише за їх фізичними характеристиками, а й за часом, коли вони стають доступними і за місцями їхнього розташування.

Означення 1.5. Під *товаром* будемо розуміти благо або послугу, що надійшла на ринок у певний час у визначеному місці.

Припустимо, що споживачеві доступні ℓ благ, які, взагалі кажучи, мають властивості довільного поділу, тому, якщо що, то в принципі можна придбати будь-яку кількість кожного блага з його достатнього запасу. Вибір споживача можна охарактеризувати *набором благ* або *кошиком*

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_\ell) = (x_i)_{i=1}^\ell$, де x_i – кількість i -го блага, набутого споживачем.

Під **множиною допустимих альтернатив** X будемо розуміти всі фізично можливі набори благ (кошиків) і, як правило, розглядатимемо його деяку невід'ємну підмножину $\mathbb{R}_+^\ell$, тобто, $X \subset \mathbb{R}_+^\ell$.

У деяких постановках корисно припускати, що благо може бути від'ємним; зокрема така потреба може виникнути, коли один із товарів розглядається як праця індивідуума.

Кожен споживач, здійснюючи вибір серед доступних йому в даній конкретній ситуації, з якою він стикається, наборів (кошиків) діє відповідно до своїх суб'єктивних переваг. Іншими словами, він завжди може для себе вирішити, який з будь-яких двох доступних йому кошиків або кращий, або йому байдужий який з них вибирати.

В економічній теорії перевага споживача – єдина його характеристика, що береться до уваги при поясненні його поведінки. Тому споживача завжди ототожнюють із його перевагами.

Що ж із себе показує перевага з математичної точки зору?

З огляду на вищесказане ясно, що перевага окремо взятого споживача в конкретній ситуації вибору може бути описана за допомогою бінарного відношення $\mathfrak{R}$, заданого на множині допустимих альтернатив цього споживача. Це бінарне відношення називають *нестрогим відношенням переваги* та позначають $\succsim$.

Воно визначається наступним чином: якщо для двох альтернатив (кошиків) x і y з X виконується $x \succsim y$, то кажуть, що для даного споживача альтернатива (кошик) x *не є гіршою* за альтернативу (кошика) y .

Традиційним для економічної теорії є припущення про те, що нестроге відношення переваги, на основі якої споживачі впорядковують альтернативи (кошки), є повним і транзитивним. Ці припущення тісно пов'язані з поняттям раціональності економічних агентів, оскільки природною властивістю раціональності є несуперечність вибору та можливість його здійснення в будь-якій можливій ситуації. Ці умови в наших термінах якраз і набувають форми умов повноти та транзитивності:

- 1) для будь-яких кошиків $x, y \in X$ виконано або $x \succsim y$, або $y \succsim x$;
- 2) якщо для кошиків $x, y, z \in X$ мають місце нестрогі відношення переваги $x \succsim y$ та $y \succsim z$, то виконано також і $x \succsim z$.

Зауваження 1.1. Звернімо увагу на те, що з повноти нестрогого відношення переваги безпосередньо впливає його рефлексивність, тобто, $x \succsim x$ для будь-якого $x \in X$.

Зауваження 1.2. Існують ситуації, коли поведінка споживачів несумісна з припущенням, що їхні переваги повні та транзитивні. Найчастіше причина такого порушення – відсутність транзитивності у виборах учасника, що спостерігаються. Якщо ми попросимо індивіда порівняти склянку чаю, куди поклали одну крупинку цукру, і склянку чаю з двома крупинками, то практично завжди отримаємо відповідь про байдужість у виборі. Таку ж відповідь отримаємо при порівнянні склянок з двома та трьома крупинками. Продовжимо наше опитування досить довго, і ми дійдемо до абсурдного висновку, якщо наполягатимемо на транзитивності. А хіба для індивіда абсолютно байдуже, що пити – склянку з однією крупинкою або склянку з кілограмом цукру?! Не важко зрозуміти, причина непорозуміння у принциповій неможливості об'єктивного порівняння малих величин блага. Іншими причинами появи нетранзитивності можна назвати те, що на індивідуальний вибір учасників можуть впливати думки інших людей, його переваги власними силами можуть змінюватися в часі.

З використанням строгого відношення переваги можуть бути побудовані два інших типи відносин між альтернативами, які також відіграватимуть важливу роль при аналізі поведінки споживача.

Означення 1.6. Якщо для деяких x і y з множині допустимих альтернатив X виконано $x \succsim y$ і при цьому відношенню $y \succsim x$ немає місця, то говоримо, що альтернатива (кошик) x *краща* за альтернативу (кошика) y і цей факт будемо

записувати у вигляді відносини $x > y$, та називати **строгим відношенням переваги**.

Означення 1.7. Якщо для деяких x і y з множини допустимих альтернатив X виконано $x \succcurlyeq y$ і $y \succcurlyeq x$, то будемо говорити, що альтернатива (кошик) x еквівалентна альтернативі (кошику) y і цей факт будемо записувати у вигляді відношення $x \sim y$, та називати **відношенням байдужості**.

У разі повноти нестроге відношення переваги **означення 1.6** може бути перефразоване в іншому вигляді, якщо врахувати наступне.

Теорема 1.1. Нехай нестроге відношення переваги повно на множині допустимих альтернатив X . Тоді

$$(x > y) \Leftrightarrow (\text{не вірно, якщо } y \succcurlyeq x)$$

Д о в е д е н н я. ■ Необхідність ($\Rightarrow$).

Твердження $(x > y) \Leftrightarrow (\text{не вірно, якщо } y \succcurlyeq x)$ безпосередньо випливає з означення строгого відношення переваг.

Достатність ($\Leftarrow$). У силу повноти нестрогого відношення переваг з умови, що не вірно $y \succcurlyeq x$ виходить що виконано $x \succcurlyeq y$. Тому маємо:

$$(x \succcurlyeq y) \text{ та } (\text{не вірно, якщо } y \succcurlyeq x)$$

А це через означення строгого відношення переваги і означає, що $(x > y)$. ■

Покажемо тепер, що умови повноти та транзитивності нестрогого відношення переваги обумовлюють умови асиметричності та від'ємної транзитивності, побудованого на його основі строгого відношення переваги та навпаки.

Теорема 1.2. Нестроге відношення переваги є повним на множині допустимих альтернатив X тоді і тільки тоді, коли побудоване по ньому строге відношення переваги асиметрично на цій множині.

Д о в е д е н н я. ■ Необхідність ($\Rightarrow$). Нехай строге відношення переваги є повним, тобто, для будь-якої пари $x, y \in X$ або $x \succcurlyeq y$, або $y \succcurlyeq x$, або $x \succcurlyeq y$ і $y \succcurlyeq x$ одночасно. Відповідно до **теорему 1.1** це рівносильно тому, що або $x > y$ невірно, або $y > x$ невірно. Отже, з $x > y$ випливає, що $y > x$ невірно. А це означає асиметричність несурового відношення переваги. У випадку, коли $x \succcurlyeq y$ і $y \succcurlyeq x$ одночасно, тоді $x \sim y$, а значить відношення « $>$ » є невизначеним.

Достатність ($\Leftarrow$). Нехай строге відношення переваги є асиметричним. Це означає, що якщо для деякої пари $x, y \in X$ виконано $x > y$, то не виконується $y > x$. Тому для будь-якої пари $x, y \in X$ або $x > y$ невірно, або $y > x$ невірно. Звідси, з урахуванням визначення строгого відношення переваги, отримуємо, що або x

$\succcurlyeq y$, або $y \succcurlyeq x$, що і означає повноту. Отже, нестроге відношення переваги є повним. ■

Теорема 1.3. *Нехай нестроге відношення переваги є повним на множині допустимих альтернатив X . Для того, щоб це відношення було транзитивним, необхідно і достатньо, щоб побудоване по ньому строге відношення переваги було невід’ємно-транзитивним на X .*

Д о в е д е н н я. ■ Так як відношення нестрогої переваги транзитивне, то для будь-яких x, y і z з $(x \succcurlyeq z) \wedge (z \succcurlyeq y)$ випливає $(x \succcurlyeq y)$. В силу **теорему 1.1** маємо

$$\neg(x \succ y) \Leftrightarrow (y \succcurlyeq x).$$

Тому, від’ємна транзитивність строгого відношення переваги, записана у формі

$$\neg(x \succ z) \wedge \neg(z \succ y) \Rightarrow \neg(x \succ y)$$

тягне

$$(x \succcurlyeq z) \wedge (z \succcurlyeq y) \Rightarrow (x \succcurlyeq y),$$

що рівносильне транзитивності нестрого відношення переваги. ■

Зауваження 1.3. У цьому твердженні умова повноти нестрогого відношення переваги може бути замінена, в силу **теорему 1.2**, умовою асиметричності строгого відношення переваги.

Встановлені вище **теорему 1.2** і **1.3** разом доводять, що з транзитивності та повноти нестрогого відношення переваги випливає асиметричність і від’ємна транзитивність строгого відношення переваги і навпаки. З огляду на цей факт не випадковими видаються сформовані в мікроекономіці дві традиції побудови теорії поведінки споживача. Перша з них, якої ми й дотримуватимемося, спирається на строге відношення переваги, що відповідає умовам повноти і транзитивності. Друга традиція виходить із строгого відношення переваги, що має властивості асиметричності та від’ємної транзитивності. Очевидно, що обидві ці традиції повинні призводити до однакових результатів, якщо строгі та нестрогі відношення переваги побудовані на основі один одного вказаним вище способом.

При використанні другого підходу слід також враховувати наступне.

Теорема 1.4. *Якщо строге відношення переваги асиметрично і від’ємно транзитивно на множині допустимих альтернатив X , то воно є:*

- (i) *транзитивним;*
- (ii) *ациклічним;*
- (iii) *нерефлексивним.*

Д о в е д е н н я. ■

- (i) Припустимо, що строге відношення переваги не є транзитивним на X . Тоді існують $x, y, z \in X$ такі, що з $x \succ z, z \succ y$ невиконане $x \succ y$.

Далі, згідно з асиметричністю з $x \succ z$ слідує, що $z \succ x$ невірно.

Так як $z \succ x$ невірно за припущенням, $x \succ y$ невірно за доведенням, то через від'ємну транзитивність відношення $z \succ y$ не є вірним. Тим самим отримано протиріччя, яке доводить транзитивність.

- (ii) Нехай для $x_k \in X$ ($k = 1, \dots, n$) виконано $x_1 \succ x_2 \succ \dots \succ x_n$. У силу методу математичної індукції та встановленої вище транзитивності маємо $x \succ x_n$. Звідси з урахуванням асиметричності отримуємо, що $x_n \succ x_1$ не вірно. Значить строге відношення переваги є ациклічним.
- (iii) Припустимо неприємне, що $x \succ x$ для деякого $x \in X$. Тоді, зважаючи на встановлену ациклічність, невірно, що $x \succ x$. Набули протиріччя.

■

1.3. Відношення байдужості, крива байдужості та гранична норма заміщення

Нарешті, звернемося до аналізу відношення байдужості $\sim$. З цим відношенням тісно пов'язане важливе для теорії поведінки споживача поняття кривої байдужості.

Означення 1.8. *Кривою байдужості на множині допустимих альтернатив X називається кожна його підмножина виду*

$$I(x) = \{y \in X : y \sim x\}, \text{ де } x \in X.$$

Іншими словами, крива байдужості $I(x)$ – це множина усіх кошиків з множини допустимих альтернатив X , які еквівалентні кошику $x \in X$.

Теорема 1.5. *Якщо нестроге відношення переваги повно і транзитивно на множині допустимих альтернатив X , то відношення байдужості є еквівалентним відношенням в X .*

Д о в е д е н н я. ■ *Рефлексивність.* З повноти нестрогого відношення переваги на множині X випливає, що $x \succsim x$ для будь-якої альтернативи (кошика) $x \in X$. Тому через означення відношення байдужості $x \sim x$.

Симетричність. Нехай для деяких x і y з X має місце $x \sim y$. З означення відношення байдужості випливає: $x \succsim y$, $y \succsim x$. Звідки $y \succsim x$ і $x \succsim y$, тоді з означення відношення байдужості $y \sim x$, що означає симетричність відношення байдужості.

Транзитивність. Нехай для деяких $x, y, z \in X$ мають місце $x \sim y$ та $y \sim z$. Тоді через означення відношення байдужості

$$x \succsim y, y \succsim x \text{ та } y \succsim z, z \succsim y,$$

звідки з урахуванням транзитивності нестрогого відношення переваги з

$x \succsim y$, $y \succsim z$ маємо $x \succsim z$ та $z \succsim y$, $y \succsim x$ маємо $z \succsim x$, що означенням відношення байдужості $x \sim z$.

Звідси з урахуванням транзитивності нестрогого відношення переваги отримуємо, що $x \succsim z$ і $z \succsim x$, тобто $x \sim z$, що потрібно було довести. ■

Зважаючи на це, **теорему 1.4. та означення 1.7**, крива байдужості у разі повного і транзитивного нестрогого відношення переваги являє собою клас еквівалентності, що відповідає відношенню байдужості. Тому з урахуванням **теорему 1.2** отримуємо

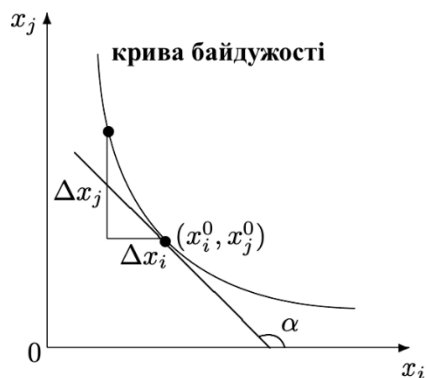
Теорема 1.6. *Якщо строге відношення переваги повно і транзитивно на множині допустимих альтернатив X , то будь-які дві криві байдужості в X або збігаються, або не перетинаються. При цьому множина допустимих альтернатив X подана у вигляді об'єднання всіх кривих байдужості, що не перетинаються.*

З кожною точкою $\mathbf{x}_0 = (x_i^0)_{i=1}^{\ell}$ кривої байдужості $I(\mathbf{x}_0)$ споживача тісно пов'язане інше важливе поняття – **граничної норми заміщення** (marginal rate of substitution – MRS) одного товару іншим.

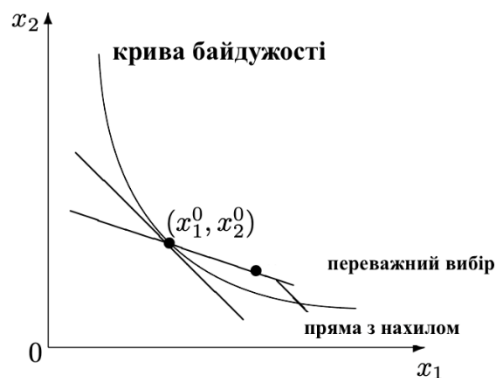
Припустимо, що відібравши у споживача з кошика $\mathbf{x}_0$ невелику кількість Δx_i товару i , ми можемо шляхом "додавання" у кількості Δx_j товару $j \neq i$ повернути його на ту саму криву байдужості. У даному випадку дріб $\frac{\Delta x_j}{\Delta x_i}$ задає пропорцію, в якій споживач готовий замінити товар i товаром j у кошику $\mathbf{x}_0$. Будемо тепер вважати, це ми можемо отримувати при будь-яких малих значеннях Δx_i . При таких значеннях Δx_i пропорцію $\frac{\Delta x_j}{\Delta x_i}$ називають *граничною нормою заміщення товару i товаром j* та позначають її $MRS_{ij}(\mathbf{x}_0)$. Зрозуміло, що якщо проекція кривої байдужості на простір товарів (x_i, x_j) є гладкою кривою, то

$$MRS_{ij}(\mathbf{x}_0) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta x_j}{\Delta x_i}$$

і задає (див. рис. 1) нахил ($\tan \alpha$) дотичної до даної проекції кривої байдужості в точці з координатами (x_i^0, x_j^0) . У окремому випадку двох товарів ($\ell = 2$) і гладкою кривою байдужості $I(x_1^0, x_2^0)$ гранична норма заміщення $MRS_{12}(x_1^0, x_2^0)$ є нахилом щодо самої кривої байдужості в точці (x_1^0, x_2^0) .



мал. 1.



мал. 2.

Гранична норма заміщення кількісно характеризує цікавий аспект поведінки споживача. Припустимо, що відношення нестрогої переваги споживача $(x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2)$, задане на двовірній множині допустимих альтернатив $\mathbb{R}_+^2$, таке, що відповідні криві байдужості є гладкими увігнутими і спадними кривими на площині в декартовій системі координат з вертикальною O_{x_2} і горизонтальною O_{x_1} , а відношення строгої переваги $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$ має місце тоді і тільки тоді, коли кошик (x_1, x_2) розташований на вищій кривій байдужості, ніж кошик (y_1, y_2) (такого типу переваги зазвичай називають *стандартними*).

Припустимо тепер, що зараз він споживає якийсь набір (x_1^0, x_2^0) . Запропонуємо йому угоду: він може обміняти товар 1 на товар 2 або товар 2 на товар 1 у будь-яких кількостях за "нормою обміну", що дорівнює E .

Іншими словами, якщо споживач відмовиться від Δx_1 одиниць товару 1, він може отримати натомість $E\Delta x_1$ одиниць товару 2. Або навпаки, якщо він відмовиться від Δx_2 одиниць товару 2, то може отримати $\frac{\Delta x_2}{E}$ одиниць товару 1. Мовою геометрії це означає, що ми надаємо споживачеві можливість, як показано на мал. 4 рухатися в будь-яку точку вздовж лінії з нахилом $-E$, що проходить через (x_1^0, x_2^0) . Рух вліво вгору від точки (x_1^0, x_2^0) передбачає обмін товару 1 на товар 2, а рух вправо вниз – обмін товару 2 на товар 1. Під час руху у тому й іншому напрямі норма обміну становить E . Оскільки обмін завжди передбачає відмову від одного товару в обмін на інший, норма обміну відповідає нахилу $-E$. Тепер запитавмо: якою має бути норма обміну, щоб споживач захотів залишитися в точці (x_1^0, x_2^0) ?

Для відповіді на це питання ми просто відзначимо, що при перетині лінією обміну кривою байдужості на цій лінії завжди будуть якісь точки, які віддають перевагу точці (x_1^0, x_2^0) , а саме ті, які лежать над кривою байдужості. Отже, якщо ми не хочемо рухатися з точки (x_1^0, x_2^0) , лінія обміну повинна бути дотичною до кривої байдужості. Іншими словами, нахил лінії обміну $-E$ має бути нахилом кривої байдужості в точці (x_1^0, x_2^0) . При будь-якій іншій нормі обміну лінія обміну

перетинала б криву байдужості і тим самим дозволяла б споживачеві рухатися в кращу точку.

Таким чином, нахил кривої байдужості – гранична норма заміщення – показує норму обміну, коли споживач коливається, виробляти обмін чи ні. За будь-якої норми обміну, відмінної від MRS , у споживача виникало б бажання обміняти один товар на інший. Якщо норма обміну дорівнює MRS , споживач хоче залишитися у цій точці.

1.4. Приклади переваг споживача та їх криві байдужості

Наведемо тепер приклади деяких конкретних типів переваг окремо взятих споживачів.

1. Досконалі субститути. Будемо говорити, що два товари є досконалими субститутами для даного споживача, якщо він готовий замінити один товар іншим у постійній пропорції. Найпростіший випадок скоєних субститутів – коли споживач готовий замінити один товар іншим щодо один одного.

Припустимо, наприклад, що дальтонік вибирає кошик із десяти олівців серед червоних та синіх. Йому байдуже якийсь кошик $x = (x_1, x_2)$, де x_1 – число червоних та x_2 – число синіх олівців, придбати, головне, щоб $x_1 + x_2 = 10$.

У цьому випадку всі криві байдужості для даного споживача, являють собою кошики (x_1, x_2) з цілими невід'ємними компонентами, для яких

$$x_1 + x_2 = c, \text{ де } c \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Причому зрозуміло, що кошики з більшим числом олівців віддають перевагу корзинам із меншим сукупним числом олівців. Тому для даного споживача відношення нестрогої переваги, заданої на багатьох корзинах з червоними і синіми олівцями, визначається наступним чином:

$$(x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2$$

У випадку досконалих субститутів, заданих на множині допустимих альтернатив $X = \mathbb{R}_+^2$, криві байдужості для даного споживача мають вигляд

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = c, \text{ де } a_1, a_2 > 0, c \in \mathbb{R}_+,$$

тобто, вони є відрізками прямих з постійним нахилом $k = -\frac{a_1}{a_2}$, розташованих у першому квадранті декартової системи координат з вертикальною віссю Ox_2 та горизонтальною – Ox_1 (мал. 3). В цій ситуації споживач завжди готовий замінити, не змінюючи свого добробуту, перший товар другим у відношенні $-\frac{a_1}{a_2}$.

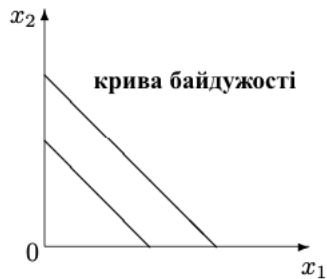
Відношення нестрогої переваги споживача на множині альтернатив скоєних субститутів може бути визначено одним з наступних двох способів:

$$(x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow a_1 x_1 + a_2 x_2 \geq a_1 y_1 + a_2 y_2$$

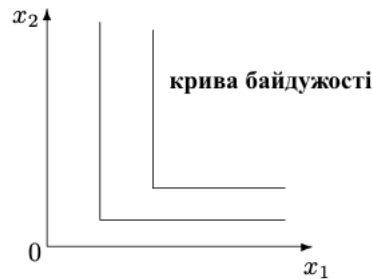
або

$$(x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow a_1 x_1 + a_2 x_2 \leq a_1 y_1 + a_2 y_2$$

У першому випадку його добробут збільшується при переході на більш високу криву байдужості, а в другому – на нижчу криву байдужості.



мал. 3.



мал. 4.

1. Досконалі комплементи. Говоритимемо, що два товари є **досконалими комплеменентами** для даного споживача, якщо вони завжди споживаються разом у постійній пропорції. У певному сенсі ці товари одне одного "доповнюють".

Гарним прикладом досконалих компліментів можуть бути правий і лівий черевики. Споживач "любить" носити черевики, але при цьому завжди носить правий і лівий черевики разом. Наявність у споживача лише одного черевика з пари не сприяє його добробуту.

Опишемо криві байдужості для таких досконалих компліментів. Припустимо, що вибирається споживчий набір (10,10). Додамо до нього ще 1 правий черевик, отримуємо набір (11,10). Згідно з припущенням, це не змінює добробуту споживача в порівнянні з вихідною позицією: зайвий черевик не збільшує його. Те саме станеться, якщо додати до вихідного набору ще один лівий черевик: споживачеві буде байдуже, чи мати набір (10,11) або (10,10).

Таким чином, крива байдужості, що містить набір (10, 10), являє собою множину точок

$$I(10,10) = \{(i,10),(10,k) : i, k = 10,11,\dots\}$$

і тому може бути задана співвідношенням

$$\min\{x_1, x_2\} = 10,$$

де x_1 – кількість правих, а x_2 – кількість лівих черевиків. Це співвідношення в декартовій системі координат $x_1 O x_2$ задає криву, яка має форму літери L

вершиною в точці (10,10), де кількість лівих черевиків дорівнює кількості правих черевиків. Ясно, що множина всіх кривих байдужості для аналізованого споживача записується у вигляді

$$\min\{x_1, x_2\} = c, \text{ де } c \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Якщо тепер врахувати, що при одночасному збільшенні кількості правих і лівих черевиків споживач пересувається в переважну точку, то зрозуміло, що відношення його нестрогої переваги визначається наступним чином

$$(x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow \min\{x_1, x_2\} \geq \min\{y_1, y_2\}.$$

У загальному випадку досконалих комплементів, коли товари споживаються в постійній пропорції, але при цьому не обов'язково в пропорції один до одного, криві байдужості визначаються відповідним видом

$$\min\left\{\frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2}\right\} = c, \text{ де } a_1, a_2 > 0, c \in \mathbb{R}_+.$$

Кожне з них у декартовій системі координат $x_1 O x_2$ задає (див. мал. 4) криву, також має форму літери L з вершиною в точці, де $\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2}$ (споживач вважає за краще споживати дані товари в пропорції $\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1}{a_2}$). У цьому випадку ставлення нестрогої переваги на множині альтернатив досконалих комплементів може бути визначено одним із наступних способів:

$$(x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow \min\left\{\frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2}\right\} \geq \min\left\{\frac{y_1}{a_1}, \frac{y_2}{a_2}\right\},$$

або

$$(x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow \min\left\{\frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2}\right\} \leq \min\left\{\frac{y_1}{a_1}, \frac{y_2}{a_2}\right\},$$

3. Антиблаго. Антиблаго – це товар, який споживачеві не подобається (але споживається).

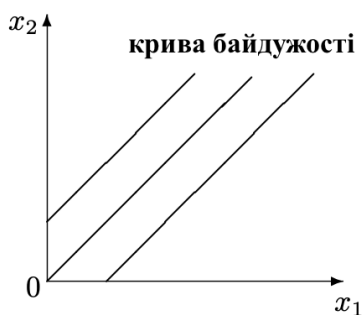
Припустимо, наприклад, що ми маємо справу зі споживачем, який любить прісну їжу. І тут для нього сіль є антиблагом. Розглянемо із цим споживачем ситуацію, коли він під час обіду, зайшовши до кафе, замовив порцію борщу, який дуже любить. Зважаючи на наявність солі в борщі, він змушений миритися з цим. Тепер спробуємо описати його криві байдужості у просторі альтернатив (x_1, x_2) , де x_2 – кількість солі в борщі, а x_1 – кількість інших його складових. Для цього додамо йому трохи чистої солі до борщу. Щоб якимось чином компенсувати зайву кількість солі, він вимагатиме додати собі борщу (збільшивши тим самим кількість інших його інгредієнтів) у такій кількості, щоб залишитися на тому ж рівні блаженства від його вживання, що й раніше. Звідси ясно, що відповідною

кривою байдужості на площині в системі декартової координат з вертикальною віссю Ox_2 і горизонтальною Ox_1 буде зростаюча пряма. Тому безліч всіх кривих байдужості даного споживача (див. мал. 5) задається рівнянням

$$x_2 = ax_1 + c, \text{ де } a > 0, c \in \mathbb{R}.$$

При цьому нестроге відношення його переваги може бути визначено таким чином:

$$(x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_2 - ax_1 \leq y_2 - ay_1).$$



мал. 5.



мал.6.

4. Байдужі блага. Товар називається байдужим благом, якщо споживач до нього абсолютно байдужий.

Припустимо, наприклад, що споживач абсолютно байдужий до фіглів і любить міглі. Тоді, здійснюючи вибір між фіглями і міглями, він завжди залишатиметься на одній і тій же кривій байдужості, коли число міглів x_1 фіксовано, а число фіглів x_2 будь-яке. Значить, його криві байдужості на площині в системі декартової координат з вертикальною віссю Ox_2 і горизонтальною – Ox_1 задаються рівняннями

$$x_1 = c, \text{ де } c \geq 0$$

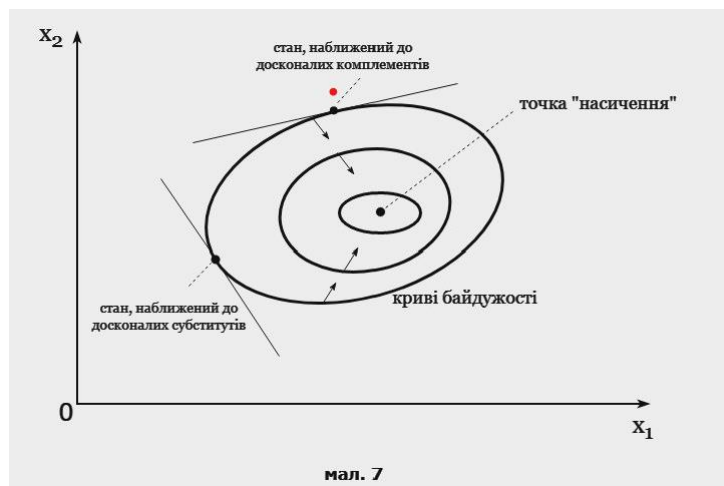
які є променями, паралельними осі Ox_2 (див. мал.6). При цьому його ставлення нестрогої переваги, задане на множині допустимих альтернатив $\mathbb{R}_+^2$, може бути визначено наступним чином:

$$(x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1 \geq y_1)$$

5. Насичення. Іноді виникає необхідність розглянути ситуацію, яка передбачає насичення, в якій для споживача існує якийсь найкращий набір, і чим "ближче" споживач перебуває до цього найкращого набору, тим вище його добробут з

позиції його переваг. Так, наприклад, для одного найбажанішим на даний момент є: прийняти ванну та випити чашку кави; для іншого: випити чарку горілки зі шматочком чорного хліба з цибулею та салом; для третього: з'їсти півкіло морозива з десятьма шматочками торта; для четвертого: відсидіти чотири пари в університеті, потім попрацювати години зо три в бібліотеці і, нарешті, позайматися наукою вдома; і т. д.

Припустимо тепер, що в споживача є якийсь товарний набір (x_1^0, x_2^0) і що далі він знаходиться від нього, тим нижче його добробут. І тут говоримо, що точка (x_1^0, x_2^0) – це точка "насичення", чи точка "блаженства". Криві байдужості для цього споживача виглядають як на мал. 7. В даному випадку нахил кривих байдужості є заперечливим, коли у споживача є "занадто мало" або "занадто багато" обох товарів, і позитивним, коли у нього "занадто багато" одного з товарів. У разі товар стає антиблагодом – скорочення споживання такого товару переміщує споживача ближче до точки "блаженства". Якщо в нього занадто багато обох товарів, вони є антиблагами, і тому скорочення споживання кожного з них переміщує споживача до точки блаженства. Якщо подумати, то виявиться, що пересититися можна багатьом. Але зазвичай люди не прагнуть споживати надто багато одних і тих самих товарів ("краще - ворог хорошого"). Тому, з погляду економічного вибору, інтерес представляє та область, де ви споживаєте більшість товарів у кількостях, менше бажаних. Насправді людей цікавить вибір саме такого роду, і саме його ми і будемо в основному розглядати. (Склянка молока з хрустким огірком).

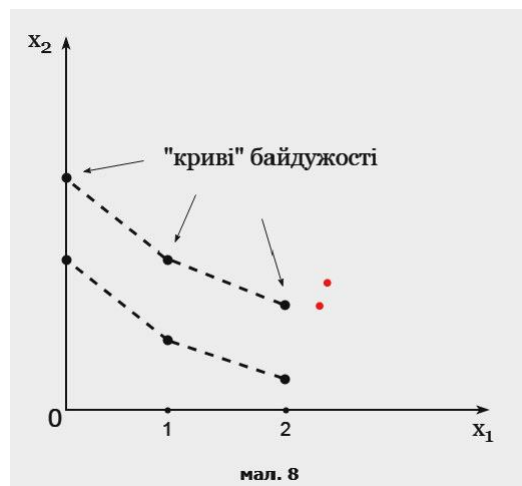


6. Дискретні товари. Розглянемо, наприклад, попит споживача на автомобілі. Ми могли б висловити попит на автомобілі в часі, витраченому на користування автомобілем, отримавши таким чином неперервну змінну, проте для багатьох цілей інтерес представляє саме попит, що висувається на фактичну кількість автомобілів.

Використання переваг опису поведінки щодо вибору, що стосується такого роду дискретного товару, труднощів не представляє. Нехай x_2 – гроші, що витрачаються на всі інші товари, а x_1 – дискретний товар, який можна купувати лише у неподільній кількості. Зовнішній вигляд "кривих" байдужості і множина

наборів для товару такого роду показані на мал. 8. У цьому випадку набори, байдужі до цього, будуть множиною окремих точок. Множина наборів, принаймні не гірших, ніж даний конкретний набір, буде представлено множиною прямих відрізків.

Питання, чи слід підкреслювати дискретну природу якогось товару, вирішується залежно від прикладних цілей дослідження. Якщо за весь період часу, охоплений нашим дослідженням, споживач вибирає одну чи дві одиниці товару, визнання дискретної природи вибору може мати значення. Якщо ж споживач обирає 30 чи 40 одиниць товару, то, можливо, зручніше вважати цей як товар, який ділиться.



Контрольні питання до теми 1

1. Як визначається бінарне відношення? Наведіть приклади таких відношень.
2. Які види бінарних відношень ви знаєте?
3. Яке бінарне відношення називається повним, транзитивним, рефлексивним, нерефлексивним, симетричним, асиметричним, від'ємно-транзитивним, циклічним, ациклічним?
4. Як визначається неперервне бінарне відношення?
5. Дайте поняття бінарного відношення квазіпорядку.
6. Як ви розумієте відношення еквівалентності? Відношення толерантності?
7. Що таке клас еквівалентності?
8. Як ви розумієте модель споживача? Вкажіть основні принципи побудови.
9. Як ви розумієте, що таке гіпотеза раціональної поведінки споживача.
10. Що ми розуміємо під поняттям товару?
11. Дайте поняття нестрого відношення переваги. Наведіть приклади.
12. Дайте поняття строго відношення переваги. Наведіть приклади.
13. Дайте поняття відношення еквівалентності. Наведіть приклади.

14. *Які властивості строгого відношення переваги ви знаєте?*
15. *Як ви розумієте множину байдужості (кривої байдужості).*
16. *Які властивості кривих байдужості ви знаєте?*
17. *Що таке гранична норма заміщення? Для функцій з якою властивістю можливо записати граничну норму заміщення?*
18. *Наведіть приклади переваг: довершені субститутути, довершені комплементи, дискретні блага, антіблаго, байдуже благо, точка насичення.*

ТЕМА 2. Елементи теорії вибору та виявлені переваги

2.1. Ситуації вибору та правила вибору. Аксиома Хаутекера

Зазвичай у мікроекономіці опис переваг за допомогою бінарних відносин використовується як відправна точка аналізу раціонального вибору споживача. Але можливий інший підхід, відправною точкою якого безпосередньо є вибір учасника. Перевага такого підходу ось у чому: ми можемо спостерігати вибір учасника, але з його переваги. Однак у деякому досить широкому класі випадків підхід, заснований на виборі, повністю еквівалентний підходу, заснованому на перевагах у тому сенсі, що можливо за відомим вибором побудувати відношення переваги, що породжує цей вибір. З іншого боку, підхід, заснований на перевагах, дозволяє побудувати більш широку теорію.

Для опису вибору учасника в теорії вибору вводяться поняття **ситуації вибору** та **правила вибору**, визначеного на множині ситуацій вибору.

Ситуація вибору – це деяка підмножина множини допустимих (фізично) альтернатив X , з яким учасник стикається і з якого він може обирати.

Означення 2.1. Нехай A – множина ситуацій вибору ($A \subseteq 2^X$). Правило вибору C ставить у відповідність кожній ситуації вибору A з A непусту множину $C(A)$ обраних альтернатив, кожна з яких є елементом A , тобто $C(A) \subset A$.

Раціональність споживача у термінах функції вибору виявляється у "аксіомі вибору Хаутекера".

Аксиома вибору Хаутекера (Аксиома виявлених переваг)

Нехай A і A' – дві ситуації вибору та альтернативи x, y , які належать як A , так і A' . Якщо $x \in C(A)$, $y \in C(A')$, то $x \in C(A')$ або $y \in C(A)$.

Сенс даної властивості прозорий. Якщо мати на увазі, що споживач раціональний у тому сенсі, що вибирає у будь-якій ситуації вибору "найкращі" альтернативи, то дана аксіома встановлює умову несуперечності його вибору.

Означення 2.2. Будемо говорити, що альтернатива x нестрого виявлено віддається перевазі альтернативі y , якщо існує ситуація вибору A така, що $x, y \in A$ і $x \in C(A)$.

Надалі нестроге відношення виявленої переваги позначатимемо $\succsim^R$ і будемо говорити, що x виявлено не гірше y , коли $x \succsim^R y$. Сенс цього означення полягає в тому, що якщо була обрана альтернатива x у ситуації вибору, коли була доступна також альтернатива y , x не може бути гірше y .

Означення 2.3. Будемо казати, що альтернатива x строго виявлено віддається перевазі альтернативі y , якщо існує ситуація вибору A така, що $x, y \in A$ і $x \in C(A)$, але $y \notin C(A)$.

Строге відношення виявленої переваги будемо позначати $\succ^R$ і говорити, що x виявлено краще y , якщо $x \succ^R y$. Сенс цього означення полягає в тому, що коли в якійсь ситуації вибору були доступні як x , так і y , але альтернатива x була обрана, а альтернатива y – ні, значить x краще за y .

Аксіому вибору Хаутеккера можна переформулювати у термінах виявлених переваг:

Якщо x виявлено не гірше y , то не є вірним, що y може бути виявлено краще за x , тобто,

$$(x \succsim^R y) \Rightarrow \neg(y \succ^R x)$$

Раціональність споживача в термінах переваг тісно пов'язана з раціональністю вибору споживача, як вона сформульована в аксіомі вибору Хаутеккера.

2.2. Основні теореми теорії вибору

Теорема 2.1. Нехай правило вибору $C(A)$ визначено на множині ситуацій вибору $\mathcal{A}$ і при цьому:

(i) виконана аксіома вибору Хаутеккера;
(ii) A містить всі двох- і трьохелементні підмножини X . Тоді нестроге відношення виявленої переваги $\succsim^R$, що відповідає правилу вибору $C(A)$:

(1) повно;

(2) транзитивно.

Д о в е д е н н я. ■(1) Нехай x, y – дві альтернативи (кошки) із X . Ситуація вибору $\{x, y\}$ має належати A , оскільки це двоелементна підмножина X . Оскільки за означенням $C(\{x, y\})$ не повинно бути порожнім, тоді або $x \in C(\{x, y\})$, або $y \in C(\{x, y\})$. Тобто або $x \succsim^R y$, або $y \succsim^R x$.

(2) Нехай x, y, z – три альтернативи (кошки) з X , такі що $x \succsim^R z$, або $y \succsim^R z$. Ситуація вибору $\{x, y, z\}$ має належати A , оскільки це трьохелементна підмножина X .

Покажемо, що $x \in C(\{x, y, z\})$. Якщо $y \in C(\{x, y, z\})$, то з аксіоми вибору Хаутеккера випливає, що $x \in C(\{x, y, z\})$, оскільки $x \succsim^R y$. Аналогічно, якщо $z \in C(\{x, y, z\})$, то $x \in C(\{x, y, z\})$. Оскільки $C(\{x, y, z\})$ не є пустим, то в будь-якому випадку $x \in C(\{x, y, z\})$. Це тягне за собою, що $x \succsim^R z$. ■

Це твердження показує, що вибір на основі правила вибору, що задовольняє аксіомі Хаутеккера, можна «раціоналізувати» як вибір на основі деякого відношення переваги.

Приклад. Нехай X множина допустимих альтернатив, яка складається з трьох елементів $X = \{x, y, z\}$. Споживач реалізує свій вибір на основі наступних ситуацій вибору $A_1 = \{x, y\}, A_2 = \{x, y, z\}$. В яких з наведених випадків виконана, а в яких невиконана аксіома Хауттекера, якщо правило вибору реалізується наступним чином:

- 1) $C(A_1) = \{x\}, C(A_2) = \{x\}$;
- 2) $C(A_1) = \{x\}, C(A_2) = \{y\}$;
- 3) $C(A_1) = \{x\}, C(A_2) = \{z\}$;
- 4) $C(A_1) = \{x, y\}, C(A_2) = \{x, y\}$;
- 5) $C(A_1) = \{x\}, C(A_2) = \{x, z\}$;
- 6) $C(A_1) = \{x\}, C(A_2) = \{x, y, z\}$;
- 7) $C(A_1) = \{x, y\}, C(A_2) = \{y\}$.

Відповіді: 1) так; 2) ні; 3) ні; 4) так; 5) так; 6) так; 7) так.

Зауважимо, що як і буде показано нижче, справедливе протилежне твердження:

якщо задана перевага $\succsim$, то правило вибору споживача, відповідне цим перевагам, природно визначити наступним чином:

$$C_{\succsim}(A) = \{x \in A : x \succsim y \forall y \in A\}.$$

Теорема 2.2. Нехай правило вибору $C_{\succsim}(A)$ відповідає транзитивному нестрогому відношенню переваги $\succsim$. Тоді це правило вибору відповідає аксіомі вибору Хаутеккера.

Д о в е д е н н я. ■ Нехай $x \succsim^R y$. Це означає, що у певній ситуації вибору A як x , так і y можна було вибрати ($x, y \in A$) і серед обраних альтернатив (кошиків) була альтернатива (кошик) x ($x \in C_{\succsim}(A)$). Оскільки правило $C_{\succsim}(A)$ породжене нестрогим відношенням переваги $\succsim$, то $x \succsim y$.

Нехай y деякій іншій ситуації вибору A' як x , так і y можна було обрати ($x, y \in A'$) і серед обраних альтернатив була альтернатива y ($y \in C_{\succsim}(A')$). Це означає, що $y \succsim z \forall z \in A'$. З транзитивності випливає, що те саме має бути вірним для x , тобто $x \succsim z \forall z \in A'$. Отже, $x \in C_{\succsim}(A)$, тобто аксіома Хаутеккера виконана. ■

Покажемо зараз, що якщо множин ситуацій вибору, у яких визначено правило вибору, досить багато, то підхід, що бере за основу правило вибору, еквівалентний підходу, що бере за основу переваги.

Теорема 2.3. *Нехай виконано умови теореми 2.2. Тоді правило вибору $C^{\mathbb{R}}(A)$, породжене нестрогим відношенням виявленої переваги $\succsim^{\mathbb{R}}$, співпадає з початковим правилом вибору A , тобто $C^{\mathbb{R}}(A) = C(A) \forall A \in A$.*

Доведення. ■ 1. $C(A) \subseteq C^{\mathbb{R}}(A)$.

Нехай $x \in C(A)$. Тоді за означенням нестрогої виявленої переваги $x \succsim^{\mathbb{R}} y \forall y \in A$. Звідси видно, що $x \in C^{\mathbb{R}}(A)$.

2. $C^{\mathbb{R}}(A) \subseteq C(A)$.

Нехай $x \in C^{\mathbb{R}}(A)$. Оскільки множина $C(A)$ не є порожньою, то існує альтернатива $y \in C(A)$. Умова $x \in C^{\mathbb{R}}(A)$, означає, що для довільної альтернативи $z \in A$, в тому числі і для y , виконано $x \succsim^{\mathbb{R}} z$, тобто існує така ситуація вибору A' , що $x, y \in A'$ і $x \in C(A')$.

Таким чином, ми маємо $x, y \in A', x, y \in A, x \in C(A'), y \in C(A')$. За аксіомою

Хаутеккера це означає, що $x \in C(A)$. ■

Контрольні питання до теми 2

1. Як визначається поняття ситуації вибору, правила вибору? Наведіть приклади таких правил.
2. Сформулюйте аксіому Хаутеккера.
3. Як можливо переписати аксіому Хаутеккера у в термінах «деякого виявленого» і «строого виявленого» відносин переваг?
4. Які основні принципи покладені в основу теорії вибору?
5. Вкажіть геометричний сенс теорем теорії вибору.
6. Які основні теореми теорії вибору ви знаєте? Сформулюйте.
7. Запишіть ознаку справедливості аксіоми Хаутеккера.
8. Сформулюйте теорему про властивості правила вибору «нестроого виявленого» відношення переваги.
9. Як ви розумієте реконструювання переваг споживача на основі виявлених переваг.
10. Які основні принципи, покладені в основу теорії вибору, ви знаєте?

ТЕМА 3. Переваги споживача і функція корисності

3.1. Подання переваг функцією корисності

Ми показали за досить природних припущень еквівалентність трьох підходів до опису переваг учасників:

- спочатку задано нестроге відношення переваги;
- спочатку задано строге відношення переваги;
- спочатку задана функція вибору учасника на множині ситуацій вибору.

Далі ми будуватимемо свої міркування, беручи за основу нестроге відношення переваги, але слід зазначити, що наведені нижче міркування можна перенести на випадок двох інших підходів. У цьому розділі ми розглянемо умови, за яких на підставі строгого відношення можна отримати числовий індикатор корисності (функцію корисності) з деякими заздалегідь заданими властивостями.

Зручно (особливо у додатках теорії) мати справу з ситуаціями, коли переваги споживача описуються функцією корисності. Ми всюди будемо припускати, що область значення функції корисності – це дійсна пряма, тобто дана функція є дійснозначною.

Означення 3.1. Дійснозначна функція $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ називається *функцією корисності споживача*, що відповідає його нестрогому відношенню переваги $\succsim$, заданому на множині допустимих альтернатив X , якщо для будь-якої пари альтернатив $x, y \in X$.

$$u(x) \geq u(y) \Leftrightarrow x \succsim y.$$

Вкажемо тепер деякі висновки, які безпосередньо випливають з факту існування функції корисності споживача.

Теорема 3.1. (Необхідні умови існування функції корисності). Якщо $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ – функція корисності споживача, що відповідає його нестрогому відношенню переваги $\succsim$, то це відношення переваги є на множині допустимих альтернатив X :

- (i) повним;
- (ii) транзитивним.

Д о в е д е н н я. ■

(i) Для будь-якої пари альтернатив $x, y \in X$ виконується по крайній одна з нерівностей $u(x) \geq u(y)$ або $u(y) \geq u(x)$. Тому або $x \succsim y$, або $y \succsim x$.

(ii) Нехай для $x, y, z \in X$ виконуються співвідношення: $x \succsim y$ та $y \succsim z$. За означенням функції корисності це означає, що $u(x) \geq u(y) \geq u(z)$. З $u(x) \geq u(z)$ випливає, що $x \succsim z$. ■

Теорема 3.2. Якщо $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ – функція корисності споживача, яка відповідає нестрогому відношенню переваги $\succsim$, заданому на множині допустимих альтернатив X , то для $x, y \in X$:

$$(i) (u(x) = u(y)) \Leftrightarrow (x \sim y);$$

$$(ii) (u(x) > u(y)) \Leftrightarrow (x \succ y).$$

Д о в е д е н н я. ■ (i) Ліва частина першого з цих двох висновків означає, що одночасно виконуються нерівності $u(x) \geq u(y)$ і $u(y) \geq u(x)$. Тому згідно з означенням функції корисності, це еквівалентно співвідношенням $x \succsim y$ і $y \succsim x$, тобто $x \sim y$.

(ii) Оскільки нерівність $u(x) > u(y)$ рівносильна тому, що виконується $u(x) \geq u(y)$ і невірно, що $u(y) > u(x)$, то через означення функції корисності воно еквівалентно умові, що $x \succsim y$ і невірно, що $y \succsim x$. У свою чергу, останній висновок згідно з теоремою 1.1 має місце тоді і лише тоді, коли $x \succ y$. ■

З останнього твердження, зокрема, ясно, що для кожної альтернативи $x_0 \in X$ крива байдужості споживача $I(x_0)$ збігається з множиною всіх альтернатив $x \in X$, розташованих на гіперповерхні рівня $u(x) = u(x_0)$.

При цьому множина всіх (розташованих у X) гіперповерхонь рівня $u(x) = c$ функції корисності u та споживача ставить множину всіх його кривих байдужості. Цей факт вказує шлях до практичної побудови функції корисності, якщо відомі криві байдужості споживача.

Однак при цьому слід мати на увазі, що справедливо

Теорема 3.3. 1) Якщо функція корисності споживача, що відповідає його нестрогому відношенню переваги $\succsim$, заданому на множині допустимих альтернатив X , $f : u(X) \rightarrow \mathbb{R}$, строго зростаюча функція, то суперпозиція $(f \circ u)(x) = f(u(x))$ також є функцією корисності цього споживача.

2) Якщо u і v дві функції корисності споживача, які відповідають його нестрогому відношенню переваги $\succsim$, заданому на множині допустимих альтернатив X , існує така строго зростаюча функція $f : u(X) \rightarrow \mathbb{R}$, що $v(x) = (f \circ u)(x) = f(u(x))$ для будь-якого $x \in X$.

Доведення. ■ 1) Нехай $x, y \in X$. З означення функції корисності $x \succcurlyeq y$. За означенням функції корисності $x \succcurlyeq y$ це означає, що $u(x) \geq u(y)$.

Так як $f : u(X) \rightarrow \mathbb{R}$ – строго зростаюча функція, тоді $f(u(x)) \geq f(u(y))$.

Таким чином одержуємо, що $f(u(x))$ також за означенням є функцією корисності.

Доведемо 2). Шукану функцію $f(t)$ можна побудувати в такий спосіб. Покладемо $f(t) = u(x)$ для $t \in u(X)$ і будь-якого x із множини $u^{-1}(t) = \{x: u(x) = t\}$. Значення $f(t)$ цим буде визначено однозначно, оскільки $u^{-1}(t)$ – це клас байдужості по відношенню до еквівалентності $\sim$ і тому $v(y) = v(x)$ для будь-яких $x, y \in u^{-1}(t)$.

Далі, функція f строго зростаюча, оскільки якщо $s, t \in u(X)$, $s > t$, то $x \succ y$ для будь-яких $x \in u^{-1}(s), y \in u^{-1}(t)$, так що $f(s) = v(x) > v(y) = f(t)$.

Нарешті, співвідношення $v(x) = f(u(x)), x \in X$ виконується автоматично з побудови функції f . ■

Зауваження. *Із теореми 3.3 випливає, що якщо для строгого відношення переваги споживача існує хоча б одна функція корисності, то існує множина функцій корисності, які виходять одна з іншої за допомогою монотонно зростаючих перетворень, з точністю до будь-яких подібних перетворень функція корисності для заданого поля переваг є єдиною.*

3.2. Деякі приклади функцій корисності

Раніше ми розглядали кілька прикладів відношень і кривих байдужості, у відповідності з якими у множині допустимих альтернатив X побудувати відповідну функцію корисності. Її необхідно намагатися підібрати таким чином, щоб вона:

- 1) приймала постійне значення вздовж кожної кривої байдужості; і щоб
- 2) її значення на кривих байдужості з більш переважними альтернативами були більше, ніж на кривих з менш переважними.

Досконалі субститути. У разі строгого відношення переваги споживача, заданого на множині досконалих субститутів $X = \mathbb{R}^2$, криві байдужості задаються співвідношенням вигляду:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = c,$$

де a_1, a_2 є довільними сталими. Тому, якщо для будь-яких $(x_1; x_2)$ і $(y_1; y_2) \in \mathbb{R}_+^2$

$$((x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2)) \Leftrightarrow (a_1 x_1 + a_2 x_2 \geq a_1 y_1 + a_2 y_2),$$

то в якості функції корисності споживача може бути обрана лінійна функція $u(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2$, або будь-яка інша, одержана з неї за допомогою строго монотонно зростаючого перетворення.

Досконалі комплементи. Аналогічно попередньому приходимо до висновку, що функція

$$u(x_1, x_2) = \min \left\{ \frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2} \right\}, \text{ де } a_1, a_2 > 0,$$

яку називають *функцією корисності Леонтьєва*, описує відношення нестрокої переваги споживача, заданої на множині **досконалих комплементів** $X = \mathbb{R}^2_+$.

Уподобання Кобба-Дугласа. Надалі для ілюстрації на прикладах, отриманих у теорії споживання результатів дослідження, широко використовуватиметься задана на множині допустимих альтернатив $X = \mathbb{R}^2_+$, функція корисності Кобба-Дугласа.

$$u(x_1, x_2) = A x_1^c x_2^d, \text{ де } A, c, d > 0.$$

Криві байдужості Кобба-Дугласа виглядають так само, як опуклі вниз і строго монотонно спадні криві, які раніше ми назвали стандартними кривими байдужості. Вподобання Кобба-Дугласа представляють типовий приклад таких стандартних, на вигляд, кривих байдужості.

В силу теореми 3.3 переваги Кобба-Дугласа завжди можуть бути представлені функцією корисності простішого виду. Дійсно, якщо для строго монотонного перетворення обрати функцію $f(t) = A^{-\frac{1}{c+d}} t^{\frac{1}{c+d}}$, то отримаємо нову функцію корисності

$$(x_1, x_2) = f(u(x_1, x_2)) = x_1^{\frac{c}{c+d}} x_2^{\frac{d}{c+d}}, \text{ яка описує такі самі переваги.}$$

Якщо позначимо

$$a = \frac{c}{c+d}, \quad \text{тоді легко бачити, що } \frac{d}{c+d} = \frac{c+d-c}{c+d} = 1-a.$$

Отримаємо функцію Коба-Дугласа вигляду:

$$v(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}.$$

Кривою байдужості є вітка гіперболи.

Квазілінійні переваги. Припустимо, що криві байдужості споживача на множині двовимірних альтернатив $X = \mathbb{R}^2_+$ являють собою вертикальні криві, які є зміщеними одна по відношенню до другої. Це означає, що всі криві

байдужості є просто вертикально "зміщеними" копіями однієї і тієї ж кривої байдужості.

Звідси випливає, що рівняння кривої байдужості набуває вигляду $x_2 = k - v(x_1)$, де k – стала, що має для кожної кривої байдужості своє значення. Чим більше значення, тим вище розташовується крива байдужості. Знак "віднімання" тут – не більше, ніж умовність; чому він зручний, дізнаємося пізніше. У цій ситуації цілком природним представляється ранжування кривих байдужості по k або "висотою" вздовж вертикальної осі. Якщо виразити з рівняння кривої байдужості k і прирівнявши його значення функції корисності, отримаємо функцію корисності виду

$$u(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2.$$

В даному випадку функція корисності лінійна за товаром 2 і нелінійна (можливо) за товаром 1; звідси і назва квазілінійна функція корисності, що означає частково лінійну корисність.

Конкретними прикладами квазілінійних функцій корисності є, наприклад, функції виду:

$$u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2, \quad u(x_1, x_2) = \ln x_1 + x_2$$

Квазілінійні функції корисності не дуже реалістичні, але з ними дуже легко працювати, у чому ми переконаємось надалі. У випадку відношення переваги, заданого на множині допустимих альтернатив $X = \mathbb{R}_+^l$, квазілінійні переваги визначаються наступним чином.

Означення 3.2. Відношення строгої переваги $\succsim$, задане на множині допустимих альтернатив $X = \mathbb{R}_+^l$, називається *квазілінійним* щодо першого товару, якщо дотримуються наступні дві умови:

- 1) $x + \alpha e^1 \succ x \quad \forall x, \alpha > 0$, де $e^1 = (1, 0, \dots, 0)$;
- 2) $x \sim y \Rightarrow (x + \alpha e^1) \sim (y + \alpha e^1) \quad \forall \alpha > 0$, де $x, y \in X$.

Таке відношення переваги задається функцією корисності виду

$$u(x) = v(x_2, x_3, \dots, x_l) + x_1.$$

(Тут має місце паралельне зміщення кривих байдужості вздовж осі Ox_1 .)

Наведемо приклади функцій корисності, заданих на $X = \mathbb{R}_+^l$:

- 1) *Лінійна функцій корисності* $u(x) = ax^T$, де $a \in \mathbb{R}_+^l$ сталий вектор;
- 2) *Квадратична функція корисності* $u(x) = ax^T + \frac{1}{2}xBx^T$, де матриця $B = (b_{ij})_{i,j=1}^l$ від'ємно визначена, а вектор $a + xB > 0$ є додатним.
- 3) *Мультиплікативна функцій корисності*
 $u(x) = \prod_{i=1}^l x_i^{a_i}$, де $a_i > 0$ ($i = 1, \dots, l$);
- 4) *Логарифмічна функцій корисності* (або *функцій корисності Бернуллі*)

$u(x) = \sum_{j=1}^l a_j \log_b (x_j - x_j^0), b > 1$, де параметри a_j і x_j^0 задовольняють умови $a_j > 0, x_j > x_j^0 \geq 0, j = 1, \dots, l$.

5) Функція корисності з сталою еластичністю

$$u(x) = \sum_{j=1}^l \frac{a_j}{1 - b_j} (x_j - x_j^0),$$

де параметри a_j, b_j і x_j^0 задовольняють обмеженням

$a_j > 0, 0 < b_j < 1, x_j > x_j^0 \geq 0, j = 1, \dots, l$.

Завдання підбору функціонального типу функції корисності та визначення її параметрів у конкретних випадках є завданнями сучасної економетрії.

3.3. Властивості диференційованої функції корисності.

Гранична норма заміщення в термінах функції корисності

Оскільки функція корисності споживача дозволяє легко описувати його криві байдужості з дотичними, до яких пов'язане поняття граничної норми заміщення одного товару іншим, то вона може бути використана для знаходження цієї граничної норми заміщення у разі гладких кривих байдужості.

Справді, припустимо, що нестроге відношення переваги споживача, задане на множині допустимих альтернатив $X \subseteq \mathbb{R}_+^l$, описується диференційованою на X функцією корисності u , та потрібно обчислити $MRS_{ij}(x^0)$, де $x^0 \in X$.

В даному випадку крива байдужості споживача, що містить точку x^0 задається рівнянням

$$u(x) = u(x^0)$$

Якщо надати тепер будь-який малий приріст Δx_i i -й компоненті x_i^0 вектора $x^0 = (x_1^0, \dots, x_l^0)$, підберемо збільшення Δx_j для j -ї його компоненти таким чином, щоб точка $x^0 + \Delta x_{ij}$, де Δx_{ij} – вектор, i -я компонента якого дорівнює Δx_i , j -я – рівна Δx_i , а решта нулі, залишалася на тій ж кривій байдужості, тобто щоб

$$u(x^0 + \Delta x_{ij}) = u(x^0).$$

У відповідності з теорією існування неявних функцій така точка в деякому достатньо малому околі точки x^0 визначається однозначно, якщо

$$\frac{\partial u(x^0)}{\partial x_j} \neq 0. \text{ При цьому } \Delta x_j \rightarrow 0, \text{ якщо } \Delta x_i \rightarrow 0.$$

Обравши заданим образом точку $x^0 + \Delta x_{ij}$ і маючи на увазі диференційовність функції u в точці x^0 отримаємо

$$\begin{aligned}
0 &= u(x^0 + \Delta x_{ij}) - u(x^0) = \\
&= \frac{\partial u(x^0)}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{\partial u(x^0)}{\partial x_j} \Delta x_j + \alpha_i(x^0, \Delta x_i, \Delta x_j) \Delta x_i \\
&\quad + \alpha_j(x^0, \Delta x_i, \Delta x_j) \Delta x_j,
\end{aligned}$$

де функції α_i, α_j такі, що

$$\lim_{\Delta x_i, \Delta x_j \rightarrow 0} \alpha_k(x^0, \Delta x_i, \Delta x_j) = 0 \quad k = (i, j).$$

Звідси маємо, що $\left(\frac{\partial u(x^0)}{\partial x_j} + \alpha_j\right) \Delta x_j + \left(\frac{\partial u(x^0)}{\partial x_i} + \alpha_i\right) \Delta x_i = 0$

$$\text{або } \frac{\Delta x_j}{\Delta x_i} = - \frac{\frac{\partial u(x^0)}{\partial x_i} + \alpha_i}{\frac{\partial u(x^0)}{\partial x_j} + \alpha_j}.$$

Якщо $\frac{\partial u(x^0)}{\partial x_j} + \alpha_j \neq 0$, то переходячи в цьому співвідношенні до границі при $\Delta x_i \rightarrow 0$ і беручи до уваги означення граничної норми заміщення i -го товару j -м, отримаємо

$$MRS_{ij}(x^0) = - \frac{\frac{\partial u(x^0)}{\partial x_i}}{\frac{\partial u(x^0)}{\partial x_j}}$$

Зауваження. Оскільки за будь-якого строго монотонного перетворення функції корисності криві байдужості залишаються тими самими і лише переозначаються, то гранична норма заміщення залишається при цьому перетворенні інваріантною. Ця обставина дозволяє значно спрощувати процес обчислення граничної норми заміщення одного товару іншим.

Наприклад, у разі переваг Кобба-Дугласа, які описуються функцією корисності

$$u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}, \text{ де } 0 < a < 1,$$

можливо обрати монотонне перетворення $f(t) = \ln(t)$ і розглянути функцію $u(x_1, x_2) = a \ln x_1 + (1-a) \ln x_2$. При цьому маємо:

$$\begin{aligned}
MRS_{12}(x_1, x_2) &= - \frac{\frac{a}{x_1}}{\frac{1-a}{x_2}} = - \frac{ax_2}{(1-a)x_1} \\
MRS_{21}(x_1, x_2) &= - \frac{\frac{1-a}{x_2}}{\frac{a}{x_1}} = - \frac{(1-a)x_1}{ax_2}.
\end{aligned}$$

Означення 3.3. У разі функції корисності споживача u , що диференціюється на множині допустимих альтернатив $X \subseteq \mathbb{R}_+^l$, вектор-функція

$$Mu(x) = \text{grad } u(x) = \nabla u(x) = \frac{du(x)}{dx} = \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right)_{i=1}^l = (Mu_i(x))_{i=1}^l$$

називається *граничною корисністю альтернативи* (кошика) x , а $M_i(x)$ – i – й частинна гранична корисність альтернативи x .

Величина $Mu_i(x_0)$ з економічної точки зору є величиною зміни корисності споживача в точці x_0 при зміні кількості i –го товару на одиницю.

Далі, відомо, що вектор $grad\ u(x_0)$, прикладений до точки x_0 перпендикулярно поверхні рівня $u(x) = u(x_0)$, що проходить через цю точку, вказує напрямок, за яким похідна функції u в точці x_0 набуває максимального значення. Тому вектор граничної корисності $Mu(x_0)$, прикладений до точки x_0 , перпендикулярний до кривої байдужості $u(x) = u(x_0)$, що проходить через цю точку, і вказує напрямок зміни кількості всіх благ у кошику x_0 , в якому корисність споживача зростає найшвидше (звідси і назва – гранична корисність).

Зокрема, він вказує напрям зміни благ у кошику, в якому розташовані криві байдужості з більшою корисністю, ніж у точці x_0 .

Формула для граничної норми заміщення i –го товару j –м у термінах граничних корисностей має вигляд

$$MRS_{ij}(x) = - \frac{Mu_i(x)}{Mu_j(x)}$$

Приклад функції корисності транспортних перевезень.

У більшості великих міст в осіб, що здійснюють регулярні транспортні поїздки, є вибір: користуватися громадським транспортом або їздити на роботу на машині. Кожну з цих альтернатив можна визначити як набір різних характеристик: часу знаходження в дорозі, часу очікування, готівки, комфорту, зручності та інше.

Позначимо тривалість часу знаходження в дорозі для кожного роду подорожі через x_1 , тривалість часу очікування для кожного роду через x_2 і т. д.

Якщо $(x_1, \dots, x_n)$ представляє, скажімо, значення n різних характеристик автомобільних поїздок, а $(y_1, \dots, y_n)$ – значення характеристик поїздок автобусом, то можна розглянути модель, в якій споживач приймає рішення про те, чи поїхати йому на машині або на автобусі, виходячи з переваги одного набору зазначених характеристик іншому. Говорячи більш конкретно, припустимо, що переваги середнього споживача щодо зазначених характеристик можуть бути подані функцією корисності виду.

$$u(x_1, \dots, x_n) = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n$$

де коефіцієнти $\beta_i (i = 1, \dots, n)$ – невідомі параметри.

Зрозуміло, будь-яке монотонне перетворення цієї функції корисності не гірше описало б споживчий вибір, проте з погляду статистики працювати з лінійною функцією особливо легко.

Припустимо тепер, що перед нами ряд подібних між собою споживачів, які вибирають поїхати на автомобілі або на автобусі, ґрунтуючись при цьому на конкретних даних про продовження споживання часу поїздки, про витрати та інші характеристики поїздки, з якими вони стикаються. У статистиці є технічні прийоми, які можна використовувати для знаходження значень коефіцієнтів $\beta_i (i = 1, \dots, n)$, найбільш підходящих для структури, що спостерігається вибору, зробленого цією множиною споживачів. Ці технічні прийоми статистики дозволяють вивести оцінку функцію корисності для різних способів транспортного пересування.

$$u(TW, TT, C) = -0,147TW - 0,0477TT - 2,24C,$$

де TW – загальний час ходьби до автобуса або автомобіля або від нього,

TT – загальний час поїздки в хвилинали, C – загальна вартість поїздки в доларах.

За допомогою цієї оцінної функції корисності вдалося правильно описати вибір між автомобільним та автобусним транспортом для 93 % домогосподарств взятої авторами вибірки. Коефіцієнти при змінних функції корисності показують питому вагу, приписувану середнім домогосподарством: різним характеристикам регулярних поїздки на транспорті, граничну корисність кожної такої характеристики. Ставлення одного коефіцієнта до іншого показує граничну норму заміщення однієї характеристики іншою. Наприклад, відношення граничної корисності часу ходьби пішки до граничної корисності загальної тривалості поїздки вказує на те, що середній споживач вважає час ходьби пішки приблизно втричі більш тяжким, ніж час поїздки.

Іншими словами, споживач був би готовий витратити 3 додаткові хвилини на поїздки, щоб заощадити 1 хвилину ходьби від готелю. Аналогічно відношення вартості поїздки до загальної довжини поїздки вказує на вибір середнього споживача щодо цих двох змінних. У даному обстеженні споріднений пасажир оцінював хвилину часу поїздки на транспорті в $0,0411/2,24 = 0,183$ дол. за хвилину, що становить 1,10 долара за годину. Для порівняння годинна зарплата середнього пасажирів 1967 р. становила близько 2,85 долара на годину. Такі оцінні функції корисності можуть бути дуже цінними для визначення того, чи варто здійснювати будь-які зміни у системі громадського транспорту.

Наприклад, у наведеній вище функції корисності одним з важливих факторів, що пояснюють, чим керуються користувачі у своєму виборі, виступає тривалість поїздки. Міське управління транспортом могло б при деяких витратах збільшити кількість автобусів, щоб скоротити цю загальну тривалість поїздки. Але чи послужить додаткова кількість пасажирів виправданням збільшених витрат? Виходячи з наявної функції корисності та вибірки споживачів можна зробити прогноз щодо того, які споживачі захочуть здійснювати поїздки на автомобілі, а які віддадуть перевагу автобусу. Це дозволить отримати деяке

уявлення про те, чи буде виручка достатньою для покриття додаткових витрат. Крім того, можна використовувати граничну норму заміщення для отримання уявлення про оцінку кожним споживачем скорочення часу поїздки. Як ми бачили вище, середній пасажир 1967 р. оцінював час поїздки за ставкою 1,10 долара на годину. Іншими словами, він готовий був заплатити близько 37 центів, щоб скоротити час поїздки на 20 хвилин. Це число дає нам міру виграшу у доларах від більш своєчасного надання автобусних послуг. Щоб визначити, чи варта гра свічок, вказаний виграш слід порівняти з витратами на це більш своєчасне надання автобусних послуг. Наявність кількісної міри виграшу, безумовно, сприяє прийняттю раціональних рішень у галузі транспортної політики.

3.4. Умови існування функції корисності

Вище було показано, що умови повноти та транзитивності нестрогого відношення переваги споживача є необхідними для існування функції корисності цього споживача. Природно поставити і зворотне питання. Які властивості переваг (і множини альтернатив, на яких задані переваги) гарантують існування функції корисності?

Зазначимо, що коли множина альтернатив не більш ніж лічильна, умови повноти і транзитивності є достатніми для існування функції корисності. Множина альтернатив буде лічильною, наприклад, коли товари споживаються лише у цілих кількостях.

Теорема 3.5. *Якщо множина допустимих альтернатив X є лічильною, то для будь-якого повного і транзитивного нестрогого відношення переваги, яке задано на X , існує функція корисності.*

Д о в е д е н н я. ■ Нехай множина альтернатив є лічильною. Тоді його можна впорядкувати його елементи, тобто перенумерувати у вигляді послідовності альтернатив $x^i, i = 1, 2, \dots$

Припустимо, що на ньому задано повне та транзитивне нестроге відношення переваги $\succsim$. Доказ існування функції корисності проведемо конструктивним шляхом опису алгоритму її побудови.

Нехай ми вже надали величину корисності першим N альтернативам з даної послідовності. Потрібно присвоїти величину корисності альтернативі x^{N+1} .

Розглянемо два підмножини множини $A^N = \{x^1, \dots, x^N\}$:
 $A_+^N = \{x \in A^N : x \succsim x^{N+1}\}$ і $A_-^N = \{x \in A^N : x^{N+1} \succsim x\}$. Таке розбиття можливо у силу повноти нестрогого відношення переваги $\succsim$.

Позначимо $\bar{x}$ такий елемент множини A_+^N , що $x \succcurlyeq \bar{x} \quad \forall x \in A_+^N$.

У разі неєдиності такого елемента беремо будь-який із них. Також точно позначимо $\tilde{x}$ такий елемент множини A_-^N , що $\tilde{x} \succcurlyeq x \quad \forall x \in A_-^N$. Існування $\bar{x}$ (при непорожній множині A_+^N) і $\tilde{x}$ (при непорожній множині A_-^N) впливає з повноти та транзитивності нестрогого відношення переваги $\succcurlyeq$. Тоді з означень множин A_-^N і A_+^N маємо, що $x^{N+1} \succcurlyeq \tilde{x}$ і $\bar{x} \geq x^{N+1}$.

Можливі 4 випадки:

1) $A_+^N = \emptyset$. Тоді можна взяти $u(x^{N+1}) = u(\tilde{x}) + 1$

2) $A_-^N = \emptyset$. Тоді можна взяти $u(x^{N+1}) = u(\bar{x}) - 1$

3) $A_+^N \cap A_-^N = \emptyset$. Тоді можна взяти $u(x^{N+1}) = \frac{u(\tilde{x}) + u(\bar{x})}{2}$

4) $A_+^N \cap A_-^N \neq \emptyset$. Тоді можна взяти $u(x^{N+1}) = u(x)$, де x – довільний елемент множини $A_+^N \cap A_-^N$ (по побудові множини $A_+^N \cap A_-^N$ мають однакову корисність).

Щоб закінчити алгоритм, покладемо $A^1 = \{x^1\}$ і $u(x^1) = 0$. Зауважимо, що з такої побудові функції корисності властивість $x \succcurlyeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$ виконано $\forall x, y \in A^N$ за будь-якого N . Тому побудована таким чином функція $u(x)$ дійсно є функцією корисності. ■

Зауваження. Якщо множина альтернатив не є лічильною, то твердження в загальному випадку є невірним.

3.5. Контрприклад лексикографічного впорядкування

Розглянемо нестроге відношення переваги, побудоване на основі лексикографічного впорядкування споживчих наборів $\mathbb{R}_+^l$.

Лексикографічне впорядкування називається так тому, що воно подібне до правила розташування слів у словнику. Для простоти розглянемо множину допустимих альтернатив як підмножину двовимірного простору $X = \mathbb{R}_+^l$. Задамо на X бінарне відношення $\succcurlyeq^L$, визначається за правилом $(x \succcurlyeq^L y) \Leftrightarrow (x_1 > y_1 \text{ або } x_1 = y_1, x_2 \geq y_2)$

Як неважко помітити, це бінарне відношення має *властивості повноти та транзитивності*. Однак, воно не є функцією корисності. Доведемо останнє.

Припустимо супротивне. Нехай існує деяка функція корисності (що приймає дійсні значення) така, що $x \succcurlyeq^L y \Leftrightarrow u_L(x_1, x_2) \geq u_L(y_1, y_2)$. Поставимо у відповідність кожному дійсному числу x_1 деяке раціональне число $r(x_1)$ таке, що $u_L(x_1, 2) > r(x_1) > u_L(x_1, 1)$.

Зауважимо, що коли $x_1 > x'_1$, то за означенням лексикографічного впорядкування маємо $u_L(x_1, 2) > u_L(x'_1, 2)$.

Крім того,

$$u_L(x_1, 2) > r(x_1) > u_L(x_1, 1) \text{ і } u_L(x'_1, 2) > r(x'_1) > u_L(x'_1, 1). \text{Тоді маємо, що}$$
$$r(x_1) > u_L(x_1, 1) > u_L(x'_1, 2) > r(x'_1)$$

і тим самим з того, що $x_1 > x'_1$ маємо, що $r(x_1) > r(x'_1)$. В силу цього $r(\cdot)$ є строго монотонно зростаючою функцією, область визначення якої – дійсні числа, а область значень – деяка підмножина множини раціональних чисел. Але це неможливо, тому що неможливо побудувати взаємооднозначну відповідність між лічильною і нелічильною множиною. Таким чином, ми дійшли до *протиріччя*, і тим самим довели, що не існує функції корисності, що відповідає *лексикографічному упорядкуванню*.

Зазначимо, однак, що все-таки існує ряд випадків, для яких можна гарантувати існування функції корисності у разі нерозрахункової множини альтернатив. Наприклад, функція корисності існує, якщо переваги неперервні.

Означення 3.4. Відношення P , задане на X , називається *неперервним*, якщо для будь-яких збіжних в X послідовностей $\{x_n\}, \{y_n\}$ таких, що

$$x_n P y_n \text{ виконано } x P y,$$

$$\text{де } x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Нескладно показати, що якщо функція корисності $u(x)$ неперервна на множині $X \subseteq \mathbb{R}^l_+$, то нестроге відношення переваги $\succsim$ неперервно на X .

Добре довів і обернене

Теорема 3.5. (Теорема Дебре) Нехай нестроге відношення переваги $\succsim$ повно, транзитивно і неперервно на зв'язаній множині допустимих альтернатив $X \subseteq \mathbb{R}^l_+$. Тоді існує неперервна функція корисності $u : X \rightarrow \mathbb{R}^l_+$, що задає це відношення переваги.

Доказ цього результату складний, тому наводимо його без доказу. Нижче ми доведемо більш слабе твердження.

Розглянемо тепер додаткові якісні властивості, які можуть мати відношення переваги. Найбільш природною з них є *властивість монотонності*, яке гарантує нам, що корисність індивідуума зростає при зростанні кількості споживаних товарів.

Означення 3.5. Відношення переваги називається *монотонним*, якщо з $x \geq y$ випливає, що $x \succsim y$. Відношення переваги називається *строго монотонним*, якщо з $x \geq y$ і $x \neq y$ випливає $x \succ y$.

Теорема 3.6. Нехай нестроге відношення переваги $\succsim$, визначене на $X = \mathbb{R}_+^l$, є повним, транзитивним, суворо монотонним і неперервним.

Тоді існує нестроге відношення переваги, яке може бути подане монотонною неперервною функцією корисності.

Д о в е д е н н я. ■ Для функції корисності можна вилучити відповідність, за якою кожному $X \in \mathbb{R}_+^l$ існує таке число $u(x)$, що, $x \sim u(x)I$, де I – l -мірний вектор, що складається з одиниць. Покажемо, що таке число $u(x)$ завжди існує і єдине.

Для цього ми повинні знайти для кожного набору x еквівалентний йому набір множин $U = \{uI : u \in \mathbb{R}_+^l\}$, яке є променем, що виходить з початку координат. В силу суворої монотонності переваг, набори з цієї множини мають властивості:

$$u_1 I > u_2 I \Leftrightarrow u_1 > u_2, \quad u_1 I \sim u_2 I \Leftrightarrow u_1 = u_2.$$

Поставимо набору x множину чисел u , відповідаючи наборам з U , що

$$U^+(x) = \{u \in \mathbb{R}_+ : uI \succsim x\}$$

і множину чисел u відповідних не кращим наборам з U

$U^-(x) = \{u \in \mathbb{R}_+ : x \succsim uI\}$, причому таке розбиття можливо у силу повноти несуворого відношення переваги.

Ці множини не порожні, тому що з властивості суворої монотонності випливає що, $0 \in U^-(x)$ і $\max\{x_k\} \in U^+(x)$ (максимальний компонент вектора x). Множина $U^+(x)$ розташоване правіше $U^-(x)$, оскільки з транзитивності та суворої монотонності переваг слід, що

$$\forall u_1 \in U^-(x) \text{ і } \forall u_2 \in U^+(x)$$

$$u_2 I \succsim x \text{ і } x \succsim u_1 I \Rightarrow u_2 I \succsim u_1 I \Leftrightarrow u_2 \geq u_1.$$

Звідси, зокрема, випливає, що множина U^- обмежена зверху, а множина U^+ – знизу.

Позначимо $u^- = \sup\{U^-(x)\}$ і $u^+ = \inf\{U^+(x)\}$. Ці величини скінченні, оскільки множини $U^-(x)$ та $U^+(x)$ обмежені зверху та знизу відповідно. Крім того, через неперервність переваг будемо мати $u^+ \in U^+(x)$ і $u^- \in U^-(x)$. Значить, $u^+ \geq u^-$. Покажемо, що $u^+ = u^-$.

Припустимо, що це не так. Тоді існує число u' таке, що $u^- < u' < u^+$, так що $u' \notin U^-(x)$ і $u' \notin U^+(x)$. Це суперечить повноті переваг, оскільки або $u'I \succsim x$, або $x \succsim u'I$. Отримана точка $u = u^+ = u^-$ задовольняє необхідну умову $x \sim uI$ і є єдиною. Задана таким чином функція $u(x)$ є функцією корисності.

Дійсно, для будь-яких $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^l$ за побудовою функції корисності маємо $x_1 \sim u(x_1)I$ і $x_2 \sim u(x_2)I$. Тому в силу повноти, транзитивності та суворої монотонності переваг.

$$x_1 \succcurlyeq x_2 \Leftrightarrow u(x_1)I \succcurlyeq u(x_2)I \Leftrightarrow u(x_1) \geq u(x_2)$$

Це означає, що $u(x)$ – функція корисності споживача, яка відповідає даному несуворому відношенню переваги $\succcurlyeq$.

Покажемо, що функція корисності $u(x)$ є монотонною.

Нехай $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^l$, причому $x_1 \geq x_2$ і $x_1 \neq x_2$. Тоді, зважаючи на повноту і сувору монотонність переваг, $x_1 \succ x_2$. Звідси випливає, що $u(x_1)I \succcurlyeq u(x_2)I$, тому $u(x_1) > u(x_2)$.

Доведемо тепер неперервність функції корисності $u(x)$ на $\mathbb{R}_+^l$. Для цього виберемо довільним чином $x \in \mathbb{R}_+^l$ і послідовність $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ таку, що $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$. Нам треба показати, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u(x_n) = u(x)$.

У силу збіжності послідовності $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ існує число $r > 0$ таке, що $\|x_n\| \leq r \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Тому, враховуючи повноту та монотонність переваг споживача, будемо мати

$$rI \succcurlyeq x_n \succcurlyeq 0I \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Звідси згідно з визначенням функції корисності отримаємо

$$r \succcurlyeq u(x) \succcurlyeq 0 \quad \text{при } \forall n \in \mathbb{N}$$

Будучи обмеженою, послідовність значень функції корисності $u\{\{x_n\}_{n=1}^\infty\}$ має принаймні одну граничну точку.

Припустимо, що вона має граничну точку $\tilde{u}$, відмінну від $u(x)$. Тоді існує підпослідовність $\{x_{nk}\}_{k=1}^\infty$ послідовності $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, для якої $\lim_{k \rightarrow +\infty} u(x_{nk}) = \tilde{u}$.

Не обмежуючи спільності, вважатимемо, що $\tilde{u} > u(x)$. У цьому випадку, якщо обрати довільним чином число $\hat{u}$, що задовольняє нерівності

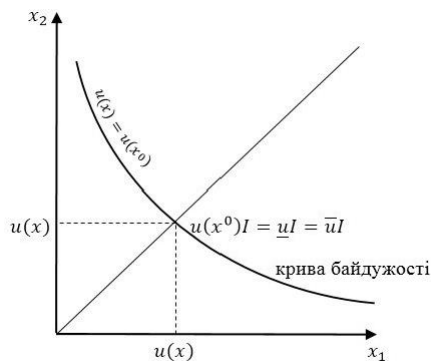
$\tilde{u} > \hat{u} > u(x)$, згідно з властивістю суворої монотонності переваг, будемо мати $\hat{u}I = u(x)I$. З іншого боку, оскільки $u\{(x_{nk})_{k=1}^\infty\}$ сходиться до $\tilde{u}$, то існує K таке, що $\forall k > K$ виконано нерівність $u(x_{nk}) > \hat{u}$.

За визначенням функції корисності $x_{nk} \sim u(x_{nk})I$ і, крім того, через сувору монотонність переваг $u(x_{nk})I > \hat{u}I \quad \forall k > K$, $x_{nk} \sim x_{nk}I > \hat{u}I$ для $\forall k > K$. Оскільки переваги неперервні, то звідси знаходимо $x \succcurlyeq \hat{u}I$, тому $x \sim u(x)$ і $u(x)I \succcurlyeq \hat{u}I$. Однак вище було показано, $\hat{u}I > u(x)I$. Ми одержали протиріччя, яке доводить єдинність граничної точки.

Таким чином, для будь-якої послідовності $\{x_n\}_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}_+^l$, що збігається до x , послідовність значень функції корисності $u(x_n)_{n=1}^\infty$ має єдину граничну точку $u(x)$ і тому $\lim_{n \rightarrow \infty} u(x_n) = u(x)$. Тим самим доведено неперервність функції корисності в кожній точці $x \in \mathbb{R}_+^l$. ■

Геометричний сенс теореми 3.6 при $n=2$

Відношення суворої переваги $\succsim$ повне транзитивне неперервне строго-монотонне за теоремою 3.6. має неперервну строго-монотонну зростаючу функцію корисності $u = u(x)$ в результаті перетинання для будь-якого $u \in R$ проміня uI та кривої байдужості $I(x) = \{x \in R_+^2: u(x) = u(x_0)\}$ (див. мал. 3.1)



Мал. 3.1

Основна мета даного параграфу полягала в тому, щоб показати, які властивості переваг гарантують існування функції корисності споживача. Але, крім цього, ми встановили, що функція корисності, що представляє задані переваги, єдина. При моделюванні переваг споживача часто розглядаються два підходи: *ординалістський* і *кардиналістський*.

Ординалістський підхід передбачає, що це функції $u(\cdot)$, які задовольняють властивості $u(x) \geq u(y) \Leftrightarrow x \succsim y$, еквівалентні в описах поведінки споживача.

Кардиналістський же підхід передбачає, що серед цього сімейства функцій існує підмножина особливих функцій, які володіють більш "глибокими" властивостями, у тому сенсі, що з їх допомогою можна виміряти «істинну» корисність, яку отримує індивід від кожного з наборів благ. Ці функції дозволяють порівнювати споживчі набори кількісно, чого не можна зробити при ординалістському підході, оскільки різниця величина корисності у разі немає змістовної інтерпретації.

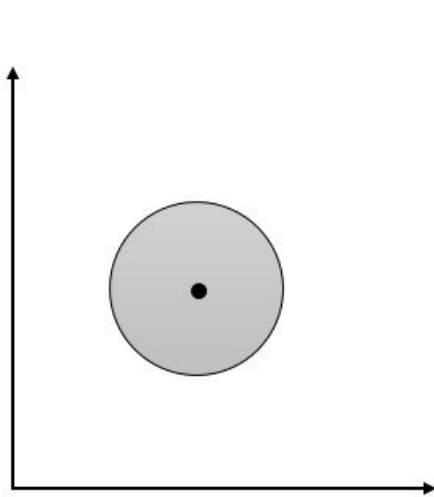
3.6. Основні властивості функції корисності

Деякі важливі типи переваг споживачів та властивості представлять їх функції корисності. Надалі при розгляді важливих окремих випадків моделей раціональної поведінки споживача нам знадобляться ще ряд типів переваг і властивості функцій корисності, що їх подають замість властивості строгої монотонності; часто можливо використовувати слабкішу властивість локальної ненасичуваності. Локальної ненасичуваності зазвичай виявляється достатньою

для доказу тих властивостей вибору, які випливають із строгої монотонності переваг.

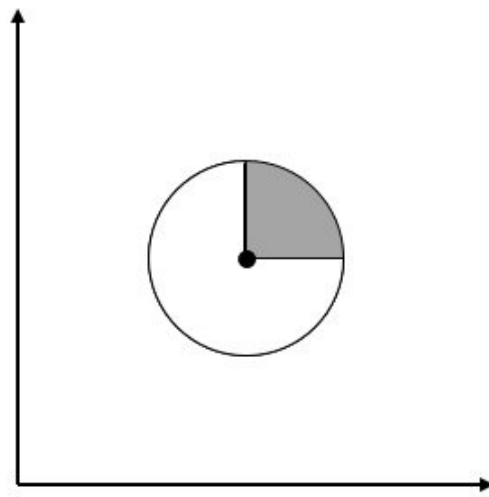
Означення 3.6. *Переваги споживача називаються локально ненасиченими, якщо для кожного допустимого набору x в будь-якій його околі знайдеться інший допустимий набір $\hat{x}$ такий що $\hat{x} \succ x$.*

Локальне ненасичення означає, що можна завжди робити зовсім трохи краще, навіть якщо повинні обмежитися малими змінами кошика товарів. Можливо зрозуміти, що сильна монотонність тягне локальну ненасичуваність, але зворотне не вірно. На малюнках 8 і 9 заштриховані області, в яких можуть бути кращі набори локальної ненасичуваності і за строгої монотонності (відповідно) переваг.



Для локальної ненасиченості

Мал. 8



Для строгої монотонності

Мал. 9

Зазначимо також, що достатньою умовою монотонності переваг споживача є умова $Mu(x) \in \mathbb{R}_+^l$, а достатньою умовою суворої монотонності $Mu(x) \in \mathbb{R}_+^l$ и $\exists i \in \{1, \dots, l\}$ таке, що $M_i u(x) > 0$.

Наприклад, у разі розглянутого раніше прикладу квадратичної функції корисності.

$$u(x) = a \cdot x^T + \frac{1}{2} x B x^T,$$

де матриця $B = (b_{ij})_{i,j=1}^l$ симетрична і від'ємно визначена ($B < 0$), а вектор $a + xB$ додатний ($a + xB > 0$), маємо $Mu(x) = (a + xB > 0)$. Тому дана функція корисності подає переваги споживача, які є строго монотонними.

Досить просту поведінку споживача отримуємо в ситуації так званих *гомотетичних переваг*.

Означення 3.7. Відношення переваги називається *гомотетичним* на

$X \subseteq \mathbb{R}_+^l$, якщо

(i) для кожного додатного $t > 0$ $tx \in X$ тоді і тільки тоді, коли $x \in X$

(ii) для кожного додатного $t > 0$ співвідношення

$$tx > ty$$

виконується тоді і лише тоді, коли виконується співвідношення

$$x > y$$

Така характеристика переваг дозволяє отримувати сильні результати щодо поведінки споживачів та станів рівноваги, та активно експлуатується в теорії міжнародної торгівлі та в макроекономіці при аналізі агрегованого попиту.

Зауважимо, що множиною допустимих альтернатив у разі гомотетичних переваг є конус у $\mathbb{R}_+^l$ і при деяких додаткових обмеженнях існує однорідна функція корисності, яка представляє ці переваги.

Наступна властивість, що характеризує "регулярний" випадок, що розглядається в економічній теорії, важлива для демонстрації "гарних" властивостей функції вибору та доказу існування рівноваги. Тут і далі ми припускатимемо, що множина X опукла.

Означення 3.8. Нехай множина допустимих альтернатив $X \subseteq \mathbb{R}_+^l$ є опуклою. Відношення переваги споживача $\succeq$, задане на X , називається:

1) **опуклим**, якщо $\forall x, y \in X$ таких, що $x \succeq y$ та будь-якого $\alpha \in [0,1]$ виконано $\alpha x + (1 - \alpha)y \succeq y$;

2) **строго опуклим**, якщо $\forall x, y \in X$ таких, що $x \succeq y, x \neq y$ та будь-якого $\alpha \in (0,1)$ виконано $\alpha x + (1 - \alpha)y > y$;

3) **посилено опуклим**, якщо $\forall x, y \in X$ таких, що $x > y$ та будь-якого $\alpha \in (0,1)$ виконано $\alpha x + (1 - \alpha)y > y$.

Припущення опуклості в економіці є традиційними. Вони відображають конкретні економічні закономірності і відіграють важливу технічну роль в економіко-математичних моделях та його аналізі.

Розглянемо економічний сенс опуклості переваг споживача. Припустимо, що альтернативи $x, y \in X$ розташовані на одній кривій байдужості, тобто $x \sim y$, і покладемо $\alpha = \frac{1}{2}$ в означенні опуклості переваг. Тоді матимемо

$$\frac{x + y}{2} \succeq y \sim x$$

Отже, споживач віддає перевагу середньому набору $\frac{x+y}{2}$.

Наприклад, якщо у кошиках x, y компоненти $x_i = 0, y_i \neq 0$ або $x_r \neq 0, y_r = 0$, тоді $\frac{x_i + y_i}{2} \neq 0$ при $j = i, r$ і таким чином розподіл $\frac{x+y}{2}$ дає споживачеві деяку кількість товарів i та r у той час, як розподіли x та y дають йому лише один із цих

товарів. Таким чином, опуклість переваг висловлює бажання споживача бути представленим на всіх ринках, робити свій вибір між усіма товарами. Зокрема, це відображає ефекти насиченості, за якими, починаючи з деякого рівня бажання споживача, виключно одного товару зменшується, та ефект розповсюдження кількості потреб, коли первинні потреби починають задовольнятися, виконуються шляхом збільшення кількості інших потреб.

Теорема 3.7. *Різні означення опуклості у разі повного та транзитивного відношення переваг $\succeq$, заданого на множині допустимих альтернатив $X \subseteq R_+^l$, пов'язані наступними співвідношеннями:*

- (i) з 2) випливає 1);
- (ii) з 2) випливає 3);
- (iii) якщо відношення переваг $\succeq$ є неперервним, то з 3) випливає 1).

Д о в е д е н н я. ■ (i) Припустимо, що $x \succeq y$ для $x, y \in X$. Якщо $x = y$, то $\alpha x + (1 - \alpha)y = x \succeq y$. Якщо ж $x \neq y$, то згідно з 2) $\alpha x + (1 - \alpha)y \succ y$ і тим більше $\alpha x + (1 - \alpha)y \succeq y$ при $\alpha \in (0,1)$. При $\alpha = 1$ або $\alpha = 0$ співвідношення $\alpha x + (1 - \alpha)y \succeq y$ виконується очевидним чином. Тобто, з 2) витікає 1).

(ii) Припустимо, що $x \succ y$ для $x, y \in X$. Це виключає випадок $x \succeq y$, тому $x \neq y$. З $x \succ y$ витікає, що $x \succeq y$ і тому відповідно до 2) $\alpha x + (1 - \alpha)y \succ y$ при $\alpha \in (0,1)$, що доводить (ii).

(iii) Нехай $x \succeq y$ для $x, y \in X$ та $[x, y] = \{\alpha x + (1 - \alpha)y : \alpha \in [0, 1]\}$ – відрізок з кінцями x та y . (iii) буде доведено, якщо буде встановлено, що множина $W = \{w \in [x, y] : y \succ w\}$ є порожньою. Припустимо супротивне, що існує деяка $w_1 \in W$.

Тоді через неперервність переваги $\succeq$ знайдеться відмінна від w_1 точка $w_2 \in W$ така, що $[w_1, w_2] \subseteq W$. При цьому, не обмежуючи спільності, можна вважати, що точки обрані таким чином, що

$$w_1 = \alpha_1 y + (1 - \alpha_1)w_2 \text{ при деякому } \alpha_1 \in (0,1),$$

$$w_2 = \alpha_2 y + (1 - \alpha_2)w_1 \text{ при деякому } \alpha_2 \in (0,1).$$

З умови $y \succ w_2$ і першого з цих образів в силу 3) маємо $w_1 \succ w_2$. З іншого боку з $x \succeq y \succ w_1$ витікає $x \succ w_1$, що разом з другим образом і 2) тягне за собою $w_2 \succ w_1$. Таким чином, отримано протиріччя $w_1 \succ w_2$ і $w_2 \succ w_1$, яке доводить, що $W = \emptyset$. ■

Для опису властивостей опуклості переваг споживача у термінах функції корисності знадобиться наступне

Означення 3.9. *Нехай X – опукла множина в R_+^l . Функція $u : X \rightarrow R$ називається:*

- 1) **увігнутою**, якщо для будь-яких $x, y \in X$ виконується нерівність $u(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha u(x) + (1 - \alpha)u(y)$ при будь-якому $\alpha \in [0,1]$;

2) **строго увігнутою**, якщо для будь-яких $x, y \in X$ таких, що $x \neq y$ виконується нерівність

$u(\alpha x + (1 - \alpha)y) > \alpha u(x) + (1 - \alpha)u(y)$ при будь-якому $\alpha \in (0,1)$;

3) **квазіувігнутою**, якщо для будь-яких $x, y \in X$

$u(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}$ при будь-якому $\alpha \in [0,1]$.

4) **строго квазіувігнутою**, якщо для будь-яких $x, y \in X$ таких, що $x \neq y$ дотримується нерівність

$u(\alpha x + (1 - \alpha)y) > \min\{u(x), u(y)\}$ при будь-якому $\alpha \in (0,1)$.

Зауваження. Звернемо увагу на те, що з увігнутості (строгої увігнутості) функції $u : X \rightarrow R$ безпосередньо випливає її квазіувігнутість (відповідно строга квазіувігнутість). При цьому слід пам'ятати, що обернене не завжди є вірним.

Теорема 3.8. Якщо функція корисності u увігнута (строго увігнута) на опуклій множині $X \subseteq R_+^l$, то переваги споживача, що надаються нею, опуклі (відповідно строго опуклі) на цій множині.

Доведення. ■ Згідно з означенням увігнутості функції u маємо, що

$\forall x, y \in X$

$u(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha u(x) + (1 - \alpha)u(y) \quad \forall 0 \leq \alpha \leq 1.$

Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що $x \geq y$. Тоді $u(x) \geq u(y)$, звідки маємо $u(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq u(y)$.

Скориставшись означенням функції корисності отримаємо, що $\alpha x + (1 - \alpha)y \geq y$.

У разі строгої увігнутості функції доказ провести самостійно. ■

Обернене не завжди вірне. Випуклість переваг еквівалентна квазіувігнутості функції корисності.

Теорема 3.9. Функція корисності u , задана на опуклій множині X , є квазіувігнутою (строго квазіувігнутою) тоді і тільки тоді, коли переваги, які вона представляє, є опуклими (відповідно строго опуклими) на X .

Доведення. ■ ($\Rightarrow$). Покажемо, що із квазіувігнутості функції корисності $u : X \rightarrow R$ випливає опуклість наданих нею переваг.

В силу означення квазіувігнутості: $\forall x, y \in X$

$u(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \min\{u(x), u(y)\} \quad \forall 0 \leq \alpha \leq 1.$

Не обмежуючи спільності, вважатимемо, що $x \geq y$. Тоді $u(x) \geq u(y)$ і наведена вище нерівність набуде вигляду $u(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq u(y)$.

Звідси, в силу означення функції корисності, отримаємо, що

$\alpha x + (1 - \alpha)y \geq y \quad \forall 0 \leq \alpha \leq 1.$

($\Leftarrow$). Вважаємо, що $x \geq y$. Тоді згідно з означенням опуклості переваг

$\alpha x + (1 - \alpha)y \geq y$ для $\forall \alpha \quad 0 \leq \alpha \leq 1$

і тому через означення функції корисності

$u(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq u(y) = \min\{u(x), u(y)\} \quad \forall \alpha \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$

У разі строгої квазівгнутості функції корисності і строгої опуклості, представлених нею переваг доведення провести самостійно. ■

3.7. Властивості диференційованої функції корисності.

Гранична норма заміщення в термінах функції корисності

В силу наведених вище двох результатів важливо мати зручні ознаки увігнутості, строгої увігнутості, квазіувігнутості та строгої квазіувігнутості функції $u : X \rightarrow R$ на опуклій множині X . Такими є наступні відомі з математичного аналізу теореми.

Означення 3.10. Нехай функція $u : X \rightarrow R$ є двічі диференційованою на множині $X \in R_+^l$. Під **матрицею Гессе** будемо розуміти матрицю других похідних функції $u(x)$:

$$H(x) = \left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^l \quad (x = (x_1, \dots, x_l)).$$

Причому вказана матриця завжди буде симетричною, виходячи з властивостей змішаних похідних функції багатьох змінних.

Теорема 3.10. Двічі неперервно диференційовна на опуклій множині $X \in R_+^l$ функція $u : X \rightarrow R$ є увігнутою тоді і тільки тоді, коли її матриця Гессе $H(x)$ від'ємно напіввизначена на X ; тобто тоді і лише тоді, коли для кожного $x \in X$

$$z^T H(x) z \leq 0 \text{ при будь-якому } z \in R^l.$$

Теорема 3.11. Двічі неперервно диференційовна на опуклій множині $X \in R_+^l$ функція $u : X \rightarrow R$ є строго увігнутою тоді і тільки тоді, коли її матриця Гессе $H(x)$ від'ємно визначена, тобто тоді і лише тоді, коли для кожного $x \in X$

$$z^T H(x) z < 0 \text{ при будь-якому } z \in R^l.$$

Теорема 3.12. Двічі неперервно диференційовна на опуклій множині $X \in R_+^l$ функція $u : X \rightarrow R$ є квазіувігнутою тоді і лише тоді, коли її матриця Гессе $H(x)$ від'ємно напіввизначена на гіперплощині

$\nabla u(x)z = 0$, тобто тоді і тільки тоді, коли для кожного $x \in R_+^l$

$$z^T H(x) z \leq 0 \text{ при будь-якому } z \text{ такому, що } \nabla u(x)z = 0.$$

Теорема 3.13. Двічі неперервно диференційовна на опуклій множині $X \in R_+^l$ функція $u : X \rightarrow R$ є строго квазіувігнутою тоді і лише тоді, коли її матриця Гессе $H(x)$ є від'ємно визначеною на гіперплощині $\nabla u(x)z = 0$, тобто тоді і тільки тоді, коли для кожного $x \in R_+^l$

$z^T H(x) z < 0$ при будь-якому z такому, що $\nabla u(x) z = 0$.

Приклад. Раніше було розглянуто приклад квадратичної функції корисності

$$U(x) = a \cdot x^T + \frac{1}{2} x B x^T,$$

де матриця $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ від'ємно визначена ($B < 0$), а вектор $a + xB$ додатний ($a + xB > 0$). То для цієї функції корисності

$$MU(x) = \frac{dU(x)}{dx} = a + xB, H(x) = \ddot{U}(x) = \left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^l = B,$$

то описувані нею переваги споживача є строго монотонно зростаючими та строго опуклими.

Щоб повною мірою усвідомити зміст наведених вище теорем, нагадаємо ще деякі факти з теорії квадратичних форм.

Означення 3.10. Дійсна квадратична форма

$$A(z, z) = \sum_{i,k=1}^l a_{ik} z_i z_k = z^T A z, \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & \dots & a_{ll} \end{pmatrix}, \quad z = (z_1, \dots, z_l),$$

називається невід'ємною (недодатною), якщо при будь-яких дійсних значеннях змінних

$$A(z, z) \geq 0 \quad (A(z, z) \leq 0).$$

в даному випадку матрицю коефіцієнтів A також називають невід'ємною (відповідно недодатною). Якщо при цьому матриця A є симетричною, її називають додатно напіввизначеною (від'ємно напіввизначеною).

Означення 3.11. Дійсна квадратична форма $A(z, z) = z^T A z$ називається додатно визначеною (від'ємно визначеною), якщо за будь-яких не рівних одночасно нулю дійсних значеннях змінних ($z \neq 0$)

$$A(z, z) > 0 \quad (A(z, z) < 0).$$

В цьому випадку матриця A також називається додатно визначеною (від'ємно визначеною).

Теорема 3.14. Для того, щоб дійсна квадратична форма

$$A(z, z) = \sum_{i,k=1}^l a_{ik} z_i z_k = z^T A z$$

була додатно визначеною, необхідно і достатньо, щоб виконувались нерівності

$$D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_l > 0,$$

де,

$$D_1 = a_{11}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots$$

Оскільки будь-який головний мінор матриці A за належної перенумерації змінних можна помістити в лівий верхній кут, то має місце наслідок.

Наслідок. У додатно визначеній квадратичній формі $A(z, z) = \sum_{i,k=1}^l a_{ik} z_i z_k$ всі головні мінори матриці коефіцієнтів додатні

$$A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix} \geq 0 \quad (1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq l; \quad p = 1, 2, \dots, l)$$

З невід'ємності послідовних головних мінорів

$$D_1 \geq 0, D_2 \geq 0, \dots, D_l \geq 0$$

не впливає невід'ємність форми $A(z, z)$. Справді, форма $a_{11}z_1^2 + 2a_{12}z_1z_2 + a_{22}z_2^2$, в якій $a_{11} = a_{12} = 0, a_{22} < 0$, відповідає умовам $D_1 \geq 0, D_2 \geq 0$, але не є невід'ємною.

Однак має місце наступна

Теорема 3.15. Для того, щоб дійсна квадратична форма була невід'ємною, необхідно і достатньо, щоб усі головні мінори її матриці коефіцієнтів були невід'ємними:

$$A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix} \geq 0 \quad (1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq l; \quad p = 1, 2, \dots, l)$$

Критерії від'ємно визначеної та недодатної квадратичної форми представлені в наступних двох теоремах.

Теорема 3.16. Для того, щоб дійсна квадратична форма

$$A(z, z) = \sum_{i,k=1}^l a_{ik} z_i z_k = z^T A z$$

була від'ємно визначеною, необхідно та достатньо, щоб виконувались нерівності

$$D_1 < 0, D_2 > 0, \dots, D_l < 0, \dots, (-1)^l D_l > 0,$$

де,

$$D_1 = a_{11}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad D_l = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & \dots & a_{ll} \end{vmatrix}.$$

Теорема 3.17. Для того, щоб дійсна квадратична форма була недодатною, необхідно і достатньо, щоб усі головні мінори її матриці коефіцієнтів задовольняли нерівностям:

$$(-1)^p A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix} \geq 0 \quad (1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq l; \quad p = 1, 2, \dots, l).$$

У разі, коли гомотетичні переваги є опуклими та локально ненасиченими на множині допустимих альтернатив $X \subseteq R_+^l$, то більш точно може бути описана функція корисності, що їх представляє.

Означення 3.12. Кажуть, що функція корисності $u : X \rightarrow R$ гомотетична, якщо вона має вигляд

$$u(x) = g(v(x)),$$

де $g(v)$ – (строго) зростаюча, а $v(x)$ – однорідна функція першого степеню.

Неважко переконатися, що справедливо наступна теорема.

Теорема 3.18. Випуклі і локально ненасичені переваги гомотетичні тоді і тільки тоді, коли існує гомотетична функція корисності, що представляє їх.

Контрольні питання до теми 3

1. Як визначається функція корисності? Наведіть приклади функцій корисності.
2. Сформулюйте властивості функції корисності.
3. Як відрізняються властивості функції корисності для диференційованої та недиференційованої функції?
4. Що таке гранична корисність споживчої корзини?
5. Що таке гранична корисність деякого товару в споживчій корзині?
6. Сформулюйте теорему про існування функції корисності.
7. Наведіть лексикографічне відношення переваги і доведіть, що для неї не існує функція корисності споживача.
8. Сформулюйте теорему Дебре (про існування неперервної функції корисності).
9. Які теореми про існування функції корисності ви знаєте?
10. В чому різниця між ордіналістким і кардиналістським підходом при побудові функцій корисності?
11. В чому різниця між перевагами, що локально не насичаються і гомотетичними перевагами?
12. В чому складаються достатні умови монотонності і строгої монотонності переваг?

ТЕМА 4. Бюджетні обмеження споживача

Розібравшись із принципом упорядкування споживача та способом опису його переваг, займемося аналізом другого основного принципу – принципу оптимізації, згідно з яким споживач вибирає найкращий товарний набір, серед тих, які може собі дозволити. При цьому спочатку зосередимося на вивченні того, що споживач може собі дозволити.

4.1. Бюджетні обмеження споживача. Бюджетна множина

Теоретично споживання передбачається, якщо споживач завжди здійснює свій вибір з множини доступних йому альтернатив, що визначається як множина споживчих наборів, які задовольняють двом типам обмежень. По-перше, це все "фізичні" обмеження на вибір споживача (він не може працювати більше 24 годин на добу, споживати якість благо у від'ємній кількості і т. д.). Усі споживчі набори, які задовольняють цим обмеженням, тобто набори, які доступні споживачеві без урахування інституційних обмежень, називатимемо *множиною допустимих альтернатив (споживчих наборів)* і позначатимемо її через X . Надалі, якщо не обумовлено обернене, як X розглядається множина R_+^l .

По-друге, це різні типи інституційних обмежень. Найпростіший вид обмежень такого типу – це так зване **бюджетне обмеження** вальрасівського типу – вимога обмежити вартість споживчого кошика фіксованою сумою грошей – **бюджетом**. Таким чином, нехай $p = (p_1, \dots, p_l)$ – вектор цін благ, що розглядаються, а m – дохід споживача, то його бюджетна множина має такий вигляд

$$B(p, m) = \{x \in X : px \leq m\},$$

де px – скалярний добуток векторів p і x :

$$px = p_1x_1 + \dots + p_lx_l,$$

який називають **вартістю кошику споживача**. При цьому множину кошиків $x \in X$, які коштують у точності m , називають **бюджетної кривою (прямою, поверхнею)**. Вона визначається рівнянням

$$p_1x_1 + \dots + p_nx_n = m,$$

або у векторній формі $px = m$, тобто є частиною гіперплощини, розташованої в X .

Згідно з введеним раніше означенням, бюджетна множина $B(p, m)$ являє собою окремий випадок *ситуації вибору*.

У разі коли $n = 2$ і $X = R_+^2$ бюджетна множина і бюджетна гіперплощина визначаються відповідно із співвідношень

$$p_1x_1 + p_2x_2 \leq m,$$

та

$$p_1x_1 + p_2x_2 = m.$$

Їхній геометричний сенс зрозумілий з мал. 4.1.



Мал. 4.1.

Зроблена нами передумова про наявність лише двох товарів має більш загальний характер, ніж можна було подумати спочатку, оскільки часто можна вважати один з товарів, який представляє всі інші товари, що споживач міг би побажати спожити.

Наприклад, якщо ми бажаємо вивчити попит споживача на чорну ікру, ми можемо позначити через x_1 його щомісячне споживання ікри в кілограмах, а через x_2 – усі інші товари, які міг би забажати спожити цей споживач.

Прийнявши це трактування товару 2, зручно думати про нього як про ту кількість грошей, яку споживач може витратити на всі інші товари. З подібного тлумачення ціна товару 2 автоматично опиняється рівною 1, оскільки ціна однієї гривні є гривня. Таким чином бюджетне обмеження набуде вигляду

$$p_1 x_1 + x_2 \leq m.$$

Даний вираз говорить про те, що сума грошей $p_1 x_1$, витрачена на товар 1, та сума грошей x_2 , витрачена на всі інші товари, взяті разом, не повинні перевищувати загальної суми m , яку може витратити даний споживач.

Ми кажемо, що товар 2 представляє **компонентний товар**, що втілює у собі все те, що даний споживач хотів би споживати, окрім товару 1.

Якщо переписати рівняння бюджетної прямої у вигляді

$$x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1,$$

то отримаємо рівняння, яке показує скільки одиниць товару 2 повинен спожити споживач, щоб при споживанні x_1 одиниць товару 1 бюджетне обмеження як раз задовольнялось.

На бюджетну криву $p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$ можливо дивитись як на рівняння з трьома змінними (p_1, p_2, m) . Бюджетна пряма визначається двома цінами та одним доходом, але одна з цих змінних зайва. Ми могли б надати одній з цін або доходу деяке постійне значення і відповідним чином змінити інші змінні так, щоб отримати в точності ту саму бюджетну множину.

Для зменшення кількості параметрів в економіці вводять так званий **вимірник**. Ціна – вимірник – це ціна, відносно якої ми вимірюємо ціну іншого

товару та доход. Іноді буває що зручно рахувати один з товарів вимірником, оскільки таким самим зміна однієї із цін вилучена з розгляду.

Можливі випадки:

- 1) Якщо в якості вимірника обрати дохід m , то в рівнянні залишається два параметри

$$\frac{p_1}{m}x_1 + \frac{p_2}{m}x_2 = 1,$$

де $\frac{p_1}{m}$ і $\frac{p_2}{m}$ - частка 1 і 2 товару в наборі, представляє собою кількість товару 1 (відповідно 2), що міг би купити споживач, витратив всі свої гроші.

- 2) Якщо в якості вимірника обрати одну з цін, наприклад, p_2 , одержимо

$$\frac{p_1}{p_2}x_1 + x_2 = \frac{m}{p_2},$$

де частка коефіцієнта $\frac{p_1}{p_2}$ характеризує пропорцію, в якій ринок готовий «замінити» товар 2 товаром 1.

3) Розглянемо можливість заміни одного товару іншим, залишаючись на тій самій бюджетній кривій.

Припустимо, наприклад, що споживач має наміри збільшити своє споживання товару 1 на величину Δx_1 . На скільки повинно змінитись споживання товару 2 цим споживачем, щоб його бюджетне обмеження було задоволено? Для позначення зміни споживання товару 2 цим споживачем будемо використовувати Δx_2 .

А тепер помітимо, що якщо дане бюджетне обмеження задовольняється і до, і після змін, тоді повинне задовольняти рівності

$$p_1x_1 + p_2x_2 = m$$

та

$$p_1(x_1 + \Delta x_1) + p_2(x_2 + \Delta x_2) = m.$$

Віднімаючи перше рівняння від другого, отримаємо

$$p_1\Delta x_1 + p_2\Delta x_2 = 0.$$

Це рівняння показує, що спільна величина зміни споживання даного споживача повинна дорівнювати нулю. Якщо виразити з даного рівняння $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ пропорцію, у якій товар 2 можна замінити товаром 1, не порушуючи при цьому бюджетного обмеження, отримаємо

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -\frac{p_1}{p_2}.$$

Це є нахилом бюджетної лінії. Знак від'ємності стоїть перед ним, тому що Δx_1 та Δx_2 завжди повинні мати протилежні знаки. Тобто, якщо ви споживаєте більше товару 1, то ви вимушені споживати менше товару 2, і навпаки, аби дане бюджетне обмеження задовольнялось.

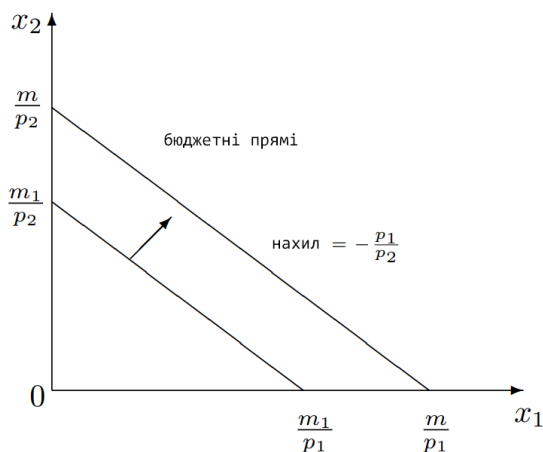
Економічний сенс, який ми можемо зробити, трактується так: якщо змінюється кількість товару, не залишаючи з бюджетної кривої, то пропорція заміщення одного товару іншим **не змінюється**.

Іноді економісти кажуть, що нахил бюджетної кривої показує **альтернативні витрати** споживання товару 1. Відмова від можливості споживання товару 2 є справжніми економічними витратами більшого споживання товару 1; і ці залишки вимірюються нахилом бюджетної кривої.

4.2. Вплив зовнішніх факторів на зміну бюджетної кривої

При зміні цін та доходу змінюється і множина товарів, що доступна споживачу. Як впливають ці зміни на бюджетну множину?

1. *Зміна доходу m* не впливає на кут нахилу бюджетної кривої. Зріст доходу буде мати результатом паралельний зсув бюджетної лінії зовні, а зменшення – всередину.



Мал. 4.2. Зріст доходу ($m_1 > m$) призводить до паралельного зсуву бюджетною лінії зовні

2. *Зростання цін усіх товарів в одне й те ж число k* рівносильне зменшенню доходу в k разів:

$$B(kp, m) = \{x \in X: kp_1x_1 + kp_2x_2 = m\}$$

Зокрема, зміна цін на всі товари та доходу споживача в одне й те ж число раз не змінюють нахилу бюджетної лінії, дохід споживача падає, тобто купівельна спроможність споживача зменшується в k разів:

$$p_1x_1 + p_2x_2 = \frac{m}{k}$$

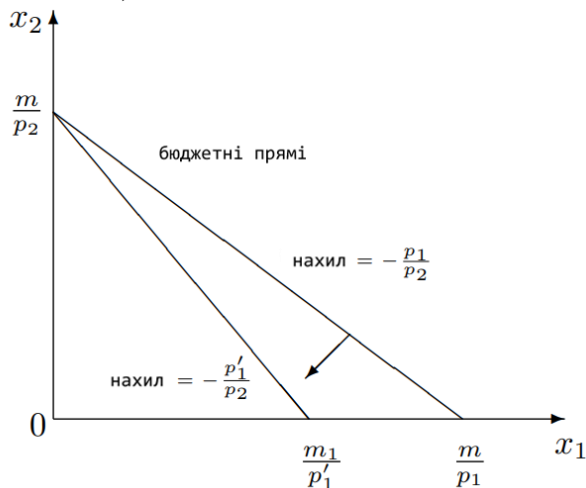
3. *Зміна всіх цін та доходу в k разів одночасно* не змінює бюджетну множину:

$$B(kp, km) = \{x \in X: kp_1x_1 + kp_2x_2 = km\} =$$

$$\{x \in X: p_1x_1 + p_2x_2 = m\} = B(p, m)$$

4. *Зміни ціни тільки одного товару* впливає на нахил бюджетної лінії.

1) Якщо товар 1 стає дорожчим (дешевшим), тоді бюджетна лінія стає крутішою (пологою).



Мал. 4.3. При зростанні ціни ($p_1' > p_1$) бюджетна лінія стає крутішою

В економічній політиці часто застосовують інструменти, що впливають на бюджетне обмеження споживача, скажемо, податки та субсидії.

1. Податки. Якщо уряд запроваджує **податок на обсяг покупок**, це означає, що споживач повинен сплачувати уряду визначену суму з кожної купленої ним одиниці товару.

В США, наприклад, споживачі сплачують у вигляді федерального податку на бензин близько 15 центів за галон .

Як впливає податок на обсяг покупок на бюджетну лінію споживача? З точки зору споживача, податок – це те ж саме, що й підвищення ціни. Отже податок в t доларів на одиницю товару 1 просто змінює ціну товару 1 з p_1 на $p_1 + t$. Як ми бачили раніше, це означає, що бюджетна лінія повинна стати крутішою.

Інший вид податку – **податок на вартість**. Назвою мається на увазі, що їм оподатковується вартість – ціна товару, а не куплена кількість товару. Податок на вартість зазвичай виражається у відсотках.

В більшості штатів США діють податки з обсягу. Якщо податок з обсягу складає 6 % , тоді товар що оцінюється в 1\$, фактично продається за 1,06\$. Якщо товар має ціну p_1 , але оподатковується податком з обігу за ставкою τ , тоді фактично для споживача ціна дорівнює $(1 + \tau)p_1$. Споживач повинен заплатити p_1 постачальнику та τp_1 уряду за кожну одиницю товару, так що спільна вартість товару для споживача становить $(1 + \tau)p_1$. Це означає що бюджетна лінія стане крутішою.

2. Субсидія – протилежність податку. У разі субсидії на обсяг покупок уряд дає споживачеві суму, розмір якої залежить від купленої кількості товару. Якби, наприклад, споживання молока субсидувалось, уряд виплачував би кожному споживачеві молока деяку суму, яка залежить від кількості молока, що

купується цим споживачем. Якби субсидія становила s гривень на одиницю споживання товару 1, то з погляду споживача ціна товару 1 дорівнювала б $p_1 - s$. Це призвело б до того, що бюджетна лінія стала б більш пологою.

Аналогічно, субсидія на вартість (або пайова субсидія) це субсидія, заснована на ціні субсидованого товару. Якщо уряд повертає вам 1 гривню з кожних двох, які ви жертвуєте на благодійність, то ваші пожертви на благодійність субсидуються за ставкою в 50 %. Взагалі, якщо ціна товару 1 дорівнює p_1 і товар 1 субсидується у формі пайової субсидії за ставкою σ , тоді фактична ціна товару 1 для споживача дорівнює $(1 - \sigma)p_1$.

Як бачимо, вплив податків і субсидій на ціни абсолютно однаковий, крім знаку: податок підвищує ціну споживача, а субсидія знижує.

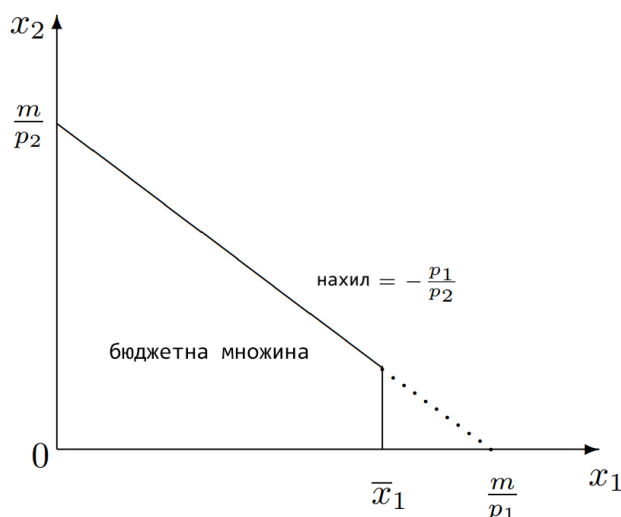
3. Акордний податок та акордна субсидія – інші види податку та субсидії, які можуть використовуватись урядом.

У разі *акордного податку* це означає, що уряд відбирає деяку суму грошей, яка не залежить від поведінки індивіда. Отже, запровадження акордного податку означає, що бюджетна лінія споживача рухається всередину, оскільки його грошовий дохід було скорочено. Аналогічно, *акордна субсидія* – це деяка сума, яку уряд безоплатно віддає споживачу, не враховуючи його вподобання, при чому можливо бачити зсув бюджетної лінії назовні.

4. Нормуючі (раціонуючі) обмеження – ще одна з можливих дій уряду. Це означає, що встановлюється певний рівень споживання будь-якого товару, перевищення якого заборонено. Наприклад, під час Другої світової війни уряд США нормував споживання деяких видів продуктів харчування, таких як олія та м'ясо.

Припустимо, наприклад, в наслідку нормування товару 1 даний споживач не може споживати його в кількості більше, ніж $\tilde{x}_1$. Тоді бюджетна множина для даного споживача прийме вигляд, зображений на мал.4.4: воно буде являти собою колішню бюджетну множину, але з «відсіченим» шматком. Цей «відсічений» шматок складається з усіх наборів, що доступні, але в яких

$$x_1 > \tilde{x}_1.$$



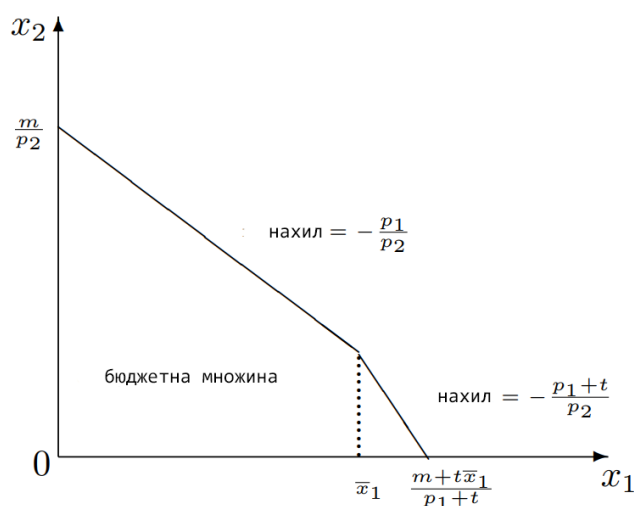
Мал. 4.4. Бюджетна множина при нормуванні споживання

Частина бюджетної множини, що виходить за рамки кількості, встановленого нормування, відсікається.

Звернемо увагу на те, що відрізок прямої $x_1 = \tilde{x}_1$ не лежить на бюджетній поверхні.

Іноді податки, субсидії та нормуюче споживання застосовується спільно. Наприклад, можна розглядати ситуацію, у якій споживач міг би споживати товар 1 по ціні p_1 до якогось рівня $\tilde{x}_1$, а потім буде повинен сплачувати податок t на весь обсяг споживання, що перевищує $\tilde{x}_1$. Бюджетне обмеження для такого споживача зображено на мал. 4.5. В цьому випадку нахил бюджетної лінії дорівнює $-\frac{p_1}{p_2}$ зліва від $\tilde{x}_1$ і $-\frac{p_1+t}{p_2}$ справа від $\tilde{x}_1$.

У рамках отриманої бюджетної множини споживач повинен платити податок лише на споживання товару 1, що перевищує величину $\tilde{x}_1$, так що бюджетна лінія справа від $\tilde{x}_1$ стає крутішою.



Мал. 4.5. Оподаткування споживання, що перевищує $\tilde{x}_1$

У рамках отриманої бюджетної множини споживач повинен платити податок лише на споживання товару 1, що перевищує величину $\tilde{x}_1$, так що бюджетна лінія справа від $\tilde{x}_1$ стає крутішою.

Деякі висновки

1. Оскільки при добутку всіх цін та доходу на додатне число бюджетний набір не змінюється, то оптимальний набір, що обирається споживачем з бюджетної множини, також не може змінитися. Ще не приступивши до дослідження власне процесу вибору, ми дійшли до важливого висновку: абсолютно збалансована інфляція – та, за якої ціни та дохід зростають однаковим темпом – не змінює жодного оптимального вибору.
2. Можна також зробити деякі твердження щодо рівня добробуту споживача при різних цінах та доходах. Припустимо, що дохід споживача зростає, а всі ціни залишаються незмінними. Нам відомо, що це означає паралельний зсув бюджетної лінії зовні. Звідси, будь-який набір, що споживав споживач при більш низькому рівні доходу, може так же бути обраним при більш високому доході. Але іноді при більш високому доході добробут споживача повинен бути не нижче, ніж при нижчому доході, оскільки доступні об'єкти вибору споживача тепер є ті ж самі, що і раніше, плюс якісь інші. Аналогічно, якщо ціна на один з товарів спадає, а всі інші ціни залишаються колишніми, добробут споживача повинен залишитись на минулому рівні. Це просте зауваження буде корисне для нас в майбутньому.

Контрольні питання до теми 4

Наведіть приклад економічного фактора, при дії якого бюджетна множина припиняє бути опуклою.

1. *Якщо одночасно відбувається збільшення доходу споживача та зниження ціни одного з товарів, то чи можна стверджувати, що добробут споживача принаймні не знизиться?*
2. *Якщо одночасно відбувається зріст доходу споживача в три рази, а одного з товарів в два рази, чи можна стверджувати, що добробут споживача при цьому принаймні не знизиться?*
3. *Як визначити поняття допустимих наборів для споживача?*
4. *Дайте визначення бюджетної множини і бюджетної кривої. В чому складається геометричний сенс вказаних понять?*
5. *Дайте економічну інтерпретацію нахилу бюджетної кривої і точок її перетину з осями координат. Який вплив зовнішніх чинників на зміну бюджетній кривій?*
6. *Дайте означення податків і акордний податок, що нормують обмеження.*
7. *Дайте означення субсидії та акордної субсидії, що нормують обмеження.*

ТЕМА 5. Вибір раціонального споживача. Основні характеристики вибору споживача

5.1. Задача споживача. Функція попиту Маршалла

Якщо споживач діє раціонально і з урахуванням бюджетних обмежень та своїх переваг, він завжди обирає з множини доступних йому альтернатив найкращу (одну з найкращих). Тому у випадку, коли переваги задаються функцією корисності u , що задана на множині доступних альтернатив $\mathbb{R}_+^l$, вибір раціонального споживача повинен бути розв'язком наступної задачі математичного програмування (задачі максимізації корисності).

Постановка задачі. Нехай споживач вийшов на ринок з своїми уподобаннями, яким відповідає функція корисності $u(x)$, $x \in X \subseteq \mathbb{R}_+^l$ і є раціональним споживачем. Раціональний споживач з урахуванням бюджетних обмежень буде прагнути максимізувати функцію корисності. Задача споживача 1 має вигляд:

Задача 1 (Задача споживача)

$$u(x) \rightarrow \max \quad (5.1)$$

$$px \leq m \quad (5.2)$$

$$x \geq 0 \quad (5.3)$$

Співвідношення (5.1) виділяє множину допустимих альтернатив, а співвідношення (5.2) – бюджетне обмеження. Спільно вони виділяють бюджетну множину споживача $B(p, m)$. При додатніх цінах, невід'ємному доході і неперервних перевагах (функції корисності) розв'язок задачі існує, що безпосередньо впливає з теореми Вейерштраса. Відповідність між бюджетною множиною $B(p, m)$ і множиною розв'язків задачі споживача є те, що вище називалося правилом вибору. Строга опуклість переваг гарантує єдиність розв'язку; в цьому випадку правило вибору є функцією попиту.

Означення 5.1. Нехай для будь-яких значень параметрів – додатних цін і невід'ємного доходу розв'язок задачі 1 існує і єдиний. Функція, яка кожному такому набору цін p і доходу m , ставить у відповідність розв'язок $x(p, m)$ задачі 1, називається **функцією попиту Маршала**.

Якщо розв'язок задачі при деяких значеннях параметрів неєдиний, то $x(p, m)$ називають **відображенням попиту Маршалла**.

З геометричної точки зору множина значень відображення Маршалла являє собою множину всіх $x \in B(p, m)$, що лежать на одній кривій байдужості функції u з найбільшим значенням корисності.

Отже, серед усіх кривих байдужості, що перетинають бюджетну множину, ми маємо перш за все знайти ту, на якій корисність найбільша, а потім вже на ній

відібрати всі точки з бюджетної множини. Зрозуміло, наприклад, що у разі монотонних переваг можна обмежитися розглядом лише кривих байдужості, що перетинають бюджетну поверхню та серед них вибрати найвищу. Очевидно, що в цій ситуації множина значень відображення Маршалла буде деякою підмножиною бюджетної поверхні, причому у разі гладких кривих байдужості, розташованих усередині $\mathbb{R}_+^l$, воно складатиметься з точок торкання кривої байдужості з бюджетною поверхнею.

Приклад 1. Розв'язати задачу (1)-(3) для досконалих субститутів.

$$(n = 2) \quad \begin{cases} u(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 \\ x_1 p_1 + x_2 p_2 \leq m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$u(x_1, x_2) = c$ крива байдужості.

В даному випадку крива байдужості є прямою $a_1 x_1 + a_2 x_2 = c$, звідки

$$x_2 = -\frac{a_1}{a_2} x_1 + \frac{c}{a_2}$$

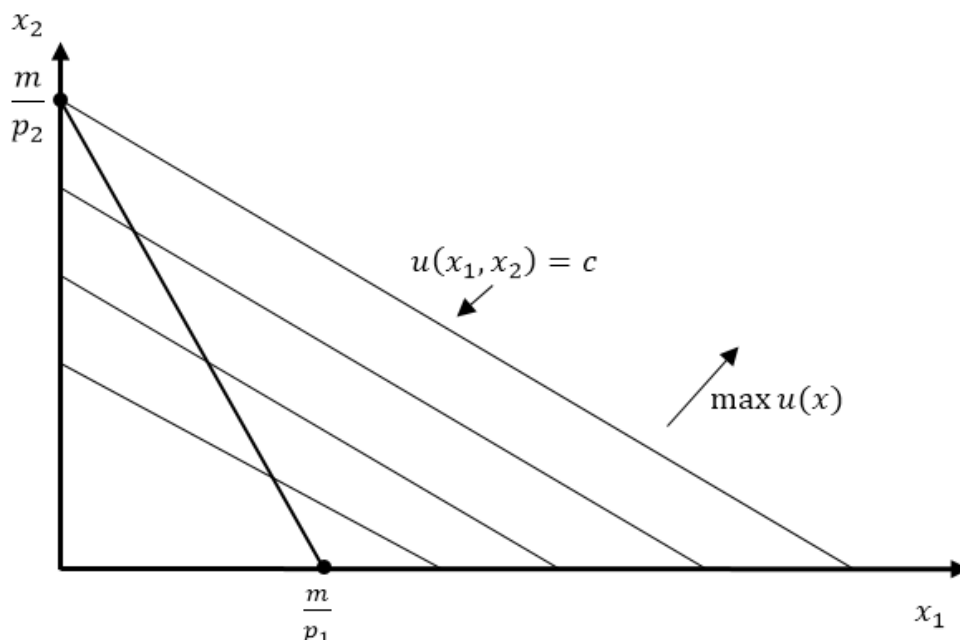
Множина $B(p, m)$ – бюджетне обмеження, границя якого є пряма

$$x_2 = -\frac{p_1}{p_2} x_1 + \frac{m}{p_2}.$$

1) Якщо $-\frac{p_1}{p_2} < -\frac{a_1}{a_2}$, то

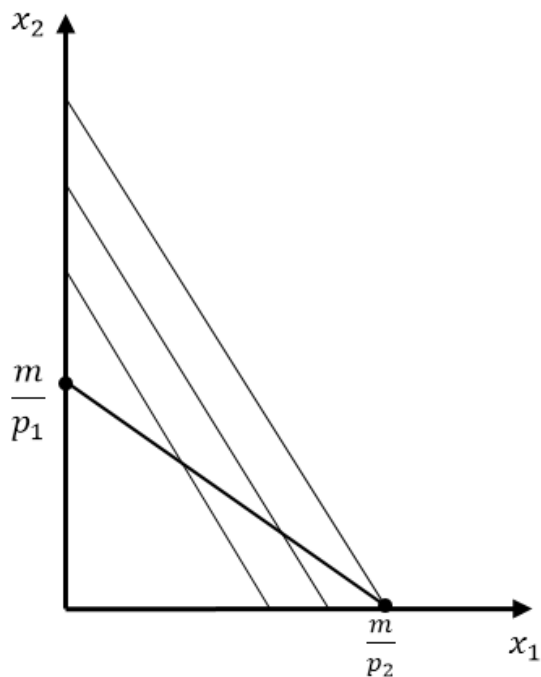
$x(p, m) = (0, \frac{m}{p_2})$ – розв'язок задачі споживача (1)-(3) є функція попиту

Маршалла. В даному випадку розв'язок задачі – кутовий екстремум.



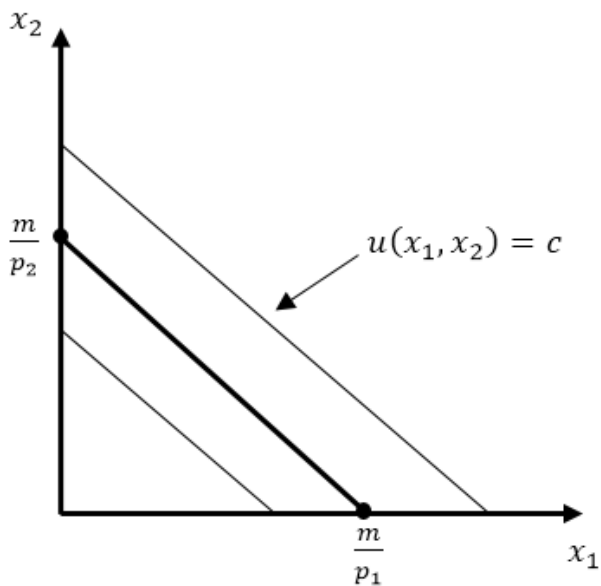
2) Якщо $-\frac{p_1}{p_2} > -\frac{a_1}{a_2}$, то

$x(p, m) = (\frac{m}{p_1}, 0)$ – функція попиту Маршалла. В даному випадку – кутовий екстремум.



3) Якщо $-\frac{p_1}{p_2} = -\frac{a_1}{a_2}$, то

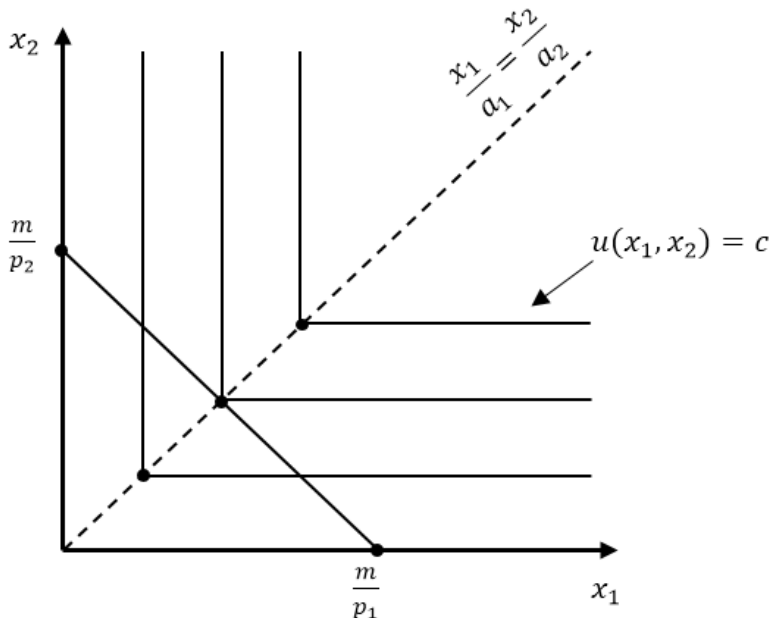
$x(p, m) = \{x \in \mathbb{R}_+^2 : x_1 p_1 + x_2 p_2 = m\}$. В даному випадку розв'язок задачі – відображення попиту Маршалла.



Приклад 2. Розв'язати задачу (1)-(2) для досконалих комплементів

$$\begin{cases} u(x) = \min \left\{ \frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2} \right\} \rightarrow \max \\ x_1 p_1 + x_2 p_2 \leq m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{a_1}{a_2} x_2, \\ \frac{a_1}{a_2} x_2 p_1 + x_2 p_2 = m, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{ma_1}{a_1p_1 + a_2p_2}, \\ x_2 = \frac{ma_2}{a_1p_1 + a_2p_2}. \end{cases}$$



Розв'язок $x(p, m) = \left(\frac{ma_1}{a_1p_1 + a_2p_2}, \frac{ma_2}{a_1p_1 + a_2p_2} \right)$ – функція попиту Маршалла.

5.2. Властивості функції попиту Маршалла

Теорема 5.1. (Властивості маршаліанського попиту $x(p, m)$)

1. Відображення $x(p, m)$ є однорідним нульового ступеня, тобто

$$x(\lambda p, \lambda m) = x(p, m) \quad \forall \lambda > 0.$$

(Якщо ціни та доходи зміняться в одне й те саме число разів, то попит не зміниться.)

2. Якщо переваги споживача опуклі, то $x(p, m)$ – опукла множина.

3. Якщо переваги споживача локально ненасичені, то $x(p, m)$ задовольняє закону Вальраса, тобто, якщо $\tilde{x} \in x(p, m)$, то $p\tilde{x} = m$. (Бюджетне обмеження виконується як рівність.)

4. Якщо переваги споживача строго опуклі, то $x(p, m)$ є однозначною функцією.

5. Якщо переваги споживача неперервні та строго опуклі, то $x(p, m)$ – неперервна функція.

Д о в е д е н н я. ■ 1). Для доказу однорідності попиту за цінами та доходом зазначимо, що множина, на якій споживач шукає кращий набір, не змінюється

при одночасному множенні цін і доходів на деяку додатну величину $\lambda > 0$, тобто.

$$\{x \in \mathbb{R}_+^l : (\lambda p)x \leq (\lambda m)\} = \{x \in \mathbb{R}_+^l : px \leq m\}.$$

Бюджетні множини співпадають.

2). Нехай переваги споживача опуклі, $x(p, m)$ не є пустим та x', x'' – два елементи з множини $x(p, m)$, тобто $x', x'' \in x(p, m)$.

Розглянемо споживчий набір $\tilde{x} = \alpha x' + (1 - \alpha)x''$, $\alpha \in (0, 1)$. Так як $x', x'' \in x(p, m)$ $x' \sim x''$. За означенням опуклості переваг $\tilde{x} \succsim x' \sim x''$, тоді за означенням функції корисності $u(\tilde{x}) \geq u(x') = u(x'')$. В альтернативі $\tilde{x}$ корисність не погіршується. Окрім того набір $\tilde{x}$ є допустимим в задачі споживача. В силу цього $\tilde{x} \in x(p, m)$. Тим самим ми отримали опуклість множини $x(p, m)$.

Закон Вальраса. На оптимальному наборі бюджетне обмеження досягається як рівність (якщо для (5.1)-(5.3) виконується закон Вальраса, то для розв'язку x_0 задачі (5.1)-(5.3) справедливо $p \cdot x_0 = m$).

3). Нехай $\tilde{x}$ – розв'язок задачі споживача, і закон Вальраса не виконаний, тобто $p\tilde{x} < m$. Тоді з урахуванням властивості локальної ненасичуваності переваг споживача у будь-якому околі точки $\tilde{x}$ існує таке x_0 , що $x_0 > \tilde{x}$.

Якщо вибрати досить малий окіл, то x_0 задовольнятиме бюджетному обмеженню ($px_0 \leq m$), тоді x_0 є розв'язком задачі (5.1)-(5.2), а не $\tilde{x}$, що суперечить оптимальності набору $\tilde{x}$. Тобто, справедливо $p \cdot \tilde{x} = m$. Закон Вальраса виконаний.

4). Нехай переваги споживача строго опуклі та x', x'' – два різні елементи з множини $x(p, m)$, тобто $x', x'' \in x(p, m)$.

Розглянемо споживчий набір $\tilde{x} = \alpha x' + (1 - \alpha)x''$ ($\alpha \in (0, 1)$).

Так як $x', x'' \in x(p, m)$, тоді $x' \sim x''$. За означенням строгої опуклості переваг маємо, що $\tilde{x} \succ x' \sim x''$.

Крім того, набір $\tilde{x}$ є допустимим в задачі споживача. В силу цих властивостей отримуємо, що набір $\tilde{x}$ допустимий і краще, ніж набори x' та x'' , що суперечить їх оптимальності. Тому розв'язок єдиний, тобто $x(p, m)$ – (однозначна) функція.

5). Доведемо неперервність функції попиту. Розглянемо послідовність цін і доходів $\{p_n, m_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow (\tilde{p}, \tilde{m})$ при $n \rightarrow +\infty$, де $(\tilde{p}, \tilde{m}) \gg 0$, та послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ розв'язків задачі споживача за цінами p_n та доходах m_n (тобто $x_n = x(p_n, m_n)$), таку що $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \tilde{x}$.

Оскільки $p_n \cdot x_n \leq m_n$, то переходячи до границі при $n \rightarrow +\infty$, отримаємо, що $\tilde{p} \cdot \tilde{x} \leq \tilde{m}$.

Нам потрібно показати, що $\tilde{x} = x(\tilde{p}, \tilde{m})$, тобто $\tilde{x}$ є оптимальним вибором споживача за цінами $\tilde{p}$ та доходом $\tilde{m}$, тоді за означенням отримаємо, що воно є неперервним.

Припустимо, що це не так, та існує такий набір $\hat{x}$, що $u(\hat{x}) > u(\tilde{x})$ і

$$\tilde{p}\hat{x} \leq \tilde{m}.$$

В силу неперервності функції корисності знайдеться окіл альтернативи $\hat{x}$ з множини $\mathbb{R}_+^l$, для всіх x з якої буде виконуватись нерівність

$$u(x) > u(\hat{x}).$$

А оскільки дохід додатній, то в цьому околі знайдеться альтернатива x_0 з умовою $\tilde{p}x_0 < \tilde{m}$.

Таким чином встановлено існування альтернативи x_0 , для якої

$$u(x_0) > u(\tilde{x}) \quad \text{і} \quad \tilde{p}x_0 < \tilde{m}.$$

Далі знайдеться досить велике N таке, що починаючи з якого $n > N$, виконується $p_n x_0 < m_n$.

Нехай це не так, тобто, існує така зростаюча нескінченна послідовність натуральних чисел n_k , що

$$p_{n_k} x_0 > m_{n_k} \quad \forall k.$$

Тоді, якщо перейти до границі при $k \rightarrow +\infty$, ми отримуємо

$$\tilde{p}x_0 \geq \tilde{m},$$

що суперечить вибору x_0 .

Для кожного n , такого, що $p_n x_0 < m_n$ в силу оптимальності x_n ми повинні мати $u(x_n) > u(x_0)$.

Так як функція корисності неперервна, то, переходячи до границі при $n \rightarrow +\infty$, отримуємо

$$u(\tilde{x}) \geq u(x_0).$$

Тим самим ми дійшли до протиріччя. Це означає, що набір $\tilde{x}$ оптимальний при цінах $\tilde{p}$ та доході $\tilde{m}$, тобто $\tilde{x} = x(\tilde{p}, \tilde{m})$. Таким чином, доведено неперервність функції попиту $x(p, m)$ за цінами та доходом. ■

Зауваження 5.1. Якщо в умовах властивості 5 змінити умову, що $x(p, m)$ є функцією попиту Маршала, на відображення попиту Маршала, то можна, користуючись схемою доказу, показати, що відображення попиту Маршала є неперервним і має замкнений графік.

5.3. Непряма функція корисності

Одним із ключових понять теорії споживача є поняття непрямої функції корисності, яку часто називають *функцією непрямої корисності*.

Означення 5.2. Функція

$$v(p, m) = u(x(p, m)),$$

яка кожному набору додатних цін p і кожному невід'ємному доходу m ставить у відповідність значення цільової функції Задачі 1 у точці оптимуму, називається **непрямою функцією корисності споживача**.

Теорема 5.3. (Властивості непрямої функції корисності $v(p, m)$) Нехай переваги споживача є неперервною функцією корисності $u(x)$. Тоді

- 1) $v(\mathbf{p}, t)$ однорідна нульового степеня, тобто

$$v(\lambda \mathbf{p}, \lambda t) = v(\mathbf{p}, t) \quad \forall \lambda > 0.$$
- 2) $v(\mathbf{p}, t)$ є неспадною функцією за доходом, тобто $v(\mathbf{p}, t') \geq v(\mathbf{p}, t)$ при $t' \geq t$, причому строго зростаючою за доходом, якщо переваги споживача є локально насичуванні:

$$v(\mathbf{p}, t') > v(\mathbf{p}, t) \text{ при } t' > t.$$
- 3) $v(\mathbf{p}, t)$ не зростає за цінами, тобто $v(\mathbf{p}', t) \leq v(\mathbf{p}, t)$ при $\mathbf{p}' \geq \mathbf{p}$.
- 4) Функція $v(\mathbf{p}, t)$ неперервна на множині строго додатних цін та невід'ємних доходів, тобто при $(\mathbf{p}, t) \in \mathbb{R}_+^l \times \mathbb{R}_+$.
- 5) Функція $v(\mathbf{p}, t)$ квазіопукла по цінах і доходу.

Д о в е д е н н я. ■ 1) Однорідність нульового степеня випливає з визначення непрямої функції корисності та однорідності нульового степеня функції попиту $\mathbf{x}(\mathbf{p}, t)$ (див. теорема 5.1).

2). Покажемо, що $v(\mathbf{p}, t)$ не зменшується по t . Розглянемо непряму функцію корисності при двох різних рівнях доходу t' і t , таких що

$$t' > t.$$

Оскільки при $t' > t$, бюджетна множина $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^l : \mathbf{p}\mathbf{x} \leq t'\}$ містить бюджетну множину $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^l : \mathbf{p}\mathbf{x} \leq t\}$, а непряма функція корисності за визначенням є максимум функції корисності на бюджетній множині, тоді

$$v(\mathbf{p}, t') \geq v(\mathbf{p}, t).$$

Припустимо, що переваги локально насичуванні. Якщо при $t' > t$ ми мали б $v(\mathbf{p}, t') = v(\mathbf{p}, t)$, тоді набори з $\mathbf{x}(\mathbf{p}, t)$ належали би $\mathbf{x}(\mathbf{p}, t')$, але для них не виконувався б закон Вальраса, що суперечило б властивості 3) функції попиту Маршалла.

Отже, має виконуватися строга нерівність $v(\mathbf{p}, t') > v(\mathbf{p}, t)$ тобто, при локальній насичуваності непряма функція корисності зростає по доходу.

3) Доведення на зростання непрямої функції корисності $v(\mathbf{p}, t)$ за цінами $\mathbf{p}$ можна провести за тією ж схемою.

Помітимо, що при локальній насичуваності переваг, якщо $\mathbf{p}' \gg \mathbf{p}$, то $v(\mathbf{p}', t) < v(\mathbf{p}, t)$.

4). Так як виконані умови теореми Дебре, то функція корисності $u = u(\mathbf{x})$ є неперервною на X . Так як виконані умови властивості 5 попиту Маршалла, то $\mathbf{x}(\mathbf{p}, t)$ є неперервною, тоді $v(\mathbf{p}, t) = u(\mathbf{x}(\mathbf{p}, t))$ є неперервною як складена функція.

Означення 5.3. Функцію $v(\mathbf{p}, t)$ будемо називати *квазіопуклою* на множині X , якщо при будь-яких $(\mathbf{p}_1, t_1)$ та $(\mathbf{p}_2, t_2)$ виконується

$$v(\alpha \mathbf{p}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{p}_2, \alpha t_1 + (1 - \alpha) t_2) \leq \max\{v(\mathbf{p}_1, t_1), v(\mathbf{p}_2, t_2)\}$$
при $\alpha \in [0, 1]$.

5) Покажемо, що для будь-яких додатних наборів цін $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ та невід'ємних доходів m_1, m_2 , виконується нерівність $v(\alpha \mathbf{p}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{p}_2, \alpha m_1 + (1 - \alpha) m_2) \leq \max\{v(\mathbf{p}_1, m_1), v(\mathbf{p}_2, m_2)\}$ при $\alpha \in [0, 1]$.

Нехай розв'язком задачі (5.1)-(5.3) при відповідному $(p_k, m_k), k = 1, 2$ є функція попиту Маршалла $x_k = x(p_k, m_k), k = 1, 2$.

Розглянемо вектор цін та доходу $(\alpha \mathbf{p}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{p}_2, \alpha m_1 + (1 - \alpha) m_2)$. Нехай розв'язком відповідної задачі (5.1)-(5.3) є альтернатива x_α . Покажемо, що альтернатива x_α є допустимою в задачі споживача для вектора (p_1, m_1) або для вектора (p_2, m_2) .

При $\alpha = 0$ маємо $x_0 = x(p_2, m_2)$, а значить, є допустимим набором для задачі споживача з набором (p_2, m_2) . Аналогічно, при $\alpha = 1$ маємо

$x_1 = x(p_1, m_1)$ є допустим набором для задачі споживача з набором (p_1, m_1) .

Нехай x_α – розв'язок задачі (5.1)-(5.3) при цінах $\mathbf{p}_\alpha = \alpha \mathbf{p}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{p}_2$ та доході $m_\alpha = \alpha m_1 + (1 - \alpha) m_2$.

Нехай x_α не є допустимим розв'язком задачі (5.1)-(5.3) ні за ціною $\mathbf{p}_1$ та доході m_1 , ні за ціною $\mathbf{p}_2$ та доході m_2 .

Тоді $\mathbf{p}_1 x_\alpha > m_1$ та $\mathbf{p}_2 x_\alpha > m_2$. Домножимо першу нерівність на α та другу на $1 - \alpha$ і складемо.

Звідси слідує, що $\alpha \mathbf{p}_1 x_\alpha + (1 - \alpha) \mathbf{p}_2 x_\alpha > \alpha m_1 + (1 - \alpha) m_2$, що суперечить тому, що x_α – допустимий розв'язок при цінах $\mathbf{p}$ і доході m . Таким чином, або $\mathbf{p}_1 x_\alpha \leq m_1$, або $\mathbf{p}_2 x_\alpha \leq m_2$.

Припустимо, наприклад, що $\mathbf{p}_1 x_\alpha \leq m_1$. З того, що $v(\mathbf{p}_1, m_1)$ є розв'язком задачі (5.1)-(5.3) при цінах $\mathbf{p}_1$ і доході m_1 , випливає, що $v(\mathbf{p}_1, m_1) \geq u(x_\alpha)$, так як x_α – допустимий розв'язок цієї задачі. Тим паче має виконуватись і необхідне співвідношення:

$$v(\alpha \mathbf{p}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{p}_2, \alpha m_1 + (1 - \alpha) m_2) = u(x_\alpha) \leq u(x_1) = u(x(p_1, m_1)) = v(p_1, m_1) \leq \max\{v(\mathbf{p}_1, m_1), v(\mathbf{p}_2, m_2)\}.$$

Аналогічну нерівність отримаємо, якщо x_α – допустимий розв'язок задачі (5.1)-(5.3) при цінах $\mathbf{p}_2$ і доході m_2 , тобто $\mathbf{p}_2 x_\alpha \leq m_2$.

За означенням 5.3 одержали, що функція $v(p, m) = u(x(p, m))$ є квазіопуклою за своїми змінними. ■

5.4. Двоїста задача споживача або задача споживача 2

Нехай $u(x)$ – функція корисності споживача, задана на множині допустимих альтернатив $\mathbb{R}_+^l$.

Означення 5.4. Число U будемо називати *досяжним рівнем корисності*, якщо існує $x_0 \in X$ таке, що $U = u(x_0)$.

Подвійна задача споживача ставиться так:

Задача 2 (Двоїста задача споживача) Розв'язати задачу

$$px \rightarrow \min_x \quad (5.4)$$

$$u(x) \geq U, \quad (5.5)$$

$$x \geq 0, \quad (5.6)$$

означає, що на множині допустимих альтернатив X знайти мінімальні витрати, при яких корисність споживача буде не менше *досяжного рівня корисності* U .

Нехай задача споживача (5.4)-(5.6) для кожного вектора цін $p > 0$ і досяжного рівня корисності U має і притому єдиний розв'язок.

Означення 5.5. Нехай для будь-яких значень параметрів – додатних цін та досяжного рівня корисності розв'язок задачі 2 існує і єдиний. Функція, яка кожному такому наборі цін p і рівню корисності U ставить у відповідність розв'язок $x = h(p, U)$ задачі 2, називається **функцією попиту Хікса**.

Якщо розв'язок задачі 2 при деяких значеннях параметрів неєдиний, то $h(p, U)$ називають **відображенням попиту Хікса**.

Теорема 5.3. Нехай функція корисності $u(x)$ неперервна на множині допустимих альтернатив $\mathbb{R}_+^l$. Тоді, якщо $\tilde{x}$ є розв'язком Задачі 2 при деяких цінах $p \gg 0$ та $U \geq u(0)$, то $u(\tilde{x}) = U$.

Д о в е д е н н я. ■ Припустимо протилежне. Нехай розв'язок Задачі 2 задовольняє умові $u(\tilde{x}) > U \geq u(0)$. Зі співвідношення $u(\tilde{x}) > u(0)$ випливає, що $\tilde{x} \neq 0$ тому, оскільки $p \gg 0$ то $\tilde{x} > 0$. Розглянемо два випадки: : (а) $U = u(0)$ та (б) $U > u(0)$.

В ситуації (а) нульовий вектор припустим і коштує менше, ніж $\tilde{x}$, що суперечить оптимальності $\tilde{x}$.

Розглянемо тепер випадок (б). Так як $u(x)$ неперервна, тоді існує $\alpha < 1$, таке що $\alpha\tilde{x}$ припустимо ($u(\alpha\tilde{x}) \geq U$). Але цей набір $\alpha\tilde{x}$ коштує дешевше, ніж $\tilde{x}$, тобто $p\alpha\tilde{x} = \alpha p\tilde{x} < p\tilde{x}$. А це суперечить оптимальності $\tilde{x}$, як і доводить твердження. ■

5.5. Функція витрат та її властивості

Означення 5.6. Функцією витрат $e(p, U)$ називають значення цільової функції Задачі 2 в точці оптимуму при даних p і U .

Згідно з останнім визначенням, для кожного досяжного рівня корисності функція витрат вказує за заданих цін на товари мінімальний рівень витрат (доходу), що забезпечує такий рівень корисності. З означень функцій $h(p, U)$ та $e(p, U)$ випливає, що

$$e(p, U) = ph(p, U).$$

Крім того, якщо функція корисності $u(x)$ неперервна, то хіксіанський попит задовольняє рівності

$$u(h(p, U)) = U,$$

що впливає із наступного твердження.

Теорема 5.4 (Властивості функції витрат)

1) Функція $e(p, U)$ – однорідна першого степеня за цінами:

$$e(\lambda p, U) = \lambda e(p, U) \quad \forall \lambda > 0;$$

2) функція $e(p, U)$ – увігнута функція цін p ;

3) функція $e(p, U)$ – неперервна за цінами при $p \gg 0$;

4) функція $e(p, U)$ зростає по U ;

5) функція $e(p, U)$ не зменшується за цінами.

Д о в е д е н н я. ■ 1). Перший пункт твердження впливає з того, що розв'язок Задачі 2 (споживчий набір мінімальної вартості) при векторі цін p і векторі цін λp змінюються в λ раз.

2). Ми повинні показати, що для двох довільних векторів p_1 та p_2 при $\alpha \in [0, 1]$ виконується

$$e(\alpha p_1 + (1 - \alpha)p_2, U) \geq \alpha e(p_1, U) + (1 - \alpha)e(p_2, U).$$

Нехай $\tilde{x}$ – оптимальне рішення Задачі 2 за цінами $\alpha p_1 + (1 - \alpha)p_2$, тоді $(\alpha p_1 + (1 - \alpha)p_2)\tilde{x} = e(\alpha p_1 + (1 - \alpha)p_2, U)$. Множина $\{x: u(x) \geq U\}$ не залежить від p , тому, оскільки $u(\tilde{x}) \geq U$ за цінами $\alpha p_1 + (1 - \alpha)p_2$, тоді $u(\tilde{x}) \geq U$ за цінами p_1 та p_2 . З визначення функції витрат та допустимості $\tilde{x}$ маємо

$$e(p_1, U) \leq p_1 \tilde{x} \text{ та } e(p_2, U) \leq p_2 \tilde{x}$$

Звідси

$$\alpha e(p_1, U) + (1 - \alpha)e(p_2, U) \leq (\alpha p_1 + (1 - \alpha)p_2)\tilde{x} = e(\alpha p_1 + (1 - \alpha)p_2, U).$$

3) Доведення неперервності залишаємо читачеві як вправу. Зауважимо тільки, що неперервність впливає з того, що

(а) функція витрат увігнута як функція цін та

(б) будь-яка увігнута функція неперервна у внутрішній області визначення.

4) Доведення цього пункту подібне до доведення зростання непрямої функції корисності за доходом і залишається як самостійна вправа.

5) Нехай $p' \geq p$ та $p' \neq p$. Тоді $ph(p', U) \geq ph(p, U) = e(p, U)$. Але $e(p', U) = p'h(p', U) \geq ph(p', U)$. Помітимо, що якщо $h(p', U) \gg 0$, то $e(p', U) > e(p, U)$.

■

Розв'язок Задачі 1 і Задачі 2 тісно пов'язані між собою, що доводить нижченаведена "теорема двоїстості". Деякі автори називають цей результат "теореми взаємності". Цієї традиції ми й наслідуватимемо надалі.

Теорема 5.5. (Теорема двоїстості). Нехай нестрогі переваги споживача є локально ненасиченими. Тоді, якщо x^* є розв'язком Задачі 1 при цінах p та доході

m , то $\mathbf{x}^*$ є розв'язком Задачі 2 при цінах p та допустимому рівню корисності $U = u(\mathbf{x}^*)$.

2). Нехай функція корисності є неперервною. Тоді якщо $\mathbf{x}^*$ є розв'язком Задачі 2 з $p \gg 0$, то $\mathbf{x}^*$ є розв'язком Задачі 1 при $m = p\mathbf{x}^*$.

Доведення. ■ 1) Нехай $\mathbf{x}^*$ є розв'язком Задачі 1, тобто

$$\begin{aligned} \max u(\mathbf{x}) &= u(\mathbf{x}^*), \\ \mathbf{x}^* p &\leq m, \\ \mathbf{x}^* &\geq 0. \end{aligned}$$

Доведемо, що $\mathbf{x}^*$ – розв'язок Задачі 2. Припустимо супротивне: $\mathbf{x}^*$ не є розв'язком Задачі 2, тобто існує така альтернатива $\mathbf{x}^0 \geq 0$, що $u(\mathbf{x}^0) \geq u(\mathbf{x}^*)$, але $\mathbf{x}^0 p < \mathbf{x}^* p$. Оскільки нестроге відношення переваги є локально-ненасиченим, то за означенням існує споживацький набір $\mathbf{x}'$ в околі $\mathbf{x}^0$ такий, що $u(\mathbf{x}') > u(\mathbf{x}^0) \geq u(\mathbf{x}^*)$, причому оскільки можливо обрати настільки малими, що $p\mathbf{x}' < p\mathbf{x}^*$. Тоді одержимо, що не $\mathbf{x}^*$ – розв'язок Задачі 2, а $\mathbf{x}'$, що суперечить умові першої частини теореми.

Оскільки $\mathbf{x}'$ припустимий в Задачі 2, то $u(\mathbf{x}') \geq U = u(\mathbf{x}^*)$. З іншої сторони, з локальної ненасиченості переваг слід, що існує $\mathbf{x}''$, такий що $p\mathbf{x}^* \geq p\mathbf{x}''$ та $u(\mathbf{x}'') > u(\mathbf{x}') \geq u(\mathbf{x}^*)$. А це суперечить оптимальності $\mathbf{x}^*$ в Задачі 1.

2). Припустимо, що $\mathbf{x}^*$ є розв'язком Задачі 2, тобто виконується

$$\begin{aligned} \min (p\mathbf{x}) &= p\mathbf{x}^*, \\ u(\mathbf{x}^*) &\geq U, \\ \mathbf{x}^* &\geq 0. \end{aligned}$$

Припустимо супротивне, що $\mathbf{x}^*$ не є розв'язком Задачі 1, тобто існує така альтернатива $\mathbf{x}^0 \geq 0$, що $\mathbf{x}^0 p \leq \mathbf{x}^* p$, але $u(\mathbf{x}^0) > u(\mathbf{x}^*)$. Якщо розглянути $u(\mathbf{x})$ як функцію, яка не є сталою, тоді $\mathbf{x}^* = 0$, а значить $\mathbf{x}^0 = 0$ і задачі 1 і 2 втрачають зміст. Тому будемо вважати, що $\mathbf{x}^* \neq 0$ і $\mathbf{x}^0 \neq 0$. Так як $u(\mathbf{x}^0) > u(\mathbf{x}^*)$ та $u(\mathbf{x})$ є неперервною функцією за умовою, то існує таке $\alpha \in (0,1)$, що $u(\alpha\mathbf{x}^0) > u(\mathbf{x}^*)$.

Для даного α $(\alpha\mathbf{x}^0)p < p\mathbf{x}^0 \leq p\mathbf{x}^*$.

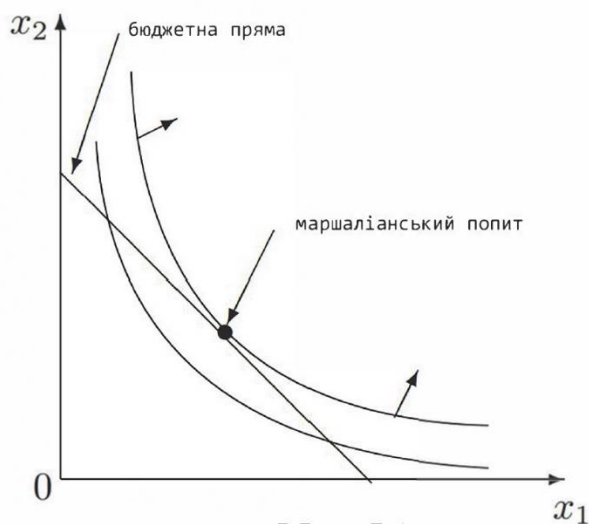
Таким чином, розв'язком задачі 2 є не альтернатива $\mathbf{x}^*$, а $(\alpha\mathbf{x}^0)$, що суперечить оптимальності розв'язку $\mathbf{x}^*$ в Задачі 2. ■

Наслідок. З доведеної теореми випливає, що у випадку, коли переваги локально ненасичені і описуються неперервною функцією корисності, справедливі наступні чотири тотожності, які по суті є співвідношеннями двоїстості для Задач 1 і 2:

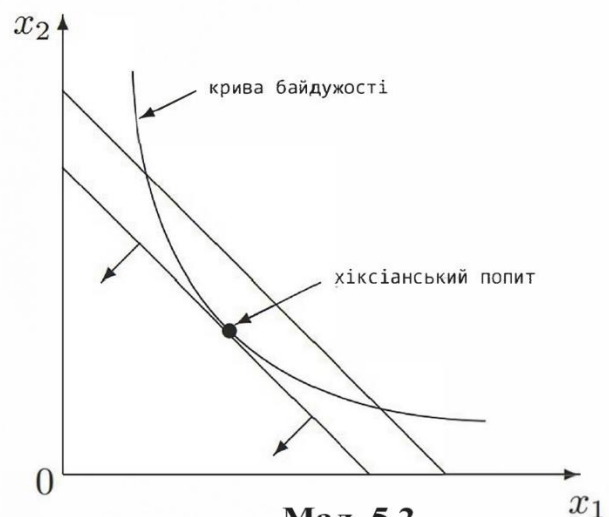
- ⊗ $v(p, e(p, U)) \equiv U$;
- ⊗ $e(p, v(p, m)) \equiv m$;
- ⊗ $x(p, m) \equiv h(p, v(p, m))$;
- ⊗ $h(p, U) \equiv x(p, e(p, U))$.

Перші дві тотожності у разі локально ненасичених переваг можуть бути ефективно використані для знаходження функції витрат (функції непрямої корисності), якщо відома функція непрямої корисності (відповідно, функція витрат). Справді, у разі локально ненасичених переваг функція непрямої корисності $v(\mathbf{p}, m)$ є строго зростаючою по m і тому має обернену функцію. Значить, якщо покласти $v(\mathbf{p}, m) = U$ і визначити звідси m , то згідно з першою тотожністю знайдене однозначно значення m буде функцією витрат $e(\mathbf{p}, U)$. Аналогічно, вважаючи $e(\mathbf{p}, U) = m$ і визначаючи звідси U , отримаємо з другої тотожності функцію непрямої корисності $v(\mathbf{p}, m)$.

Останнє з тотожностей є, мабуть, найважливішим в емпіричних дослідженнях споживчої поведінки, оскільки пов'язує спостережуваний маршаліанський попит з неспостерігаємим хіксіанським. У ситуації, коли $l = 2$, маршаліанський попит – найкращий набір (точка) на цій бюджетній прямій. Хіксіанський попит – найдешевший набір благ на даній кривій байдужості (див. наведену нижче графічну ілюстрацію).



Мал. 5.1.



Мал. 5.2.

Коли хіксіанський попит та маршаліанський попит не співпадають? В якості прикладу можна привести уподобання з «товстою» кривою байдужості (такі криві байдужості з'являться, наприклад, якщо взяти в якості функції корисності цілу частину якоїсь «нормальної» функції корисності). Хіксіанський попит завжди буде лежати (випадок двох благ) на лівій нижній границі «товстої» кривої байдужості. На малюнку ця границя зображена темною лінією. Маршаліанський попит може лежати всередині «товстої» кривої байдужості.

Причина незбіжності полягає в тому, що «товста» крива байдужості означає відсутність локальної ненасиченості. Таким чином, для того, щоб гарантувати виконання рівності $h_i(\mathbf{p}, U) = x_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, U))$, потрібно вимагати наявності локальної ненасиченості.

5.6. Функція грошової корисності, непрямой грошової корисності та їх властивості

З функцією витрат тісно пов'язані два важливі поняття теорії споживання.

Означення 5.5. Нехай u – функція корисності споживача, що задана на множині допустимих альтернатив $\mathbb{R}_+^l$. Функція

$$\mu(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = e(\mathbf{q}, u(\mathbf{x})),$$

яка кожній альтернативі $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^l$ та кожному додатному набору цін $\mathbf{q}$ ставить у відповідність мінімальний дохід, необхідний для того, щоб за цінами $\mathbf{q}$ мати рівень корисності $U = u(\mathbf{x})$, називається **грошовою корисністю споживача**.

Означення 5.6 Нехай $v(\mathbf{p}, t)$ – непряма функція корисності для функції корисності u , що задана на множині допустимих альтернатив $\mathbb{R}_+^l$. Функція

$$\mu(\mathbf{q}; \mathbf{p}, t) = e(\mathbf{q}, v(\mathbf{p}, t)),$$

яка кожному додатному набору цін $\mathbf{q}$, а також додатному набору цін $\mathbf{p}$ і невід'ємному доходу t ставить у відповідність мінімальний дохід, необхідний споживачу для того, щоб при цінах $\mathbf{q}$ мати той ж самий рівень корисності, який він мав при цінах $\mathbf{p}$ та доходи t , називається **непрямою грошовою корисністю**.

Теорема 5.6. Грошова корисність споживача $\mu(\mathbf{q}, \mathbf{x})$ є функцією корисності споживача, тобто

$$\mu(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \geq \mu(\mathbf{q}, \mathbf{y}) \iff u(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{y}).$$

Д о в е д е н н я. ■ Нехай x_1 і x_2 дві альтернативи з множини допустимих альтернатив, тому $x_1 \geq x_2$. За означенням функції корисності

$$u(x_1) \geq u(x_2).$$

Так як за означенням функції грошової корисності $e(\mathbf{q}, u(\mathbf{x}))$ строго зростає по u , тоді $\mu(\mathbf{q}, x_1) = e(\mathbf{q}, u(x_1)) \geq e(\mathbf{q}, u(x_2)) = \mu(\mathbf{q}, x_2)$. ■

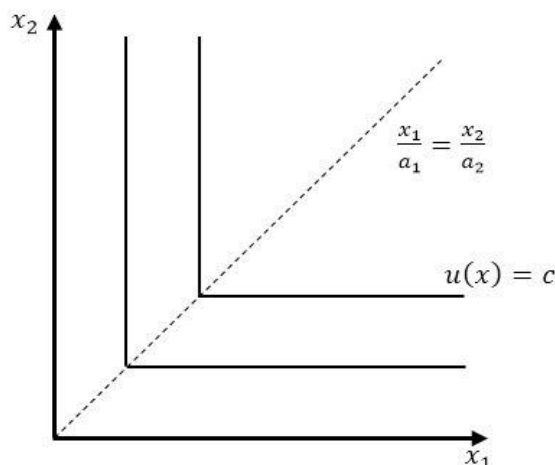
Теорема 5.7. Грошова непряма корисність $\mu(\mathbf{q}; \mathbf{p}, t)$ є непрямою функцією корисності для грошової функції корисності $\mu(\mathbf{q}, \mathbf{x})$.

Д о в е д е н н я. ■ За визначенням грошової непрямой $\mu(\mathbf{q}; \mathbf{p}, t) = e(\mathbf{q}, v(\mathbf{p}, t))$. Крім того, $\mu(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = e(\mathbf{q}, u(\mathbf{x}))$. Оскільки $v(\mathbf{p}, t) = u(\mathbf{x}(\mathbf{p}, t))$, то $\mu(\mathbf{q}, \mathbf{x}(\mathbf{p}, t)) = \mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$. ■

Приклади розв'язання задач. Для заданої функції корисності знайти: попит Маршалла, непряму функцію корисності, функцію попиту Хікса, функцію грошової корисності та непрямої грошової корисності споживача.

Приклад 1. Розв'язати задачу для функції корисності Леонтьєва ($n = 2$)

$$u(x_1, x_2) = \min \left\{ \frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2} \right\}, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0; \quad X = \mathbb{R}_+^2.$$



Функція корисності Леонтьєва є неперервною і відповідає локально-ненасичуваним перевагам. Згідно з властивістю 3 попиту Маршалла виконується закон Вальраса, а отже, задача (1)-(3) для визначення попиту Маршалла приймає вигляд:

$$\begin{cases} u(x_1, x_2) = C, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = m, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\Rightarrow x_1 = \frac{a_1}{a_2} x_2, \\ &\Rightarrow x_2 = \frac{m}{p_1 \frac{a_1}{a_2} + p_2}, \end{aligned}$$

1) Попит Маршалла:

$$x(p, m) = \begin{pmatrix} \frac{m a_1}{a_1 p_1 + a_2 p_2} \\ \frac{m a_2}{a_1 p_1 + a_2 p_2} \end{pmatrix}$$

2) Непряма функція корисності

$$v(p, m) = u(x(p, m)) = \min \left\{ \frac{m}{a_1 p_1 + a_2 p_2}; \frac{m}{a_1 p_1 + a_2 p_2} \right\} = \frac{m}{a_1 p_1 + a_2 p_2}$$

3) Функція витрат

$$v(p, e(p, u)) = u$$

Так як переваги є локально-ненасичуваними, функція корисності неперервна, то згідно з наслідком з теореми двоїстості рівняння $v(p, m) = u$ однозначно визначається дохід m і значення доходу: $m = e(p, u)$.

$$\frac{e(p, u)}{a_1 p_1 + a_2 p_2} = u \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{a_1 p_1 + a_2 p_2} = u \quad \Rightarrow \quad e(p, u) = u(a_1 p_1 + a_2 p_2)$$

4) Попит Хікса визначається згідно з наслідком з теореми двоїстості:

$$h(p, u) = x(p, e(p, u))$$

$$h(p, u) = \begin{pmatrix} h_1(p, u) \\ h_2(p, u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e(p, u) a_1}{a_1 p_1 + a_2 p_2} \\ \frac{e(p, u) a_2}{a_1 p_1 + a_2 p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u(a_1 p_1 + a_2 p_2) a_1}{a_1 p_1 + a_2 p_2} \\ \frac{u(a_1 p_1 + a_2 p_2) a_2}{a_1 p_1 + a_2 p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u a_1 \\ u a_2 \end{pmatrix}$$

Попит Хікса для функції попиту Леонтьєва не залежить від цін.

5) Функція неперервної грошової корисності споживання

$$\mu(q, p, m) = e(q, u(x)) = (a_1 q_1 + a_2 q_2) \min \left\{ \frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2} \right\}$$

$$\mu(q, p, m) = (q_1 a_1 + q_2 a_2) \frac{m}{p_1 a_1 + p_2 a_2} = \frac{q_1 a_1 + q_2 a_2}{p_1 a_1 + p_2 a_2} \cdot m$$

Приклад 2. Розв'язати задачу для функції корисності, до якої монотонними перетвореннями зводиться функція корисності Кобба-Дугласа і неокласична функція корисності.

$$u(x_1, x_2) = x_1^\alpha \cdot x_2^{1-\alpha}, \alpha \in (0, 1); \quad u \in C(\mathbb{R}_+^2) \text{ (неперервна в } \mathbb{R}_+^2 \text{ без осей)}$$

$$u(x_1, x_2) = c, c > 0.$$

Графіком кривої байдужості є вітка гіперболи в I чверті. Так як переваги споживача є локально-ненасичуваними, то згідно з законом Вальраса задача (1)-(3) приймає вигляд:

$$\begin{cases} u(x_1, x_2) = C \quad (C = \max u) \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^\alpha \cdot x_2^{1-\alpha} = C \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \end{cases}$$

1) Розв'язком системи буде попит Маршалла.

Так як крива байдужості є гладкою, то точкою попиту Маршалла є точка дотику кривої байдужості і прямої $x_1 p_1 + x_2 p_2 = m$.

Знайдемо точку дотику:

$$\begin{cases} x_2 = C^{\frac{1}{1-\alpha}} x_1^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \end{cases}$$

Так як в точці дотику похідні співпадають, то

$$\begin{cases} x_2' = -\frac{\alpha}{1-\alpha} C^{\frac{1}{1-\alpha}} x_1^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}-1} \\ p_1 + p_2 x_2' = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2' = -\frac{\alpha}{1-\alpha} C^{\frac{1}{1-\alpha}} x_1^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}-1} \\ x_2' = -\frac{p_1}{p_2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\alpha}{1-\alpha} C^{\frac{1}{1-\alpha}} x_1^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}-1} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} \left(C^{\frac{1}{1-\alpha}} x_1^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \right) \cdot x_1^{-\frac{1}{1-\alpha} + \frac{\alpha}{1-\alpha}} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{1-\alpha} x_2 \cdot x_1^{-1} = \frac{p_1}{p_2} \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{p_1(1-\alpha)}{p_2\alpha} \cdot x_1 \\ p_1x_1 + p_2 \frac{p_1(1-\alpha)}{p_2\alpha} x_1 = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{m\alpha}{p_1} \\ x_2 = \frac{m(1-\alpha)}{p_2} \end{cases}$$

Отже, попит Маршалла:

$$x(p, m) = \begin{pmatrix} \frac{m\alpha}{p_1} \\ \frac{m(1-\alpha)}{p_2} \end{pmatrix}$$

2) Непряма функція корисності

$$v(p, m) = u(x(p, m)) = \left(\frac{m\alpha}{p_1}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{m(1-\alpha)}{p_2}\right)^{1-\alpha} = m \left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{1-\alpha}{p_2}\right)^{1-\alpha}$$

3) Функція витрат:

$$v(p, m) = u \Rightarrow m = e(p, u); \quad e(p, u) = \left(\frac{p_1}{\alpha}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{p_2}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \cdot u$$

4) Попит Хікса

$$h(p, u) = x(p, e(p, u)); \quad h(p, u) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\alpha p_2}{(1-\alpha)p_1}\right)^{1-\alpha} \cdot u \\ \left(\frac{(1-\alpha)p_1}{\alpha p_2}\right)^\alpha \cdot u \end{pmatrix}$$

5) Функція грошової корисності:

$$\mu(q, x) = e(q, u(x)) = \left(\frac{q_1}{\alpha} x_1\right)^\alpha \cdot \left(\frac{q_2}{1-\alpha} x_2\right)^{1-\alpha}$$

$$\mu(q, p, m) = e(q, v(p, m)) = e(q, u) \left(\frac{q_1}{\alpha}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{q_2}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} = \left(\frac{q_1}{p_1}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{q_2}{p_2}\right)^{1-\alpha} \cdot m$$

Контрольні питання до теми 5

1. Наведіть задачу 1 раціонального споживача.
2. Дайте означення функції $x(p, m)$ Маршалла та відображення Маршалла. Який геометричний сенс мають ці поняття?
3. Наведіть властивості маршалловського попиту $x(p, m)$.
4. Дайте означення непрямої функції корисності.
5. Наведіть властивості непрямої функції корисності.
6. Наведіть подвійну задачу 2 раціонального споживача.
7. Дайте означення функції попиту Гікса та відображення Гікса.
8. Сформулюйте теорему про точку попиту Гікса для неперервної функції корисності.
9. Дайте означення функції витрати споживача. Які її властивості ви знаєте?

10. *Сформулюйте теорему двоїстості і слідства з неї.*
11. *Дайте означення прямої і непрямой грошової корисності споживача. Які властивості ви знаєте?*
12. *Як знайти відображення попиту і функцій попиту Маршалла і Гикса для деяких функцій корисності.*

ТЕМА 6. Еластичність функції в точці.

Цінова еластичність попиту.

Еластичність попиту по доходу

Для аналізу споживчого вибору споживача у разі диференційованої та двічі диференційованої функції корисності нам знадобляться деякі додаткові математичні поняття та факти.

6.1. Еластичність функції однієї змінної

При дослідженні в економіці функціональної залежності $y = f(x)$ між будь-якими величинами часто виникає необхідність виміру чутливості залежної змінної y до зміни x . Одним із показників реагування однієї змінної на зміну іншої служить похідна

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

що характеризує швидкість зміни функції зі зміною аргументу x . Проте в економіці цей показник незручний тим, що залежить від вибору одиниць виміру.

Наприклад, якщо ми розглянемо диференційовану функцію попиту на цукор x від його ціни p , то побачимо, що значення похідної за кожної ціни p (вимірюється в гривнях)

$$x'(p) = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta p}$$

залежить від того, чи вимірюється попит на цукор у кілограмах чи у центнерах.

В першому випадку похідна вимірюється в кг/грв, у другому – в ц/грв, відповідно її значення при одному й тому ж значенні ціни буде різним залежно від одиниць виміру величини попиту.

Тому для виміру чутливості зміни функції $y = f(x)$ до зміни аргументу в економіці вивчають зв'язок не абсолютних змін змінних x і y (Δx і Δy), а їх відносних або відсоткових змін:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x}, \delta y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{f(x)}.$$

Означення 6.1. Коефіцієнтом еластичності (або, коротше, еластичністю) функції $y = f(x)$ у точці x називається границя

$$\epsilon_x [f] = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta y}{\delta x}.$$

Зрозуміло, відносні відхилення мають сенс лише для тих x , які задовольняють умови $x \neq 0$ та $f(x) \neq 0$. При цьому випадки $x = 0$ та $f(x) = 0$ можуть розглядатись тільки як граничні.

Оскільки умова граничного прямування $\delta x \rightarrow 0$ при $x \neq 0$ та $f(x) \neq 0$ рівносильно умові $\Delta x \rightarrow 0$, то визначення еластичності з урахуванням визначення похідної може бути розкрито наступним чином:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x [f] &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)} = \frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}} = \\ &= \frac{Mf(x)}{Af(x)},\end{aligned}$$

де $Mf(x)$ – маржинальне значення функції f у точці x , $Af(x)$ – середнє значення функції в точці x . Цю еластичність називають також *граничною* чи *точною еластичністю*.

Таким чином, еластичність може бути виражена у вигляді відношення граничної (Mf) та середньої (Af) величин.

Так як $d(\ln y) = \frac{dy}{y}$, а $d(\ln x) = \frac{dx}{x}$, то еластичність можна подати також у формі "логарифмічної похідної"

$$\varepsilon_x [f] = \frac{d \ln y}{d \ln x}.$$

Остання рівність показує, що вивчення різних властивостей еластичності легко звести до вивчення відповідних властивостей похідних: достатньо лише перейти від величин x та y до їх логарифмів.

З отриманих співвідношень також ясно, що якщо величини x і $f(x)$ одного знаку, то знак еластичності збігається зі знаком похідної:

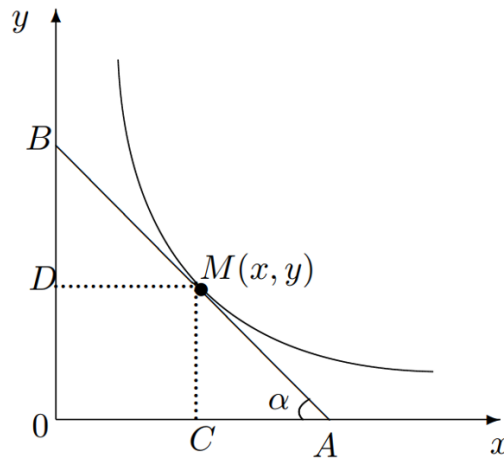
$\varepsilon_x[f] > 0$ – для зростаючих функцій, $\varepsilon_x[f] < 0$ – для спадних.

Щоб зробити поняття еластичності більш зрозумілим, деякі автори визначають його так: еластичність показує, на скільки відсотків збільшиться значення функції, якщо аргумент збільшиться на 1 %.

Це визначення не зовсім точно: відносне прирощення 0,01 у звичайних випадках можна вважати малою величиною, але не нескінченно малою, як це передбачається означенням еластичності. Так, для функції $y = Ax^2$ еластичність дорівнює 2, а збільшення x на 1 % тягне за собою збільшення y на 2,01 % (перевірте).

Подібно до похідної, еластичність має просту **геометричну інтерпретацію**.

Розглянемо спочатку спадну увігнуту функцію $y = f(x)$



Мал. 6.1

Знайдемо еластичність цієї функції у довільній точці M з координатами (x, y) . Для цього проведемо дотичну AB до графіка функції $y = f(x)$ у точці M . З $\triangle AMC$ маємо

$$|AC| = \frac{|MC|}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Так як похідна функції $y = f(x)$ в точці x дорівнює $\operatorname{tg}(180 - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$, то $\operatorname{tg} \alpha = -f'(x)$.

Отже

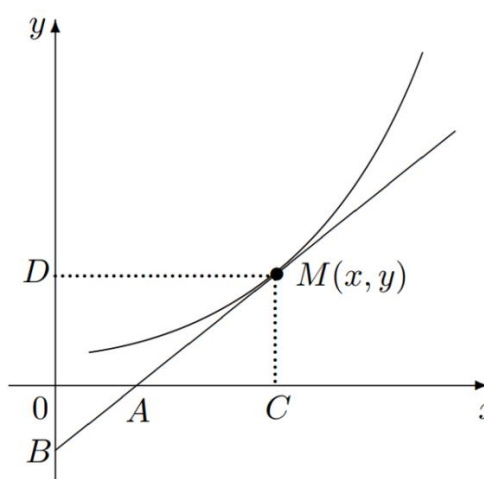
$$|AC| = \frac{f(x)}{-f'(x)} = -\frac{f(x)}{f'(x)}$$

З подібності трикутників MBD та MAC випливає, що

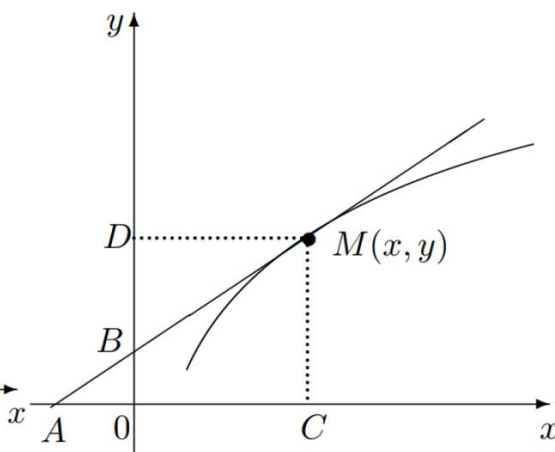
$$\frac{|MB|}{|MA|} = \frac{|MD|}{|AC|} = -\frac{f'(x)x}{f(x)} = -\epsilon_x[f].$$

Таким чином, $\epsilon_x[f] = -\frac{|MB|}{|MA|}$ – тобто *геометрично еластичність* спадної функції дорівнює відношенню відстаней по дотичній від точки M з координатами $(x, f(x))$ до її перетину з осями Oy і Ox взятому, відповідно, зі знаком "–".

У разі опуклої та увігнутої зростаючих функцій (мал. 6.2 та мал. 6.3) еластичність за абсолютною величиною також дорівнюватиме відношенню $\frac{|MB|}{|MA|}$, а знак еластичності визначатиметься напрямком відрізків MB та MA . Якщо точки A та B лежать по одну сторону від точки M на дотичній, як на рисунках 6.2, 6.3, то у формулі треба вибрати знак "+". Якщо A і B лежать по різні боки від точки M як на першому малюнку, то у формулі треба вибрати знак "–" (доказ для двох останніх малюнків ви можете провести самостійно).



Мал. 6.2



Мал. 6.3

Зауважимо також, що еластичність функції, зображеної на мал. 6.2, більше одиниці (оскільки $|MB| > |MA|$), але в рис. 6.3 – менше одиниці (оскільки $|MB| < |MA|$).

У дискретному випадку, а також при наближеному визначенні еластичності по дискретному набору даних, визначення еластичності вже не так однозначне, як у неперервному випадку, оскільки у відносній зміні $\delta x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{x_2 - x_1}{x}$ не ясно, що брати як x первісне значення ($x = x_1$), кінцеве значення ($x = x_2$) чи середнє значення $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Залежно від цього вибору розрізняють: кінцеву (відсоткову) еластичність

$$\epsilon_x [f] = \frac{\frac{y_2 - y_1}{y_1}}{\frac{x_2 - x_1}{x_1}},$$

середню (дугову) еластичність

$$\epsilon_x [f] = \frac{\frac{2(y_2 - y_1)}{y_1 + y_2}}{\frac{x_2 - x_1}{x_1 + x_2}},$$

а також логарифмічну еластичність

$$\epsilon_x [f] = \frac{\Delta \ln y}{\Delta \ln x} = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{\ln x_2 - \ln x_1} = \frac{\ln \frac{y_2}{y_1}}{\ln \frac{x_2}{x_1}}.$$

Всі ці висловлювання мало відрізняються один від одного при невеликих відносних (відсоткових) змінах величин x і y .

6.2. Властивості еластичності

1. Еластичність – безрозмірна величина, значення якої не залежить від того, в яких одиницях вимірні величини y і x :

$$\epsilon_{\alpha x} [by] = \epsilon_x [y].$$

$$\varepsilon_{ax}[by] = \frac{d(by)}{d(ax)} \cdot \frac{ax}{by} = \frac{bd(y)}{a(dx)} \cdot \frac{ax}{by} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = \varepsilon_x[y]$$

2. Еластичність взаємно обернених функцій – взаємно обернені величини:

$$\varepsilon_x[y] = \frac{1}{\varepsilon_y[x]}.$$

$$\varepsilon_x[y] = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{dx}{dy} \cdot \frac{y}{x}} = \frac{1}{\varepsilon_y[x]}.$$

Наприклад, еластичність величини попиту за ціною обернена еластичності ціни за величиною попиту.

3. Еластичність добутку двох функцій $u(x)$ і $v(x)$, що залежать від одного того ж аргументу x , дорівнює сумі еластичностей:

$$\varepsilon_x[uv] = \varepsilon_x[u] + \varepsilon_x[v].$$

$$\varepsilon_x[uv] = \frac{d \ln(uv)}{d \ln(x)} = \frac{d \ln(u)}{d \ln(x)} + \frac{d \ln(v)}{d \ln(x)} = \varepsilon_x[u] + \varepsilon_x[v].$$

Оскільки

$$\varepsilon_x[x] = 1,$$

то з останньої рівності отримаємо вираз важливого окремого випадку:

$$\varepsilon_x[xy] = \varepsilon_x[y] + 1,$$

яке показує, що добуток xy (площа прямокутника при додатніх x і y) зменшується зі зростанням x , якщо $\varepsilon_x[y] < -1$ і збільшується, якщо $\varepsilon_x[y] > -1$.

4. Еластичність частки двох функцій $u(x)$ і $v(x)$, що залежать від одного і того ж аргументу x , дорівнює різниці еластичностей

$$\varepsilon_x\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{d \ln(u/v)}{d \ln x} = \frac{d \ln u}{d \ln x} - \frac{d \ln v}{d \ln x} = \varepsilon_x[u] - \varepsilon_x[v]$$

5. Еластичність суми двох функцій $u(x)$ та $v(x)$ знаходиться за формулою

$$\varepsilon_x[u + v] = \frac{d(u+v)}{dx} \cdot \frac{x}{u+v} = \left[\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\right] \cdot \frac{x}{u+v} = \frac{u\varepsilon_x[u] + v\varepsilon_x[v]}{u+v}.$$

6.3. Еластичність та нееластичність в точці.

Еластичність елементарних функцій однієї змінної

Означення 6.2. Якщо еластичність функції $y = f(x)$ у деякій точці x за модулем більше одиниці $|\varepsilon_x[f]| > 1$, то функція називається еластичною в цій точці.

Означення 6.3. Якщо еластичність функції $y = f(x)$ у деякій точці x за модулем менше одиниці $|\varepsilon_x[f]| < 1$, то функція називається нееластичною в цій точці.

Означення 6.4. Якщо еластичність функції $y = f(x)$ у деякій точці x за модулем дорівнює одиниці $|\varepsilon_x[f]| = 1$, то будемо говорити, що функція містить одиничну еластичність в цій точці.

Означення 6.5. Якщо еластичність функції $y = f(x)$ у деякій точці x за модулем дорівнює нескінченності $|\varepsilon_x[f]| = \infty$, то будемо говорити, що функція є абсолютно еластичною в цій точці.

Означення 6.6. Якщо еластичність функції $y = f(x)$ у деякій точці x дорівнює нулю $|\varepsilon_x[f]| = 0$, то будемо говорити, що функція є абсолютно нееластичною в цій точці.

Розглянемо приклади дослідження еластичностей деяких функцій.

1. Еластичність степеневі функції $y = x^\alpha$ стала і дорівнює показнику степеню α : $\varepsilon_x[x^\alpha] = \alpha$

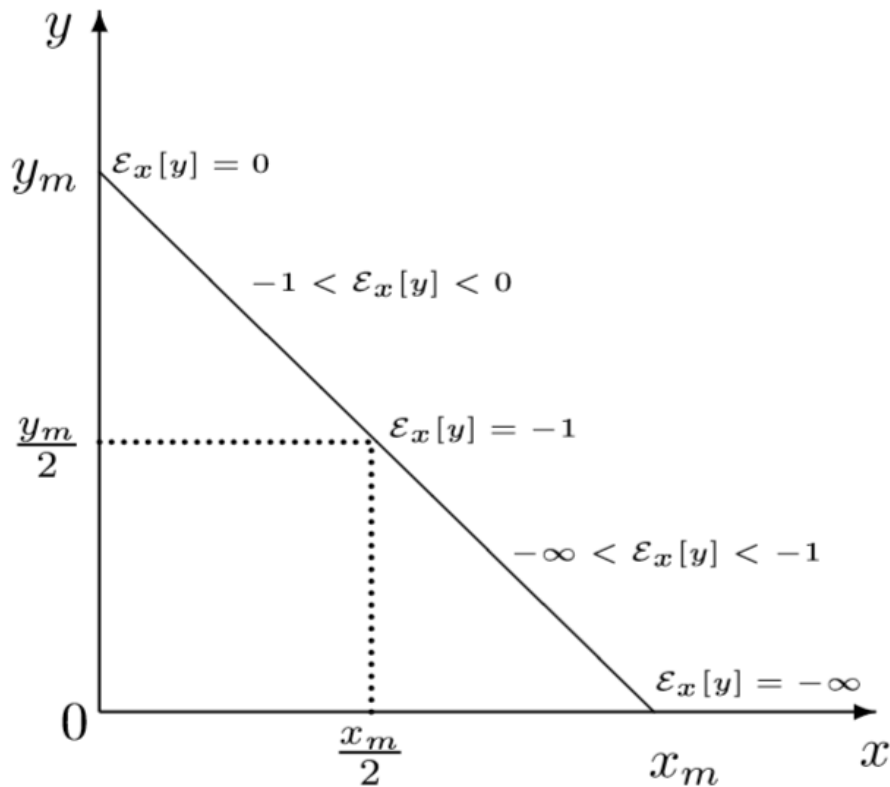
$$\varepsilon_x[x^\alpha] = \frac{dx^\alpha}{dx} \cdot \frac{x}{x^\alpha} = \frac{\alpha x^{\alpha-1} \cdot x}{x^\alpha} = \alpha.$$

2. Еластичність показникової функції $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$) пропорційна x : $\varepsilon_x[a^x] = x \ln(a)$.

$$\varepsilon_x[a^x] = \frac{da^x}{dx} \cdot \frac{x}{a^x} = a^x \ln(a) \cdot \frac{x}{a^x} = x \ln(a).$$

3. Еластичність лінійної функції $y = ax + b$ обчислюється за формулою $\varepsilon_x[ax + b] = \frac{ax}{ax+b}$.

$$\varepsilon_x[ax + b] = \frac{d(ax+b)}{dx} \cdot \frac{x}{ax+b} = \frac{ax}{ax+b}.$$



Мал. 6.4

Якщо графік лінійної функції має від'ємний нахил ($a < 0$), то еластичність функції змінюється від нуля у точці y_m перетину графіком осі O_y до мінус нескінченності ($-\infty$) у точці перетину з осі O_x , проходячи через значення (-1) у середній точці.

Таким чином, хоча пряма має постійний нахил, її еластичність залежить не тільки від нахилу, але і від того, в якій точці ми її знаходимо (мал. 6.4).

Функція з нескінченною еластичністю у всіх точках називається **абсолютно еластичною функцією**, з нульовою еластичністю у всіх точках – **абсолютно нееластичною функцією**.

6.4. Еластичність диференційованих функції багатьох змінних

Поняття еластичності поширюється і на функції декількох змінних

$$y = f(x_1, \dots, x_n).$$

Означення. Нехай функція $y = f(x_1, \dots, x_n), n > 1, f \in C^1(D), D \subseteq R^n$,

$(x_1, \dots, x_n) \in D$, диференційована по змінній $x_k, k = \overline{1, n}$. Якщо існує скінченне число

$\varepsilon_{x_k}[f] = \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{x_k}{f}$ в точці $(x_1, \dots, x_n)$, то воно називається **еластичністю функції f за змінною x_k** .

Іноді її називають *частинною еластичністю* функції по одному аргументу x_k . Розуміється еластичність змінної y , що розглядається в залежності тільки від x_k , при постійних значеннях інших аргументів. Вона пов'язана з частинною похідною за цим аргументом.

Приклад 1. Знайти еластичність функції корисності Коба -Дугласа

$$u = Ax_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}.$$

За означенням еластичності функції багатьох змінних

$$\varepsilon_{x_k}[f] = \frac{A\alpha_k x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_k^{\alpha_k-1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}}{Ax_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}} \cdot \frac{x_k}{1} = \alpha_k, \text{ причому не залежить від вибору точок.}$$

Зауважимо, що функції кількох змінних із сталою еластичністю – це степеневі функції вигляду

$$u = Ax_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}.$$

Приклад 2. Знайти еластичність функції

$$u(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n.$$

За означенням еластичності функції багатьох змінних

$$\varepsilon_{x_k}[f] = \frac{a_k}{a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n} \cdot \frac{x_k}{1}, k = 1, \dots, n.$$

Приклад 3. Знайти еластичність функції

$$u(x) = a_1 \ln x_1 + a_2x_2.$$

За означенням еластичності функції багатьох змінних

$$\varepsilon_{x_1}[f] = \frac{a_1}{a_1 \ln x_1 + a_2x_2} \cdot \frac{x_1}{1}, \varepsilon_{x_2}[f] = \frac{a_2}{a_1 \ln x_1 + a_2x_2} \cdot \frac{x_2}{1}.$$

Приклад 4. Знайти еластичність аддитивної функції корисності

$$u(x) = a_1x_1^\alpha + a_2x_2^\beta.$$

За означенням еластичності функції багатьох змінних

$$\varepsilon_{x_1}[f] = \frac{a_1\alpha x_1^{\alpha-1}}{a_1x_1^\alpha + a_2x_2^\beta} \cdot \frac{x_1}{1}, \varepsilon_{x_2}[f] = \frac{a_2\beta x_2^{\beta-1}}{a_1x_1^\alpha + a_2x_2^\beta} \cdot \frac{x_2}{1}.$$

6.5. Економічне значення еластичності

В економіці еластичністю користуються як мірою чутливості змінення попиту при змінненні цін та доходу.

6.5.1. Цінова еластичність попиту

Розглянемо попит Маршалла $x(p, m)$. При розгляданні цінової еластичності попиту в економічній літературі розглядається ситуація: змінення попиту на к-тий товар x_k при змінненні тільки його ціни p_k , вважаючи всі інші ціни незмінними. При цьому розглядаються випадки, коли дохід залишається незмінним, зростає або зменшується.

Далі, не обмежуючи загальності, будемо вивчати попит $x(p, m)$, який залежить від ціни $p > 0$ та доходу $m > 0$.

Означення. *Ціновою еластичністю попиту називають відношення*

$$\varepsilon_p[x] = \frac{\Delta x/x}{\Delta p/p}.$$

Якщо попит є диференційованою функцією, то $\varepsilon_p[x] = \frac{\partial x}{\partial p} \cdot \frac{p}{x}$.

Зайдемо зв'язок між ціновою еластичністю попиту та зміненням доходу. Нехай ціна p змінюється на величину $\Delta p \rightarrow p + \Delta p, \Delta p > 0$, x на величину $\Delta x \rightarrow x + \Delta x$, а дохід m на m_0 .

1) Нехай $m = m_0$, дохід не змінюється.

Після змінення

$$m = (p + \Delta p) \cdot (x + \Delta x) = px + \Delta p \cdot x + \Delta x \cdot p + \Delta x \cdot \Delta p.$$

Дохід не змінюється, якщо $\Delta p > 0, \Delta x < 0$.

2) $m \neq m_0$, тоді $\Delta m = m_0 - m = \Delta p \cdot x + \Delta x \cdot p + \Delta x \cdot \Delta p \approx \Delta p \cdot x + \Delta x \cdot p$

Тому $\frac{\Delta m}{\Delta p} = x + \frac{\Delta x}{\Delta p} \cdot p = x \left(1 + \frac{\Delta x}{\Delta p} \cdot \frac{p}{x} \right) = x(1 - |\varepsilon_p[x]|)$.

Економічне значення цінової політики попиту:

1) Якщо попит не є чутливим до змінення ціни, тобто попит нееластичний відносно ціни, тобто $|\varepsilon_p[x]| < 1$, то зростання ціни веде до зростання доходу: $\frac{\Delta m}{\Delta p} > 0$.

2) Якщо попит є високочутливим до ціни, тобто попит еластичен $|\varepsilon_p[x]| > 1$, то при зростанні ціни дохід зменшується $\frac{\Delta m}{\Delta p} < 0$.

3) Якщо при змінненні ціни на n % попит змінюється на n %, тобто $|\varepsilon_p[x]| = 1$, то витрата при зростанні ціни не змінюється $\frac{\Delta m}{\Delta p} = 0$.

6.5.2. Еластичність попиту по доходу

Розглянемо попит Маршалла $x(p, m)$.

Означення. *Еластичністю попиту по доходу* називають % відношення попиту на товар x_k до % змінення доходу $\varepsilon_m[x] = \frac{\Delta x_k / x_k}{\Delta m / m}$.

Якщо попит є диференційованою функцією, то $\varepsilon_m[x] = \frac{\partial x}{\partial m} * \frac{m}{x}$.

Нехай при незмінній ціні p дохід став $m_0 = p(x + \Delta x)$, тоді $\Delta m = m_0 - m$. Звідки $p_1 \Delta x_1 + \dots + p_n \Delta x_n = \Delta m$.

З урахуванням, що $\Delta x_k = \frac{\Delta x_k}{x_k} x_k$, маємо

$$\frac{p_1 x_1}{m} \cdot \frac{\Delta x_1}{x_1} + \dots + \frac{p_n x_n}{m} \cdot \frac{\Delta x_n}{x_n} = \frac{\Delta m}{m}.$$

Введемо $s_k = \frac{p_k x_k}{m}$, тоді $s_1 \varepsilon_m[x_1] + \dots + s_n \varepsilon_m[x_n] = 1$

Вивод: *середнє арифметичне взвішане еластичностей попиту на кожний з n -товарів доходу дорівнює 1, де вісами виступають $s_k = \frac{p_k x_k}{m}$ долі витрат на кожний товар.*

Означення. **Нормальним товаром** називається такий товар, для якого збільшення доходу веде до збільшення попиту $\varepsilon_m[x] > 0$.

Означення. **Товаром нижчої категорії** називається такий товар, для якого збільшення доходу веде до зменшення попиту $\varepsilon_m[x] < 0$.

Означення. **Товаром розкоші** називають такий товар, для якого збільшення доходу на 1 % веде до збільшення попиту більш, ніж на 1 %.

Економічне значення формули про середнє арифметичне взвішане складається в тому, що при наявності в наборі предмета розкоші обов'язково повинен бути присутній або товар нищої категорії, або нормальний товар, але не предмет розкоші.

Контрольні питання до теми 6

1. Дайте поняття еластичності функції однієї змінної, що диференціюється, в точці.
2. В чому складається геометричний сенс еластичності функції однієї змінної, що диференціюється, в точці?
3. Які властивості еластичності функції однієї змінної, що диференціюється, в точці?
4. Наведіть, як обчислюється еластичність функції однієї змінної, що диференціюється?

5. Як обчислити еластичності функції однієї змінної, що не диференціюється? Які види ви знаєте?
6. Дайте поняття еластичної, нееластичної функції в точці, функції з одиничною еластичністю? Наведіть приклади таких функцій.
7. Як визначається абсолютно еластична та абсолютно нееластична функція? Наведіть приклади.
8. Дайте поняття еластичності функції однієї змінної, що не диференціюється, в точці?
9. Як визначається цінова еластичність попиту?
10. Яке економічне значення цінової еластичності попиту ви знаєте?
11. Як визначається еластичність попиту по доходу?
12. Яке економічне значення еластичності попиту по доходу ви знаєте?

ТЕМА 7. Елементи теорії оптимізації

7.1. Принцип Лагранжа. Достатні умови існування локального та глобального максимуму задачі оптимізації

Наведемо основні результати, що відносяться до загальної теорії диференціальних умов оптимальності в задачі математичного програмування виду

$$f(x) \rightarrow \max, x \in X, \quad (7.1)$$

$$X = \{x \in X_0: g_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, r; g_j(x) = 0, j = r + 1, \dots, s\}, \quad (7.2)$$

де X_0 – деяка задана множина в R^l і $f, g_i: X_0 \rightarrow R$ ($i = 1, \dots, n$).

Позначимо через Λ_0 наступну множину, яка пов'язана з задачею (7.2):

$$\Lambda_0 = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in R^s : \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, r\} \quad (7.3)$$

що складається з усіх s -вимірних векторів, у яких перші r координат невід'ємні. При цьому вважатимемо, що $\Lambda_0 = R^s$, якщо обмеження-нерівності відсутні ($r = 0$), і $\Lambda_0 = R_+^s$, якщо обмеження-рівності відсутні ($r = s$).

Тепер введемо задану на множині $X_0 \times R_+ \times \Lambda_0$ функцію Лагранжа задачі (7.1) - (7.2)

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^s \lambda_i g_i(x). \quad (7.4)$$

У разі, коли функції f, g_i ($i = 1, \dots, s$) є диференційованими в точці $x \in X_0$, будемо використовувати позначення

$$L'_x(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f'(x) + \sum_{i=1}^s \lambda_i g'_i(x), \quad (7.5)$$

де вектор, який складається з частинних похідних функції Лагранжа по x , можливо переписати у вигляді

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^s \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x), \quad j = 1, \dots, l.$$

Центральне місце теорії диференціальних умов оптимальності займає наступна теорема.

Теорема 7.1. (Принцип Лагранжа). Нехай у задачі (7.1) – (7.2) множина X_0 опукла, функції $f, g_1, \dots, g_r$ диференційовані у точці $x^* \in X$, функції

$g_{r+1}, \dots, g_s$ неперервно диференційовані в околі x^* . Тоді, якщо x^* – локальний розв'язок задачі (7.1)–(7.2), то існує число $\lambda_0^* \geq 0$ і вектор $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_s^*) \in \Lambda_0$, компоненти якого не дорівнюють нулю, такі, що

$$L'_x(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*)(x - x^0) \leq 0 \text{ при всіх } x \in X_0, \quad (7.6)$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, i = 1, \dots, r. \quad (7.7)$$

Будь-яка точка $x^* \in X$, що задовольняє умовам (7.6) - (7.7) при деяких $\lambda_0^* \geq 0$, $\lambda^* \in \Lambda_0$, $(\lambda_0^*, \lambda^*) \neq 0$, називається *стаціонарною точкою* задачі (7.1) - (7.2).

Принцип Лагранжа стверджує, що за вказаних припущеннях будь-який локальний розв'язок задачі (7.1) - (7.2) є *стаціонарною точкою*.

Обернене гарантується лише за тих чи інших додаткових припущень про задачу (7.1)-(7.2). Тому умови (7.6) -(7.7) називають *умовами оптимальності першого порядку*.

Числа $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_s^*$ називають *множниками Лагранжа*. Згідно з означенням множини Λ_0 , множники Лагранжа $\lambda_1^*, \dots, \lambda_r^*$ відповідають обмеженням-нерівностям, невід'ємні; а множники $\lambda_{r+1}^*, \dots, \lambda_s^*$ відповідають обмеженням-рівностям та можуть мати будь-який знак.

Введемо для будь-якої точки $x^* \in X$ такі множини

$$I(x^*) = \{i: g_i(x^*) = 0, 1 \leq i \leq r\},$$

$$S(x^*) = I(x^*) \cup \{r+1, \dots, s\} = \{i: g_i(x^*) = 0, 1 \leq i \leq s\}$$

Обмеження-нерівності з індексами $i \in I(x^*)$ будемо називати *активними* в точці x^* , а решту обмежень *пасивними*.

Умова (7.7), яку називають *умовою доповнюючої нежорсткості*, означає, що множники Лагранжа, які відповідають пасивним обмеженням-нерівностям, повинні обертатись в нуль, тобто $\lambda_i^* = 0$ при всіх $i \in \{1, \dots, r\} \setminus I(x^*)$. Таким чином, з умов (7.6), (7.7) з урахуванням (7.5) маємо

$$(\lambda_0^* f'(x^*) + \sum_{i \in S(x^*)} \lambda_i^* g_i'(x^*))(x - x^*) \leq 0 \text{ для всіх } x \in X_0 \quad (7.8)$$

Навпаки, якщо скористуватись (7.8), можна прийти до (7.6), (7.7), якщо покласти $\lambda_0^* = 0$ при $i \in \{1, \dots, r\} \setminus I(x^*)$.

Пояснимо *геометричний сенс* принципу Лагранжа в разі, коли обмеження-рівності і прямі обмеження відсутні ($r = s, X_0 = R^l$). Умова (7.8) може бути подана тоді у вигляді

$$(\lambda_0^* f'(x^*) + \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i^* g_i'(x^*)) = 0. \quad (7.9)$$

При $\lambda_0^* > 0$ можливо побачити, що *антиградієнт цільової функції* є невід'ємною лінійною комбінацією градієнтів функцій, що утворюють активні обмеження в точці x^* .

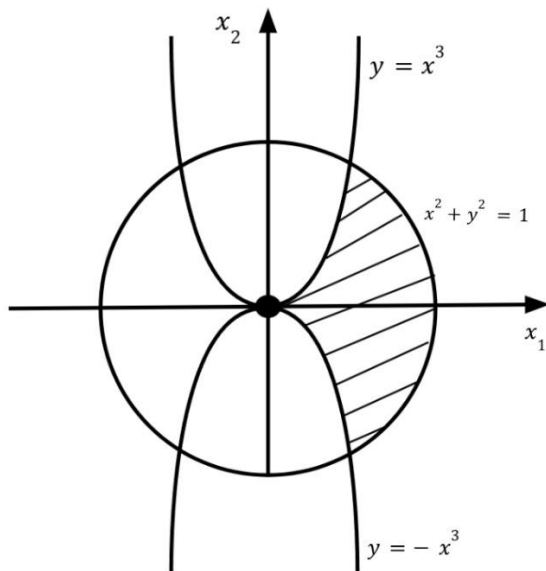
Зауважимо, що точка $\bar{x}$, для якої подібна умова не виконується, не може бути точкою максимуму $f(x)$ на X .

Неважко також зрозуміти, якій геометричній ситуації відповідає випадок $\lambda_0^* = 0$. Розглянемо, наприклад, задачу

$$\begin{aligned} f(x) &= -x_1 \rightarrow \min, \\ g_1(x) &= x_1^3 - x_2 \geq 0, \quad g_2(x) = x_1^3 + x_2 \geq 0, \\ g_3(x) &= 1 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0, \quad x \in R^2. \end{aligned} \quad (7.10)$$

На малюнку 7.1 зображені допустима множина X та лінії рівняння функції $f(x)$ (прямі, паралельні вертикальній осі). Розв'язком задачі є $x^* = (0,0)$. Активними в x^* виступають перше та друге обмеження.

При цьому $f'(x^*) = (-1,0)$, $g_1'(x^*) = (0,-1)$, $g_2'(x^*) = (0,1)$.



Мал. 7.1

Зрозуміло, що вектор $-f'(x^*)$ не можна представити невід'ємною лінійною комбінацією векторів $g'_1(x^*)$ і $g'_2(x^*)$: співвідношення (7.9) тут може виконуватися лише при $\lambda_0^* = 0$, $\lambda_1^* = \lambda$, $\lambda_2^* = -\lambda$, де $\lambda > 0$.

Сенс у тому, що самі градієнти $g'_1(x^*)$ і $g'_2(x^*)$ є лінійно залежними.

Зауважимо далі, що множники Лагранжа визначаються **неоднозначно**, а з точністю до сталої константи, тобто якщо пара $(\lambda_0^*, \lambda^*) \neq 0$ задовольняє умовам (7.6) - (7.7), то при будь-якому $\mu > 0$ пара $(\mu\lambda_0^*, \mu\lambda^*) \neq 0$ має ту саму властивість. Зокрема, можна взяти в якості $\mu = \frac{1}{\lambda_0^*}$, якщо $\lambda_0^* \neq 0$. Це дозволяє без обмеження спільності розглядати в теоремі 7.1 лише два випадки: $\lambda_0^* = 0$ або $\lambda_0^* = 1$.

Будь-яке додаткове припущення про задачу (7.1) - (7.2), що забезпечує в рамках даної теореми регулярний випадок $\lambda_0^* = 1$, прийнято називати **умовою регулярності**. Для такої задачі достатньо розглядати лише функцію Лагранжа виду

$$L(x, \lambda) = L(x, 1, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^s \lambda_i g_i(x), \quad (7.11)$$

яку також будемо називати *регулярною*.

Якщо $\lambda_0^* = 0$, то задачу будемо називати *ірегулярною* або *сингулярною*.

Приклад. Знайти стаціонарні точки і відповідні множники Лагранжа, встановити, регулярною чи сингулярною є задача.

$$\begin{cases} f(x) = x_1 x_2 + x_2 x_3 \rightarrow \max \\ x_1^2 + x_2^2 = 2, \\ x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Для приклада як задачі оптимізації маємо:

$$n = 3, r = 0, s = 2, X_0 = R_+^3,$$

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2, g_2(x) = x_2 + x_3 - 2.$$

Складемо умови (7.3)-(7.4). Функція Лагранжа має вигляд:

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0(x_1 x_2 + x_2 x_3) + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) + \lambda_2(x_2 + x_3 - 2).$$

Стаціонарні точки будемо знаходити із системи

$$\begin{cases} L'_x(x, \lambda_0, \lambda) = 0, \\ g_1(x) = 0, \\ g_2(x) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_0 x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0, \\ \lambda_0 x_1 + \lambda_0 x_3 + 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 = 0, \text{ та } x_1^2 + x_2^2 = 2, \\ \lambda_0 x_2 + \lambda_2 = 0, \quad x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Встановимо, регулярною чи сингулярною є задача.

Якщо припустити, що $\lambda_0 = 0$, то отримаємо систему

$$2\lambda_1 x_2 = 0,$$

$$\begin{aligned}2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 &= 0, \\ \lambda_2 &= 0, \\ x_1^2 + x_2^2 &= 2, \\ x_2 + x_3 &= 2.\end{aligned}$$

з якої ясно, що система стає несумісною, тобто не є сингулярною.

Як знайти розв'язки? Треба якось шукати, наприклад, якщо покласти $\lambda_1 = 0$, то знов маємо, що система стає несумісною. Таким чином, $\lambda_0 = 1, \lambda_1 \neq 0$, тоді покладемо $2\lambda_1 = a \neq 0$, і знайдемо a , користуючись рівняннями системи. Отримуємо значення $a \in \{1; -1; -2 + \sqrt{3}; -2 - \sqrt{3}\}$

Наприклад, якщо $a = 1, \lambda_1 = 0,5$, маємо:

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, \lambda_2 = -1.$$

Система має стаціонарну точку $(1; 1; 1)$ при множниках Лагранжа $(1; -0,5; -1)$.

7.2. Диференціальні умови оптимальності в задачі математичного програмування

Для регулярної задачі опуклого програмування умови (7.6) - (7.7) є не тільки необхідними, але і достатніми умовами оптимальності. Зокрема, має місце наступна теорема.

Теорема 7.2. Нехай у задачі (7.1) - (7.2) множина X_0 опукла, функції $f, g_1, \dots, g_r$ увігнуті на X_0 і неперервно-диференційовані в точці $x^* \in X$, функції $g_{r+1}, \dots, g_s$ – лінійні. Нехай, крім того, для $\lambda_0^* = 1$ і деякого $\lambda^* \in \Lambda_0$, виконуються умови (7.6) – (7.7).

Тоді x^* – глобальний розв'язок задачі (7.1) - (7.2).

Д о в е д е н н я. ■ В даному випадку функція $L(x, \lambda^*)$, очевидно увігнута по x на X_0 . Тому для будь-якого $x \in X_0$ та будь-якого $\alpha \in [0, 1]$ маємо

$$L(\alpha x + (1 - \alpha)x^*, \lambda^*) \geq \alpha L(x, \lambda^*) + (1 - \alpha)L(x^*, \lambda^*)$$

або

$$L(x^* + \alpha(x - x^*), \lambda^*) - L(x^*, \lambda^*) \geq \alpha(L(x, \lambda^*) - L(x^*, \lambda^*)).$$

При $\alpha \in [0, 1]$ до лівої частини цієї нерівності може бути застосована формула Лагранжа про кінцеві прирости. Через неї отримаємо

$$\alpha L'_x(x^* + \theta\alpha(x - x^*), \lambda^*)(x - x^*) \geq \alpha[L(x, \lambda^*) - L(x^*, \lambda^*)],$$

де $0 < \theta < 1$.

Якщо розділити тепер обидві частини цієї нерівності на α і перейти до границі при $\alpha \rightarrow 0$, отримаємо

$$L'_x(x^*, \lambda^*)(x - x^*) \geq L(x, \lambda^*) - L(x^*, \lambda^*).$$

Звідси, з урахуванням (7.6), випливає, що

$$L(x, \lambda^*) \leq L(x^*, \lambda^*) \text{ для всіх } x \in X_0. \quad (7.12)$$

тобто точка x^* є *точкою (глобального) максимуму функції* $L(x, \lambda^*)$ на X_0 .

Якщо скористатися умовою (7.7), то для будь-якого $x \in X$, отримаємо

$$f(x^*) + \sum_{i=1}^s \lambda_i^* g_i(x^*) = L(x^*, \lambda^*) \geq L(x, \lambda^*) = f(x) + \sum_{i=1}^s \lambda_i^* g_i(x),$$

звідки

$$f(x^*) \geq f(x),$$

що й потрібно було довести. ■

У зв'язку з цією теоремою в особливо ефективних умовах регулярності в задачах опуклого програмування набуває особливо важливого значення. Ці умови пов'язані зі структурою множин X_0 і X . У наведеному нижче твердженні таких умов фігурує новий термін ---**поліедр**.

Означення 7.2. *Поліедром називається множина вигляду*

$$X_0 = \{x \in R^l: Ax \leq b\} = \{x \in R^l: a_i x \leq b_i, i = 1, \dots, r\}, \quad (7.13)$$

де A – деяка матриця розмірності $m \times l$ з рядками $a_1, \dots, a_m$, $b = (b_1, \dots, b_m) \in R^m$ ($m = 1, 2, \dots$)

Лемма 7.1. (про регулярність задачі) *Нехай у задачі (7.1) - (7.2) множина X_0 опукла, функції $f, g_1, \dots, g_r$ неперервно-диференційовані у точці $x^* \in X$, функції $g_1, \dots, g_r$ увігнуті на X_0 , функції $g_{r+1}, \dots, g_s$ лінійні. Нехай, крім того, виконується одна з наступних умов:*

1) обмеження-рівності відсутні ($r = s$) і існує точка $\bar{x} \in X_0$ така, що $g_i(\bar{x}) > 0$ при всіх $i = 1, \dots, s$;

2) множина X_0 – поліедр, функції $g_1, \dots, g_r$ лінійні;

3) множина X_0 – поліедр, функції $g_{k+1}, \dots, g_r$ ($0 < k \leq r$) лінійні і існує точка $\bar{x} \in X$ така, що $g_i(\bar{x}) > 0$ при всіх $i = 1, \dots, k$.

Тоді, якщо – локальний розв'язок задачі (7.1) - (7.2), то існує вектор для $\lambda^* \in \Lambda_0$, такий, що $\lambda_0^* = 1$ і виконуються умови (7.6)-(7.7).

Умову 1, що фігурує в цій лемі, 1) називають умовою Слейтера. Це найбільш проста і часто використовується умова регулярності. Умову 2) називають умовою лінійності. Вона автоматично виконується для задачі лінійного і квадратичного програмування. Більш тонку умову 3) називають модифікованою умовою Слейтера. В ній вимога типу умови Слейтера ставиться лише до нелінійних обмежень-нерівностей.

Наведемо приклади, що показують суттєвість зазначених у лемі 7.1 умов регулярності. При цьому, перш за все, підкреслимо, що вони діють лише в рамках загального припущення теореми 7.2 про ввігнутість функцій $g_1, \dots, g_r$ і лінійність функцій $g_{r+1}, \dots, g_s$. Так, у задачі (7.10) умова Слейтера виконана, але функції g_1 та g_2 не є ввігнутим, тому $\lambda_0^* = 0$.

Далі розглянемо задачу

$$\begin{aligned} -f(x) &= x \rightarrow \min, \\ -g(x) &= x^2 \leq 0, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Її єдиною допустимою точкою і, отже, рішенням є $x^* = 0$. При цьому $f'(x^*) = -1, g'(x^*) = 0$ і тому умова (7.6) набуває вигляду

$$-\lambda_0^*(x) \leq 0 \text{ для всіх } x \in \mathbb{R},$$

що можливе лише у випадку, коли $\lambda_0^* = 0$.

Зауважимо, що тут жодна з умов 1) - 3) не виконана.

Цікавішим прикладом є задача, єдиною допустимою точкою якої є $x^* = (1,1)$:

$$\begin{aligned} -f(x) &= x_1 \rightarrow \min, \\ g(x) &= 2 - x_1 - x_2 \geq 0, x \in X_0, \end{aligned}$$

де

$$X_0 = \{x \in \mathbb{R}^2: x_1 x_2 \geq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

Єдиною допустимою точкою задачі є $x^* = (1,1)$. При цьому

$f'(x^*) = (-1,0), g'(x^*) = (-1,-1)$. Нерівність (7.6) тут набуває вигляду

$$-\lambda_0^*(x_1 - 1) - \lambda_1^*(x_1 - 1) - \lambda_1^*(x_2 - 1) \leq 0$$

або

$$(\lambda_0^* + \lambda_1^*)(x_1 - 1) + \lambda_1^*(x_2 - 1) \geq 0.$$

Введемо допоміжну функцію $\varphi(x) = (\lambda_0^* + \lambda_1^*)\left(\frac{1}{x} - 1\right) + \lambda_1^*(x - 1)$.

Для неї $\varphi(1) = 0$, $\varphi'(1) = \lambda_0^*$. Тому якщо $\lambda_0^* > 0$, то для будь-якого $x < 1$, досить близького до 1, матимемо $\varphi(x) < 0$, і отже, точка $(x, \frac{1}{x})$, що належить X_0 , не задовольняє зазначену нерівність. Для цієї задачі також не виконано жодну з умов 1) - 3) леми 7.1, причому умови 2) - 3) – через те, що X_0 не поліедр.

Із теореми 7.1 і леми 7.1 безпосередньо випливає один з найважливіших фактів теорії опуклого програмування.

Теорема 7.3. (Теорема Куна-Таккера в диференціальній формі)

Нехай на доданок до умов леми 7.1 функція f увігнута на X_0 .

Тоді точка x^ є розв'язком задачі (7.1) - (7.2) у тому і лише в тому випадку, коли існує вектор $\lambda^* \in \Lambda_0$ такий, що при $\lambda_0^* = 1$ виконуються умови (7.6) - (7.7).*

Теорема 7.4. (Теорема Куна-Таккера в недиференціальній формі)

Нехай у задачі (7.1) - (7.2) множина X_0 є опуклою, функції

$f, g_1, \dots, g_r$ увігнуті на X_0 , функції $g_{r+1}, \dots, g_s$ є лінійними.

Нехай, крім того, виконуються одна з умов 1) - 3) леми 7.1.

Тоді точка $x^ \in X$ є розв'язком задачі (7.1) - (7.2) у тому і тільки в тому випадку, коли існує вектор $\lambda^* \in \Lambda_0$ такий, що пара (x^*, λ^*) – сідлова точка функції Лагранжа $L(x, \lambda)$ на $X_0 \times \Lambda_0$.*

Означення 7.3. Пара $(x^*, \lambda^*) \in X_0 \times \Lambda_0$ називається сідловою точкою функції $L(x, \lambda)$ на $X_0 \times \Lambda_0$, якщо виконується умова

$$\max_{\lambda \in \Lambda_0} L(x^*, \lambda) = L(x^*, \lambda^*) = \min_{x \in X_0} L(x, \lambda^*),$$

Тобто, якщо $L(x^*, \lambda) \leq L(x^*, \lambda^*) \leq L(x, \lambda^*)$ при всіх $x \in X_0, \lambda \in \Lambda_0$. (7.14)

Неважко переконатися в тому, що (7.14) рівносильно наступним двом умовам

$$\begin{aligned} L(x^*, \lambda^*) &= \min_{x \in X_0} L(x, \lambda^*), \\ \lambda_i^* g_i(x^*) &= 0, i = 1, \dots, r. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Однак застосування теореми Куна-Таккера в диференціальній формі є зручнішим.

7.3. Лема про умову (7.6)

Щоб надалі спростити аналіз умови (7.6), конкретизуємо його для ряду випадків, що найчастіше виникають у задачах (7.1) - (7.2).

Лемма 7.2. 1) Якщо $x \in \text{int } X_0$, то умова (7.6) еквівалентна умові

$$L'_x(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*) = 0, \text{ тобто } \frac{\partial L}{\partial x_j}(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*) = 0, j = 1, \dots, l; \quad (7.16)$$

2) якщо X_0 має вигляд

$$X_0 = \{x \in R^l: a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1, \dots, l\}, \quad (7.17)$$

$$-\infty \leq a_j \leq b_j \leq +\infty, j = 1, \dots, l$$

то (7.6) еквівалентно умові: для будь-якого

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*) = \begin{cases} = 0, \text{ якщо } a_j < x_j < b_j, \\ \leq 0, \text{ якщо } x_j = a_j, \\ \geq 0, \text{ якщо } x_j = b_j \neq +\infty, \end{cases} \quad (7.18)$$

3) якщо X_0 має вигляд

$$X_0 = \{x \in R^l: x_j \geq 0, j = 1, \dots, m\}, \quad (7.19)$$

де $0 \leq m \leq l$, то (7.6) еквівалентно сукупності умов:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*) \leq 0, x_j \cdot \frac{\partial L}{\partial x_j}(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*) = 0, j = 1, \dots, m; \quad (7.20)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*) = 0, j = m + 1, \dots, l.$$

Д о в е д е н н я. ■ 1) З (7.16) умова (7.6), очевидно, випливає. Припустимо, що виконується (7.6). Якби в цьому випадку $L'_x(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*) \neq 0$, то через умову $x^* \in \text{int } X_0$ у будь-якому околі точки x^* , розташованої на гіперплощині $L'_x(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*)(x - x^*) = 0$, знайшлася б одна точка $\bar{x} \in X_0$, для якої виконувалася б нерівність $L'_x(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*)(\bar{x} - x^*) > 0$, яка б суперечила умові (7.6).

2) Якщо для будь-якого $j = 1, \dots, l$ виконується нерівність $a_j < x_j < b_j$, $j = 1, \dots, l$, то точка $x^* = (x_1^*, \dots, x_l^*) \in \text{int } X_0$ і тому справедливості твердження випливає із вже встановленого твердження 1).

Якщо ж $x_j^* = a_j > -\infty$ за будь-якого $j = 1, \dots, l$, то $x - x^* \geq 0$ для кожного $x \in X_0$ і тому (7.6) еквівалентно нерівності $L'_x(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*) \leq 0$.

Випадок $x_j^* = b_j < +\infty$ розглядається аналогічно.

3) Якщо виконується умова (7.20), то для будь-якого $x = (x_1, \dots, x_m)$, де $x_1, \dots, x_m \geq 0$, матимемо

$$L'_x(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*)(x - x^*) = \sum_{j=1}^l \frac{\partial L}{\partial x_j}(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*)(x_j - x_j^*) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial L}{\partial x_k}(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*) \cdot x_k \leq 0$$

Припустимо, що виконується умова (7.6). Тоді для будь-якого $x = (x_1, \dots, x_l)$, де $x_1, \dots, x_m \geq 0$ ($1 \leq m \leq l$),

$$\sum_{j=1}^l \frac{\partial L}{\partial x_k}(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*) \leq 0, \quad (7.21)$$

Якщо обрати довільним чином $j \in \{m+1, \dots, l\}$ та вважати в даній нерівності $x_k = x_k^*$ при $k \neq j$, отримаємо

$$\sum_{j=1}^l \frac{\partial L}{\partial x_k}(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*)(x_j - x_j^*) \leq 0 \text{ для будь-якого } x_j \in R,$$

що, очевидно, можливо лише за $\sum_{j=1}^l \frac{\partial L}{\partial x_k}(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*) = 0$.

Отже, третя з умов (7.20) виконана. В силу цієї умови нерівність (7.21) набуває вигляду

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial L}{\partial k}(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*)(x_k - x_k^*) \leq 0 \text{ для будь-якого } x_1, \dots, x_m \geq 0.$$

Якщо обрати тепер довільним чином $j \in \{1, \dots, m\}$ і вважати тут $x_k = x_k^*$ при $k \neq j$, отримаємо

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*)(x_j - x_j^*) \leq 0 \text{ для будь-якого } x_j \geq 0.$$

Звідси при $x_j = 0$, $x_j = 2x_j^*$ і $x_j = x_j^* + 1$ маємо

$$-\frac{\partial L}{\partial x_j}(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*) \cdot x_j^* \leq 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_j}(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*) \cdot x_j^* \leq 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_j}(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*) \leq 0,$$

і тому справедливі перші дві з умов (7.20). ■

7.4. Достатні умови оптимальності другого порядку для задачі (7.1) - (7.2). Сідлова точка

В загальному випадку (не опуклої) задачі математичного програмування (7.1) - (7.2) умови (7.6) - (7.7) є лише необхідними для оптимальності x^* . Тому потрібно подальший аналіз для стаціонарної точки x^* .

Введемо множину

$$V(x^*) = \{h \in \mathbb{R}^l : h = \mu(x - x^*), \mu > 0, x \in X_0\}.$$

При цьому зауважимо, що $V(x^*) = R^l$, якщо $x^* \in \text{int } R^l$.

Далі, позначимо через $H(x^*)$ множину усіх векторів $h \in \text{int } R^l$ таких, що

$$\begin{aligned} f'(x^*)h &\geq 0, \\ g_i'(x^*)h &\geq 0, i \in I(x^*), \\ g_i'(x^*)h &= 0, i = r + 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Нехай, крім того,

$$L''_{xx}(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f''(x) + \sum_{i=1}^s \lambda_i g''_i(x)$$

– матриця других похідних функції Лагранжа за координатами вектора x .

Теорема 7.5. *Нехай у задачі (7.1) - (7.2) функції $f, g_1, \dots, g_s$ двічі диференційовані у точці $x^* \in X$. Припустимо, що існує число $\lambda_0^* \geq 0$ і вектор $\lambda^* \in \Lambda_0$ такі, що*

$$hL''_{xx}(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*)h^T < 0, \quad (7.23)$$

при всіх $h \in \overline{V(x^)} \cap H(x^*)$ ($\overline{V(x^*)}$ позначає замикання). Тоді x^* – строго локальний розв'язок задачі (7.1)-(7.2), тобто $f(x) < f(x^*)$ при всіх $x \in X$ досить близьких до x^* .*

Зауважимо, що для задачі опуклого програмування ця теорема вказує на достатні умови єдиності глобального розв'язку.

Наведемо, нарешті, теорему про необхідні умови оптимальності другого порядку, обмежившись випадком $x^* \in \text{int } X_0$.

Теорема 7.6. Необхідна умови оптимальності другого порядку

Нехай в задачі (7.1) - (7.2) множина X_0 опукла, функції $f, g_1, \dots, g_s$ – двічі диференційовані в точці $x^* \in \text{int } X_0 \cap X$.

Нехай, крім того, функції $g_i(x)$ ($i \in S(x^*)$) неперервно диференційовані в деякому околі x^* , а градієнти $g'_i(x)$ ($i \in S(x^*)$) є лінійно незалежними.

Якщо x^* – локальний розв'язок задачі (7.1) - (7.2), то

$$hL''_{xx}(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*)h^T \leq 0, \quad (7.24)$$

при будь-яких $\lambda_0^* \geq 0$ і вектор $\lambda^* \in \Lambda_0$, що задовольняють (7.6), (7.7), і всіх $h \in H(x^*)$.

Зазначимо, що насправді, згідно зі сказаним раніше, випадок $\lambda_0^* = 0$ тут неможливий.

Розглянемо задачу опуклого програмування

$$f(x) \rightarrow \max, x \in X, \quad (7.25)$$

$$X = \{x \in X_0: g_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, r; g_j(x) = 0, j = r + 1, \dots, s\}. \quad (7.26)$$

де X – задана опукла множина в R^l ; $g_i(x)$ ($i = 1, \dots, r$) – увігнуті на X_0 , а $g_j(x) = a_j x - b_j$ ($j = r + 1, \dots, s$) – лінійні функції, b_j – задані числа, a_j – задані вектори з R_+^l .

Нехай $X^* = \{x \in X: f(x) = \sup_{y \in X} f(y) = f^*\}$.

Введемо функцію Лагранжа

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^s \lambda_i g_i(x), \quad (7.27)$$

визначену на множині $X_0 \times \Lambda_0$; $\Lambda_0 = \{\lambda \in R^s: \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_r \geq 0\}$.

Означення 7.4. Точка $(x^*, \lambda^*) \in X_0 \times \Lambda_0$ називається *сідловою точкою функції Лагранжа* (7.1), якщо для будь-яких $x \in X_0$, $\lambda \in \Lambda_0$ виконуються нерівності

$$L(x, \lambda^*) \leq L(x^*, \lambda^*) \leq L(x^*, \lambda) \text{ при всіх } x \in X_0, \lambda \in \Lambda_0. \quad (7.28)$$

Лемма 7.3. Критерій існування сідлової точки. Для того, щоб точка $(x^*, \lambda^*) \in X_0 \times \Lambda_0$ була сідловою точкою функції Лагранжа, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови

$$L(x, \lambda^*) \leq L(x^*, \lambda^*) \text{ при всіх } x \in X_0, \quad (7.29)$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, s, \quad x^* \in X. \quad (7.30)$$

Д о в е д е н н я. ■ Необхідність. Нехай $(x^*, \lambda^*) \in X_0 \times \Lambda_0$ – сідлова точка функції Лагранжа (7.27). Тоді умова (7.29) є лівою частиною нерівності (7.28). Залишається лише довести справедливості умови (7.30). Для цього перепишемо праву нерівність (7.29):

$$f(x^*) + \sum_{i=1}^s \lambda_i^* g_i(x^*) \leq f(x^*) + \sum_{i=1}^s \lambda_i g_i(x^*), \quad (7.31)$$

Звідси маємо

$$\sum_{i=1}^s (\lambda_i - \lambda_i^*) g_i(x^*) \geq 0 \text{ при всіх } \lambda \in \Lambda_0. \quad (7.32)$$

Покажемо, що $x^* \in X$. Візьмемо точку $\lambda \in \Lambda_0$: $\lambda_i = \lambda_i^* + 1$ для деякого i , $1 \leq i \leq r$; $\lambda_j = \lambda_j^*$ для всіх $j \neq i$, $j = 1, \dots, s$.

З оцінки (7.32) маємо, що $g_i(x^*) \geq 0$ для всіх $i = 1, \dots, r$.

Виберемо тепер λ таким чином $\lambda_i = \lambda_i^* - g_i(x^*)$ для деякого i , $r + 1 \leq i \leq s$; $\lambda_j = \lambda_j^*$ для всіх $j \neq i$, $j = 1, \dots, s$.

Очевидно, що $\lambda \in \Lambda_0$. Тому з (7.32) маємо: $-|g_i(x^*)|^2 \geq 0$, тобто

$$g_j(x^*) = 0, \quad j = r + 1, \dots, s.$$

Таким чином $x^* \in X$. З того, що $g_j(x^*) = 0, j = r + 1, \dots, s$, випливають рівності $\lambda_j^* g_j(x^*) = 0, j = r + 1, \dots, s$.

Виберемо тепер таку точку λ : $\lambda_i = 0$ при деякому i , $r + 1 \leq i \leq s$; $\lambda_j = \lambda_j^*$. Очевидно, що $\lambda \in \Lambda_0$. Тому з (7.32) випливає, що $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, i = 1, \dots, r$.

Однак $\lambda_i^* \geq 0$ та $g_i(x^*) \geq 0$ для $i = 1, \dots, r$. Тому $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, i = 1, \dots, r$, що завершує доведення необхідності.

Достатність. Нехай точка $(x^*, \lambda^*) \in X_0 \times \Lambda_0$ відповідає умовам (7.28), (7.29). З умови (7.29) випливає ліва частина нерівності (7.28). З (7.30) $x^* \in X$, тобто $g_i(x^*) \geq 0$ при $i = 1, \dots, r$; $g_j(x^*) = 0, j = r + 1, \dots, s$.

Тоді

$$(\lambda_i - \lambda_i^*)g_i(x^*) = 0 \quad (7.33)$$

для всіх $i = 1, \dots, r$ при $g_i(x^*) = 0$.

Якщо ж $g_i(x^*) > 0$, то з (7.29) випливає, що $\lambda_i^* = 0$. Тому

$$(\lambda_i - \lambda_i^*)g_i(x^*) = \lambda_i g_i(x^*) \geq 0$$

для всіх $\lambda_i \geq 0, 1 \leq i \leq r$ при $g_i(x^*) > 0$. Додаючи отримані нерівності до (7.33), матимемо нерівність (7.32), звідки випливає (7.31) або права частина нерівності (7.28).

Лемма доведена. ■

Лемма 7.4. Нехай задачі (7.1) - (7.2) функції $f, g_1, \dots, g_s$ – неперервно диференційовані на X_0 і $r = s$.

Для того, щоб точка (x^*, λ^*) була сідловою точкою функції Лагранжа (7.3) необхідно і достатньо виконання умов

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x} (x - x^*) \leq 0 \text{ при будь-яких } x \in X_0, \quad (7.34)$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, s, x^* \in X_0. \quad (7.35)$$

Д о в е д е н н я . ■ Насамперед зауважимо, що умова (7.34) еквівалентна умові (7.6).

Необхідність. Нехай (x^*, λ^*) – сідлова точка функції Лагранжа (7.27). Тоді за фіксованого $\lambda = \lambda^*$ точка x^* є точкою максимуму функції $L(x^*, \lambda^*)$. Тому

$$0 \geq L(x^* + \alpha(x - x^*), \lambda) - L(x^*, \lambda^*) = \alpha \sum_{i=1}^l \frac{\partial L}{\partial x} (x - x^*) + o(\alpha),$$

де $\alpha > 0$ або

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x} (x - x^*) + o(1) \leq 0.$$

Якщо перейти тут до границі при $\alpha \rightarrow 0$, отримаємо нерівність (7.34).

Достатність. Легко переконатися, що функція Лагранжа $L(x, \lambda)$ є увігнутою на X_0 . Тому

$$L(x^* + \alpha(x - x^*), \lambda^*) \geq \alpha L(x^*, \lambda^*) + (1 - \alpha)L(x^*, \lambda^*) \text{ або}$$

$$L(x^* + \alpha(x - x^*), \lambda^*) - L(x^*, \lambda^*) \geq \alpha(L(x^*, \lambda^*) - L(x^*, \lambda^*)).$$

Застосовуючи до лівої частини встановленої нерівності теорему Лагранжа про кінцеві прирощення, отримаємо

$$\alpha \frac{\partial L(x^* + \theta \alpha(x - x^*), \lambda^*)}{\partial x} (x - x^*) \geq L(x, \lambda^*) - L(x^*, \lambda^*)$$

Поділивши тепер обидві частини цієї нерівності на α , перейдемо до границі при $\alpha \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x} (x - x^*) \geq L(x, \lambda^*) - L(x^*, \lambda^*)$$

Оскільки згідно з умовою (7.11)

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x} (x - x^*) \leq 0$$

то отримаємо $L(x, \lambda^*) \leq L(x^*, \lambda^*)$ при всіх $x \in X_0$. Таким чином, в силу леми 7.2 (x^*, λ^*) – сідлова точка функції Лагранжа (4.3).

Лемма доведена. ■

Теорема 7.7. Нехай $(x^*, \lambda^*) \in X_0 \times \Lambda_0$ – сідлова точка функції Лагранжа (7.3). Тоді x^* – розв'язок задачі (7.1).

Д о в е д е н н я. ■ З умови (7.11) маємо, що $x^* \in X$ та $L(x^*, \lambda^*) = f(x^*)$. Тоді (7.10) запишемо у вигляді

$$f(x^*) \geq L(x, \lambda^*) = f(x) + \sum_{i=1}^s \lambda_i^* g_i(x), x \in X_0.$$

Однак при $x \in X_0$

$$\sum_{i=1}^s \lambda_i^* g_i(x) \geq 0.$$

Отже, $f(x^*) \geq f(x)$ при всіх $x \in X_0$, що потрібно було довести. ■

Означення 7.5. Кажуть, що задача (7.1) за $r = s$ задовольняє умові Слейтера, якщо існує $x \in X_0$ таке, що $g_i(x) > 0$ при $i = 1, \dots, s$.

Теорема 7.8. (Зворотня теорема про сідлову точку). Якщо задача (7.1) за $r = s$ задовольняє умові Слейтера і x^* – розв'язок цієї задачі, то існує вектор $\lambda^* \in \Lambda_0$, такий, що (x^*, λ^*) є сідловою точкою функції Лагранжа (7.3).

Диференціальна форма умов оптимальності представлена у наступній теоремі.

Теорема 7.9. (Теорема Куна-Таккера). Нехай функції $f, g_1, \dots, g_s$ є диференційованими на $X_0 = R_+^l$ і задача (7.1) за $r = s$ задовольняє умові Слейтера.

Тоді допустима точка задачі (7.1) x^* є оптимальною тоді і тільки тоді, коли існує вектор множників Лагранжа $\lambda^* \in R_+^s$, такий, що виконані умови Куна-Таккера (умови доповнюючої нежорсткості):

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x} \leq 0, \quad (7.36)$$

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x} x^* = 0, \quad (7.37)$$

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x} \lambda^* = 0. \quad (7.38)$$

Доведення.■ В силу теорем 7.1, 7.2, для того, щоб припустима точка x^* була розв'язком задачі (7.1), необхідно і достатньо існування вектора множників Лагранжа $\lambda^* \in R_+^s$ такого, що точка (x^*, λ^*) є сідловою точкою функції Лагранжа (7.27). У свою чергу, в силу леми 7.2, для цього необхідно й достатньо виконання умов (7.34) та (7.35).

Покажемо спочатку, що з цих умов випливають умови (7.36) - (7.38). Вважаючи (7.34) $x = 0$, а потім $x = 2x^*$, отримаємо

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x} x^* \geq 0, \quad \frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x} x^* \leq 0.$$

Звідси бачимо, що $\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x} x^* = 0$, тобто має місце (7.37).

Крім того, якщо в (7.34) покласти $x_i = x_i^* + 1$, $1 \leq i \leq s$, та $x_j = x_j^*$, $j \neq i$,
 $j = 1, \dots, s$,

то отримаємо $\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x} \leq 0$, для будь-якого $i \in \{1, \dots, l\}$, звідки витікає (7.36).

Умови (7.38) безпосередньо випливають з (7.35)

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} = g_i(x^*) \text{ для будь-якого } i \in \{1, \dots, s\}.$$

Неважко також переконатися, що з (7.36) - (7.38) випливають умови (7.34), (7.35). ■

7.5. Теорема про огинаючу

У мікроекономічному аналізі наряду з задачами (7.1) - (7.2) розглядають задачі знаходження умовного екстремума, коли функція $f(x)$ та граничні функції $g_i(x)$ залежать від одного та декількох параметрів, таким чином, широко використовується клас тверджень, званих **теоремами про огинаючу**.

Розглянемо задачу оптимізації, яка залежить від параметра a :

$$f(x, a) \rightarrow \max \quad (7.39)$$

$$g_i(x, a) = 0, \quad i = 1, \dots, s. \quad (7.40)$$

Теорема 7.10. Нехай $x(a)$ – розв'язок задачі (7.39) - (7.40), $\lambda(a)$ – множники Лагранжа, що відповідають розв'язку, і $F(a) = f(x(a), a)$.

Нехай, крім того, у точці a_0 виконуються умови:

- 1) функції $f, g_1, \dots, g_s$ – увігнуті та диференційовані в точці $(x(a), a)$ для будь-якого $a \in E$, E – зв'язана множина із R ;
- 2) множина опукла;
- 3) розв'язок задачі існує і єдиний і функція $x(a)$ є диференційованою.

Тоді має місце співвідношення

$$\frac{dF(a_0)}{da} = \frac{\partial L(x, a)}{\partial a} \Big|_{x=x(a_0)} = \frac{\partial f(x, a)}{\partial a} \Big|_{x=x(a_0)} + \sum_{i=1}^s \lambda_i(a_0) \frac{\partial g_i(x, a)}{\partial a} \Big|_{x=x(a_0)} \quad (7.41)$$

Д о в е д е н н я . ■ Оскільки має місце тотожність

$$F(a) \equiv f(x(a), a),$$

то диференціюючи отримаємо

$$\frac{dF(a)}{da} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial a}.$$

Звідси з урахуванням умов першого порядку з леми 7.1 випливає, що $L'_x(x(a), \lambda(a), a) = 0$, тобто

$$\frac{\partial f(x, a)}{\partial x} + \sum_{i=1}^s \lambda_i(a) \frac{\partial g_i(x, a)}{\partial x} = 0, \text{ звідки } \frac{\partial f(x, a)}{\partial x} = - \sum_{i=1}^s \lambda_i(a) \frac{\partial g_i(x, a)}{\partial x}.$$

$$\text{Звідки } \frac{dF(a)}{da} = -\sum_{i=1}^s \lambda_i(a) \frac{\partial g_i(x,a)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,a)}{\partial x}. \quad (7.42)$$

З іншого боку, для розв'язків $x = x(a)$ справедлива тотожність

$$g_i(x(a), a) \equiv 0 \text{ для будь-яких } i \in \{1, \dots, s\}.$$

Якщо їх продиференціювати по a , отримаємо

$$\frac{\partial g_i(x,a)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial g_i(x,a)}{\partial a} = 0, i \in \{1, \dots, s\}.$$

Враховуючи ці співвідношення, перепишемо (7.42) у вигляді

$$\frac{dF(a)}{da} = \frac{\partial f(x,a)}{\partial a} - \sum_{i=1}^s \lambda_i(a) \frac{\partial g_i(x,a)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial f(x,a)}{\partial a} + \sum_{i=1}^s \lambda_i(a) \frac{\partial g_i(x,a)}{\partial a} = \frac{\partial L(x,a)}{\partial a},$$

Звідси випливає справедливність утвердження теореми.

7.6. Аналіз задачі 1 та задачі 2 як задач оптимізації

Розглянемо задачу споживача 1 як задачу оптимізації:

$$\begin{aligned} u(x) &\rightarrow \max \\ p(x) &\leq m, \\ x &\geq 0, \end{aligned}$$

Нехай функція корисності $u(x)$ для задачі споживача 1 є увігнутою та неперервно диференційованою на множині допустимих альтернатив R_+^l . Якщо помітити, що $X_0 = R_+^l, r = s = 1, g(x) = g_1(x) = m - px$, тоді задачу 1 можливо переписати у вигляді

$$\begin{aligned} u(x) &\rightarrow \max, \\ X_0 &= \{x \in X: g(x) = m - px \geq 0\} \end{aligned} \quad (7.44)$$

Пряме обмеження X_0 є опуклою множиною та поліедром. Функція $g(x)$ є лінійною, таким чином є диференційованою і увігнутою. Якщо припустити, що функція корисності $u(x)$ для задачі споживача 1 є диференційованою, то за лемою про регулярність задача (7.1) - (7.2) для задачі споживача 1 є регулярною. Функція Лагранжа має вигляд

$$L(x, \lambda) = u(x) + \lambda(m - px), \lambda \in \Lambda_0 \subset R.$$

Для регулярної задачі за принципом Лагранжа виконуються умови (7.3) - (7.4) у вигляді:

$$(u'(x) - \lambda p)(x - x^*) \leq 0, \quad (7.45)$$

$$\lambda^*(m - px^*) = 0, \quad \lambda^* \geq 0. \quad (7.46)$$

Якщо стаціонарна точка x^* виявиться розв'язком задачі (7.1) - (7.2), то буде знайдено попит Маршалла $x^* = x(p, m)$ і відповідний йому множник Маршалла λ^* .

Для деяких функцій, які не є диференційованими всюду в R_+^l (наприклад, функції Леонтьєва), можливо скористуватись теоремою Куна-Такера в недиференційованій формі.

Так як $X_0 = R_+^l$, то умову (7.3) можливо спростити, користуючись лемою 7.3. Якщо хоч би одна з координат стаціонарної точки x^* може попасти на межу області визначення, то умова (7.3) спрощується за лемою 7.2.

Якщо $x^* \in \text{int} X_0$, то за лемою 7.1 задача для знаходження (x^*, λ^*) зводиться до задачі: $L'(x, \lambda) = 0$,

$$\lambda^*(m - px^*) = 0.$$

Якщо, крім того, переваги споживача, які породжують дану функцію, є локально-насичуваними, то, так як є справедливим закон Вальраса, задача (7.3) - (7.4) приймає вигляд:

$$L'_x(x, \lambda) = 0,$$

$$m - px^* = 0.$$

Якщо функція $u(x)$ для задачі споживача 1 є увігнутою на $X_0 = R_+^l$, то для задачі споживача (7.1)-(7.2) за теоремою Куна-Такера стаціонарна точка x^* є глобальним розв'язком задачі (7.1)-(7.2) з відповідним множником Лагранжа λ^* .

Розглянемо рівняння $L'_x(x, \lambda) = 0$ або $u'(x) - \lambda p = 0$.

Звідки маємо геометричний сенс останньої рівності: градієнт функції корисності або в стаціонарній точці, або в точці екстремуму колінеарний вектору цін p з коефіцієнтом пропорційності λ^* .

Якщо $r = s = 1$, то з $\lambda^* \geq 0$ випливає, що $\lambda^* > 0$.

Визначимо сенс множника Лагранжа λ^* за допомогою теореми про огиначу. В якості цільової функції оберемо непряму функцію корисності:

$$v(p, m) = u(x^*) = u(x(p, m)).$$

За теоремою про огиначу

$$\frac{\partial v(p, m)}{\partial m} = \frac{\partial L(x^*, \lambda^*, m)}{\partial m} = \lambda^*.$$

Таким чином, множником Лагранжа λ^* є гранична корисність споживача, обчислена на оптимальному наборі.

Приклад. Обчислити задачу оптимізації (7.1)-(7.2) для функції корисності Кобба-Дугласа при $n=2$

$$u(x) = x_1^\alpha \cdot x_2^{1-\alpha}, \alpha \in (0,1).$$

Задача (7.1) -(7.2) для функції Кобба-Дугласа може бути записана так:

$$\begin{aligned} x_1^\alpha \cdot x_2^{1-\alpha} &\rightarrow \max, x \in X \\ X &= \{x \in R_+^2: m - p_1 x_1 - p_2 x_2 \geq 0\}. \end{aligned}$$

Функція $u(x)$ є неперервно-диференційованою всюду в R_+^2 , окрім осей $x_1 = 0$ та $x_2 = 0$.

Доведемо, що $u(x)$ є увігнутою, тобто доведемо, що для будь-яких

$x^{(1)} = (x_{11} \ x_{12})^T$; $x^{(2)} = (x_{21} \ x_{22})^T$; $x^{(1)}, x^{(2)} \in R_+^2$ та будь-якого $\beta \in [0,1]$ виконано

$$\begin{aligned} u(\beta x^{(1)} + (1-\beta)x^{(2)}) &\geq \beta u(x^{(1)}) + u((1-\beta)x^{(2)}). \\ u(\beta x^{(1)} + (1-\beta)x^{(2)}) &= (\beta x_{11} + (1-\beta)x_{12})^\alpha (\beta x_{21} + (1-\beta)x_{22})^{1-\alpha} = \\ &= ((\beta x_{11})^\alpha + \dots + ((1-\beta)x_{12})^{1-\alpha})((\beta x_{21})^\alpha + \dots + ((1-\beta)x_{22})^{1-\alpha}) \geq \\ &\geq ((\beta x_{11})^\alpha + ((1-\beta)x_{12})^{1-\alpha})((\beta x_{21})^\alpha + ((1-\beta)x_{22})^{1-\alpha}) \\ &\geq \beta x_{11}^\alpha x_{12}^{1-\alpha} + (1-\beta)x_{21}^\alpha x_{22}^{1-\alpha} = \beta u(x^{(1)}) + u((1-\beta)x^{(2)}). \end{aligned}$$

Так як $u(x)$ є диференційованою і увігнутою функцією, яка породжена локально-насичуваними перевагами, $x^* \in \text{int } X_0$, то за лемою 7.1. і за теоремою Куна-Такера глобальний екстремум задачі (7.1)-(7.2) можливо визначити з системи:

$$\begin{aligned} L'_x(x, \lambda) &= 0, \\ m - p x &= 0. \end{aligned}$$

Функція Лагранжа для задачі має вигляд

$$L(x, \lambda) = x_1^\alpha \cdot x_2^{1-\alpha} + \lambda(m - p_1 x_1 - p_2 x_2).$$

Тоді

$$\begin{cases} \alpha x_1^{\alpha-1} \cdot x_2^{1-\alpha} - \lambda p_1 = 0, \\ (1-\alpha)x_1^\alpha \cdot x_2^{-\alpha} - \lambda p_2 = 0, \\ m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\alpha-1} = \frac{\lambda p_1}{\alpha}, \\ \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^\alpha = \frac{\lambda p_2}{\alpha}, \\ m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x_2}{x_1} = \frac{(1-\alpha)p_1}{\alpha p_2}, \\ \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^\alpha = \frac{\lambda p_2}{\alpha}, \\ m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{m\alpha}{p_1}, \\ x_2 = \frac{m(1-\alpha)}{p_2} \\ \lambda = \frac{(1-\alpha)}{p_2} \left(\frac{\alpha}{p_1} \cdot \frac{p_2}{1-\alpha} \right)^\alpha, \end{cases}$$

Звідки $\lambda^* = \left(\frac{(1-\alpha)}{p_2}\right)^{1-\alpha} \left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^\alpha$. Таким чином, ми отримали функцію попиту

Маршалла $\begin{cases} x_1 = \frac{m\alpha}{p_1}, \\ x_2 = \frac{m(1-\alpha)}{p_2}, \end{cases}$ користуючись методами теорії оптимізації.

Відмітимо, що результат співпадає з розв'язком цієї задачі за допомогою методів розділу 5.

Розглянемо задачу 2

$$\begin{aligned} px &\rightarrow \min_{x \in X}, \\ u(x) &\geq u^*, \\ x &\geq 0, \end{aligned}$$

як задачу оптимізації

$$\begin{cases} -px \rightarrow \max, x \in X \\ X_0 = \{x \in X: g(x) = u(x) - u^* \geq 0\} \end{cases} \quad (7.46)$$

Пряме обмеження X_0 є опуклою множиною та поліедром. Функція $f(x) = -px$ є лінійною, таким чином є диференційованою і увігнутою. Якщо припустити, що функція корисності $u(x)$ для задачі споживача 2 є неперервною, то відповідно теоремі подвійності в оптимізації $u(x^*) = u^*$.

Якщо функція корисності $u(x)$ є диференційованою в X_0 та $u(x) \neq \text{Const}$, то для неї виконані умови Слейтера, тому виконуються умови леми про регуляризації і функція Лагранжа має вигляд

$$L(x, \lambda) = -px + \lambda(u(x) - u^*), \lambda \in \Lambda_0 \subset R.$$

Для регулярної задачі за принципом Лагранжа виконуються умови (7.3) - (7.4) у вигляді:

$$L'_x(x, \lambda) = 0, \quad (7.45)$$

$$\lambda^*(u(x) - u^*) = 0, \quad \lambda^* \geq 0. \quad (7.46)$$

Якщо стаціонарна точка x^* виявиться розв'язком задачі (7.1)-(7.2), то буде знайдено попит Гикса $x^* = h(p, x^*)$ і відповідний йому множник Маршалла λ^* .

Далі проводимо дослідження, аналогічні дослідженням для задачі 1.

Зауваження. Квазивипуклість за доходом диференційованої непрямої функції корисності та її строга монотонність за доходом (яка випливає з локальної ненасичуваності переваг) гарантують додатність двоїстої оцінки обмеження всюди, за винятком не більш, ніж лічильної множини точок її області визначення. Таким чином, навіть опуклість переваг та їх локальна ненасичуваність не гарантують, взагалі кажучи, позитивність оцінки обмежень (позитивність граничної корисності доходу при деяких його рівнях). У ситуації ж, коли існує увігнута функція корисності, що представляє локально ненасичені переваги, за будь-якого рівня доходу його гранична корисність завжди додатна.

У більшій частині наступного нижче матеріалу, який становить ядро неокласичної теорії поведінки споживачів, ми не цілком послідовні і ухиляємося від програми побудови теорії на основі тільки властивостей переваг, часто вважаючи деякі властивості функцій корисності заданими апіорно, а не виводячи їх з характеристик лежачих в їхній основі переваг.

Контрольні питання до теми 7

1. *Сформулюйте принцип Лагранжа.*
2. *Як сформулюються достатні умови існування локального і глобального максимуму завдання оптимізації?*
3. *Наведіть лему про регуляризацію задачі оптимізації.*
4. *Дайте означення умови Слейтера, умови лінійності, модифікованої умови Слейтера.*
5. *Які лему про спрощення умов оптимізації?*
6. *Наведіть теореми Куна-Такера для диференційованої та недиференційованої функції. В чому різниця?*
7. *Наведіть достатні умови першого і другого порядку оптимальності розв'язку задачі оптимізації.*
8. *Наведіть теорему про криву, що огинає. Де цю теорему використовують? За яких умов?*
9. *Запишіть задачу споживача I як задачу оптимізації.*
10. *Запишіть задачу споживача I як задачу оптимізації.*

ТЕМА 8. Вибір споживача. Порівняна статика поведінки споживача

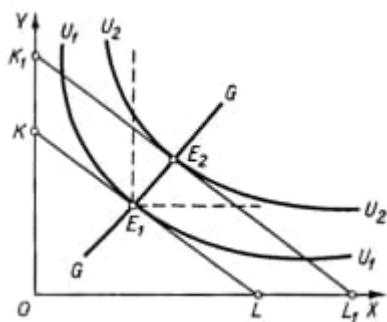
В цьому розділі буде розглянута порівняна статика поведінки споживача: як вибір споживача змінюється у випадку змінення цін або доходу.

8.1. Порівняна статика поведінки споживача

Проаналізуємо більш детально проблему максимізації споживача, коли маємо два товари. Зберіжемо ціни незмінними і дозволимо змінюватись доходу. Місцеположення кошиків, максимізуючих корисність, будемо називати **шляхом розширення доходу**. Рухаючись по шляху розширення доходу, ми можемо виділити функцію, яка зв'язує дохід з попитом для кожного товару (при фіксованих цінах).

I. Реакція споживача на змінення доходу. Нехай $x = x(p, m)$ попит Маршалла, $p > 0$, $p = \text{const}$, $m \geq 0$, m – змінна величина.

Означення. Кількість точок у R^n , де кожному значенню доходу поставлено значення попиту Маршалла, називається **кривою «дохід-споживання»** або *шляхом розширення доходу*.



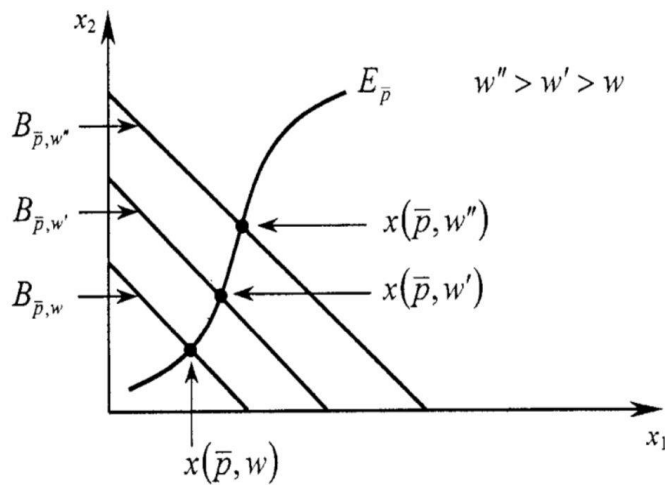
Мал. 8.1. Крива «дохід-споживання»

Для випадку $n = 2$ на малюнку у разі локально-ненасичених переваг для виконання закону Вальраса показана крива «дохід-споживання» і напрямок руху по ній, якщо дохід зростає, при цьому крива виходить з початку.

При розгляді кривих «дохід-споживання» логічно можливі 3 ситуації:

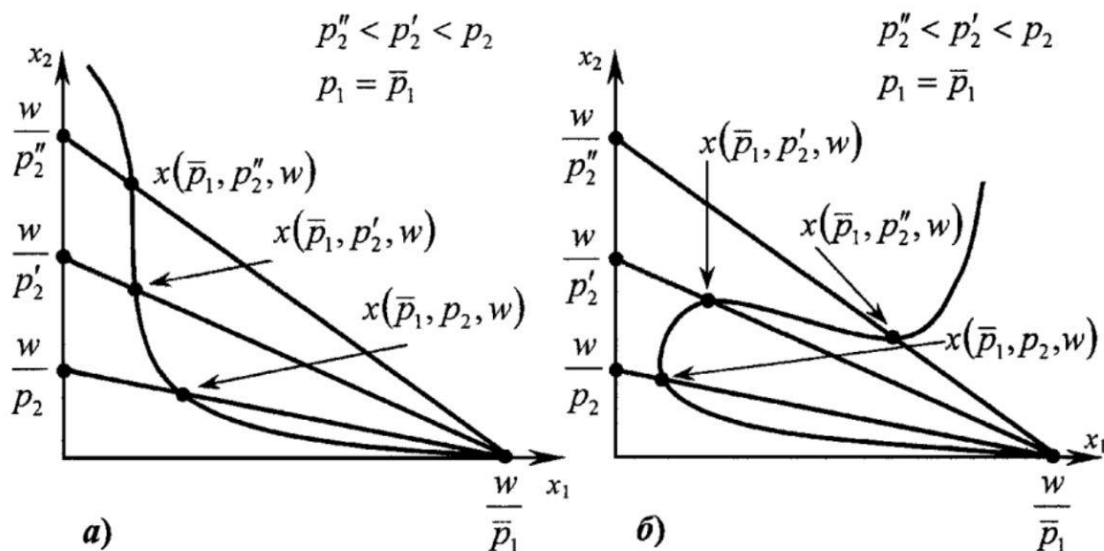
1. Кількість товарів вимірюють в одній і тій же пропорції. Шлях розширення доходу в даному випадку є прямою, яка виходить з початку координат. В цьому випадку вважають, що еластичність доходу кривих

попиту споживача дорівнює 1. Такий споживач зберігає сам пропорцію свого доходу кожному товару, який би рівень не був.



Мал. 8.2. Крива дохід - споживання

- Один із товарів змінюється швидше, ніж інший, наприклад x_2 змінюється швидше, ніж x_1 (мал.8.3). Шлях розширення доходу нахилиється до одного чи другого товару: коли споживач бачить рост свого доходу, він споживає більше обох товарів, але в більшому степені споживає один (*товар розкоші*), ніж другий (*необхідний товар*).

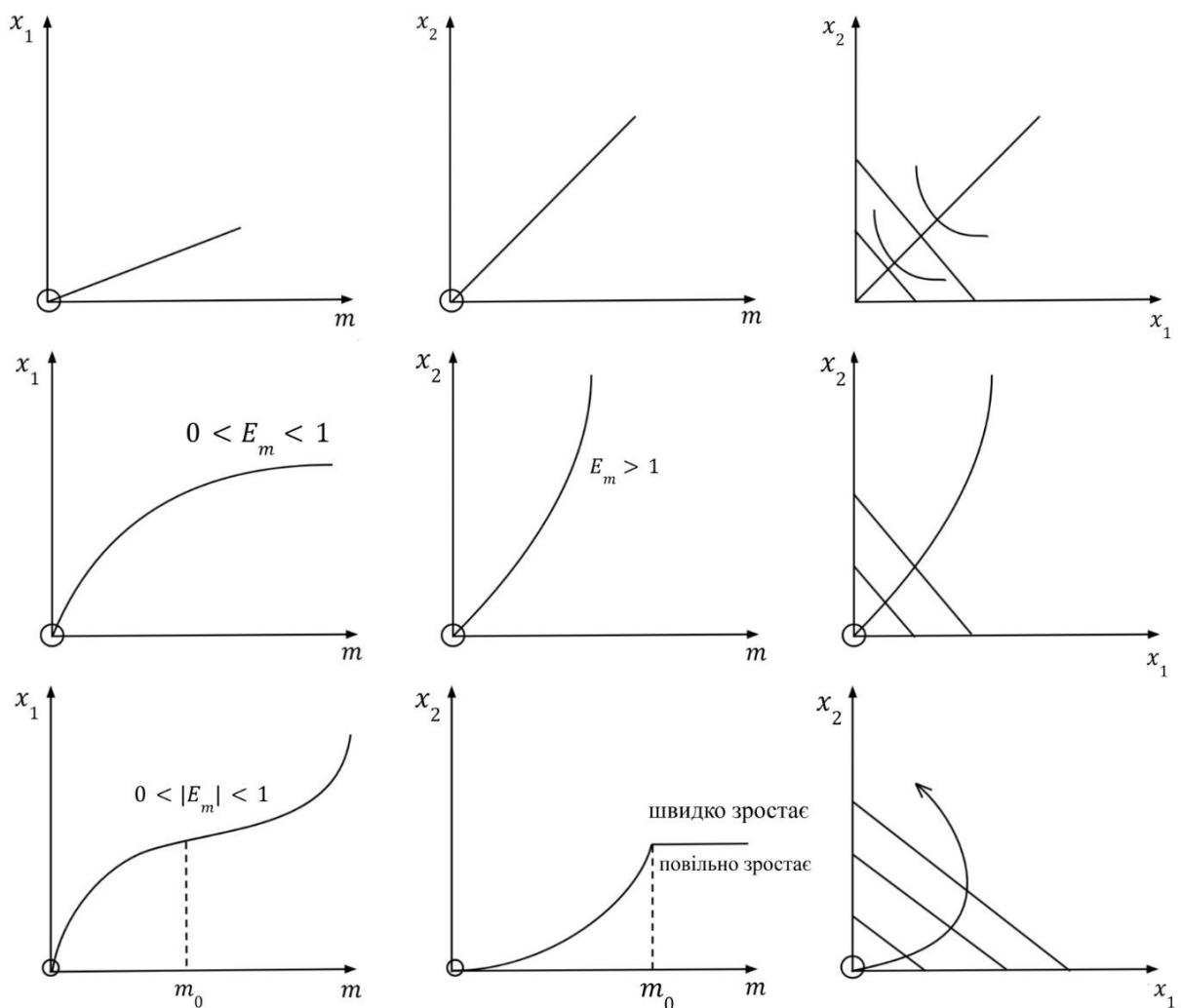


Мал. 8.3. Крива ціни-споживання (а);
товар x_2 - нижчої споживчої цінності (б)

- При деякому рівні доходу кількість одного з товарів x_1 починає змінюватися (мал. 8.3 б). Шлях розширення доходу може схилитись назад. В цьому випадку зростання доходу приводить до того, що

споживач бажає зменшити один з товарів. Наприклад, можливо висунути ідею, що коли мій дохід росте, я могу зменшити споживання картофеля. Такий товар можливо оцінити як *товар нижчої категорії*. Товар, на який попит в цієї ситуації зростає, називають *нормальним товаром*.

Означення. Кривою Енгеля i -го товару наз. крива $x_i(m) = x_i(p, m), i = 1, 2$, в площині (m, x_i) . У кожній із 3 розглянутих ситуацій зобразимо криві.



Мал. 8.5. Криві Енгеля для трьох випадків

У порівняльній статистиці поведінки споживача прийнято класифікацію товарів за Торнтвістом:

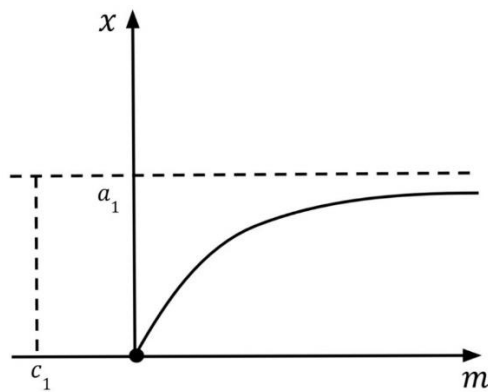
1. Товарами **першої необхідності** будемо називати товари, для яких рівняння Енгеля має вигляд:

$$x(m) = \frac{a_1 m}{m + c_1}, a_1 > 0, c_1 > 0.$$

$$x(m) = \frac{a_1(m+c_1)-a_1c_1}{m+c_1}; \quad x(m) = a_1 - \frac{a_1 m}{m+c_1},$$

асимптоти $m = c_1$ і $x = a_1$.

Товар *першої необхідності* за будь-якого рівня доходу купують у кількостях, менших ніж a_1 . Більш того, його можна придбати в деякій кількості за будь-якого рівня доходу.

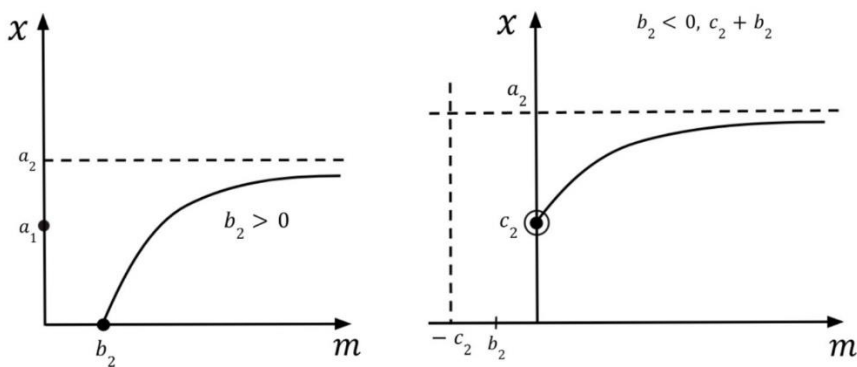


Мал. 8.6

2. Товаром *другої необхідності* називають товар, для кого графік кривої Енгеля описується функцією:

$$x(m) = \frac{a_2(m-b_2)}{m+c_2}, \quad m \geq b_2 \neq 0, a_2 > a_1, c_2 > 0;$$

$$x(m) = \frac{a_2(m+c_2)-a_2c_2-a_2b_2}{m+c_2}; \quad x(m) = a_2 - \frac{a_2(c_2+b_2)}{m+c_2}$$



Мал. 8.7

При $b_2 > 0$ товар другої необхідності можливо починати купувати з рівня доходу $m = b_2$ у кількостях, менших, ніж a_2 .

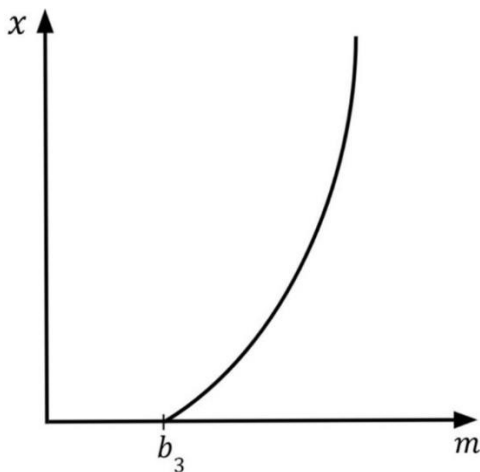
Якщо $b_2 < 0$ при досить малому доході можливо придбати кількість товару більшу, ніж фіксоване. число, але при будь-якому доході кількість товару менша ніж задане число a_2 .

2. Товаром **розкоші** будемо називати товар, криві Енгеля якого визначаються рівнянням

$$x(m) = \frac{a_3 m(m - b_3)}{m + c_3}, m \geq b_3 \geq b_2 (> 0), c_3 > 0, a_3 > 0$$

$$x(m) = \frac{a_3(m + c_3)(m - b_3) - a_3 c_3(m - b_3)}{m + c_3}; x(m) = a_3(m - b_3) - \frac{a_3 c_3(m + c_3) - a_3 b_3 c_3 - a_3 c_3^2}{m + c_3}$$

Предмети розкоші можна купувати з рівня доходу b_2 і в будь-яких кількостях.



Мал. 8.8

Задача Два товари x_1 і x_2 подані функцією корисності

$v(x_1, x_2) = a \ln x_1 + (b - a) \ln x_2 - b \ln(x_1 + b - a)$, $b > a > 0$, яка побудована для локально-ненасичених переваг. Встановити, якими ці товари є за Торнтістом.

Розв'язання. Розглянемо задачу споживача (1) і побудуємо для неї задачу на умовний екстремум вигляду (1) - (2)

$$v(x_1, x_2) \rightarrow x \in X$$

$$X = \{x \in R_+^2 : m - p_1 x_1 - p_2 x_2 \geq 0\}.$$

Лагранжа має вигляд:

Т.к $x_1 > 0, x_2 > 0$, то для стаціонарної точки виконані умови леми про умову (3), а отже, система (3)-(4) набуває вигляду:

$$\begin{cases} L'_x(x, \lambda) = 0, \\ \lambda(m - p_1 x_1 - p_2 x_2) = 0, \end{cases} \begin{cases} \frac{a}{x_1} - \frac{b}{x_1 + b - a} = \lambda p_1, \\ \frac{b - a}{x_2} = \lambda p_2, \\ \lambda(m - p_1 x_1 - p_2 x_2) = 0, \end{cases} \quad \lambda \neq 0.$$

Розв'язав систему, отримаємо:

$$x_1 = \frac{ma}{m + p_1 b},$$

$$x_2 = \frac{m(m + p_1(b - a))}{p_2(m + bp_1)}.$$

Причому, перший є товаром першої необхідності за Торнтвістом, а другий – предметом розкоші. Можливо зробити *вивід*: товар x_1 можна купувати в кількості, яка не перевищує a ; а товар x_2 – предмет розкоші – можливо купувати за будь-якого рівня доходів, причому в будь-якій кількості.

II. Реакція споживача на зміну цін. Нехай $x(p, m)$ – попит Маршала з $0 < m = \text{const}$ та постійних цінах $p_k, k = \overline{1, J}, k \neq j$, при цьому ціна p_j змінюється.

Означення. Множина точок у просторі R^n , що відповідає при зміні ціни p_j значенню попиту Маршалла $x(p, m)$ наз. **кривою «ціна j -го товару – споживання»**.



Мал. 8.8. Крива «ціна j -го товару – споживання»

При зростанні ціни товару p_1 змінюється нахил бюджетної множини. З геометричної точки зору в разі локально-ненасичених переваг та справедливості

закону Вальраса на малюнку зображено криву "ціна першого товару - споживання" і напрямок руху по ній.

Означення. Якщо зі зростанням ціни на даний товар попит Маршалла на цей товар зменшується, то товар називають *звичайним*.

Означення. Якщо зі зростанням ціни на товар попит Маршалла на даний товар збільшується, то товар називають *товаром Гіфена*.

Означення. *Малоцінним* називають товар, попит Маршалла на який зі зростанням доходу падає.

Означення. Функція попиту на j -й товар кількість j -го товару $x_j(p, m)$ називають *прямою функцією попиту*, якщо розглядати як функцію зміни ціни p_j .

Означення. Попит Маршала на j -й товар $x_j(p, m)$ при зміні ціни на k -й товар називають *перехресною функцією попиту* $k \neq j$, якщо розглядати як функцію зміни ціни p_k .

Приклад. Нехай функція корисності має вигляд

$$u(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_1 + x_2.$$

Знайти криві Енгеля, прямі та перехресні функції попиту:

$$\begin{cases} u(x_1, x_2) \rightarrow \max \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = m, \\ x \in R_+^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 + 1 - \lambda p_1 = 0, \\ x_1 + 1 - \lambda p_2 = 0, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = m, \end{cases}$$

звідки $\lambda = \frac{x_2^* + 1}{p_1}$ та $\lambda = \frac{x_1^* + 1}{p_2}$, тоді $x_2 = \frac{p_1}{p_2} (x_1^* + 1) - 1$.

Отримаємо $x_1^* = \frac{m - p_1 + p_2}{2p_1}$; $x_2^* = \frac{m - p_1 + p_2}{2p_2}$ функція попиту Маршалла.

Якщо зафіксувати $\bar{p}_1$ і $\bar{p}_2$, тоді $x_1^* = \frac{m - \bar{p}_1 + \bar{p}_2}{2\bar{p}_1}$; $x_2^* = \frac{m - \bar{p}_1 + \bar{p}_2}{2\bar{p}_2}$ – криві Енгеля.

Для отримання прямих і непрямих функцій корисності фіксуємо $\bar{m}$ і $\bar{p}_j$,

$j \neq i$, тоді отримаємо $x_1^* = \frac{\bar{m} - p_1 + \bar{p}_2}{2p_1}$; $x_2^* = \frac{\bar{m} - \bar{p}_1 + p_2}{2p_2}$ – прямі функції попиту, а

$x_1^* = \frac{\bar{m} - \bar{p}_1 + p_2}{2p_1}$; $x_2^* = \frac{\bar{m} - p_1 + \bar{p}_2}{2\bar{p}_2}$ перехресні функції попиту.

8.2. Основні теореми порівняльної статистики поведінки споживача

Зв'язок між функцією витрат та функцією попиту (Гікса) описуються лемою Шепарда.

Лема Шепарда. Нехай переваги споживача “ $\geq$ ”, задані на множині допустимих альтернатив $X_0 = R_+^n$ є локально ненасичуваними, а функція корисності, що відповідає $u \in C^2$ двічі неперервно-диференційована принаймні при $X_0 \setminus \partial X_0$.

Тоді функція витрат та попит Гікса зв'язані наступною тотожністю:

$$\frac{\partial e(p, u)}{\partial p_k} = h_k(p, u), k = \overline{1, n}.$$

Д о в е д е н н я: ■ доведемо теорему двома способами.

I Перший спосіб ґрунтується на теорії двоїстості та задачі оптимізації (3) - (4) для задачі споживача 2.

За означенням, $e(p, u) = ph(p, u)$ або $e(p, u) = \sum_{m=1}^n p_m h_m(p, u)$.

Продиференціюємо обидві частини по p_k . Так як $u \in C^2$, то на тій же множині $e(p, u), h(p, u) \in C^2$. Тоді

$$\frac{\partial e(p, u)}{\partial p_k} = h_k(p, u) + \sum_{m=1}^n p_m \frac{\partial h_m(p, u)}{\partial p_k}.$$

Доведемо, що $\sum_{m=1}^n p_m \frac{\partial h_m(p, u)}{\partial p_k} = 0$.

При розгляді задачі споживача 2 як задачі оптимізації отримаємо, що якщо переваги споживача є локально-ненасичуваними та $u \in C^2$, то задача оптимізації (1)-(2) є регулярною і виконуються умови леми 7.1 про умову (3), а з умови доповнюючої нежорсткості $\lambda \neq 0$. Функція Лагранжа для задачі споживача 2 має вигляд:

$$L(x, \lambda) = -px + \lambda(u(x) - U).$$

Умова (3) набуває вигляду: $L'_x(x, \lambda) = 0$, а умова додаткової нежорсткості $u(x) = U$. Складемо умову (3):

$$\begin{cases} -p_k + \lambda \frac{\partial u}{\partial x_m} = 0, \\ k = \overline{1, n}, \end{cases}$$

звідки

$$\sum_{m=1}^n p_m \frac{\partial h_m(p, u)}{\partial p_k} = \lambda \sum_{m=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_m} \frac{\partial h_m(p, u)}{\partial p_k}.$$

Оскільки виконані умови принципу Лагранжа і теореми Куна-Такера, то система (3) - (4) є необхідною і достатньою умовою максимуму задачі споживача 2, а отже, умови (3) - (4) виконані на розв'язанні цієї задачі, тобто коли

$x^* = h(p, u)$. Уздовж цього рішення маємо: $u(h(p, u)) \equiv U$. Продиференціюємо обидві частини по p_k :

$$\sum_{m=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_m} \frac{\partial h_m(p, u)}{\partial p_k} \equiv 0.$$

За наслідком із теореми двоїстості теорема доведена.

II варіант добутку леми є спосіб, заснований на використанні теореми про обвідну, де в якості цільової функції розглядається $F(x) = -px$ уздовж розв'язку задачі споживача 2 $x^* = h(p, u)$. В якості параметру розглянемо $p_k, k = \overline{1, n}$.

Тоді за теоремою про огинаючу

$$\frac{\partial F}{\partial p_k} = \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial p_k}.$$

Користуючись тим, що

$$\frac{\partial F}{\partial p_k} = -\frac{\partial e(p, u)}{\partial p_k}, \text{ а } \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial p_k} = -x_k = -h_k(p, u),$$

то маємо $\frac{\partial e(p, u)}{\partial p_k} = h_k(p, u)$, що і треба було довести. ■

Зауваження. З леми Шепарда випливає, що по функції витрат завжди можна побудувати функцію попиту Хікса.

Наслідок 8.1. Якщо виконані умови леми Шепарда, то справедливо

$$\frac{\partial h_m(p, u)}{\partial p_k} = \frac{\partial h_k(p, u)}{\partial p_j}, k, j = \overline{1, n}.$$

Наслідок 8.2. Якщо виконані умови леми Шепарда, то матриця $\frac{\partial h_m(p, u)}{\partial p_k}$ є від'ємно-визначеною.

Доведення 8.1. Так як виконані умови леми Шепарда, то $h, u, e \in C^2$ двічі неперервно-диференційовані принаймні при $X_0 \setminus \partial X_0$. З твердження леми Шепарда та теореми про рівність других мішаних похідних, маємо:

$$\frac{\partial h_k(p, u)}{\partial p_j} = \frac{\partial^2 e(p, u)}{\partial p_k \partial p_j} = \frac{\partial^2 e(p, u)}{\partial p_j \partial p_k} = \frac{\partial h_j(p, u)}{\partial p_k}$$

Доведення 8.2. З наслідку 8.1 випливає, що матриця $\left(\frac{\partial h_k(p, u)}{\partial p_j} \right)$ є

симетричною і дорівнює матриці $\left(\frac{\partial^2 e(p, u)}{\partial p_k \partial p_j} \right)_{k, j = \overline{1, n}}$.

Так як за властивістю функції витрат функція $e(p, u)$ є увігнутою функцією цін, то з математичного аналізу відомо, що матриця від'ємно-визначена.

Означення. Матриця $\left(\frac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_k \partial p_j}\right)_{k,j=\overline{1,n}}$ називається матрицею заміщення.

Означення. Якщо при зростанні ціни на j -й товар попит Хікса на k -ий товар зростає, то i -й товар називається **субститутом** по відношенню до k -го товару, а j -й і k -ий товар називають **взаємозамінними**.

Якщо попит Хікса є диференційованою функцією, $u \in C^2$, то визначення "субститутів" має вигляд:

$$\frac{\partial h_j(p,u)}{\partial p_k} > 0 \quad (j \neq k).$$

Суть визначення полягає в тому, що якщо ціна на k -ий товар зростає, то споживач прагне замінити його на інший товар.

Означення. Якщо при зростанні ціни на j -ий товар попит на k -ий товар падає, то j -ий товар називається **комплементом** щодо k -го, а j -ий і k -ий товари називають **взаємодоповнюючими**.

Якщо попит Хікса $h \in C^1$ диференційована функція, то для випадку досконалих комплементів справедливо

$$\frac{\partial h_j(p,u)}{\partial p_k} < 0 \quad (j \neq k).$$

Теорема (Тотожність Роя). Нехай переваги споживача " $\geq$ ", задані на множині допустимих альтернатив $X_0 = R_+^n$ є локально ненасичуваними, а функція корисності, що відповідає $u \in C^2$ двічі неперервно-диференційована принаймні при $X_0 \setminus \partial X_0$.

Тоді функція попиту і попит Хікса пов'язані наступною тотожністю:

$$-\frac{\frac{\partial v(p,m)}{\partial p_i}}{\frac{\partial v(p,m)}{\partial m}} = x_i(p, m),$$

якщо $\frac{\partial v(p,m)}{\partial m} \neq 0$.

Д о в е д е н н я: ■ Так як виконані умови теореми двоїстості, то за наслідком з неї:

$$v(p, e(p, u)) = u.$$

Продиференціюємо по p_j , тоді

$$\frac{\partial v(p,m)}{\partial p_i} + \frac{\partial v(p,e(p,u))}{\partial m} \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i} = 0, i = \overline{1,n}.$$

Покладемо $u = v(p, m)$. За наслідком із теореми двоїстості:

$$e(p, v(p, m)) = m, h(p, v(p, m)) = x(p, m),$$

$$\text{тоді } \frac{\partial v(p,m)}{\partial p_i} + \frac{\partial v(p,m)}{\partial m} x_i(p, m) \equiv 0.$$

Якщо $\frac{\partial v(p,m)}{\partial m} \neq 0$, то теорему доведено. ■

Теорема про рівняння Слуцького. Нехай виконано умови леми Шепарда.

Тоді:

$$\frac{\partial x_k}{\partial p_j} = \frac{\partial h_k}{\partial p_j} - \frac{\partial x_k}{\partial m} \cdot x_j, \quad k, j = \overline{1,n}.$$

Д о в е д е н н я: ■ Для доведення скористаємось тотожністю з теореми двоїстості

$$x(p, e(p, u)) = h(p, u).$$

Продиференціюємо цю тотожність по p_j :

$$\frac{\partial x_i(p, e(p, u))}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i}{\partial m} \cdot \frac{\partial e(p, u)}{\partial p_i} = \frac{\partial h_i(p, u)}{\partial p_j}.$$

Скористаємось лемою Шепарда

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_j} = h_j(p, u), j = \overline{1,n}.$$

Якщо $v(p, m) = u, e(p, u) = m$, тоді

$$\frac{\partial x_k}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i}{\partial m} \cdot h_i(p, u) = \frac{\partial h_k(p,u)}{\partial p_j}, \quad k, j = \overline{1,n}.$$

На оптимальному наборі задачі споживача (1) - (2) $h_i(p, u)$ замінюємо на

$x_i(p, m)$ (це впливає із заміни $v(p, m) = u$). Теорему доведено. ■

Зауваження. Рівняння Слуцького встановлює зв'язок між попитом Маршалла і попитом Гікса у своїх областях визначення.

Зауваження. Є два підходи для визначення реального доходу, які пов'язані з іменами англійського економіста Дж. Хікса і українського математика Є. Є. Слуцького. По Хіксу, різні рівні доходу, які забезпечують той самий рівень

корисності, дають змогу досягнути кривої байдужості, відображають рівень реального доходу.

За Слуцьким, лише той рівень доходу, який є достатнім для покупки того самого набору товарів, забезпечує і незмінний рівень доходу.

Розглянемо більш детально трактування Слуцького.

8.3. Геометричний зміст рівняння Слуцького. Різницевий аналог рівняння. Ефект заміщення. Ефект доходу

Знайдемо відповідь на питання: яким повинен бути дохід споживача, щоб зберігалась пропорція товарів попиту x^0 ?

Рівняння Слуцького розкладає змінення індивідуального попиту у разі зміни ціни хоча б на один товар на два окремих ефекти: *ефект заміщення* і *ефект доходу*:

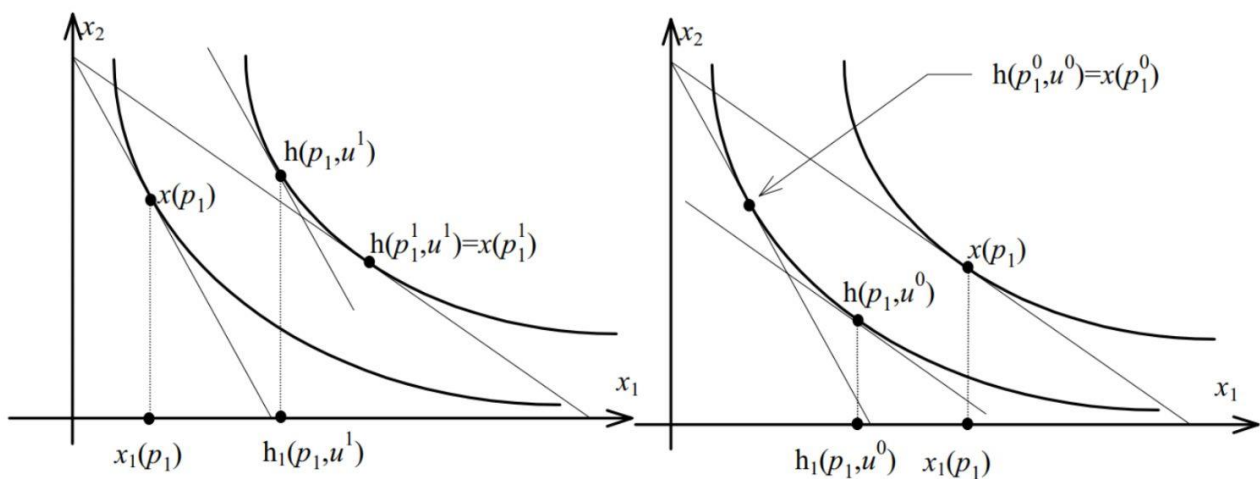
- зміна пропорцій заміщення одного товару іншим;
- зміна купівельної спроможності споживача.

Означення. Ефект зміни пропорцій заміщення одного товару іншим називають **ефектом заміщення**.

Означення. Ефект зміни попиту внаслідок купівельної спроможності споживача називають **ефектом доходу**.

Розглянемо геометричний сенс рівняння Слуцького при $n = 2, k, j = 1$.

Нехай є набір із двох товарів $x = (x_1, x_2)$. Ціна на товар x_2 не змінюється і дорівнює p_2 . Ціна на товар x_1 зменшується і стає p_1^0 $p_1 \rightarrow p_1^0$, $p_1 > p_1^0$.



Мал. 8.10

Мал. 8.10. Геометричний сенс рівняння Слуцького

Нехай попит споживача $x^1 = x(p_1, p_2, m)$. Попит споживача при зміні ціни на p_1^0 стає $x^0 = x(p_1^0, p_2, m)$. При переході від попиту x^1 до x^0 змінюється пропорція між кількістю придбаних товарів.

1 крок. Знайдемо таку точку x^2 , яка буде відповідати тій пропорції заміщення товарів, яка відповідає вектору (p_1^0, p_2, m) та одночасно належить бюджетній прямій, яка відповідає вектору (p_1, p_2, m) . Для цього через точку x^1 проведемо відрізок $p_1^0 x_1 + p_2 x_2 = m_0$, який паралельний відрізку прямої $p_1^0 x_1 + p_2 x_2 = m$. При цьому, оскільки ціна зменшилася $p_1 > p_1^0$, дохід $m_0 < m$.

На бюджетній кривій $p_1^0 x_1 + p_2 x_2 = m_0$ виберемо таку точку x^2 , яка є спільною з кривою байдужості, яка проходить через цю точку, і паралельна кривій байдужості, що проходить через точку x^0 .

Перехід з точки x^0 у точку x^2 є ефектом заміщення (мал. 8.10).

Геометрично ефект заміщення являє собою поворот кривої байдужості навколо точки x^1 і переносу її в точку x^2 так, щоб вона стала з точністю до нескінченно малого паралельною кривій байдужості, що проходить через x^0 .

Крок 2. Перехід від точки $x^2 = x(p_1^0, p_2, m_0)$ до точки $x^0 = x(p_1^0, p_2, m)$ є ефектом доходу.

Геометрично ефект доходу являє собою паралельний поворот нової кривої байдужості $p_1^0 x_1 + p_2 x_2 = m_0$ з точки x^2 в точку x^0 .

Розглянемо, як має змінитися дохід, щоб споживач при зміні ціни на перший товар міг придбати той самий споживчий набір. Віднімемо від $p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$ $p_1^0 x_1 + p_2 x_2 = m^0$, тоді отримуємо $\Delta m = x_1 \Delta p$.

Ефект заміщення Δx_1^s , тобто перехід від точки x^1 до точки x^2 дорівнює $\Delta x_1^s = x(p_1^0, p_2, m^0) - x(p_1, p_2, m)$.

Ефект доходу Δx_1^n , тобто перехід від точки x^2 до точки x^0 дорівнює $\Delta x_1^n = x(p_1^0, p_2, m) - x(p_1^0, p_2, m^0)$.

Загальне заміщення попиту, тобто перехід із x^1 в x^0

$$\Delta x_1 = \Delta x_1^s + \Delta x_1^n.$$

Загальне змінення попиту дорівнює сумі ефекту заміщення та ефекту доходу.

Ці рівняння називають **рівнянням Слуцького у формі абсолютних змінень**.

Отримаємо рівняння Слуцького у формі різницевих відносин. Розглянемо ефект доходу з протилежним знаком $\Delta x_1^m = -\Delta x_1^n$, звідки

$$\Delta x_1 = \Delta x_1^s - \Delta x_1^m.$$

Поділимо обидві частини рівності на Δp_1 , тоді

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1} = \frac{\Delta x_1^s}{\Delta p_1} - \frac{\Delta x_1^m}{\Delta p_1}.$$

Оскільки $\Delta m = x_1 \Delta p_1$, отримаємо

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1} = \frac{\Delta x_1^s}{\Delta p_1} - \frac{\Delta x_1^m}{\Delta m} \cdot x_1.$$

Дане рівняння є **рівнянням Слуцького у формі різницевих відношень**.

Якщо $x(p, m)$ та $h(p, m)$ є диференційованими функціями, то рівняння Слуцького в диференційованій формі при $k=j=1$ має вигляд

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{\partial h_1}{\partial p_1} - \frac{\partial x_1}{\partial m} \cdot x_1.$$

Проаналізуємо його.

Рівняння Слуцького показує, що при переході від точки x^1 до x^0 відбувається перехід

$$\begin{array}{ccccc} x(p_1, p_2, m) & \rightarrow & h(p_1^0, p_2, u) & \rightarrow & x(p_1^0, p_2, m) \\ \text{ефект заміщення} & & & & \text{ефект доходу} \end{array}$$

При цьому, якщо виконані умови теореми двоїстості, то допустимий рівень корисності U пов'язаний з бюджетною множиною

$$p_1^0 x_1 + p_2 x_2 = m^0, \text{ а не з множиною } p_1^0 x_1 + p_2 x_2 = m.$$

Перехід з точки $x(p_1, p_2, m)$ в точку $h(p_1^0, p_2, u)$ називають **компенсованим попитом**.

Відношення

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1} = \frac{x(p_1^0, p_2, m) - x(p_1, p_2, m)}{\Delta p_1}$$

показує зміну попиту при зміні ціни, коли дохід залишається незмінним (сукупність ефектів заміщення і доходу).

Відношення

$$\frac{\Delta x_1^s}{\Delta p_1} = \frac{x(p_1^0, p_2, m^0) - x(p_1, p_2, m)}{\Delta p_1}$$

показує зміну попиту при зміні ціни та компенсованій зміні доходу (ефект заміщення).

Відношення

$$\frac{\Delta x_1^m}{\Delta p_1} = \frac{x(p_1^0, p_2, m) - x(p_1, p_2, m^0)}{\Delta p_1}$$
 показує зміну попиту при зміні доходу,

якщо ціна залишається незмінною (з урахуванням, що домноження на x_1 маємо ефект доходу).

8.4. Основні рівняння теорії порівняльної статистики поведінки споживача в термінах функції корисності

Нехай переваги споживача “ $\geq$ ”, задані на множині допустимих альтернатив $X_0 = R_+^n$ є локально ненасичуваними, а функція корисності, що відповідає $u \in C^2$ двічі неперервно-диференційована принаймні при $X_0 \setminus \partial X_0$ і є ввігнутою.

Раніше отримано, що задача споживача 1 є регулярною умовою та необхідною і достатньою умовою екстремуму є умовою (3) - (4), яка набуває вигляду:

$$L'_x(x, \lambda) = 0,$$

$$p \cdot x = m$$

Для функції Лагранжа для задачі споживача 1

$$L(x, \lambda) = u(x) + (m - px)$$

складемо систему :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x(p, m))}{\partial x_k} - \lambda(p, m) \cdot p_k = 0, \\ p_1 x_1 + \dots + p_n x_n = m, \\ x_k = x_k(p, m). \end{cases} \quad (8.1)$$

I реакція споживача на зміну доходу

Продиференціюємо кожне з рівнянь системи (8.1) по m :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u(x(p,m))}{\partial x_k \partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j(p,m)}{\partial m} - \frac{\partial \lambda(p,m)}{\partial m} \cdot p_k = 0, \\ \sum_{k=1}^n p_k \cdot \frac{\partial x_k(p,m)}{\partial m} = 1, \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u(x(p,m))}{\partial x_k \partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j(p,m)}{\partial m} - \frac{\partial \lambda(p,m)}{\partial m} \cdot p_k = 0,$$

Будемо дивитися на отриману систему як на лінійно-однорідну систему відносно невідомих функцій $\frac{\partial \lambda(p,m)}{\partial m}$, $\frac{\partial x_k(p,m)}{\partial m}$, $k = \overline{1, n}$. Перепишемо систему так:

$$\begin{cases} 0 \cdot \frac{\partial \lambda(p,m)}{\partial m} - p_1 \frac{\partial x_1(p,m)}{\partial m} - \dots - p_n \frac{\partial x_n(p,m)}{\partial m} = -1, \\ -p_k \frac{\partial \lambda(p,m)}{\partial m} + \sum_{j=1}^n p_k \cdot \frac{\partial^2 u(x(p,m))}{\partial x_k \partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j(p,m)}{\partial m} = 0. \end{cases}$$

Введемо в розгляд матрицю Гесе для функції корисності:

$$u'' = \left(\frac{\partial^2 u(x(p,m))}{\partial x_k \partial x_j} \right)_{k,j=1}^n$$

Перепишемо останню систему в матричній формі, де p – вектор рядок, а x – вектор-стовпчик.

$$\begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p^T & u'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda(p,m)}{\partial m} \\ \frac{\partial x(p,m)}{\partial m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

Рівняння (8.2) називають **першим рівнянням порівняної статистики поведінки споживача**.

II реакція споживача на зміну цін

Продиференціюємо кожне з рівнянь системи (8.1) по p_j , $j = \overline{1, n}$. Отримаємо n систем, причому для фіксованого j маємо:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x(p,m))}{\partial x_k \partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_j} - \lambda(p,m) \frac{\partial p_k}{\partial p_j} = 0, \\ x_j(p,m) + \sum_{i=1}^n p_i \cdot \frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_j} = 0, \end{cases}$$

Будемо дивитися на отриману систему як на лінійно-однорідну систему відносно невідомих функцій $\frac{\partial \lambda(p,m)}{\partial p_j}, \frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_j}, i = \overline{1,n}$. Перепишемо систему так:

$$\begin{cases} 0 \cdot \frac{\partial \lambda(p,m)}{\partial p_j} - p_1 \frac{\partial x_1(p,m)}{\partial p_j} - \dots - p_n \frac{\partial x_n(p,m)}{\partial p_j} = x_j(p,m), \\ -p_k \frac{\partial \lambda(p,m)}{\partial p_j} + \sum_{i=1}^n p_k \cdot \frac{\partial^2 u(x(p,m))}{\partial x_k \partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_j} = \lambda(p,m) \delta_{kj}. \end{cases}$$

Якщо ввести в розгляд вектор-стовпець $\frac{\partial x(p,m)}{\partial p_j}$, то досліджувану систему в матричній формі можна записати так:

$$\begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p^T & u'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda(p,m)}{\partial p_j} \\ \frac{\partial x(p,m)}{\partial p_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_j(p,m) \\ \lambda(p,m) e_j \end{pmatrix},$$

e_j – одиничний орт-стовпчик.

Будемо вважати, що змінюються всі ціни $p_j, j = \overline{1,n}$. Введемо в розгляд вектор-рядок:

$$\frac{\partial \lambda(p,m)}{\partial m} = \left(\frac{\partial \lambda(p,m)}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial \lambda(p,m)}{\partial p_n} \right)$$

та матрицю розміру $n \times n$

$$\frac{\partial x(p,m)}{\partial p} = \left(\frac{\partial x_k(p,m)}{\partial p_j} \right)_{k,j=1}^n.$$

Тоді, об'єднуючи отримані останні рівняння в одно матричне, отримуємо:

$$\begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p^T & u'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda(p,m)}{\partial p} \\ \frac{\partial x(p,m)}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^T(p,m) \\ \lambda(p,m) E \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

Рівняння (8.3) називають **другим рівнянням порівняної статистики поведінки споживача**.

III реакція споживача на зміну цін при компенсованому попиті

Нехай споживач прагне придбати той самий набір товарів при зміні ціни. При цьому дохід стає ф-цією ціни $m = m(p)$ і має місце *ефект заміщення*. При цьому від попиту Маршалла $x(p,m)$ переходимо до попиту Хікса $h(p,u)$, функція

корисності стає непрямою ф-цією корисності $u = v(p, m)$, зміна функції корисності не відбувається $du = 0$, а зміна доходу має вигляд:

$$du = d\left(\sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i(p, m)\right) = \sum_{i=1}^n dp_i \cdot x_i(p, m) + \sum_{i=1}^n p_i \cdot dx_i(p, m) =$$

Споживач прагне придбати той самий товар, тому $dx_k(p, m) = 0$. Отримуємо

$$= \sum_{i=1}^n dp_i \cdot x_i(p, m)$$

Якщо змінюється тільки одна ціна p_j , то $dm = x_j(p, m)dp_j$. Систему (8.1)

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x(p, m))}{\partial x_k} - \lambda(p, m) \cdot p_k = 0, \\ p_1 x_1 + \dots + p_n x_n = m, \\ x_k = x_k(p, m). \end{cases} \quad (8.1)$$

Продиференціюємо по p_j систему (8.1) при наявності ефекта заміщення при зміні тільки ціни p_j . Отримуємо

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u(h(p, u))}{\partial x_k \partial x_i} \cdot \frac{\partial h_i(p, u)}{\partial p_j} - \left(\frac{\partial \lambda(p, m)}{\partial p_j}\right)_{comp} p_k - (\lambda(p, m))_{comp} \delta_{kj} = 0, \\ x_j(p, m) + \sum_{k=1}^n p_k \cdot \frac{\partial h_k(p, u)}{\partial p_j} = \frac{dm}{dp_j}, \end{cases}$$

при компенсованому попиті.

Відносно невідомих $\left(\frac{\partial \lambda(p, m)}{\partial p_j}\right)_{comp}$ та $\frac{\partial h(p, u)}{\partial p_j}$ отримаємо матричне рівняння

вигляду:

$$\begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p^T & u'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \lambda(p, m)}{\partial p_j}\right)_{comp} \\ \frac{\partial h(p, u)}{\partial p_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(\frac{\partial \lambda(p, m)}{\partial p_j}\right)_{comp} \cdot e_j \end{pmatrix}$$

За аналогією з пунктом II введемо в розгляд рядок $\left(\frac{\partial \lambda(p, m)}{\partial p}\right)_{comp}$ та матрицю

$\frac{\partial h(p, u)}{\partial p}$. Тоді, розглядаючи n останніх матричних рівнянь одночасно, отримаємо

рівняння:

$$\begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p^T & u'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda(p, m)}{\partial p} \\ \frac{\partial x(p, m)}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0^T \\ (\lambda(p, m))_{comp} \cdot E \end{pmatrix} \quad (8.4)$$

Рівняння (8.4) називають **третім рівнянням** порівняної статистики поведінки споживача.

Розглядаючи всі рівняння одночасно, отримуємо загальне рівняння теорії порівняної статистики поведінки споживача:

$$\begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p^T & u'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda(p,m)}{\partial m} & \frac{\partial \lambda(p,m)}{\partial p} & \left(\frac{\partial \lambda(p,m)}{\partial p} \right)_{comp} \\ \frac{\partial x(p,m)}{\partial m} & \frac{\partial x(p,m)}{\partial p} & \frac{\partial h(p,u)}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & x^T & 0^T \\ 0 & \lambda E & (\lambda)_{comp} \cdot E \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

8.5. Властивості матриці Гесе

Після отримання основного рівняння порівняної статистики поведінки споживача виникає питання про отримання розв'язку такого рівняння. Введемо деякі поняття.

Означення. Нехай переваги споживача “ $\geq$ ”, задані на множині допустимих альтернатив $X_0 = R_+^n$ є локально ненасичуваними, а функція корисності, що відповідає $u \in C^2$, двічі неперервно-диференційована принаймні при $X_0 \setminus \partial X_0$. Матрицю вигляду

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p^T & u'' \end{pmatrix}$$

називають матрицею Гесе функції корисності, оточеної цінами.

Розглянемо властивості матриці.

Властивості матриці Гесе

1. Якщо функція корисності $u = u(x)$ є $u \in C^2$ двічі неперервно-диференційована принаймні при $X_0 \setminus \partial X_0$ та є строго увігнутою, то матриця Гесе H є невиродженою.

Д о в е д е н н я: ■ Зробимо в матриці H найпростіше лінійне перетворення строк. Домножимо другий рядок матриці H на $p \cdot (u'')^{-1}$ зліва та складемо з першим. Матриця $(u'')^{-1}$ існує, так як $u = u(x)$ є $u \in C^2$ і строго ввігнутою. Тоді матриця H еквівалентна матриці H_1 :

$$H \sim H_1 = \begin{pmatrix} -p \cdot (u'')^{-1} p^T & 0 \\ -p^T & u'' \end{pmatrix},$$

визначник якої дорівнює визначнику матриці H .

Позначимо як $\mu = -(p \cdot (u'')^{-1} p^T)^{-1}$. Тоді визначник матриці H можливо порахувати наступним чином:

$$\det H = \det H_1 = \det(-p \cdot (u'')^{-1} p^T) \cdot \det u'' = \det \frac{1}{\mu} \det u'' \neq 0,$$

Так як $u = u(x) \in C^2$ і є строго ввігнутою, то матриці u'' та $(u'')^{-1}$ від'ємно визначені, відповідно квадратична форма $p \cdot (u'')^{-1} p^T, p > 0$ буде від'ємно визначена. Тоді $\mu > 0$ і H – невироджена матриця. ■

3. Про вигляд матриці, оберненої до матриці Гесе H .

Оскільки згідно з властивістю 1 визначник матриці H $\det H \neq 0$, тоді у відповідності з теорією лінійної алгебри існує обернена матриця H^{-1} .

Отримаємо її. Позначимо

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}; H^{-1} \cdot H = E_{n+1}; \dim A = 1 \times 1;$$

$$\dim B = 1 \times n; \dim C = n \times 1, \dim D = n \times n$$

Розв'яжемо рівняння

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p^T & u'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

яка в скалярному вигляді

$$\begin{cases} -B \cdot p^T = 1, \\ -D \cdot p^T = 0, \\ -Ap + B u'' = 0, \\ -Cp + D u'' = 0. \end{cases}$$

Домножимо третє та четверте рівняння на $(u'')^{-1}$, маємо:

$$\begin{cases} -B \cdot p^T = 1, \\ -D \cdot p^T = 0, \\ -Ap (u'')^{-1} + B = 0, \\ -Cp (u'')^{-1} + D = (u'')^{-1}. \end{cases}$$

Складемо третє рівняння з першим, четверте з другим, отримуємо

$$\begin{cases} -Ap(u'')^{-1} \cdot p^T = 1, \\ -Cp(u'')^{-1} \cdot p^T - (u'')^{-1}p^T = 0, \\ B = Ap(u'')^{-1}, \\ D = Cp(u'')^{-1} + (u'')^{-1}. \end{cases}$$

Тоді отримуємо розв'язок системи, який дозволяє записати вигляд оберненої матриці:

$$\begin{cases} A = \mu, \\ C = \mu(u'')^{-1} \cdot p^T, \\ B = \mu p(u'')^{-1}, \\ D = \mu(u'')^{-1}p^T p(u'')^{-1} + (u'')^{-1}. \end{cases}$$

Обернена матриця

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} \mu & \mu p(u'')^{-1} \\ \mu(u'')^{-1} \cdot p^T & \mu(u'')^{-1}p^T p(u'')^{-1} + (u'')^{-1} \end{pmatrix}.$$

8.6. Розв'язання загального рівняння порівняльної статистики поведінки споживача

В наступному параграфі ми отримали матрицю H^{-1} , яка дозволяє отримати розв'язок системи (8.5). Домножимо зліва (8.5) на H^{-1} , маємо:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial m} & \frac{\partial \lambda}{\partial p} & \left(\frac{\partial \lambda}{\partial p}\right)_{comp} \\ \frac{\partial x}{\partial m} & \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial h}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & \mu p(u'')^{-1} \\ \mu(u'')^{-1} \cdot p^T & \mu(u'')^{-1}p^T p(u'')^{-1} + (u'')^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & x^T & 0^T \\ 0 & \lambda E & (\lambda)_{comp} \cdot E \end{pmatrix}$$

В скалярній формі рівняння має вигляд:

$$\frac{\partial \lambda(p,m)}{\partial m} = -\mu, \quad (8.6)$$

$$\frac{\partial x(p,m)}{\partial m} = -\mu(u'')^{-1} \cdot p^T, \quad (8.7)$$

$$\frac{\partial \lambda(p,m)}{\partial p} = \mu x^T(p, m) + \mu \lambda(p, m) p(u'')^{-1}, \quad (8.8)$$

$$\frac{\partial x(p,m)}{\partial p} = \mu(u'')^{-1}p^T x^T(p, m) + \mu \lambda(p, m)(u'')^{-1}p^T p(u'')^{-1} + \lambda(p, m)(u'')^{-1}, \quad (8.9)$$

$$\left(\frac{\partial \lambda(p, m)}{\partial p}\right)_{comp} = \mu \lambda(p, m) p (u'')^{-1}, \quad (8.10)$$

$$\frac{\partial h(p, u)}{\partial p} = \mu (\lambda(p, m))_{comp} (u'')^{-1} p^T p (u'')^{-1} + (\lambda(p, m))_{comp} (u'')^{-1}. \quad (8.11)$$

8.7. Аналіз розв'язок загального рівняння порівнянної статистики поведінки споживача

Позначимо як $\mu = - (p \cdot (u'')^{-1} p^T)^{-1}$.

Так як $u = u(x) \in C^2$ і u є строго вогнутою, то матриці u'' та $(u'')^{-1}$ від'ємно визначені, тоді $\mu > 0$. Розглянемо детальніше кожне з рівнянь окремо.

I. Із рівняння (8.6), так як $\mu > 0$, отримаємо, що множник Лагранжа $\lambda(p, m)$ є функцією, що строго спадає за доходом. Такий вивід можливо зробити за рахунок того, що $\frac{\partial \lambda(p, m)}{\partial m} < 0$.

Розглянемо задачу споживача (1) як задачу оптимізації. За теоремою про огинаючу маємо:

$$\lambda(p, m) = \frac{\partial v(p, m)}{\partial m}.$$

Отже, гранична корисність споживача, яка обчислена на оптимальному наборі, є функцією, що спадає за доходом.

$$\lambda(p, m) = \frac{\partial v(p, m)}{\partial m} < 0.$$

II. Розглянемо рівняння (8.7). Домножимо обидві частини рівняння (8.7) на вектор $p > 0$ зліва:

$$p \cdot \frac{\partial x(p, m)}{\partial m} = -\mu p (u'')^{-1} \cdot p^T.$$

Звідки $p \cdot \frac{\partial x(p, m)}{\partial m} = -\mu (-\mu)^{-1}$, тоді

$$p \cdot \frac{\partial x(p, m)}{\partial m} = 1.$$

Це рівняння показує, що всі товари споживчого кошика не можуть бути *малоцінними*. Це випливає з того, що всі компоненти вектора $p > 0$ і неможливо, щоб

$$\frac{\partial x(p,m)}{\partial m} < 0.$$

III. Розглянемо рівняння (8.8). Домножимо обидві частини праворуч на вектор $p^T > 0$. Якщо вибір попиту відбувається на основі ефекту заміщення, то домножимо справа на p^T , маємо:

$$\frac{\partial h(p,u)}{\partial p} p^T = \mu(\lambda(p,m))_{comp} (u'')^{-1} p^T p (u'')^{-1} p^T + (\lambda(p,m))_{comp} (u'')^{-1} p^T.$$

Звідки з урахуванням $\mu = -(p \cdot (u'')^{-1} p^T)^{-1}$, перепишемо

$$\frac{\partial h(p,u)}{\partial p} p^T = -(\lambda(p,m))_{comp} (u'')^{-1} p^T + (\lambda(p,m))_{comp} (u'')^{-1} p^T = 0.$$

Тобто:

$$\frac{\partial h(p,u)}{\partial p} p^T = 0.$$

Якщо $u \in C^2$ і є строго ввігнутою, то за наслідком із леми Шепарда $\frac{\partial h(p,u)}{\partial p} < 0$.

Це значить, що **у** споживчому кошику не можуть бути всі товари компліментами, тобто такими, що взаємодоповнюють один одного, у споживчому кошику обов'язково є субститути, тобто взаємозамінні товари.

IV. Розглянемо рівняння (8.11). Якщо $u \in C^2$, то за теоремою про рівність других змішаних похідних, матриця u'' , а значить, і матриця $(u'')^{-1}$ є симетричною. Матриця $p^T p$ розміру $n \times n$ також є симетричною матрицею. Так як добуток симетричних матриць є симетричною матрицею, то матриця $\frac{\partial h(p,u)}{\partial p}$ являється симетричною.

Якщо, крім цього, $u = u(x) \in C^2$ і є строго ввігнутою, то матриця $(u'')^{-1}$ є від'ємно визначеною.

V. Нехай попит здійснюється на основі ефекту заміщення, тобто множник Лагранжа для попиту Маршалла та попиту Хікса збігаються:

$$\lambda(p,m) = (\lambda(p,m))_{comp}$$

Розглянемо (8.7), (8.9) та (8.11). Из (8.9) маємо:

$$\frac{\partial x(p,m)}{\partial m} = -\mu (u'')^{-1} \cdot p^T x^T(p,m) + \mu \lambda(p,m) (u'')^{-1} p^T p (u'')^{-1} + \lambda(p,m) (u'')^{-1}.$$

Користуючись (8.7), що $\frac{\partial x(p,m)}{\partial m} = -\mu (u'')^{-1} p^T$, маємо

$$\frac{\partial x(p,m)}{\partial p} = \frac{\partial h(p,u)}{\partial p} - \frac{\partial x(p,m)}{\partial m} \cdot x^T(p,m),$$

Звідки маємо рівняння Слуцького в матричній формі.

(8.9)

$$\left(\frac{\partial \lambda(p,m)}{\partial p} \right)_{comp} = \mu \lambda(p,m) p (u'')^{-1}, \quad (8.10)$$

$$\frac{\partial h(p,u)}{\partial p} = \mu (\lambda(p,m))_{comp} (u'')^{-1} p^T p (u'')^{-1} + (\lambda(p,m))_{comp} (u'')^{-1}. \quad (8.11)$$

VI. Домножимо останнє рівняння Слуцького справа на вектор $p^T > 0$, маємо:

$$\frac{\partial x(p,m)}{\partial p} p^T = \frac{\partial h(p,u)}{\partial p} p^T - \frac{\partial x(p,m)}{\partial m} \cdot x^T(p,m) p^T.$$

Звідки

$$\frac{\partial x(p,m)}{\partial p} p^T + \frac{\partial x(p,m)}{\partial m} \cdot m = 0$$

Запишемо в скалярній формі останнє рівняння:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_j(p,m)}{\partial p_k} p_k + \frac{\partial x_j(p,m)}{\partial m} \cdot m = 0, \\ j = \overline{1, n}, \end{array} \right.$$

Поділимо обидві частини рівності на x_j :

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial x_j(p,m)}{\partial p_k} \frac{p_k}{x_j} + \frac{\partial x_j(p,m)}{\partial m} \cdot \frac{m}{x_j} = 0,$$

звідки

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n \varepsilon_{p_k} [x_j(p,m)] + \varepsilon_m [x_j(p,m)] = 0, \\ j = \overline{1, n}, \end{array} \right.$$

Висновок: з загального рівняння порівняної статистики поведінки споживача випливає, що сума еластичності за всіма цінами та доходу попиту на оптимальному наборі задачі споживача для кожного товару дорівнює нулю.

Контрольні питання до теми 8

1. Реакція споживача на зміну доходу. Поняття кривої «дохід – споживання», криві Енгеля деякого товару.
2. Класифікація типів функцій попиту залежно від виду благ по Торнквісту. Приклади.
3. Реакція споживача на зміну цін. Поняття кривої «дохід-споживання», кривій попиту деякого товару. Звичайний, малоцінний товари і товар Гіффена, зв'язок між ними.
4. Лема Шепарда для теорії споживання і наслідки з неї.
5. Поняття матриці заміщення і її властивості. Взаємозамінні і взаємодоповнюючі товари (субститутути і компліменти).
6. Тотожність Роя. Теорема про рівняння Слуцького.
7. Теорема про рівняння Слуцького.
8. Ефект заміщення і ефект доходу. Геометричний сенс рівняння Слуцького.
9. Рівняння Слуцького у вигляді абсолютних змін, в диференціальній формі.
10. Реакція споживача на зміну доходу в термінах функції корисності.
11. Реакція споживача на зміну цін при компенсованому попиті в термінах функції корисності. Властивості матриці Гесе, оточеної цінами.
12. Побудова оберненої матриці для матриці Гесе.
13. Загальне рівняння порівняльної статистики поведінки споживача і його рішення.
14. Аналіз розв'язків загального рівняння порівняльної статистики поведінки споживача.

ТЕМА 9. Теорія виробника

9.1. Технологічна множина та її властивості

Розглянемо економіку із l благами. Для конкретної фірми природно розглядати частину цих товарів як фактори виробництва та частину – як продукцію, що випускається. Слід зазначити, що такий поділ досить умовний, оскільки фірма має свободу у виборі асортименту виробленої продукції та структури витрат. При описі технології розрізнятимемо випуск і витрати, представляючи останні як випуск зі знаком мінус. Для зручності представлення технології продукції, яка і не витрачається, і не випускається фірмою, відноситимемо до її випуску, причому обсяг виробництва цієї продукції вважаємо рівним 0. У принципі не виключена ситуація, в якій продукт, що виробляється фірмою, також споживається нею в процесі виробництва. В цьому випадку ми розглядатимемо лише чистий випуск цього товару, тобто його випуск мінус витрати.

Нехай число факторів виробництва дорівнює n , а число видів продукції, що випускається, дорівнює m (зазначимо, що $l = m + n$). Позначимо вектор витрат (за абсолютною величиною) через $x \in \mathbb{R}_+^n$, а обсяги випусків через $y \in \mathbb{R}_+^m$.

Вектор $(-x, y)$ називатимемо **вектором чистих випусків**. Сукупність всіх технологічно допустимих векторів чистих випусків $z = (-x, y)$ складає **технологічну множину**. Таким чином, в розглянутому випадку будь-яка технологічна множина – це підмножина $\mathbb{R}_-^n \times \mathbb{R}_+^m$.

Такий опис виробництва має загальний характер. При цьому можна не дотримуватися жорсткого поділу благ на продукти та фактори виробництва: одне й те ж саме благо може за однієї технології витрачатися, а за іншої – вироблятися. В цьому випадку $Z \subseteq \mathbb{R}^l$.

Опишемо *властивості технологічних множин*, у термінах яких зазвичай задається опис конкретних класів технологій.

1. Непорожність

Технологічна множина Z непорожня.

2. Ця властивість означає принципову можливість здійснення виробничої діяльності.

3. Замкненість

Технологічна множина Z замкнена.

Ця властивість скоріше технічна; вона означає, що технологічна множина містить свою межу, і границя будь-якої послідовності технологічно допустимих векторів чистого випуску також є технологічно допустимим вектором чистих випусків.

4. Свобода витрачання:

Якщо $z \in Z$ та $z' \leq z$, то $z' \in Z$.

Цю властивість можна інтерпретувати як наявність можливості виробляти той самий обсяг випуску, але з більшими витратами, чи менший випуск за тих самих витратах.

5. Відсутність «рогу достатку» (“no free lunch”)

$z \in Z$ і $z \geq 0 \Rightarrow z = 0$.

Ця властивість означає, що для виробництва продукції в додатній кількості необхідні витрати в ненульовому обсязі.

6. А) Незростаюча віддача від масштабу:

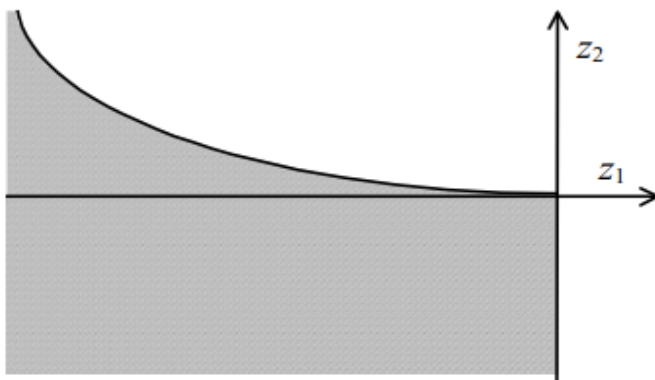
Якщо $z \in Z$ і $z' = \lambda z$, де $0 < \lambda < 1$, тоді $z' \in Z$.

Іноді цю властивість називають (не зовсім точно) спадною віддачею від масштабу. У разі двох благ, коли одне витрачається, а інше виробляється, спадна віддача означає, що (максимально можлива) середня продуктивність фактора, що витрачається, не зростає. Якщо за годину ви можете вирішити в кращому випадку 5 однотипних задач з мікроекономіки, то за дві години в умовах спадної віддачі ви не зможете вирішити більше 10 таких задач.

Б) Неспадна віддача від масштабу:

Якщо $z \in Z$ і $z' = \lambda z$, де $\lambda > 1$, тоді $z' \in Z$.

У разі двох товарів, коли один витрачається, а інший виробляється, незростаюча віддача означає, що (максимально можлива) середня продуктивність фактора, що витрачається, не зменшується.



Мал. 9.1. Технологічна множина з незростаючою віддачею від масштабу

В) Стала віддача від масштабу – ситуація, коли технологічна множина задовольняє умовам А) та Б) одночасно, тобто

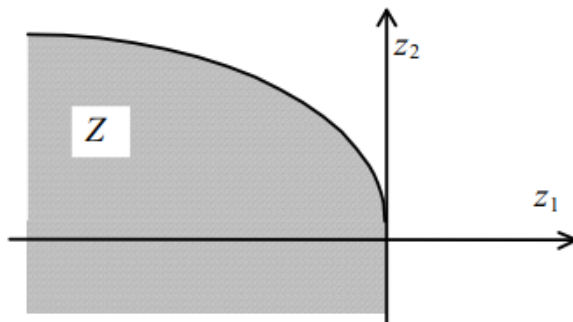
якщо $z \in Z$ і $z' = \lambda z$, тоді $z' \in Z \quad \forall \lambda > 0$.

Геометрично стала віддача від масштабу означає, що Z є конусом (можливо, що не містить 0). У разі двох товарів, коли один витрачається, а інший виробляється, стала віддача означає, що середня продуктивність фактора, що витрачається, не змінюється при зміні обсягу виробництва.

7. Опуклість:

Якщо $z', z'' \in Z$ і $0 < \alpha \leq 1$, то $\alpha z' + (1 - \alpha)z'' \in Z$.

Властивість опуклості означає можливість «змішувати» технології у будь-якій пропорції.



Мал. 9.2. Опукла технологічна множина зі спадною віддачею від масштабу

8. Необерненість

$z \in Z$ і $z \neq 0 \Rightarrow (-z) \notin Z$.

Нехай із кілограма сталі можна зробити 5 підшипників. Необерненість означає, що неможливо зробити з 5 підшипників кілограм сталі.

9. Адитивність

$z \in Z$ і $\bar{z} \in Z \Rightarrow z + \bar{z} \in Z$.

Властивість адитивності означає можливість комбінувати технології.

10. Допустимість бездіяльності:

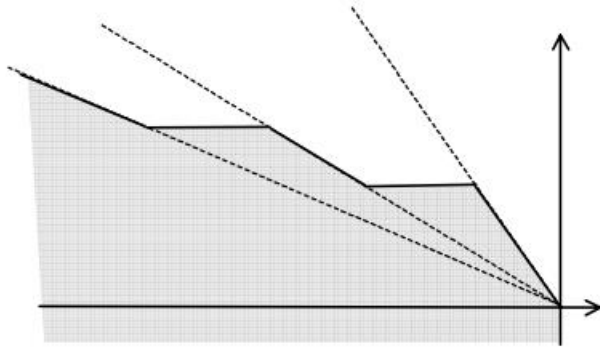
$0 \in Z$.

Теорема 9.1. 1) З незростаючої віддачі від масштабу та адитивності випливає опуклість;

2) з опуклості та допустимості бездіяльності випливає незростаюча віддача від масштабу (Обернене не завжди вірне: при незростаючій віддачі технологія може бути невиклою (див. мал. 2.3));

3) Множина Z має властивості адитивності та незростаючій віддачі від масштабу тоді й тільки тоді, коли вона – опуклий конус.

Д о в е д е н н я: Доведення залишається вправою. ■



Мал. 9.2. Невипукла технологічна множина з незростаючою віддачею від масштабу

При описі поведінки виробника зручно представляти його виробничу множину за допомогою деякої виробничої функції. Відмітимо, проте, що тут і далі ми говоритимемо тільки про "однопродуктові" технології, тобто $m = 1$.

Нехай X – проєкція технологічної множини Z на простір векторів витрат, тобто

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}: (-x, y) \in Z\}.$$

Означення 9.1. Функція $f: X \mapsto \mathbb{R}$, називається **виробничою функцією**, що подає технологію Z , якщо при кожному $x \in X$ число $f(x)$ є значенням наступної задачі:

$$y \rightarrow \max_{(-x, y) \in Z} y.$$

Теорема 9.2. Нехай для технологічної множини $Z \subseteq (-X) \times \mathbb{R}$ для будь-якого $x \in X$ множина $F(x) = \{y \mid (-x, y) \in Z\}$ є замкнутою та обмеженою зверху.

Тоді технологічна множина Z може бути подана виробничою функцією.

Д о в е д е н н я: Замкненість і обмеженість зверху множини $F(x)$ гарантує, що існує $f(x) \in F(x)$, такий що $f(x) \geq y \quad \forall y \in F(x)$. ■

Зауваження. Виконання умов цього твердження може гарантувати, наприклад, що якщо множина Z замкнена і має властивості незростаючої віддачі від масштабу та відсутності рогу достатку.

Теорема 9.3. Нехай множина Z замкнена і має властивість незростаючої віддачі від масштабу та відсутності рогу достатку.

Тоді для будь-якого $x \in X$ множина $F(x) = \{y \mid (-x, y) \in Z\}$ замкнена та обмежена зверху.

Д о в е д е н н я: ■ Замкненість множин $F(x)$ безпосередньо впливає із замкнутості Z .

Покажемо, що $F(x)$ обмежені зверху. Нехай це не так і при деякому $x \in X$ існує послідовність $\{y_N\}$, що необмежено зростає, така що $y_N \in F(x)$. Внаслідок незростаючої віддачі від масштабу $(-x/y_N, 1) \in Z$. Тому (внаслідок замкненості), $(0, 1) \in Z$, що суперечить відсутності рогу достатку. ■

Відзначимо також, що якщо технологічна множина Z задовольняє гіпотезі свободи витрачання та існує виробнича функція f , яка представляє її, то множина Z описується наступним співвідношенням:

$$Z = \{(-x, y) \mid y \leq f(x), x \in X\}.$$

Зауважимо, що якщо технологічна множина має вигляд

$$Z = \{(-x_1, -x_2, y) \in \mathbb{R}^3 \mid y \leq x_1^\alpha x_2^\beta\}, \quad \text{то виробнича функція, що її представляє, існує та є функцією Кобба-Дугласа } f(x) = x_1^\alpha x_2^\beta.$$

Цей приклад показує, що наведені вище умови, які гарантують існування виробничої функції, не є необхідними.

Встановимо тепер деякі взаємозв'язки між властивостями технологічної множини і виробничої функції, що її представляє.

Теорема 9.4. *Нехай технологічна множина Z представляється виробничою функцією $f(\cdot)$. Тоді вірно наступне*

- 1) *Якщо множина Z опукла, то функція $f(\cdot)$ ввігнута.*
- 2) *Якщо множина Z задовольняє гіпотезі свободи витрачання, то вірно і протилежне, тобто якщо функція $f(\cdot)$ є ввігнутою, то множина Z є опуклою.*
- 3) *Якщо Z опукла, то $f(\cdot)$ є неперервною всередині множини X .*
- 4) *Якщо множина Z має властивість свободи витрачання, то функція $f(\cdot)$ неспадна.*
- 5) *Якщо Z має властивість відсутності рогу достатку, то $f(0) \leq 0$.*
- 6) *Якщо множина Z має властивість допустимості бездіяльності, то $f(0) \geq 0$.*

Д о в е д е н н я: ■

- (1) Нехай $x_1, x_2 \in X$. Тоді $(-x_1, f(x_1)) \in Z$ і $(-x_2, f(x_2)) \in Z$, та $(-\alpha x_1 - (1 - \alpha)x_2, \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)) \in Z$ ($0 \leq \alpha \leq 1$) оскільки множина Z є опуклою. Тоді за означенням виробничої функції $\alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \leq f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2)$, що й означає увігнутість $f(x)$.
- (2) Оскільки множина Z має властивість свободи витрачання, то множина Z (з точністю до знака вектора витрат) збігається з її підграфіком. А підграфік увігнутої функції – опукла множина.

- (3) Доведений факт впливає з того, що увігнута функція є неперервною всередині її області визначення.
- (4) Нехай $x_2 \geq x_1$ ($x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^n$). Оскільки $(-x_1, f(x_1)) \in Z$, то за властивістю свободи витрачання $(-x_2, f(x_2)) \in Z$. Звідси, за визначенням виробничої функції $f(x_2) \geq f(x_1)$, тобто $f(\cdot)$ є неспадною функцією.
- (5) Нерівність $f(0) > 0$ суперечить припущенню про відсутність рогу достатку. Отже, $f(0) \leq 0$.
- (6) За припущенням про допустимість бездіяльності $(0, 0) \in Z$. Отже, за визначенням виробничої функції $f(0) \geq 0$. ■

У припущенні про існування виробничої функції властивості технології можна описувати безпосередньо у термінах цієї функції. Покажемо це на прикладі так званої еластичності масштабу.

Нехай виробнича функція диференційована. У точці x , де $f(x) > 0$ визначимо **локальну еластичність масштабу** $e(x)$ як:

$$e(x) = \left. \frac{df(\lambda x)}{d\lambda} \frac{\lambda}{f(x)} \right|_{\lambda=1}.$$

Якщо в деякій точці $e(x)$ дорівнює 1, то вважають, що в цій точці “постійна еластичність масштабу”, якщо більше 1 – то “зростаюча еластичність”, менше 1 – “спадна”. Наведене вище визначення можна переписати в наступному вигляді:

$$e(x) = \frac{\sum \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} x_i}{f(x)}.$$

Теорема 9.5. Нехай технологічна множина Z описується виробничою функцією $f(x)$ і в точці x виконується $f(x) > 0$. Тоді вірно наступне:

- 1) Якщо технологічна множина Z має властивість спадної віддачі від масштабу, то $e(x) \leq 1$.
- 2) Якщо технологічна множина Z має властивість зростаючої віддачі від масштабу, то $e(x) \geq 1$.
- 3) Якщо Z має властивість постійної віддачі від масштабу, то $e(x) = 1$.

Доведення: ■

- (1) Розглянемо послідовність $\{\lambda_n\}$ ($0 < \lambda_n < 1$), таку що $\lambda_n \rightarrow 1$.

Тоді $(-\lambda_n x, \lambda_n f(x)) \in Z$, звідки випливає, що $f(\lambda_n x) \geq \lambda_n f(x)$. Перепишемо цю нерівність у вигляді:

$$\frac{f(\lambda_n x) - f(x)}{\lambda_n - 1} \leq f(x).$$

Переходячи до границі, маємо

$$\left. \frac{df(\lambda x)}{d\lambda} \right|_{\lambda=1} = \sum \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} x_i \leq f(x).$$

Таким чином $e(x) \leq 1$.

(2) і (3) доводяться аналогічно. ■

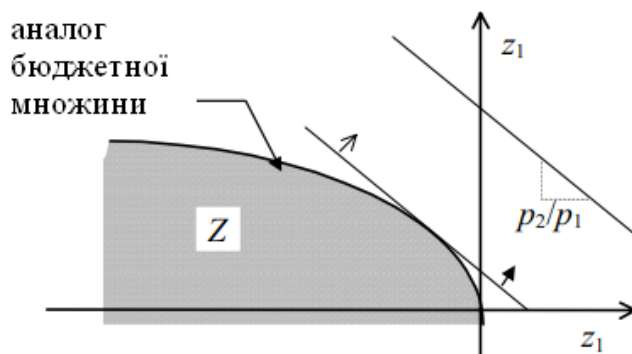
9.2. Задача виробника та її властивості

Гіпотеза, що лежить в основі моделі поведінки виробника, полягає в тому, що виробник вибирає технологічно допустимий вектор чистих випусків, що максимізує прибуток. У термінах чистих випусків **прибуток** є скалярним добутком вектора чистих випусків $z \in Z$ і вектора цін p (ціни скрізь надалі вважатимемо строго додатними $p \gg 0$): pz .

Отже, якщо виробник стикається з деяким вектором цін p , його вибір виявляється розв'язком наступної задачі математичного програмування:

Задача 3. $pz \rightarrow \max_{z \in Z}$.

Істотна відмінність задачі виробника (Задачі 3) від задачі споживача (Задачі 1) складається у тому, що множина її допустимих розв'язків Z , зазвичай, не обмежена. До того ж для технологій зі зростаючою віддачею існування технологічно допустимих пар із додатним прибутком призводить до існування допустимих розв'язків, що дають скільки завгодно великий прибуток.



Мал. 9.3. Ілюстрація розв'язання задачі виробника

Приклад (відсутності розв'язку). Нехай технологічна множина має вигляд $Z = \{(z_1, z_2) \mid z_1 \leq 0, z_2 + \alpha z_1 \leq 0\}$, ціни благ дорівнюють p_1, p_2 .

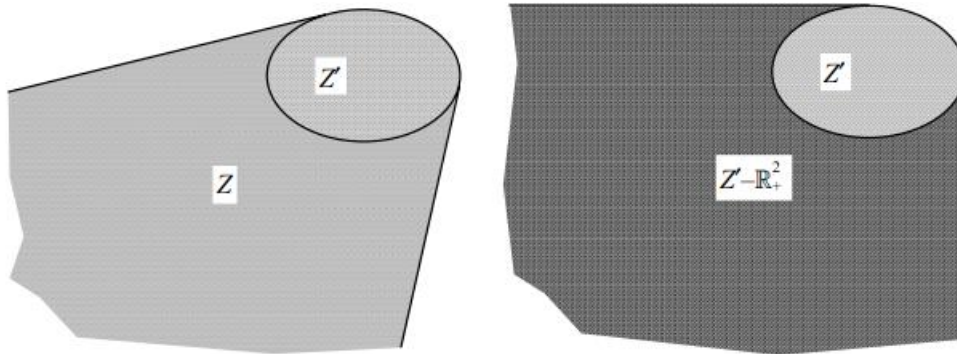
Якщо вибрати $z_2 = -\alpha z_1$, то прибуток буде дорівнювати $-(\alpha p_2 - p_1)z_1$. Тому якщо $\alpha p_2 > p_1$, то прибуток необмежений зверху, і розв'язок відсутній.

Якщо $\alpha p_2 < p_1$, то розв'язок єдиний — $z_1 = 0$ і $z_2 = 0$. Якщо $\alpha p_2 = p_1$, то розв'язанням задачі є будь-яка технологічно допустима пара (z_1, z_2) , така що $z_2 + \alpha z_1 = 0$.

Таким чином, існування розв'язку можна гарантувати лише за додаткових припущень щодо структури множини Z .

Нижче ми доведемо існування розв'язку при наступному (сильному) припущенні:

існує компактна множина Z' , така що $Z' \subset Z$ і $Z \subset Z' - \mathbb{R}_+^k$. ()*



Мал. 9.4. Ілюстрація припущення, що гарантує існування розв'язання задачі максимізації прибутку

Зауважимо (це легко побачити з наведених ілюстрацій мал. 9.5), що множина Z' , яка має зазначену властивість, якщо існує, то не однозначно визначається множиною Z .

Теорема 9.6. *Нехай виконується співвідношення (*). Тоді розв'язок Задачі 3 існує при будь-якому додатному векторі цін благ.*

Д о в е д е н н я: ■ Доведемо, що задача максимізації прибутку на Z зводиться до задачі максимізації прибутку на Z' .

Нехай $z \in Z$ і $z \notin Z'$. Тоді за умовою (*) знайдеться такий вектор $z' \in Z'$, що $z' - z \geq \neq 0$. Тим самим ми знайшли допустимий розв'язок, для якого прибуток більший, ніж для z . З цього випливає, що нам достатньо лише розглядати $z \in Z'$.

Оскільки Z' — компактна множина, а добуток pz неперервний по z , то за теоремою Вейерштраса розв'язок Задачі 3 на множині Z' завжди існує. ■

Означення 9.2. *Нехай розв'язок Задачі 3 існує і єдиний для всіх значень параметрів — додатних цін p . Тоді визначена наступна функція, яка ставить у відповідність кожному вектору цін розв'язок задачі при цих параметрах — вектор $z(p)$. Будемо називати її функцією пропозиції.*

Якщо розв'язок задачі при деяких значеннях параметрів неєдиний, то говорять про **відображення пропозиції**.

Означення 9.3. Функцією прибутку називають максимум цільової функції в Задачі 3:

$$\pi(p) = pz(p).$$

Функція прибутку $\pi(p) = pz(p)$ аналогічна непрямій функції корисності споживача, а функція пропозиції $z(p)$ – функції попиту. Доведемо деякі властивості цих функцій.

Теорема 9.7. (Властивості функції $\pi(p)$)

- 1) Функція $\pi(p)$ є однорідною 1-го степеня: $\pi(\lambda p) = \lambda \pi(p)$.
- 2) Функція $\pi(p)$ опукла.
- 3) Функція $\pi(p)$ неперервна на множині додатних цін.

Д о в е д е н н я: ■

- 1) Доведення однорідності залишаємо як вправу.
- 2) Доведемо опуклість $\pi(\cdot)$.

Нехай від деяких двох цін p, p' взята опукла комбінація – ціна

$$p_\alpha = \alpha p + (1 - \alpha)p' \quad (0 < \alpha < 1).$$

Випуклість функції $\pi(\cdot)$ означає, що $\pi(p_\alpha) \leq \alpha \pi(p) + (1 - \alpha)\pi(p')$.

З огляду на умови максимізації прибутку, маємо для $z_\alpha = z(p_\alpha)$:

$$pz_\alpha \leq \pi(p), \quad p'z_\alpha \leq \pi(p').$$

Складаючи ці нерівності з множниками α й $(1 - \alpha)$, відповідно, отримаємо необхідну нерівність.

Випуклість функції $\pi(\cdot)$ можна також довести, використовуючи той факт, що поточковий максимум сімейства опуклих функцій – опукла функція, помітивши, що $\pi(\cdot)$ є поточковим максимумом опуклих (лінійних) функцій (p, z) , $z \in Z$.

3) Неперервність функції $\pi(\cdot)$ на множині додатних цін впливає, наприклад, з того факту, що опукла функція неперервна всередині її області визначення (для додатних цін у цьому випадку). ■

Аналогом тотожності Роя є наступна **лема Хотелінга**.

Теорема 9.8. (лема Хотелінга) Нехай функція прибутку $\pi(\cdot)$ неперервно-диференційована у точці $p \gg 0$. Тоді

$$\frac{\partial \pi(p)}{\partial p_k} = z_k(p).$$

Д о в е д е н н я: ■

Нехай $p^* > 0$ — деякий вектор цін. Для доказу леми визначимо дві функції від ціни k -го блага p_k . Перша з них являє собою прибуток як функцію p_k за умови, що інші ціни зафіксовані на рівні p_{-k}^* , тобто

$$\pi^k(p_k) = \pi(p_{-k}^*, p_k) = \pi(p_1^*, \dots, p_{k-1}^*, p_k, p_{k+1}^*, \dots, p_l^*).$$

Позначивши $z^* = z(p^*)$, визначимо другу функцію як

$$g(p_k) = p_k z_k^* + \sum_{j \neq k} p_j^* z_j^*.$$

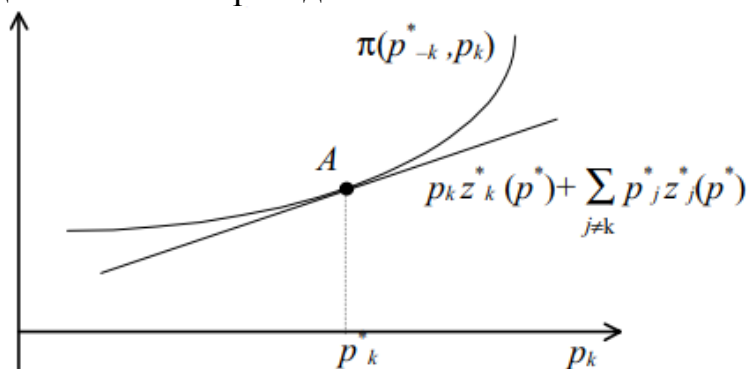
Вона є лінійною функцією по p_k .

За визначенням $\pi(p^*) = p^* z^*$, а це означає, що $\pi^k(p_k^*) = g(p_k^*)$. При інших цінах, взагалі кажучи, $z^* = z(p^*)$ може не давати максимум прибутку, тобто $\pi^k(p_k) \geq g(p_k)$.

Таким чином, пряма $g(p_k)$ є дотичною до графіка функції $\pi^k(p_k)$ в точці p_k^* (точка на Мал. 9.6). У точці дотику

$$\frac{\partial \pi^k(p_k^*)}{\partial p_k} = \frac{\partial g(p_k^*)}{\partial p_k},$$

що й означає справедливість леми. ■



Мал. 9. 5. Ілюстрація доведення леми Хотелінга

Теорема 9.9. (Властивості функції $z(p)$)

- 1) Функція $z(p)$ однорідна нульового ступеня.
- 2) Якщо множина Z строго опукла, то $z(p)$ – однозначна неперервна функція.
- 3) Якщо функція прибутку $\pi(\cdot)$ двічі неперервно диференційована, то матриця Якобі $M = \{\partial z_j / \partial p_k\}$ функції $z(p)$ симетрична та додатньо напіввизначена.

Доведення: ■

Доведення залишаємо як вправу. ■

Якщо технологічна множина може бути подана за допомогою виробничої функції, то задача виробника при додатній ціні продукції, що випускається, зводиться до наступної:

$$p_y f(x) - wx \rightarrow \max_{x \in X}$$

де p_y – ціна продукції, що випускається, x – кількість витрачених факторів виробництва, w – вектор цін факторів.

Нехай $x(p_y, w)$ – функція попиту на фактори виробництва при векторі цін (p_y, w) , $y(p_y, w)$ – функція пропозиції продукції при векторі цін (p_y, w) .

Зауважимо, що якщо $p_y > 0$, то $y(p_y, w) = f(x(p_y, w))$. У цьому контексті функція прибутку записується у такому вигляді:

$$\pi(p_y, w) = p_y f(x(p_y, w)) - wx(p_y, w).$$

Пояснимо зв'язки змінних цієї задачі з раніше розглянутими. Як не важко зрозуміти $p = (p_y, w)$ і $z(p) = (-x(p_y, w), y(p_y, w))$.

Як результати, доведені в цьому параграфі, так і ті, які будуть доведені згодом, можуть бути доведені і у разі, коли первинний об'єкт розгляду не технологічна множина, а виробнича функція.

9.3. Відновлення технологічної множини за функцією прибутку

Аналог концепції виявлених переваг для моделі виробника має досить простий вигляд. Нехай (p^i, z^i) ($i = 1, \dots, l$) – послідовність спостережень: за цінами p^i спостерігався вектор чистого випуску z^i . Якщо за якогось вектора цін p^i виконується $p^i z^j > p^i z^i$, то z^i не максимізує прибуток за цінами p^i . А це суперечить раціональності виробника.

Якщо ж $p^i z^j \leq p^i z^i \quad \forall i, j$, то послідовність спостережень (p^i, z^i) ($i = 1, \dots, l$) не суперечить гіпотезі максимізації прибутку. Технологічна множина, яка породжує такі вибори виробника, може бути побудована різними способами. Розглянемо деякі з них.

Найпростішим є варіант, коли технологічна множина, що при максимізації прибутку породжує такі вибори, складається лише з точок z^i , тобто

$$Z_1 = \{z^1, z^2, \dots, z^l\}.$$

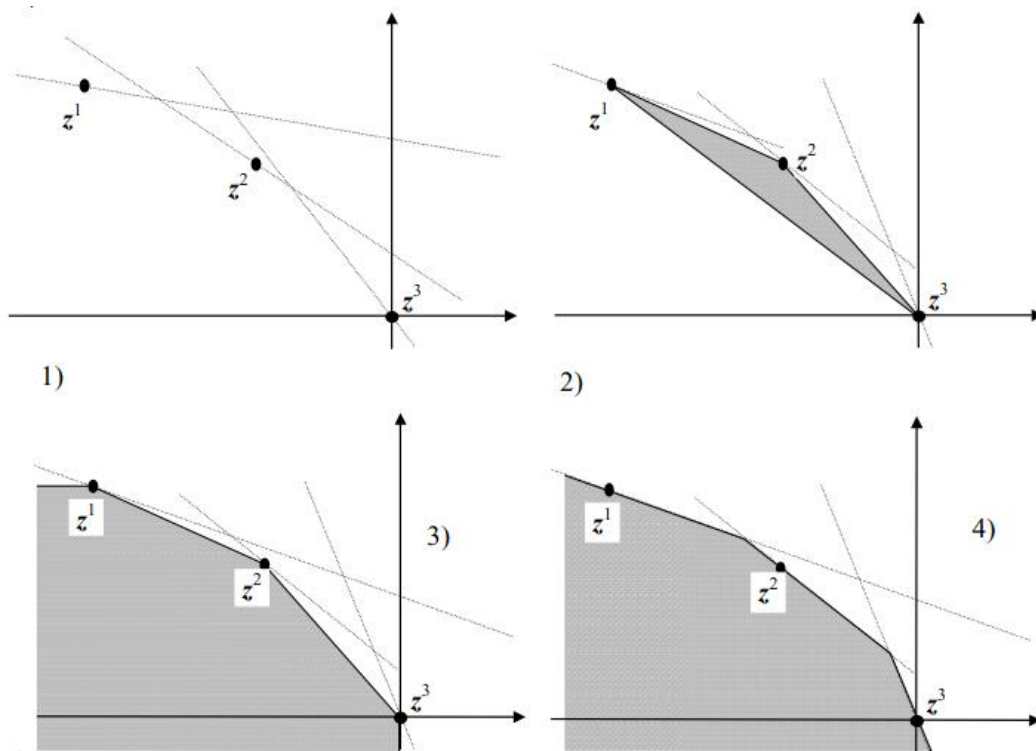
Також як технологічну множину Z можна взяти опуклу оболонку Z_2 точок $z^1, z^2, \dots, z^l$ (якщо ми припустимо, що технологічна множина опукла).

Якщо ми припустимо опуклість і свободу витрачання, то як Z можна взяти різницю між Z_2 і $\mathbb{R}_+^l$: $Z_3 = Z_2 - \mathbb{R}_+^l$. Ще один варіант – перетин напівпросторів, що відсікаються відповідними гіперплощинами:

$$Z_4 = \{z \mid p^i z \leq p^i z^i, i = 1, \dots, l\}.$$

Всі ці варіанти для випадку $l = 2$ зображені на наведених нижче малюнках. Прямі, намальовані пунктиром, зображують ціни.

Відмітимо, що $Z_1 \subset Z_2 \subset Z_3 \subset Z_4$.



Мал. 9.6. Можливі способи відновлення множини Z за наявними точками

Розглянемо деяку функцію цін $\pi(p)$. Виникають два питання: чи буде вона функцією прибутку раціонального виробника (тобто функцією, породженою максимізацією прибутку на деякій технологічній множині). І якщо це так, то як “відновити” множину Z або її характеристики.

Обговоримо спочатку другу проблему, тобто нехай відома функція прибутку $\pi(p)$ раціонального виробника.

Зауважимо, що існування вектора $z \in Z$, такого, що $pz > \pi(p)$ при деяких цінах p , суперечило б гіпотезі максимізації прибутку на Z . Об'єднаємо всі вектори z , що не суперечать цій умові за всіх невід'ємних p в множину

$$Z_\pi = \bigcap_{p \geq 0} \{z \mid pz \leq \pi(p)\} = \{z \mid pz \leq \pi(p) \forall p \geq 0\}.$$

Доречне питання: якщо ми побудуємо за деякою заданою виробничою множиною Z функцію прибутку, а потім по ній побудуємо множину Z_π , то чи збігатимуться множини Z і Z_π ? Позитивна відповідь на це питання дозволила б нам відновлювати технологічні множини за поведінкою, що спостерігається.

У загальному випадку Z і Z_π можуть не збігатися, оскільки описаний метод побудови Z_π породжує опуклі множини (перетин напівпросторів), що задовольняє властивості свободи витрачання (оскільки беруться тільки невід'ємні ціни), а технологічна множина Z може бути невіпуклою (як на

мал. 9.1) чи не задовольняти властивості свободи витрачання (як на мал. 9.1 та 9.2).

Теорема 9.10. Нехай технологічна множина Z замкнута, опукла та задовольняє властивості свободи витрачання. Тоді вона збігається з множиною Z_π , що нею породжується.

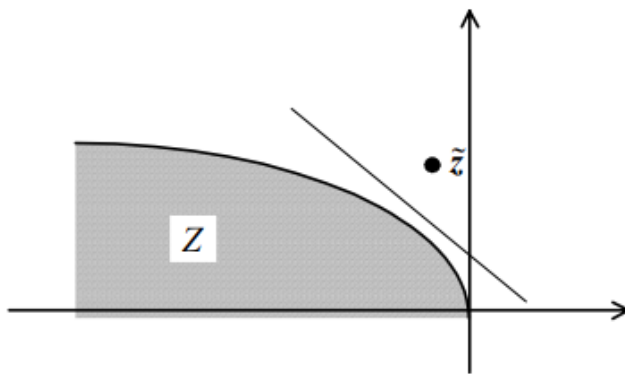
Д о в е д е н н я:

Ми доведемо це твердження, якщо покажемо, що $Z_\pi \subset Z$ і $Z \subset Z_\pi$.

1) ($Z \subset Z_\pi$) За визначенням функції прибутку для будь-якого $z \in Z$ маємо $pz \leq \pi(p) \forall p \geq 0$, і отже $z \in Z_\pi$.

2) ($Z_\pi \subset Z$) Нехай $\tilde{z} \notin Z$. За теоремою про віддільність для будь-якої опуклої замкненої множини і будь-якої точки, що не належить цій множині, існує гіперплощина, що відокремлює цю точку від цієї множини. У нашому випадку це означає, що існує вектор коефіцієнтів $\tilde{p}$, що не дорівнює нулю і такий, що

$$\tilde{p}\tilde{z} > \tilde{p}z \quad \forall z \in Z.$$



Мал. 9. 7. Ілюстрація віддільності

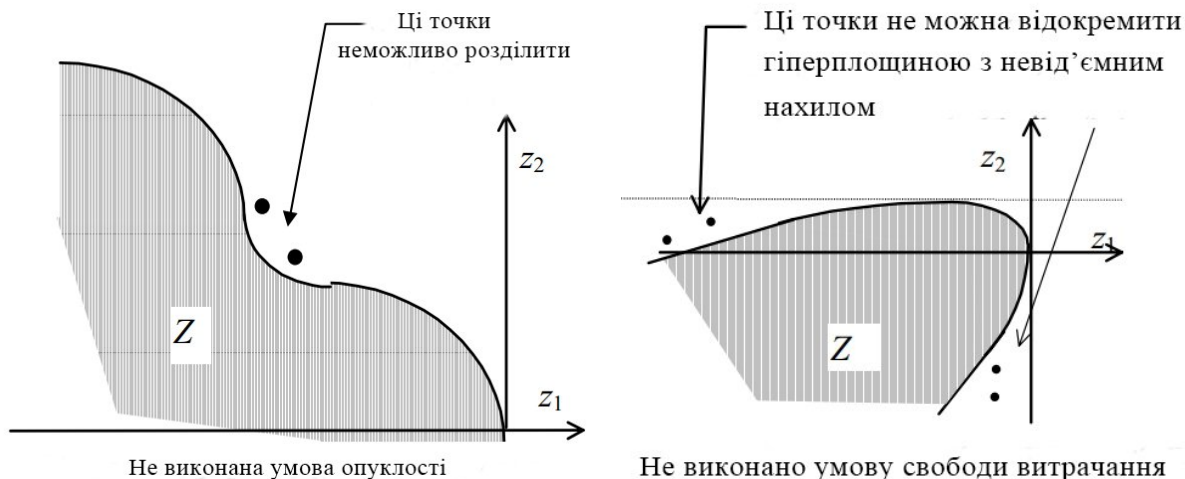
Покажемо, що $\tilde{p}$ може бути вектором цін. Для цього потрібно, щоб він не мав від'ємних компонентів.

Припустимо, що $\tilde{p}_i < 0$. Розглянемо деяку точку $z' \in Z$ та промінь $z' - \lambda e^i$ при $\lambda \geq 0$, де e^i — орт (i -та компонента дорівнює 1, а інші — нулі). Цей промінь цілком лежить у множині Z , так як Z задовольняє властивості свободи витрачання. Величина $\tilde{p}z' - \lambda\tilde{p}_i$ необмежена зверху. Це суперечить тому, що $\tilde{p}\tilde{z} > \tilde{p}z \quad \forall z \in Z$. Ми прийшли до суперечності, тому $\tilde{p} \geq 0$.

З того, що $\tilde{p} \geq 0$ та $\tilde{p}\tilde{z} > \tilde{p}z \quad \forall z \in Z$, випливає, що $\tilde{p}\tilde{z} > \pi(\tilde{p})$. Це означає, що $\tilde{z} \notin Z_\pi$. Ми показали, що будь-яка точка, яка не належить Z , не належить і Z_π . А; це означає, що $Z_\pi \subset Z$.

■

Нижче на малюнку наведені приклади ситуацій, коли при порушенні припущень теореми, її твердження ($Z_\pi \subset Z$) є неправильним і, таким чином, неможливо відновити Z на основі функції прибутку.



Мал. 9.9. Ситуації, коли неможливо відновити Z

Таким чином, ми показали, що при певній умові множини Z та Z_π збігаються.

В загальному випадку це неправильно і виконується лише включення $Z \subset Z_\pi$. Максимізація прибутку на Z_π породжує деяку функцію прибутку $\pi^*(p)$. Виникає питання про те, як зв'язані функції $\pi(p)$ та $\pi^*(p)$.

Покажемо, що ці функції збігаються навіть у тому випадку, коли Z та Z_π не збігаються, тобто Z_π породжує ту ж саму функцію прибутку.

Теорема 9.11. Нехай $\pi(p)$ – функція прибутку, побудована на основі технологічної множини Z , а $\pi^*(p)$ – функція прибутку, побудована на основі множини Z_π . Тоді $\pi(p) = \pi^*(p)$.

Доведення: ■ Якщо розширити допустиму множину в задачі максимізації, то значення цільової функції не зменшиться. Тому з $Z \subset Z_\pi$ випливає, що $\pi(p) \leq \pi^*(p)$.

Припустимо, що для деякого $\tilde{p}$ виявилось, що $\pi(\tilde{p}) < \pi^*(\tilde{p})$. За означенням $\pi^*(\tilde{p})$ існує $\tilde{z} \in Z_\pi$ таке, що $\tilde{p}\tilde{z} = \pi^*(\tilde{p})$, і, отже $\tilde{p}\tilde{z} > \pi(\tilde{p})$. Але існування такого $\tilde{z} \in Z_\pi$ суперечить означенню множини Z_π (як множини тих z , для яких прибуток pz не більше, ніж $\pi(p)$). ■

Обміркуємо тепер першу проблему: як для даної функції $\pi(p)$ та функції $z(p)$, виявити, є вони функцією прибутку та функцією пропозиції раціонального виробника?

Зрозуміло, що необхідними вимогами до функції прибутку є її опуклість, однорідність першого степеня та неперервність. Виявляється, що ці умови є достатніми й для того, щоб довільна функція $\pi(p)$ була функцією прибутку для деякої технологічної множини. В якості такої множини можна узяти розглянуту вище множину

$$Z_{\pi} = \{z | pz \leq \pi(p) \forall p \geq 0\}.$$

Наступний набір тверджень формалізує сказане вище:

- (1) Якщо функція $\pi(p)$ задовольняє набору необхідних умов для функції прибутку, то побудована на її основі функція $z(p)$ задовольняє набору необхідних умов для функції пропозиції виробника.
- (2) Якщо функція $z(p)$ задовольняє набору необхідних умов для функції пропозиції виробника, то побудована на її основі функція $\pi(p)$ задовольняє набору необхідних умов для функції прибутку.
- (3) Якщо функція $\pi(p)$ задовольняє набору необхідних умов для функції прибутку, то існує технологічна множина, яка породжує $\pi(p)$ як функцію прибутку.

Перерахуємо згадані необхідні умови. Для зручності доведення потребуємо додатково, що $\pi(p)$ є двічі неперервно диференційованою, а $z(p)$ – неперервно диференційованою.

Умови на функцію $\pi(p)$:

(A1) додатна однорідність першого степеня;

(A2) опуклість;

(A3) $\pi(\cdot)$ двічі неперервно диференційована (більш сильна умова, ніж потрібно).

Умови на функцію $z(p)$:

(B1) додатньо однорідна нульового степеня;

(B2) матриця похідних $M = \left\{ \frac{\partial z_j}{\partial p_k} \right\}$ існує і неперервна, додатньо напіввизначена та симетрична.

Сформулюємо наведений вище набір неформальних тверджень як теорему.

Теорема 9.12. (1) Нехай $z_k(p) = \frac{\partial \pi(p)}{\partial p_k}$,

де функція $\pi(p)$ задовольняє умовам (A1), (A2), (A3).

Тоді $z(p)$

$= (z_1(p), \dots, z_l(p))$ задовольняє умовам (B1), (B2) накладеним на функцію

попиту – пропозиції виробника.

(2) Нехай функція $z(p)$ задовольняє умовам (B1), (B2).

Тоді функція $\pi(p) = pz(p)$ задовольняє умовам (A1), (A2), (A3).

(3) Нехай функція $\pi(p)$ задовольняє умовам (A1), (A2), (A3). Тоді множина

$Z_{\pi} = \{z | pz \leq \pi(p) \forall p \geq 0\}$ є технологічною множиною, що породжує функцію прибутку $\pi(p)$

Д о в е д е н н я:

(1)(A1) - (A3) $\Rightarrow$ (B1) - (B2).

Оскільки функція $\pi(\mathbf{p})$ однорідна першого степеня, тоді її похідна $\mathbf{z}(\mathbf{p})$ однорідна нульового степеня.

Неперервна диференційованість $\mathbf{z}(\mathbf{p})$ випливає з двічі неперервної диференційованості функції $\pi(\mathbf{p})$.

Матриця других похідних будь-якої двічі неперервно диференційованої функції симетрична. Застосовуючи цю властивість до функції $\pi(\mathbf{p})$ маємо,

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial p_j \partial p_k} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial p_k \partial p_j}$$

Матриця других похідних функції $\pi(\mathbf{p})$ є матриця перших похідних функції $\mathbf{z}(\mathbf{p})$. Тому

$$\frac{\partial z_j}{\partial p_k} = \frac{\partial z_k}{\partial p_j^*}$$

Додатня напіввизначеність матриці других похідних (тобто $\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \square^n$) – необхідна (і достатня) ознака опуклості будь-якої двічі диференційованої функції.

(2)(B1) - (B2) $\Rightarrow$ (A1) - (A3).

Продиференціюємо $\pi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\mathbf{z}(\mathbf{p}) = \sum p_k z_k(\mathbf{p})$ по p_k :

$$\frac{\partial \pi(\mathbf{p})}{\partial p_k} = z_k(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^l p_i \frac{\partial z_i(\mathbf{p})}{\partial p_k} = z_k(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^l p_i \frac{\partial z_k(\mathbf{p})}{\partial p_i}.$$

Друга рівність – наслідок симетричності похідних функції $\mathbf{z}(\mathbf{p})$. Так як $\mathbf{z}(\mathbf{p})$ – додатньо однорідна нульового степеня, тоді за законом Ейлера :

$$\sum_{i=1}^l p_i \frac{\partial z_k(\mathbf{p})}{\partial p_i} = 0$$

Таким чином,

$$\frac{\partial \pi(\mathbf{p})}{\partial p_k} = z_k(\mathbf{p})$$

Далі відтворюємо доведення пункту (1) в зворотньому порядку.

(3) Позначимо

$$\mathbf{z}(\mathbf{p}) = \frac{\partial \pi(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} = \nabla \pi(\mathbf{p})$$

Так як $\pi(\mathbf{p})$ – однорідна першого степеня функція і $\mathbf{z}(\mathbf{p})$ – її градієнт, то за законом Ейлера

$$\pi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\mathbf{z}(\mathbf{p})$$

Оскільки $\mathbf{p}\mathbf{z}(\mathbf{p}) = \pi(\mathbf{p})$, тоді в точці $\mathbf{z}(\mathbf{p})$ при даних цінах $\mathbf{p}$ величина $\mathbf{p}\mathbf{z}(\mathbf{p})$ завжди не менше, ніж $\mathbf{p}\mathbf{z}$ в будь-якій точці $\mathbf{z} \in Z_\pi$. Якщо ми доведемо, що при будь-яких цінах $\mathbf{p} \geq 0$ точка $\mathbf{z}(\mathbf{p})$ належить множині $Z_\pi = \{\mathbf{z} | \mathbf{p}'\mathbf{z} \leq \pi(\mathbf{p}') \quad \forall \mathbf{p}' \geq 0\}$, то таким чином ми доведемо, що $\pi(\mathbf{p})$ – функція прибутку, відповідна технологічній множині Z_π .

Тобто нам потрібно показати, що $p'z(p) \leq \pi(p') \quad \forall p, p' \geq 0$.
Графік усякої опуклої неперервно диференційованої функції $\psi(x)$ лежить вище своєї дотичної, тобто виконується співвідношення:

$$\psi(x') \geq \psi(x) + \nabla \psi(x)(x' - x)$$

Так як $\pi(p)$ – опукла неперервна диференційована функція, тоді

$$\pi(p') \geq \pi(p) + \nabla \pi(p)(p' - p)$$

Оскільки $\nabla \pi(p) = z(p)$ та $pz(p) = \pi(p)$, отримуємо потрібне для доведення твердження співвідношення

$$\pi(p') \geq \pi(p) + z(p)(p' - p) = z(p)p'. \blacksquare$$

9.4. Функція витрат та її властивості

Отже, ми вивчили основні властивості моделі раціональної поведінки виробника. З причин, які стануть зрозумілими з подальшого, в мікроекономіці затвердилася традиція описувати технологію за допомогою функції витрат. В цьому параграфі наведемо відповідні результати відносно властивостей функцій витрат та зв'язок цього поняття з розглянутими вище.

Нехай, як раніше, y – вектор випуску, а x – вектор витрат на її виробництво.

Означення 9.4. Для кожного вектору випуску y множина витрат $V(y)$ – це множина векторів витрат, забезпечуючих цей випуск при даній технологічній множині Z :

$$V(y) = \{x | (-x, y) \in Z\}.$$

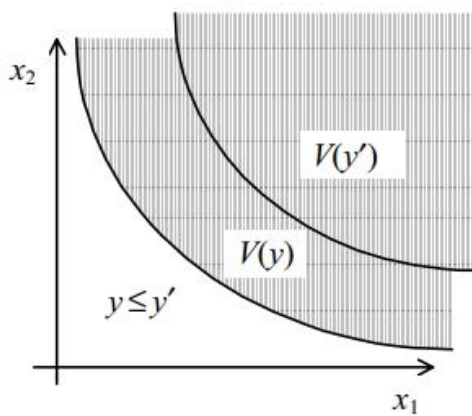
З гаданих властивостей Z випливають деякі властивості множини $V(y)$ і відповідного відображення $V(\cdot)$:

1. З опуклості Z випливає опуклість множин $V(y)$:

2. З свободи витрачання для Z випливає свобода витрачання для множин $V(y)$:

$$x \in V(y), x' \geq x \Rightarrow x' \in V(y).$$

Зауважимо, що обернене, взагалі кажучи, невірне.



Мал. 9.10. Монотонність $V(\cdot)$

Зазвичай припускається монотонність відображення $V(\cdot)$, тобто вкладеність множин $V(\cdot)$:

$$y \leq y' \Rightarrow V(y') \subset V(y)$$

Множину $V(y)$, як і Z , в припущенні свободи витрачання можна будувати за виробничою функцією:

$$V(y) = \{x \mid f(x) \geq y\}.$$

Обернено, у випадку однопродуктової технології ($y \in \square$), можна визначити на основі $V(\cdot)$ виробничу функцію наступним чином:

$$f(x) = \max_{y \in V(x)} y.$$

Теорема 9.13

Якщо відображення $V(\cdot)$ монотонно, то відповідна виробнича функція монотонна, а якщо, до цього ж, множини $V(y)$ опуклі, то вона квазіувігнута.

Доведення: ■

Доведення цього твердження залишається читачу в якості вправи. ■

В термінах множин $V(y)$ можна визначити ізокванти для даної технології:

$$Q(y) = \{x \in V(y) \mid x \notin V(y'), \forall y' > y\}.$$

Це множина таких векторів витрат x , які дозволяють виробити y , але не дозволяють виробити більше y . Таким чином, ізокванта $Q(y)$ – межа множини $V(y)$.

Наприклад, для виробничої функції Кобба-Дугласа з двома видами витрат маємо

$$Z = \{(-x_1, -x_2, y) \mid y \leq x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}\}$$

$$V(y) = \{(x_1, x_2) \mid y \leq x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}\}$$

$$Q(y) = \{(x_1, x_2) \mid y = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}\}$$

Нагадаємо, що через w ми позначаємо ціни витрачаємих ресурсів (частина загального вектора цін p , яка відповідає $-x$).

За аналогією з Задачою 3 розглянемо наступну задачу.

Задача 4.

$$\begin{aligned} wx &\rightarrow \min \\ x &\in V(y) \end{aligned}$$

Означення 9.5. Функція витрат $c(w, y)$ – значення цільової функції Задачі 4 для кожного вектора цін w та випуску y , вказує мінімальну величину витрат, при яких згідно з даною технологією можна виробити y .

Якщо технологія задана виробничою функцією $y \leq f(x)$, то Задача 4 приймає вид:

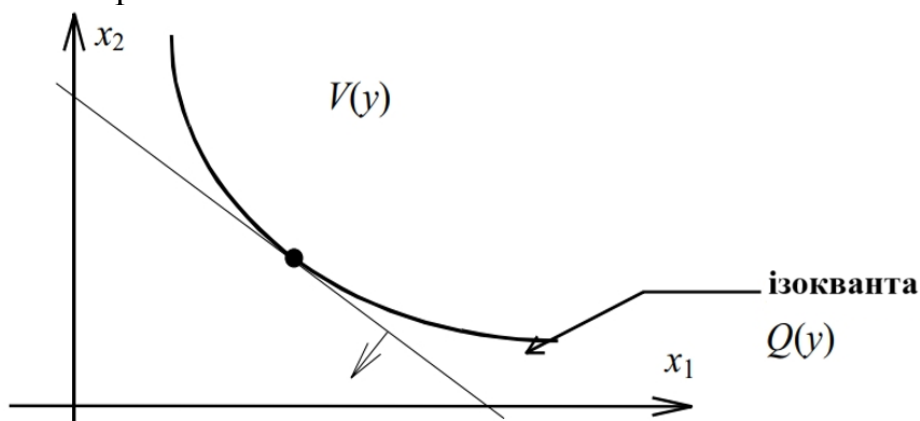
$$\begin{aligned} wx &\rightarrow \min \\ y &= f(x). \end{aligned}$$

Теорема 9.14. (Властивості функції витрат $c(w, y)$ опуклої технології)

- 1) $c(w, y)$ додатньо однорідна першого степеня за цінами факторів
 $c(\lambda w, y) = \lambda c(w, y)$.
- 2) Монотонна за цінами факторів та випуску.
- 3) Увігнута за цінами (поточковий максимум увігнутих функцій).
- 4) Неперервна.

Д о в е д е н н я: ■

Доведення цього твердження аналогічно наведеним раніше і залишається читачу в якості вправи. ■



Малюнок 9.11. Побудова функції витрат

Надалі нам знадобиться також поняття функції умовного попиту.

Означення 9.6. Функція умовного попиту на фактори виробництва $x(w, y)$ є оптимальним рішенням Задачі 4.

Зауважимо, що функція витрат та функція умовного попиту на фактори виробництва визначені для будь-якої технології (непорожньої множини Z).

Теорема 9.15. (Властивості функції $x(w, y)$).

- 1) Функція $x(w, y)$ однорідна першого степеня як функція цін факторів виробництва.
- 2) Якщо множина $V(y)$ сурово опукла, тоді $x(w, y)$ – однозначна неперервна функція w .

Д о в е д е н н я: ■

Доведення цього твердження аналогічно наведеним раніше і залишається читачу в якості вправи. ■

Якщо крім того функція витрат диференційовна, тоді справедлива *лема Шеннарда*:

Теорема 9.16.

Нехай $\mathbf{x}^*$ – вектор умовного попиту на фактори виробництва при цінах $\mathbf{w}^*$, коли потрібно виробити $\mathbf{y}$. Тоді

$$\frac{\partial c(\mathbf{w}^*, \mathbf{y})}{\partial w_i} = x_i(\mathbf{w}^*, \mathbf{y}) = x_i^*, \text{ або}$$

$$\nabla c(\mathbf{w}^*, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^*.$$

Д о в е д е н н я: ■

Введемо функцію $g(\mathbf{w}) = c(\mathbf{w}, \mathbf{y}) - \mathbf{w}\mathbf{x}^*$.

За означенням функції витрат функція $g(\mathbf{w})$ досягає максимуму в точці $\mathbf{w}^*$:

$$g(\mathbf{w}) \leq 0$$

$$g(\mathbf{w}^*) = 0$$

Якщо функція витрат диференційовна, тоді g також диференційовна. Якщо точка оптимуму внутрішня ($\mathbf{w}^* > \mathbf{0}$), тоді за умовою першого порядку максимуму градієнт її повинен бути рівним нулю:

$$\nabla g(\mathbf{w}^*) = 0 \Leftrightarrow \nabla c(\mathbf{w}^*, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^*. \blacksquare$$

Побудуємо за функцієк виробництва наступну множину:

$$V_c(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{w}\mathbf{x} \geq c(\mathbf{w}, \mathbf{y}) \ \forall \mathbf{w} \geq \mathbf{0}\}.$$

При будь-якому векторі випуску $\mathbf{y}$ ця множина є опуклою за побудовою. Так як ціни невід'ємні, то виконується також наступна властивість, яку можна називати *властивістю свободи витрачання ресурсів*:

$$V_c(\mathbf{y}) = V_c(\mathbf{y}) + \square_+^n, \quad (*)$$

Тобто якщо $\mathbf{x}$ належить множині $V_c(\mathbf{y})$ та $\mathbf{x}' \geq \mathbf{x}$, то $\mathbf{x}'$ також належить множині $V_c(\mathbf{y})$.

Зрозуміло, що множина необхідних витрат $V(\mathbf{y})$ та $V_c(\mathbf{y})$ може не збігатися, якщо сама вихідна множина допустимих витрат $V(\mathbf{y})$ не є опуклою або монотонною.

Теорема 9.17. Нехай $V(\mathbf{y})$ опукла і монотонна (що задовольняє властивості $(*)$) множина. Тоді $V(\mathbf{y}) = V_c(\mathbf{y})$

Д о в е д е н н я:

Доведення цього твердження залишається читачу в якості вправи. ■

Зауважимо, що навіть якщо множини $V(\mathbf{y})$ та $V_c(\mathbf{y})$ не співпадають одна з одною, ця відмінність не є суттєвою з точки зору опису поведінки виробника, оскільки $V_c(\mathbf{y})$ породжує ту ж саму функцію витрат, що й $V(\mathbf{y})$.

Теорема 9.18

Нехай $c^*(w, y)$ – розв’язок задачі

$$wx \rightarrow \min_x \\ x \in V_c(y).$$

Тоді $c^*(w, y) = c(w, y)$.

Доведення: ■

Доведення цього твердження залишається читачу в якості вправи. ■

Зауважимо, що ці два твердження – аналоги відповідних результатів відносно зв’язку Z та Z_π , $\pi(p)$ та $\pi^*(p)$.

Це твердження обґрунтовує можливість отримання деякої множини допустимих витрат $V_c(y)$, яка породжує функцію витрат $c(w, y)$. Але збіг $V(y)$ та $V_c(y)$ можливий тільки в тому випадку, коли $V(y)$ задовольняє припущенням опуклості та монотонності. Практичний спосіб відновлення V читач може сконструювати сам.

На закінчення вкажемо на зв’язок між двома типами кривих: ізоквантами в просторі можливих витрат, визначеними рівняннями типу $f(x) = y$ при різних y , та ізокостами в просторі можливих цін, визначеними формулами типу $c(w, y) = \text{const}$.

Для наочності розглянемо випадок двох виробничих факторів. Тоді при монотонній технології можна розглядати ізокванту як функцію $x_2(x_1)$, а ізокошту – як функцію $w_2(w_1)$. Ці залежності задаються відповідними співвідношеннями, які визначають їх як неявні функції.

З означення ізокошти маємо

$$c(w_1 + dw_1, w_2 + dw_2, y) = c(w_1, w_2, y) \quad \text{або} \\ dw_1 \frac{\partial c}{\partial w_1} + dw_2 \frac{\partial c}{\partial w_2} = 0$$

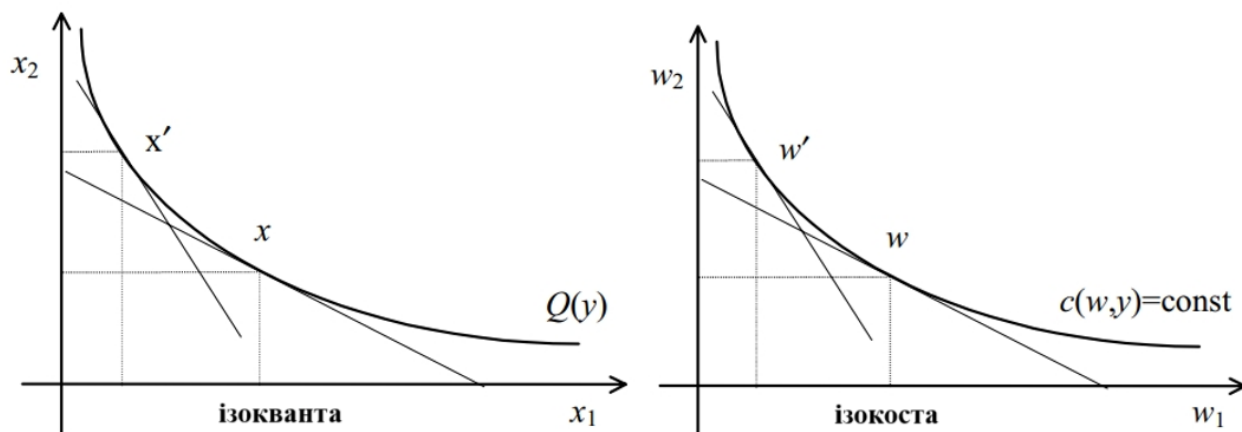
Тоді

$$\frac{dw_2}{dw_1} = - \frac{\frac{\partial c}{\partial w_1}(w, y)}{\frac{\partial c}{\partial w_2}(w, y)} = - \frac{x_1(w, y)}{x_2(w, y)} = - \frac{x_1^*}{x_2^*}$$

За аналогією отримуємо співвідношення для ізокванти

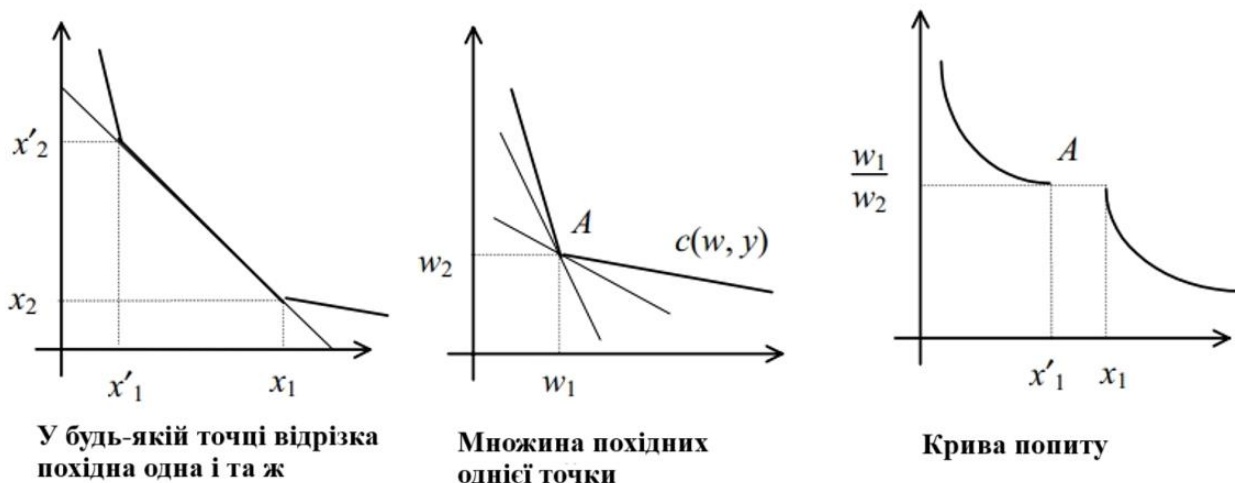
$$\frac{dx_2}{dx_1} = - \frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}}{\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}} = - \frac{w_1}{w_2}.$$

Ці співвідношення двоїстості показують, що чим більша кривизна ізокошти, тим менша кривизна ізокванти, та навпаки. Справді, на графіках видно, що якщо дві точки, $\tilde{x}$ та $\bar{x}$ одного ж графіка далекі одна від одної, а їх дотичні близькі (мала кривизна, тобто сильна взаємозаміщенність витрат у виробництві), то на двоїстому графіку відповідні точки $\bar{w}, \tilde{w}$ будуть характеризуватися, навпаки, близьким положенням, але сильно відмінними дотичними.

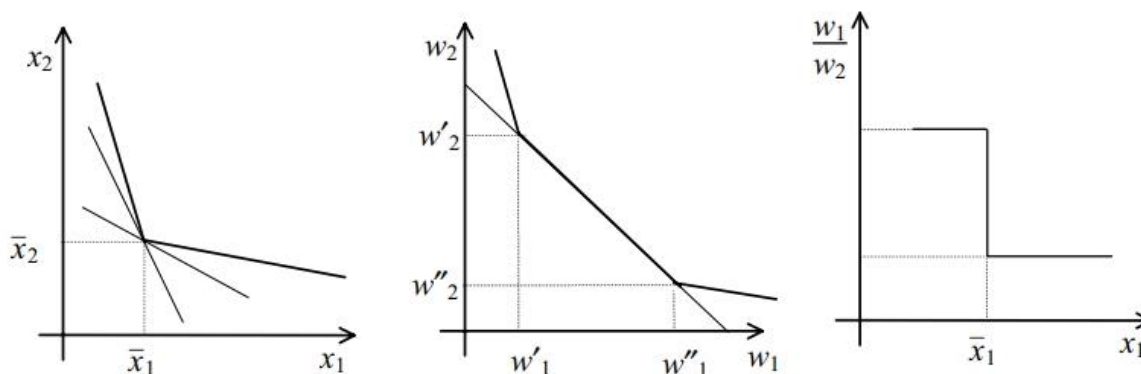


Малюнок 9.12

При повній взаємозамінності витрат будь-якій структурі витрат відповідає одна й та ж структура цін (див. мал. нижче). Таким чином, структура цін не визначає однозначно структуру витрат.

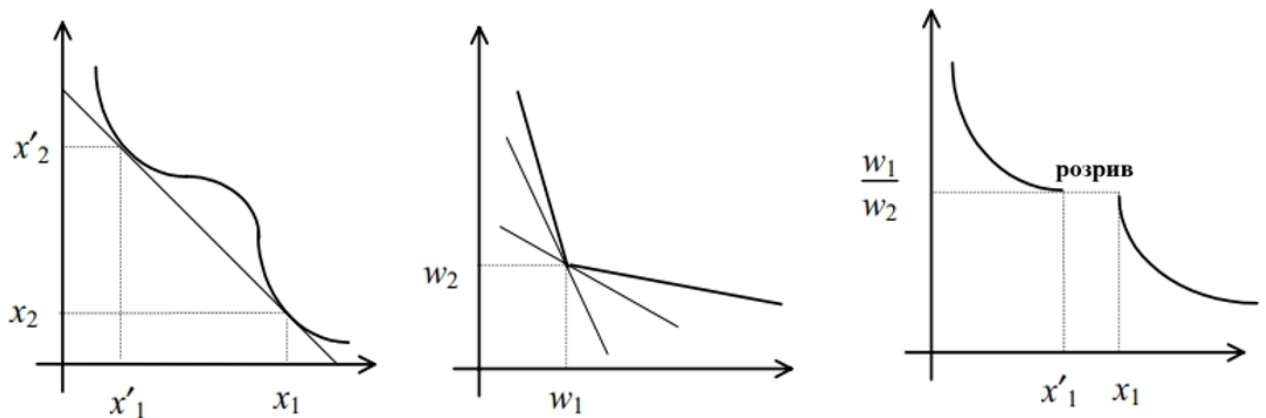


І навпаки, якщо витрати жорстко взаємодоповнювані, то ціни, при яких ці витрати (затрати) мінімізують витрати (издержки), визначаються неоднозначно.



Ще один “нерегулярний” випадок – неопуклість IRS – ілюструє нижченаведений малюнок.

При різних векторах цін $\mathbf{w}$ один і той же $\mathbf{x}$.



Малюнок 9.15. Ізокванта не є випуклою функцією

Контрольні питання до теми 9

1. Технологічна множина і її властивості.
2. Теорема про зв'язок між властивостями.
3. Основні принципи, покладені в основу теорії виробника.
4. Завдання виробника та їх властивості.
5. Функції пропозиції і виробника, їх властивості.
6. Лема Хотелінга.
7. Відновлення технологічної множини по функції прибутку.
8. Функція витрат і її властивості. Множина необхідних витрат.
9. Властивості функції $\mathbf{x}(\mathbf{w}, \mathbf{y})$.
10. Ізокванти та ізокошти технологій

Список літератури

1. Козицький В. А., Лавренюк С. П., Оліскевич М. О. Основи математичної економіки. Теорія споживання. Частина 1: навчальний посібник/ Львівський національний університет імені Івана Франка. Львів: Видавництво «Піраміда». 2004. 264 с.
2. Козицький В. А., Лавренюк С. П., Оліскевич М. О. Основи математичної економіки. Теорія фірми. Частина 2: навчальний посібник / Львівський національний університет імені Івана Франка. Видавництво «Піраміда». 2005. 302 с.
3. Вовк В. М., Зомчак Л. М. Оптимізаційні моделі економіки: навчальний посібник. Львів: ЛНУ імені Івана Франка. 2014. 320 с.
4. Пономаренко О. І., Перестюк М. О., Бурим В. М. Сучасний економічний аналіз. Частина 1. Мікроекономіка: навчальний посібник. Київ: "Вища школа", 2004. 262 с.
5. Пономаренко О. І., Перестюк М. О., Бурим В. М. Сучасний економічний аналіз. Частина 2. Макроекономіка: навчальний посібник. Київ: "Вища школа", 2004. 204 с.
6. Вітлінський В. В. Моделювання економіки. Київ, КНЕУ, 2003. 408 с.
7. Romer David. Advanced Macroeconomics. McGraw Hill BC, 1996. 348 с.
8. Касьяненко В. О., Старченко Л. В. Моделювання та прогнозування економічних процесів: навчальний посібник. Суми: Університетська книга, 2015. 185 с.
9. Єфимова Г. О., Осадчий О. О. Методичні вказівки за спецкурсу «Математичні моделі макроекономіки» Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2013. 39 с.
10. Економіко-математичне моделювання: навч. посібник/ за ред. О. Т. Іващука. Тернопіль: ТНЕУ, 2008. 164 с.
11. Математичне моделювання: навчальний посібник / В. Г. Маценко. – Чернівці: Чернівецький національний університет, 2014. 519 с.
12. Станжицький О. М., Таран Є. Ю., Гординський Л. Д. Основи математичного моделювання: Навчальний посібник / Станжицький О. М. – К.: Видавництво -поліграфічний центр "Київський університет", 2006.
13. Здрок В. В., Лагоцький, Т. Я., Паславська, І. М. Моделювання економічної динаміки : практикум. Львів : Магнолія, 2018. 252 с.
14. Гладка О. М., Карпович І. М., Сінчук А. М. Моделі економічної динаміки для фахівців з інформаційних технологій: Навчальний посібник Рівне: РДГУ, 2019. 158 с.
15. Лось В. О. Моделі економічної динаміки: навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Економіка» освітньо-професійної програми «Економічна кібернетика». Запоріжжя: ЗНУ, 2020. 78 с.
16. Євтухов В. М. Стійкість за Ляпуновим лінійних диференціальних рівнянь. Навчальний посібник. Одеса : «Асторпрінт» 2001. 117 с.

Навчальне видання

Євтухов В'ячеслав Михайлович
Шарай Наталія Вікторівна

**МАТЕМАТИЧНІ АСПЕКТИ
МІКРОЕКОНОМІКИ**

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
спеціальностей 111 Математика, 113 Прикладна математика,
051 Економіка, 071 Облік і оподаткування,
072 Фінанси, банківська справа та страхування,
073 Менеджмент, 075 Маркетинг

Електронне видання мережевого використання

В авторській редакції

Затв. авт. 23.09.2025. Шрифт Times New Roman.
Системні вимоги: операційна система сумісна з програмним забезпеченням
для читання файлів формату PDF.
Обсяг 3,6 МБ. Зам. № 2985.

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.
вул. Університетська, 12, м. Одеса, 65082, Україна
Тел.: (048) 723 28 39, e-mail: druk@onu.edu.ua