

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра методів математичної фізики

Дипломна робота

бакалавра

на тему: **«Антиплоська задача теорії пружності для
сегменту кільця з тріщиною»**

«The anti-plane problem of elasticity theory for a sector of a ring with a crack»

Виконала: студентка денної форми навча-
ння

спеціальності 113 Прикладна математика

Даніленко Дарія Олексіївна

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц.

Журавльова З.Ю.

Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц.

Процеров Ю.С.

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ____ від «____» _____ р.
Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № _____
Протокол № ____ від «____» ____ р.
Оцінка _____ / _____ / _____
Голова ЕК

Одеса — 2022 р.

ЗМІСТ

Вступ	3
1 Постановка антиплоської задачі для сектора круга	4
2 Неперевна задача	5
2.1 Зведення до одновимірної задачі	5
2.2 Розв'язання одновимірної задачі	6
2.2.1 Заміна Ейлера	6
2.2.2 Побудова розв'язку одновимірної крайової задачі . .	7
3 Розривна задача	8
3.1 Побудова функції Грина	8
3.1.1 Перевірка умов на неособливість	9
3.1.2 Побудова ФБСР крайової задачі	9
3.1.3 Фундаментальна функція і функція Грина	10
3.2 Побудова розв'язку розривної крайової задачі	11
3.3 Обернене перетворення	11
3.4 Зведення до сингулярного інтегрального рівняння	12
4 Графічні результати	14
Висновки	21
Список літератури	22

ВСТУП

У дипломній роботі розглянуто антиплоську задачу теорії пружності для сегменту кільця, що послаблений поздовжньою тріщиною. Сегмент кільця знаходиться під впливом механічного навантаження. Така задача є важливою модельною задачею, що може бути використана у різноманітних інженерних розробках.

Дипломна робота складається зі вступу, постановки задачі, двох розділів, графічних результатів та висновків.

У першому розділі ми розглядаємо антиплоську задачу з дефектом, до якої ми застосовуємо апарат інтегральних перетворень. Далі ми розв'язуємо отриману в результаті цього задачу у трансформантах, та будуємо розв'язок неперервної частини задачі. Для інтегрального перетворення ми використовували табличні значення.

У другому розділі ми використовуємо результати першого, та розглядаємо розривну частину задачі, яка містить стрибок. Для побудови розв'язку на цьому етапі ми будемо використовувати апарат функції Грина, а також її розривні властивості. Після використання оберненого інтегрального перетворення та повернення у простір оригіналів ми отримаємо вираз для функції переміщення, який містить невідому функцію $\chi(\varphi)$. Далі ми знаходимо функцію напруження, та формулюємо сингулярне інтегральне рівняння. Методом розв'язання отриманого СІР визначено метод ортогональних поліномів, згідно з яким невідома функція стрибка розвивається у ряд за поліномами Чебишева II роду.

У розділі з графічними результатами присутні графіки, побудовані під час дослідження поведінки функції переміщення, за умови відсутності тріщини. Використовуються результати першого розділу.

РОЗДІЛ 1

ПОСТАНОВКА АНТИПЛОСЬКОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СЕКТОРА КРУГА

$$\left\{ \begin{array}{l} r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} = 0 \\ W|_{\varphi=0} = 0, \quad W|_{\varphi=\alpha} = 0, \quad a < r < b \\ \tau_{rz}|_{r=a} = 0, \quad \tau_{rz}|_{r=b} = p(\varphi), \quad 0 < \varphi < \alpha \\ \langle W(c, \varphi) \rangle = W(c-0, \varphi) - W(c+0, \varphi) = \chi(\varphi) \quad w_0 < \varphi < w_1, \\ \langle \tau_{rz}(c, \varphi) \rangle = \tau_{rz}(c-0, \varphi) - \tau_{rz}(c+0, \varphi) = 0 \quad r = c, \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Розглядаємо антиплоську задачу для сегменту кільця ($a < r < b$, $0 < \varphi < \alpha$) з тонкою тріщиною ($r = c$, $w_0 < \varphi < w_1$). Внутрішня поверхня вільна від навантажень ($r = a$) та бокові сторони сегменту жорстко закріплені ($\varphi = 0, \varphi = \alpha$), а на зовнішню сторону ($r = b$) діє навантаження $p(\varphi)$. На тріщині переміщення зазнає стрибка, який задається невідомою функцією $\chi(\varphi)$. Необхідно знайти переміщення та напруження в середині сегменту під впливом прикладеної сили.

Додатково, перепишемо наше крайові умови та умови на тріщині, що містять напруження τ_{rz} у термінах переміщень:

$$\left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{r=a} = 0, \quad \left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{r=b} = \frac{p(\varphi)}{G}$$

$$\left\langle \frac{\partial W}{\partial r}(c, \varphi) \right\rangle = \frac{\partial W}{\partial r}(c-0, \varphi) - \frac{\partial W}{\partial r}(c+0, \varphi) = 0$$

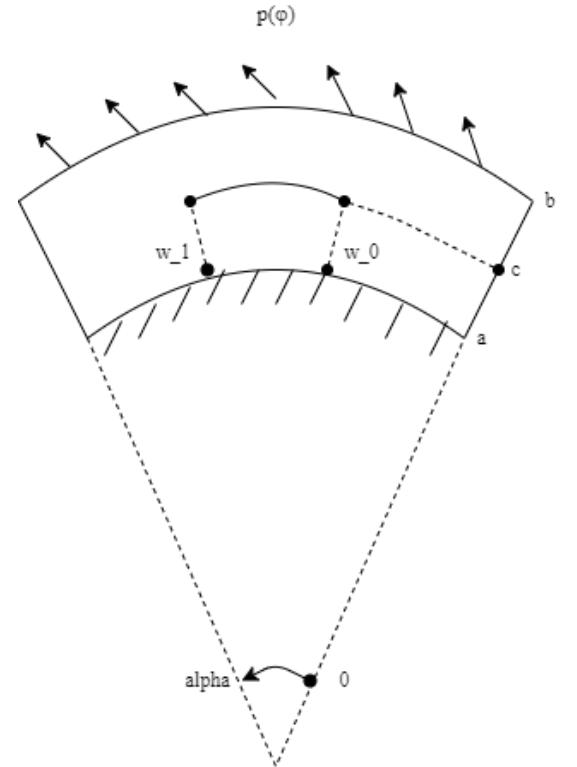


Рис. 1.1. Постановка задачі

РОЗДІЛ 2

НЕПЕРЕВНА ЗАДАЧА

Зведення до одновірної задачі

Скористаємося перетворенням Фур'є за змінною φ . Для цього представимо рівняння у вигляді:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + r^2 \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + r \frac{\partial W}{\partial r} = 0 \quad (2.1)$$

Так як початкові умови задовольняють вимогам табличного^[1] перетворення, скористаємося скінченням $\sin$ -перетворенням Фур'є:

$$W_\beta(r) = \int_0^\alpha W(r, \varphi) \sin \beta \varphi d\varphi \quad (2.2)$$

$$W(r, \varphi) = \frac{2}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} W_\beta \sin \beta \varphi, \quad \beta = \frac{\pi k}{\alpha} \quad (2.3)$$

Помножимо обидві частини рівняння на $\sin \beta \varphi$, та проінтегруємо від 0 до α :

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \sin \beta \varphi d\varphi &= -\beta^2 W_\beta \\ r^2 \int_0^\alpha \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \sin \beta \varphi d\varphi &= r^2 W''_\beta \\ r \int_0^\alpha \frac{\partial W}{\partial r} \sin \beta \varphi d\varphi &= r W'_\beta \\ \int_0^\alpha \frac{p(\varphi)}{G} \sin \beta \varphi d\varphi &= \frac{p_\beta}{G} \end{aligned}$$

Таким самим чином застосовуємо перетворення і до крайових умов на тріщині:

$$\begin{aligned} \langle W_\beta(c) \rangle &= \int_{w_0}^{w_1} \chi(\varphi) \sin \beta \varphi d\varphi = \chi_\beta \\ \langle W'_\beta(c) \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Розв'язання одновимірної задачі

Отримуємо одновимірну крайову задачу, рівняння якої має вигляд Ейлера.

$$\begin{cases} r^2 W''_{\beta} + r W'_{\beta} - \beta^2 W_{\beta} = 0 \\ W'_{\beta}|_{r=a} = 0, \quad W'_{\beta}|_{r=b} = \frac{p_{\beta}}{G} \\ \langle W_{\beta}(c) \rangle = \chi_{\beta} \\ \langle W'_{\beta}(c) \rangle = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Для подальшої роботи проведемо заміну Ейлера.

Заміна Ейлера

$$r = e^t \rightarrow t = \ln r \quad (2.5)$$

$$U_{\beta}(t) = W_{\beta}(e^t) \quad (2.6)$$

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{r} \quad W'_{\beta} = U'_{\beta} \cdot \frac{dt}{dr} = \frac{1}{r} \cdot U'_{\beta}$$

$$\begin{aligned} W'_{\beta} &= e^{-t} U'_{\beta} \\ W''_{\beta} &= e^{-2t} (U''_{\beta} - U'_{\beta}) \end{aligned}$$

Крайова задача приймає наступний вигляд:

$$\begin{cases} U''_{\beta} - \beta^2 U_{\beta} = 0, & \ln a < t < \ln b \\ U'_{\beta}|_{t=\ln a} = 0, & U'_{\beta}|_{t=\ln b} = \frac{p_{\beta} e^t}{G} \\ \langle U_{\beta}(c) \rangle = \chi_{\beta} \\ \langle U'_{\beta}(c) \rangle = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Побудова розв'язку одновимірної крайової задачі

Загальний розв'язок неперервної задачі може бути представлений у вигляді:

$$U_\beta = C_0 e^{\beta t} + C_1 e^{-\beta t} \quad (2.8)$$

$$U'_\beta = \beta C_0 e^{\beta t} - \beta C_1 e^{-\beta t} \quad (2.9)$$

Знайдемо коефіцієнти C_0 і C_1 , підставивши загальний розв'язок у крайові умови:

$$\begin{aligned} U'_\beta \Big|_{t=\ln a} &= \beta C_0 e^{\beta \ln a} - \beta C_1 e^{-\beta \ln a} = 0 \\ \beta C_0 a^\beta - \beta C_1 a^{-\beta} &= 0 \\ C_1 a^{-\beta} &= C_0 a^\beta \\ C_1 &= C_0 a^{2\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U'_\beta \Big|_{t=\ln b} &= \beta C_0 e^{\beta \ln b} - \beta C_0 a^{2\beta} e^{-\beta \ln b} = \frac{p_\beta e^{\ln b}}{G} \\ \beta C_0 b^\beta - \beta C_0 a^{2\beta} b^{-\beta} &= \frac{p_\beta b}{G} \\ \beta C_0 b^{-\beta} (b^{2\beta} - a^{2\beta}) &= \frac{p_\beta b}{G} \\ C_0 &= \frac{p_\beta b^{\beta+1}}{G\beta (b^{2\beta} - a^{2\beta})}, \quad C_1 = \frac{p_\beta b^{\beta+1} a^{2\beta}}{G\beta (b^{2\beta} - a^{2\beta})} \end{aligned}$$

Тоді розв'язком неперервної задачі у просторі трансформант буде:

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{p_\beta b^{\beta+1} e^{\beta t}}{G\beta (b^{2\beta} - a^{2\beta})} + \frac{p_\beta b^{\beta+1} a^{2\beta} e^{-\beta t}}{G\beta (b^{2\beta} - a^{2\beta})} \\ U_n &= \frac{p_\beta}{G} \left(\frac{b^{\beta+1} (e^{\beta t} + a^{2\beta} e^{-\beta t})}{\beta (b^{2\beta} - a^{2\beta})} \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

РОЗДІЛ 3

РОЗРИВНА ЗАДАЧА

Загальний вид розв'язку розривної задачі має вигляд:

$$W_r(r) = \int_0^\alpha G(r, \xi) f(\xi) d\xi + \sum_{j=0}^1 X_j W_j \quad (3.1)$$

Де: $G(r, \xi)$ - це функція Грина

$f(\xi)$ - права частина крайової задачі

$$\begin{aligned} X_0 &= \chi_\beta & W_0 &= -p(c)G^{0,1}(r, c) \\ X_1 &= 0 & W_1 &= p(c)G(r, c) \end{aligned}$$

$$G^{0,1}(r, \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} G(r, \xi) \quad (3.2)$$

Побудова функції Грина

$$\begin{cases} U''_\beta - \beta^2 U_\beta = 0, & \ln a < t < \ln b \\ U'_\beta|_{t=\ln a} = 0, & U'_\beta|_{t=\ln b} = \frac{p_\beta e^t}{G} \end{cases} \quad (3.3)$$

Загальний розв'язок:

$$U_r(t) = C_0 e^{\beta t} + C_1 e^{-\beta t}$$

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= e^{\beta t} & \varphi_1 &= e^{-\beta t} \\ v_0 &= U'_\beta|_{t=\ln a} & v_1 &= U'_\beta|_{t=\ln b} \end{aligned}$$

Перевірка умов на неособливість

$$W = \begin{vmatrix} \varphi_0 & \varphi_1 \\ \varphi'_0 & \varphi'_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\beta t} & e^{-\beta t} \\ \beta e^{\beta t} & -\beta e^{-\beta t} \end{vmatrix} = -\beta - \beta = -2\beta \neq 0$$

Побудова ФБСР крайової задачі

$$\begin{aligned} v_0[\varphi_0] &= \varphi'_0 \Big|_{t=\ln a} = \beta a^\beta & v_1[\varphi_0] &= \varphi'_0 \Big|_{t=\ln b} = \beta b^\beta \\ v_0[\varphi_1] &= \varphi'_1 \Big|_{t=\ln a} = -\beta a^{-\beta} & v_1[\varphi_1] &= \varphi'_1 \Big|_{t=\ln b} = -\beta b^{-\beta} \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} v_0[\varphi_0] & v_1[\varphi_0] \\ v_0[\varphi_1] & v_1[\varphi_1] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta a^\beta & \beta b^\beta \\ -\beta a^{-\beta} & -\beta b^{-\beta} \end{vmatrix} = -\beta^2 a^\beta b^{-\beta} + \beta^2 a^{-\beta} b^\beta \neq 0$$

$$\psi_0 : \begin{cases} \psi''_0 - \beta^2 \psi_0 = 0 \\ \psi'_0 \Big|_{\ln a} = 1, \quad \psi'_0 \Big|_{\ln b} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \psi_0 &= C_0 e^{\beta t} + C_1 e^{-\beta t} \\ \psi'_0 &= \beta C_0 e^{\beta t} - \beta C_1 e^{-\beta t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi'_0 \Big|_{\ln b} &= \beta C_0 e^{\beta \ln b} - \beta C_1 e^{-\beta \ln b} = 0 \\ C_1 &= C_0 b^{2\beta} \end{aligned}$$

$$\psi'_0 \Big|_{\ln a} = \beta C_0 e^{\beta \ln a} - \beta C_0 b^{2\beta} e^{-\beta \ln a} = 1$$

$$\beta C_0 a^\beta - \beta C_0 b^{2\beta} a^{-\beta} = 1$$

$$\beta C_0 a^{-\beta} (a^{2\beta} - b^{2\beta}) = 1$$

$$C_0 = \frac{a^\beta}{\beta (a^{2\beta} - b^{2\beta})}, \quad C_1 = \frac{a^\beta b^{2\beta}}{\beta (a^{2\beta} - b^{2\beta})}$$

$$\psi_0 = \frac{a^\beta e^{\beta t} + a^\beta b^{2\beta} e^{-\beta t}}{\beta (a^{2\beta} - b^{2\beta})} = \frac{a^\beta e^{-\beta t} (e^{2\beta t} + b^{2\beta})}{\beta (a^{2\beta} - b^{2\beta})} \quad (3.4)$$

$$\psi_1 : \begin{cases} \psi_1'' - \beta^2 \psi_1 = 0 \\ \psi_1'|_{\ln a} = 0, \quad \psi_1'|_{\ln b} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \psi_1 &= C_0 e^{\beta t} + C_1 e^{-\beta t} \\ \psi_1' &= \beta C_0 e^{\beta t} - \beta C_1 e^{-\beta t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_1'|_{\ln a} &= \beta C_0 e^{\beta \ln a} - \beta C_1 e^{-\beta \ln a} = 0 \\ C_1 &= C_0 a^{2\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_1'|_{\ln b} &= \beta C_0 e^{\beta \ln b} - \beta C_0 a^{2\beta} e^{-\beta \ln b} = 1 \\ \beta C_0 b^{-\beta} (b^{2\beta} - a^{2\beta}) &= 1 \\ C_0 &= \frac{b^\beta}{\beta (b^{2\beta} - a^{2\beta})}, \quad C_1 = \frac{b^\beta a^{2\beta}}{\beta (b^{2\beta} - a^{2\beta})} \\ \psi_1 &= \frac{b^\beta e^{\beta t} + b^\beta a^{2\beta} e^{-\beta t}}{\beta (b^{2\beta} - a^{2\beta})} = \frac{b^\beta e^{-\beta t} (e^{2\beta t} + a^{2\beta})}{\beta (b^{2\beta} - a^{2\beta})} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Фундаментальна функція і функція Грина

Запишемо фундаментальну функцію для нашої задачі - вона має табличний вигляд^[1]:

$$\begin{aligned} W'' - \beta W &= f & \Phi(t, \xi) &= -\frac{1}{2\beta} e^{-\beta|t-\xi|} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, \xi) &= \frac{1}{2} e^{-\beta|t-\xi|} \operatorname{sgn}(t - \xi) \end{aligned}$$

Запишем функцію Грина

$$G(t, \xi) = \Phi(t, \xi) - \sum_{i=0}^{n-1} \psi_i(t) v_i [\Phi(t, \xi)] \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} v_0[\Phi] &= \Phi' \Big|_{\ln a} = -\frac{1}{2} e^{-\beta|\ln a - \xi|} \\ v_1[\Phi] &= \Phi' \Big|_{\ln b} = \frac{1}{2} e^{-\beta|\ln b - \xi|} \end{aligned}$$

$$G(t, \xi) = -\frac{1}{2\beta} e^{-\beta|t - \xi|} + \frac{e^{-\beta|\ln a - \xi|} a^\beta e^{-\beta t} (e^{2\beta t} + b^{2\beta})}{2\beta (a^{2\beta} - b^{2\beta})} - \frac{e^{-\beta|\ln b - \xi|} b^\beta e^{-\beta t} (e^{2\beta t} + a^{2\beta})}{2\beta (b^{2\beta} - a^{2\beta})}$$

Побудова розв'язку розривної крайової задачі

Скористаємося формулою 3.2

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} = -\frac{e^{-\beta|t - \xi|}}{2} \operatorname{sgn}(t - \xi) - \frac{e^{-\beta|\ln a - \xi|} a^\beta e^{-\beta t} (e^{2\beta t} + b^{2\beta})}{2 (a^{2\beta} - b^{2\beta})} - \frac{e^{-\beta|\ln b - \xi|} b^\beta e^{-\beta t} (e^{2\beta t} + a^{2\beta})}{2 (b^{2\beta} - a^{2\beta})}$$

Тоді розривний розв'язок має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} U_r = -\frac{\chi_\beta}{2} & \left(e^{-\beta|t - \ln c|} \operatorname{sgn}(t - \ln c) + \frac{e^{-\beta|\ln a - \ln c|} a^\beta e^{-\beta t} (e^{2\beta t} + b^{2\beta})}{a^{2\beta} - b^{2\beta}} + \right. \\ & \left. + \frac{e^{-\beta|\ln b - \ln c|} b^\beta e^{-\beta t} (e^{2\beta t} + a^{2\beta})}{b^{2\beta} - a^{2\beta}} \right) \end{aligned}$$

Обернене перетворення

Повернемося до змінної r 2.5

$$\begin{aligned} U_\beta = U_n + U_r = \frac{p_\beta}{G} & \left(\frac{b^{\beta+1} (e^{\beta t} + a^{2\beta} e^{-\beta t})}{\beta (b^{2\beta} - a^{2\beta})} \right) - \frac{\chi_\beta}{2} \left(e^{-\beta|t - \ln c|} \operatorname{sgn}(t - c) + \right. \\ & \left. + \frac{e^{-\beta|\ln a - \ln c|} a^\beta e^{-\beta t} (e^{2\beta t} + b^{2\beta})}{a^{2\beta} - b^{2\beta}} + \frac{e^{-\beta|\ln b - \ln c|} b^\beta e^{-\beta t} (e^{2\beta t} + a^{2\beta})}{b^{2\beta} - a^{2\beta}} \right) \end{aligned}$$

Повертаємося до змінної $t = \ln r$, $U_\beta = W_\beta$ та отримуємо розв'язок крайової задачі у просторі трансформант:

$$W_\beta = \frac{p_\beta}{G} \left(\frac{b^{\beta+1} (r^\beta + a^{2\beta} r^{-\beta})}{\beta (b^{2\beta} - a^{2\beta})} \right) - \frac{\chi_\beta}{2} \left(e^{-\beta|\ln r - \ln c|} \operatorname{sgn}(\ln r - \ln c) + \right.$$

$$+ \frac{e^{-\beta(\ln c - \ln a)} a^\beta r^{-\beta} (r^{2\beta} + b^{2\beta})}{a^{2\beta} - b^{2\beta}} + \frac{e^{-\beta(\ln b - \ln c)} b^\beta r^{-\beta} (r^{2\beta} + a^{2\beta})}{b^{2\beta} - a^{2\beta}} \Bigg)$$

$$p_\beta = \int_0^\alpha p(\xi) \sin \beta \xi d\xi, \quad \beta = \frac{\pi k}{\alpha}$$

$$\chi_\beta = \int_{w_0}^{w_1} \chi(\xi) \sin \beta \xi d\xi$$

Повернемося до простору оригіналів, використовуючи формулу 2.3. Функція переміщення вихідної крайової задачі має наступний вигляд:

$$W = \frac{2}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{G} \int_0^\alpha p(\xi) \sin \beta \xi d\xi \cdot \Psi_0 - \frac{1}{2} \int_{w_0}^{w_1} \chi(\xi) \sin \beta \xi d\xi \cdot \Psi_1 \right) \sin \beta \varphi \quad (3.7)$$

$$\text{де } \Psi_0 = \frac{b^{\beta+1} (r^\beta + a^{2\beta} r^{-\beta})}{\beta (b^{2\beta} - a^{2\beta})},$$

$$\begin{aligned} \Psi_1 = & e^{-\beta|\ln r - \ln c|} \operatorname{sgn}(\ln r - \ln c) + \frac{e^{-\beta(\ln c - \ln a)} a^\beta r^{-\beta} (r^{2\beta} + b^{2\beta})}{a^{2\beta} - b^{2\beta}} + \\ & + \frac{e^{-\beta(\ln b - \ln c)} b^\beta r^{-\beta} (r^{2\beta} + a^{2\beta})}{b^{2\beta} - a^{2\beta}} \end{aligned}$$

Зведення до сингулярного інтегрального рівняння

Отримали вираз для функції переміщення, що містить невідому функцію $\chi(\xi)$. Для її знаходження^[3] скористаємося тим, що тріщина вільна від навантажень.

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{2}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{G} \int_0^\alpha p(\xi) \sin \beta \xi d\xi \cdot \Psi'_0 - \frac{1}{2} \int_{w_0}^{w_1} \chi(\xi) \sin \beta \xi d\xi \cdot \Psi'_1 \right) \sin \beta \varphi$$

$$\text{де } \Psi'_0 = \frac{b^{\beta+1} r^{-\beta-1} (r^{2\beta} - a^{2\beta})}{b^{2\beta} - a^{2\beta}},$$

$$\begin{aligned} \Psi'_1 = & - \frac{-\beta e^{-\beta|\ln r - c|}}{r} + \frac{e^{-\beta|\ln a - c|} a^\beta \beta r^{-\beta-1} (r^{2\beta} - b^{2\beta})}{a^{2\beta} - b^{2\beta}} + \\ & + \frac{e^{-\beta|\ln b - c|} b^\beta \beta r^{-\beta-1} (r^{2\beta} - a^{2\beta})}{b^{2\beta} - a^{2\beta}} \end{aligned}$$

$$\tau_{rz}|_{r=c-0} = 0$$

$$\tau_{rz}|_{r=c-0} = \frac{2G}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{G} \int_0^{\alpha} p(\xi) \sin \beta \xi d\xi \cdot \Psi'_0 - \frac{1}{2} \int_{w_0}^{w_1} \chi(\xi) \sin \beta \xi d\xi \cdot \Psi'_1 \right) \sin \beta \varphi = 0$$

Отримуємо наступне сингулярне інтегральне рівняння:

$$\frac{2G}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} - \frac{1}{2} \int_{w_0}^{w_1} \chi(\xi) \sin \beta \xi d\xi \cdot \Psi'_1 \sin \beta \varphi = - \frac{2G}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{G} \int_0^{\alpha} p(\xi) \sin \beta \xi d\xi \cdot \Psi'_0 \sin \beta \varphi$$

$$\begin{aligned} & \frac{G}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{w_0}^{w_1} \chi(\xi) \sin \beta \xi d\xi \cdot \\ & \left(\frac{\beta}{c} + \frac{e^{-\beta(\ln c - \ln a)} a^{\beta} \beta c^{-\beta-1} (c^{2\beta} - b^{2\beta})}{a^{2\beta} - b^{2\beta}} + \frac{e^{-\beta(\ln b - \ln c)} b^{\beta} \beta c^{-\beta-1} (c^{2\beta} - a^{2\beta})}{b^{2\beta} - a^{2\beta}} \right) \sin \beta \varphi = \\ & = \frac{2}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\alpha} p(\xi) \sin \beta \xi d\xi \cdot \left(\frac{b^{\beta+1} c^{-\beta-1} (c^{2\beta} - a^{2\beta})}{b^{2\beta} - a^{2\beta}} \right) \sin \beta \varphi \end{aligned}$$

Зробимо заміну змінних: $w_0 \rightarrow -1$

$$w_1 \rightarrow 1$$

Сингулярне інтегральне рівняння буде розв'язуватись у подальшому методом ортогональних функцій згідно з яким невідома функція $\chi(\xi)$ розвивається у ряд за поліномами Чебишева II роду:

$$\chi(\xi) = \sqrt{1 - \xi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n U_n(\xi) \quad (3.8)$$

РОЗДІЛ 4

ГРАФІЧНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Розглянемо графіки, отримані у результаті дослідження переміщення та напруження при зміні крайових умов. Вважаємо що стрибок переміщення у всіх випадках дорівнює 0.

Експеримент 1. Переміщення W , якщо $(a = 5, b = 15, G = 79.3, \alpha = \pi)$

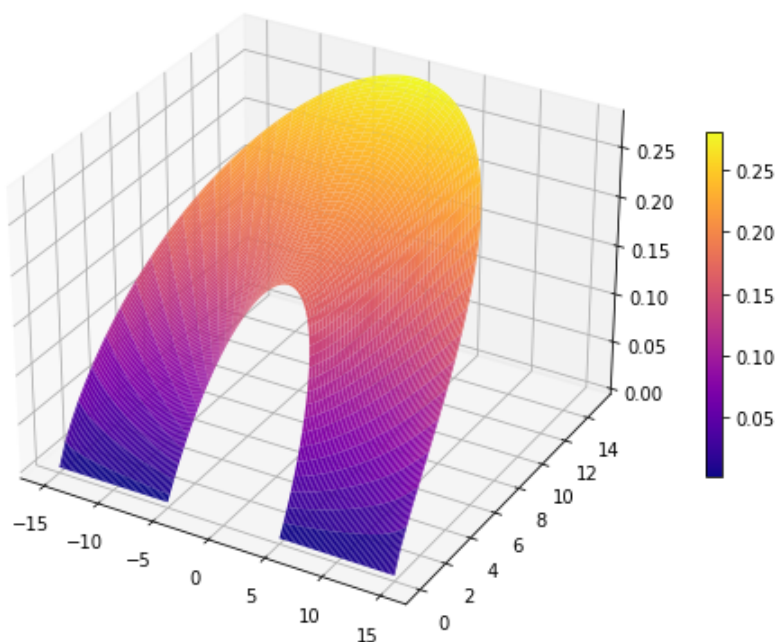


Рис. 4.1. $p(\varphi) = 1$

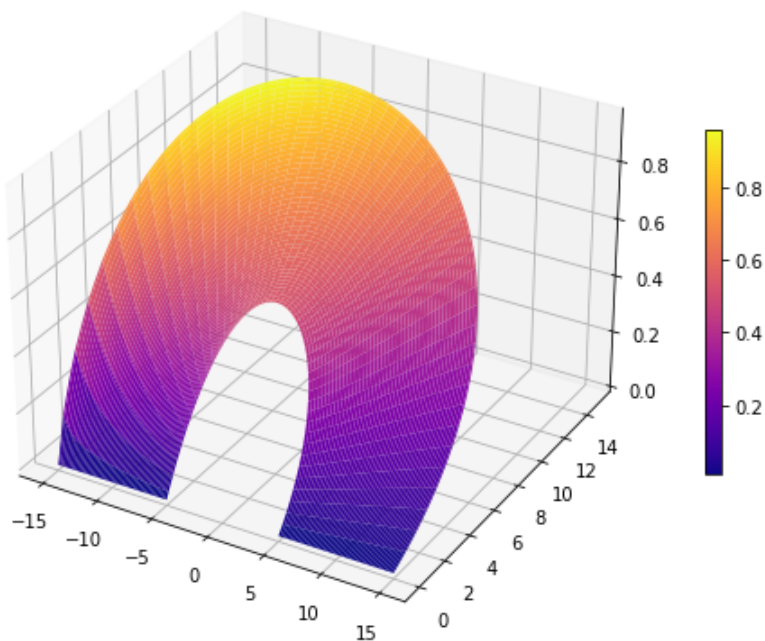
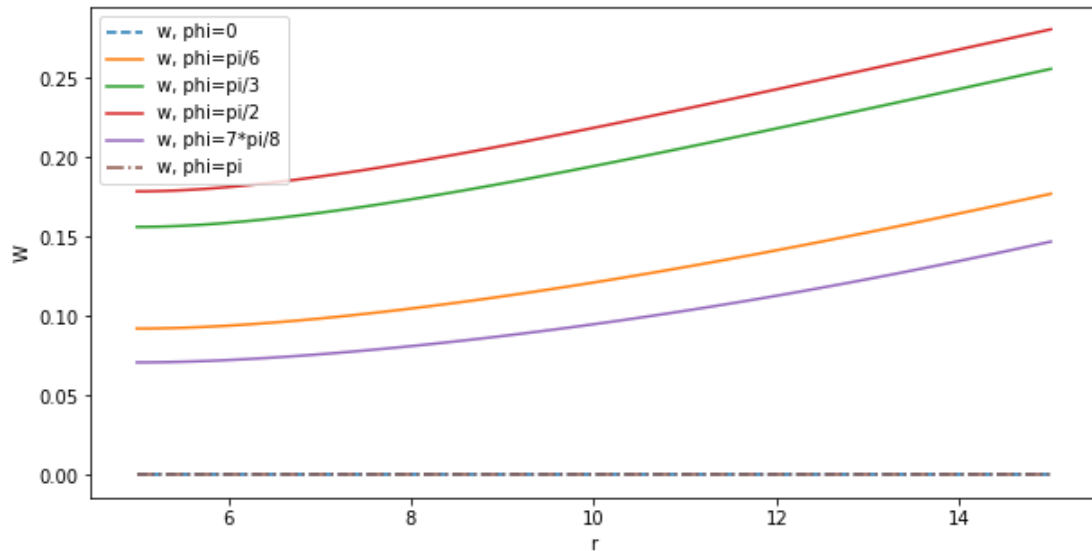
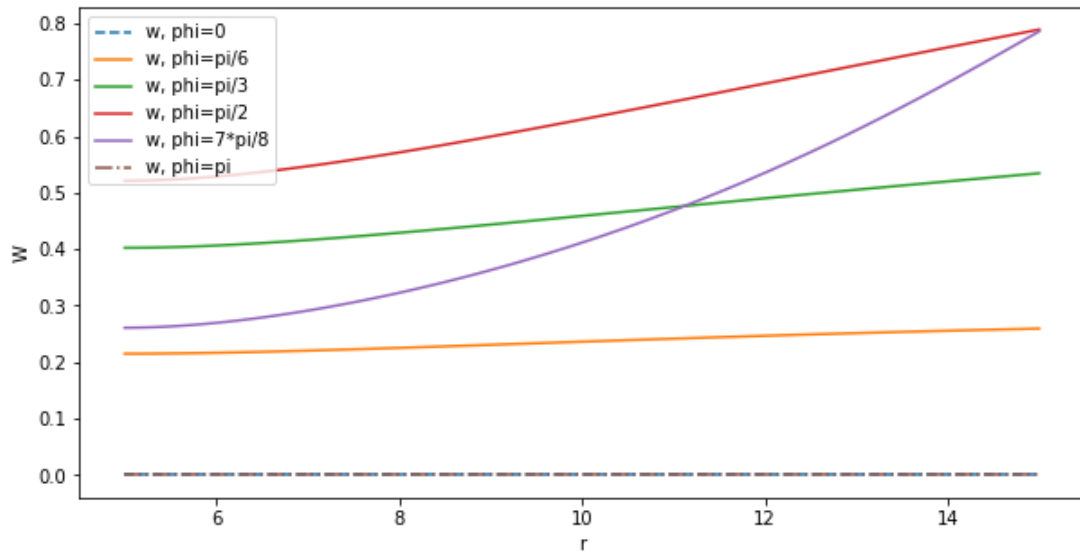


Рис. 4.2. $p(\varphi) = \varphi^2$

Отримуємо тривимірний графік переміщення, який змінюється під впливом прикладеної напруги. Можна побачити, що переміщення збільшується к зовнішньому краю сегменту. Форма сегменту змінюється в залежності від виду напруги, прикладеної до сегменту.

Експеримент 2. Переміщення W , якщо $(a = 5, b = 15, G = 79.3, \alpha = \pi)$

Рис. 4.3. $p(\varphi) = 1$ Рис. 4.4. $p(\varphi) = \varphi^2$

Було досліджено як переміщення змінюється при різних значеннях кута сегменту. Можна побачити як виконуються крайові умови при $\varphi = 0$ та $\varphi = \pi$ - $W = 0$. Зауважимо, що переміщення збільшується при наближенні до зовнішнього краю ($r = b$) та напрямку напруги $p(\varphi)$, а також при збільшенні кута.

Експеримент 3. Переміщення W , якщо $(a = 5, b = 15, G = 79.3, \alpha = \pi)$

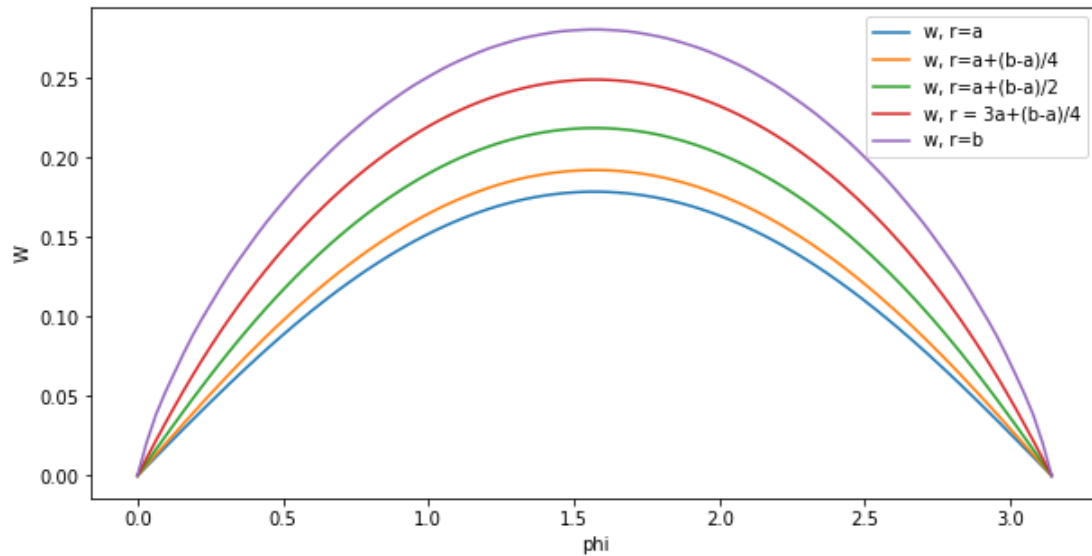


Рис. 4.5. $p(\varphi) = 1$

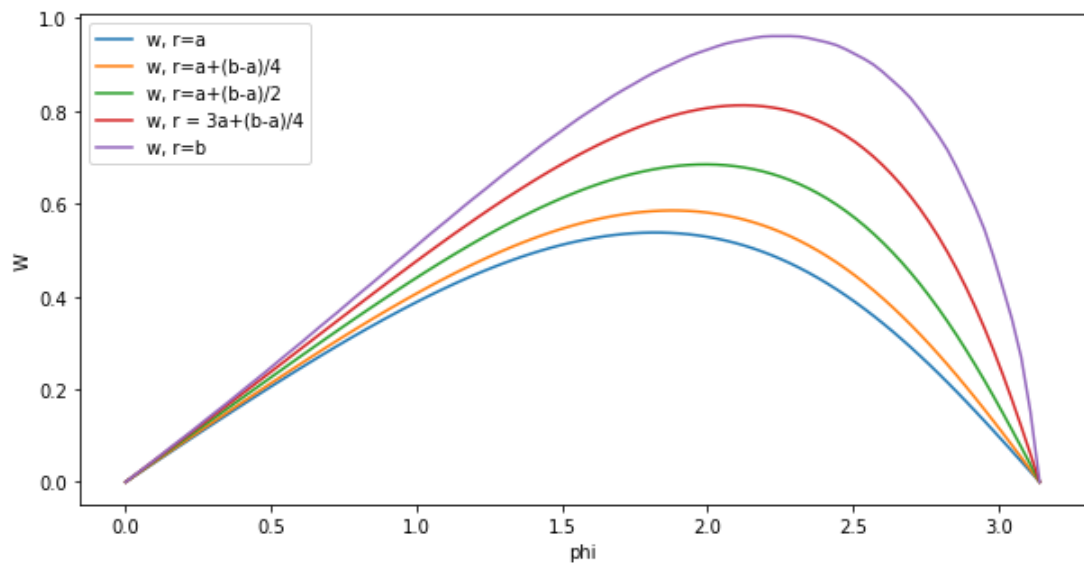


Рис. 4.6. $p(\varphi) = \varphi^2$

Розглянемо зміну W при різних значеннях всередині сегменту. Графік задовольняє крайовим умовам ($W = 0, r = a, b$). Форма, яку приймає графіки нагадує форму отриману у випадку 1. Так само, переміщення збільшується з радіусом.

Експеримент 4. Переміщення

W , якщо $(a = 5, b = [6, 8, 10, 12, 15], G = 79.3, \alpha = \pi)$

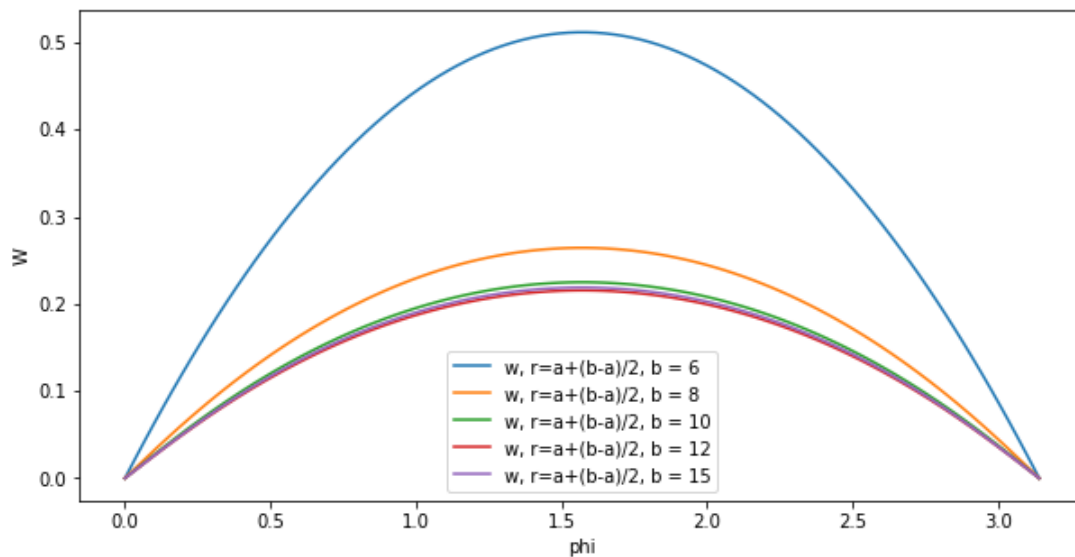


Рис. 4.7. $p(\varphi) = 1$

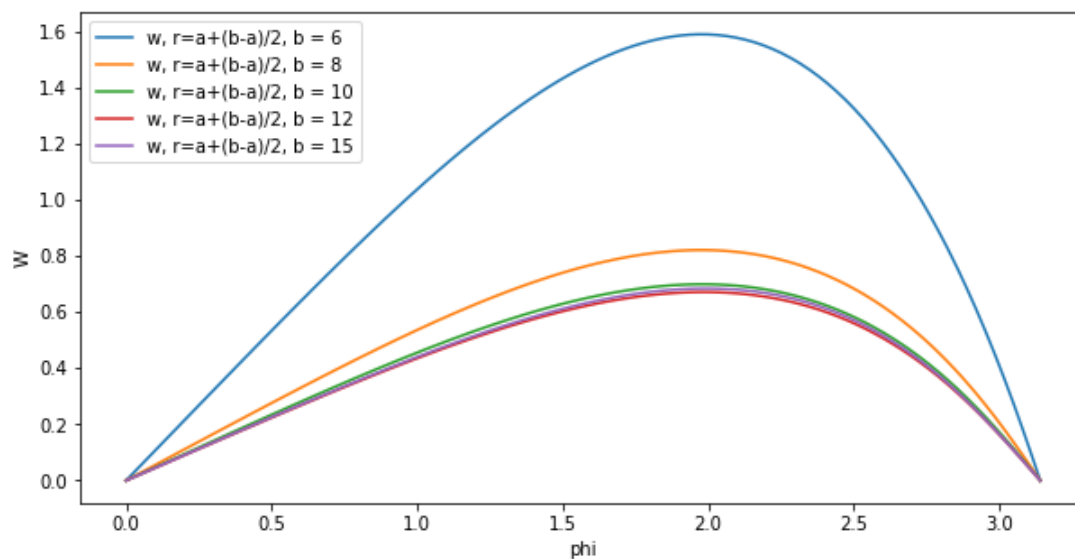


Рис. 4.8. $p(\varphi) = \varphi^2$

Можно зробити висновки, що на переміщення у середині сегменту впливає ширина сегменту - чим менше b , тим більше переміщення.

Експеримент 5. Напруження τ_{rz} , якщо $(a = 5, b = 15, G = 79.3, \alpha = \pi)$

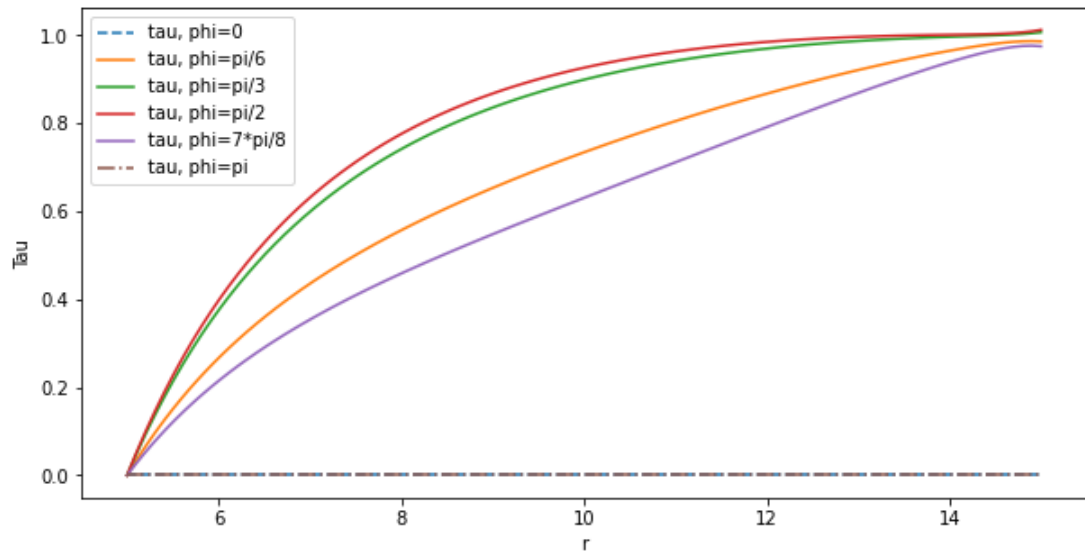


Рис. 4.9. $p(\varphi) = 1$

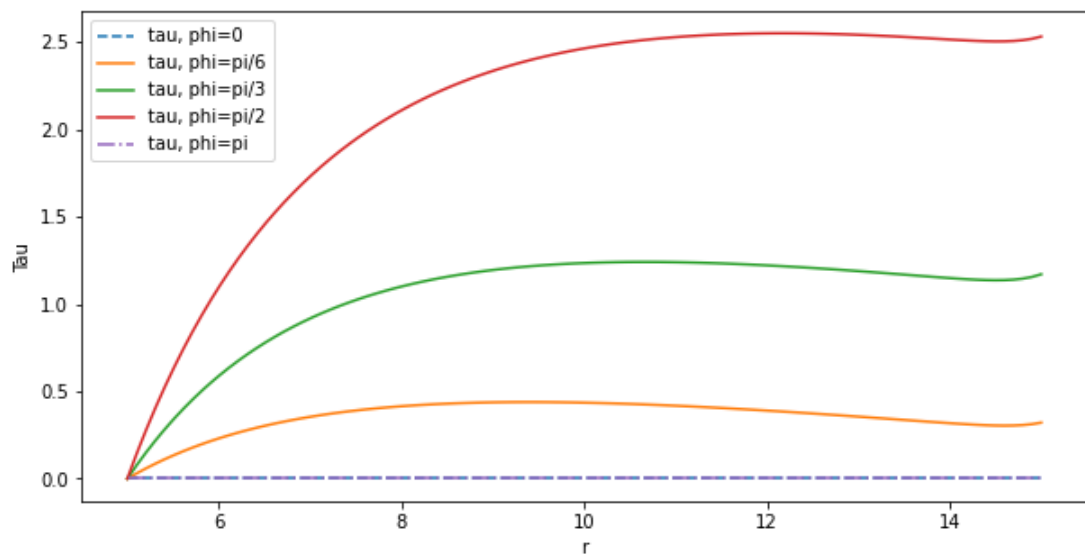
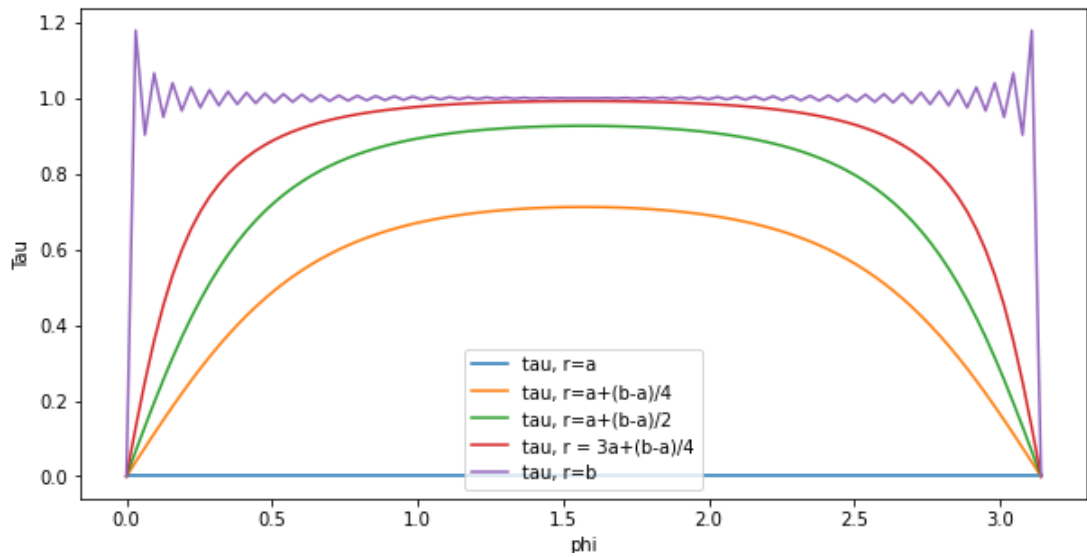
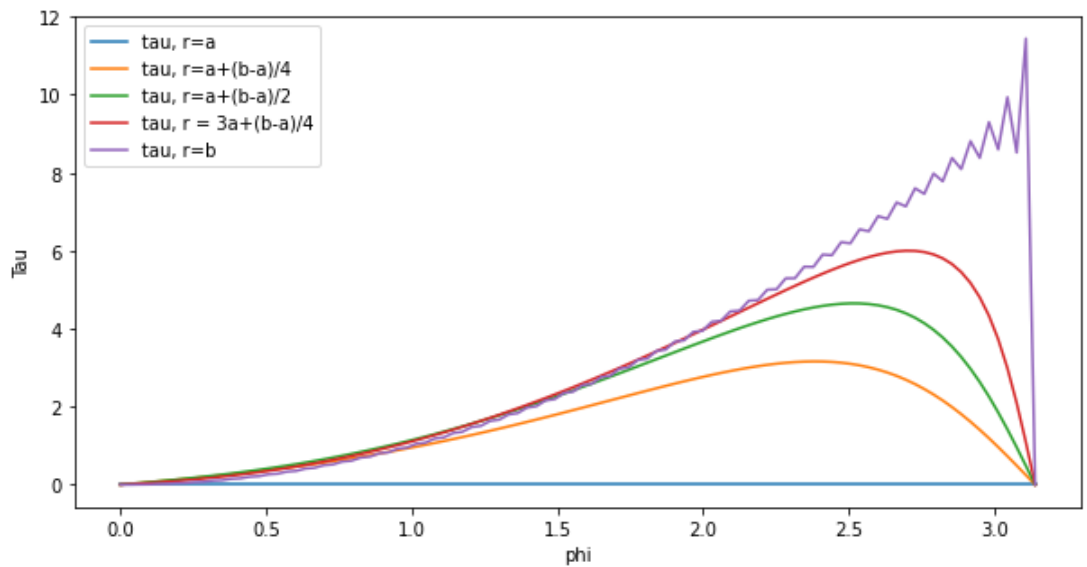


Рис. 4.10. $p(\varphi) = \varphi^2$

Розглянемо як змінюється навантаження при різних значення кута φ . Виконуються крайові умови якщо $\varphi = 0$ або $\varphi = \pi$

Експеримент 6. Напруження

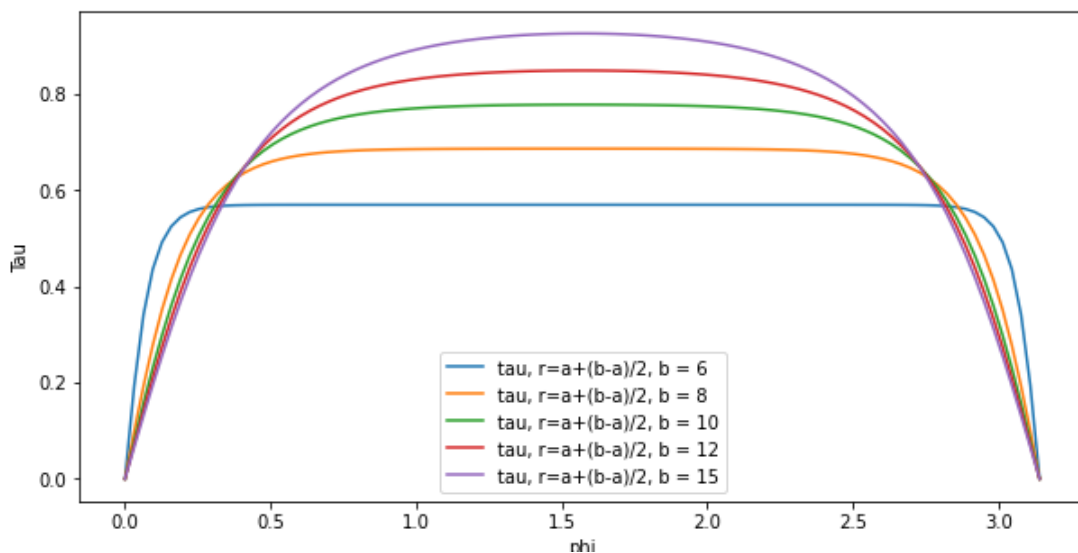
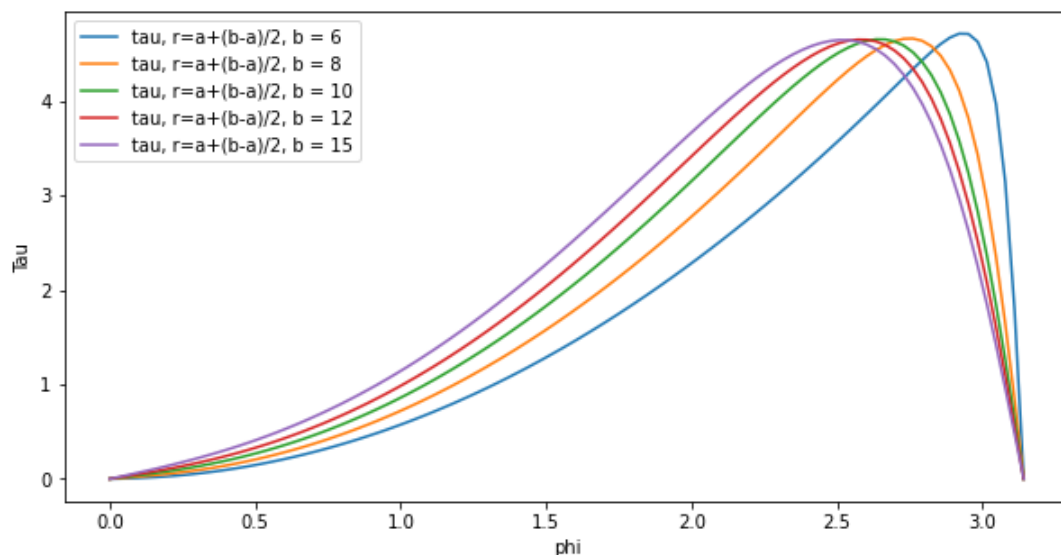
τ_{rz} , якщо $(a = 5, b = 15, G = 79.3, \alpha = \pi, 5 < r < 15)$

Рис. 4.11. $p(\varphi) = 1$ Рис. 4.12. $p(\varphi) = \varphi^2$

Побудуємо графіки напруження на сторонах та в середині сегменту.

Експеримент 7. Напруження

τ_{rz} , якщо $(a = 5, b = [6, 8, 10, 12, 15], G = 79.3, \alpha = \pi, 5 < r < 15)$

Рис. 4.13. $p(\varphi) = 1$ Рис. 4.14. $p(\varphi) = \varphi^2$

Дослідимо залежність напруження від ширини сегменту кільця. Для цього побудуємо графіки, де значення змінної $r = \frac{a+b}{2}$. Можемо зробити висновок, що напруження тим більше, чим ширше сегмент - що є протилежним до експерименту 4.

Таким чином ми дослідили залежність основних функцій від змінних, та побудували графіки, ілюструючи наші експерименти.

ВИСНОВКИ

Проаналізовано антиплоську задачу теорії пружності для сегменту кільця з поздовжньою тріщиною. Отримано формули для переміщення та напружень, що містять невідому функцію стрибка переміщень на тріщині. Сформульовано сингулярне інтегральне рівняння для знаходження цієї невідомої функції. Дане сингулярне інтегральне рівняння буде розв'язано у подальшому методом ортогональних поліномів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Попов Г.Я., Реут В.В., Вайсфельд Н.Д. Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень: учбовий посібник / Одеса: Астропринт, 2009. - 183 с.
2. Вайсфельд Н.Д., Журавльова З.Ю., Реут В.В. Плоскі мішані задачі теорії пружності для півнескінченної смуги / Монографія. Одеса, Одес. нац. ун-т ім. І.І. Мечникова, 2019. – 160 с
3. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов разрезов тонких включений и подкреплений / М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. 344 с.
4. Попов Г.Я., Реут В.В., Моїсєєв М.Г., Вайсфельд Н.Д. Рівняння математичної фізики. Метод ортогональних многочленів: навчальний посібник / Одеса: Астропринт, 2010. - 120 с.