Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра математичного аналізу

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Задача Рімана у класі узагальнених функцій»

«Riemannian problem in the class of generalized functions»

Виконала: здобувачка денної форми навчання
спеціальності 111 Математика
Освітня програма «Математика»

Севастьянова Єлизавета Віталіївна

Керівник доц. Керекеша Д.П.
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали, підпис)
Рецензент ст. викл. Кольцова Л.Л.
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ___ від _____________2023 р.

Захищено на засіданні ЕК №_______
протокол № ____ від ________ 2023 р.
Оцінка_____________/___ ___/_____
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Завідувач кафедри

_________- _____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Голова ЕК

_________ _____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Одеса – 2023

ЗМІСТ

ВСТУП

Задача Римана - це фундаментальний концепт у вивченні диференціальних рівнянь у часткових похідних. Вона також грає ключову роль в теорії гіперболічних кривих. Сформульована німецьким математиком Бернхардом Риманом у середині 19-того століття, задача Римана допомагає нам зрозуміти поведінку розв'язків диференціальних рівнянь у часткових похідних з дискретними або розривними початковими даними.

У класі узагальнених функцій задача Римана має унікальні можливості та перспективи. Узагальнені функції дають змогу досліджувати розподіли, що не є традиційними функціями але вже ще мають важливі та корисні властивості, такі як похідні та інтеграли. Такі функції допомагають справлятись з такими випадками як особливі точки та інші не плавні поведінки у диференціальних рівняннях у часткових похідних.

Риманова проблема у контексті узагальнених функцій допомагає відповісти на питання того, як побудувати розв'язок для гіперболічного закону збереження з заданим початковим розподілом, який не є неперервним. Задача включає в себе вивчення поведінки розв'язків у точках розриву та розуміння, як ці розв'язки можуть змінюватись з часом.

Вивчення задачі Римана у класі узагальнених функцій потребує використання передових математичний інструментів, таких як теорія розподілів, теорія мір та інтегралів, та функціональний аналіз. Вона включає в себе дослідження особливих точок та аналіз стійкості та збіжності розв'язків.

Задача Римана у класі узагальнених функцій може застосовуватися в різних сферах, включаючи гідродинаміку, газодинаміку, транспортні потоки, нелінійну оптику та інші. Розуміння поведінки розв'язків гіперболічних законів збереження з розривними початковими даними має важливе значення для більш точного моделювання та прогнозування явищ реального світу.

У підсумку, задача Римана забезпечує потужну основу для вивчення поведінки розв’язків диференціальних рівнянь . Вона надає змогу аналізувати негладкі явища та грає важливу роль у різноманітних наукових та інженерних задачах.

ОСНОВНА ЧАСТИНА

РОЗДІЛ 1 Загальна теорія узагальнених функцій

Нехай Г - шматково-гладка крива, що лежить на комплексній площині (замкнена чи незамкнена). Позначимо як E деякі лінійні підмножини множини усіх визначених на Г вимірних функцій $\Psi(t)$, яі можуть приймати і комплексні значення.

Нам необхідно побудувати простір функцій більш широкий, ніж E. Такий простір є простором функціоналів.

Визначення 1

Протором K основних функцій або основним простором (відносно E) назвемо лінійний нормований простір функцій $\varphi(t)$, які є визначеними та вимірними на Г та такі, що

1. Існує інтеграл Лебега $\int\limits_{\Gamma} \psi(t)\varphi(t)dt$ для будь-якої функції $\psi(t)$ з E та будь-якої $\varphi(t)$ з K;
2. Між функціоналами

$$(\psi, \varphi) = \int\limits_{\Gamma} \psi(t)\varphi(t)dt,\ \psi \in E \tag{1.1}$$

та функціями $\psi(t)$ існує взаємно-однозначне співвідношення.

Простір K є лінійним, тобто виконується наступна рівність

$$\left(\psi, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2\right) = \alpha\left(\psi, \varphi_1\right) + \beta\left(\psi, \varphi_2\right)$$

для будь-яких комплексних постійних α, β та функцій φ_1, φ_2, що належать простору K.

Визначення 2

Узагальненою функцією назвемо лінійний функціонал на основному просторі K, для якого виконується наступна умова

$$|(f, \varphi)| \leq const||\varphi||, \quad (1.2)$$

де $||\varphi||$ - норма функції у просторі K, а $const$ - константа, однакова для всіх $\varphi(t)$ з K.

Сукупність усіх узагальнених функцій позначимо через $K^{'}$. Введемо на $K^{'}$ операції додавання та множення на комплексне число функціоналів.

$$\left(f_1 + f_2, \varphi\right) = \left(f_1, \varphi\right) + \left(f_2, \varphi\right) \quad (1.3)$$

$$(\alpha f, \varphi) = \alpha(f, \varphi) \quad (1.4)$$

Враховуючи ці операції, простір $K^{'}$ є лінійною множиною.

Найменшу з констант, для яких справедлива нерівність (1.2), називають нормою функціонала f та позначають $||f||$.

Тобто

$$|(f, \varphi)| \leq ||f||\ ||\varphi||.$$

Так як кожному елементу f з $K^{'}$ можна у відповідність поставити числа $||f||$, то $K^{'}$ - це нормований простір.

Визначення 3

Узагальнені функції, які можливо представити у формі (1.1) називають регулярними, а ті, що неможливо представити у такій формі, називають сингулярними.

РОЗДІЛ 2 Задача Римана на дійсній осі.

Розглянемо крайову задачу Римана на дійсній осі у просторі L_2.

Розв'язати дану задачу означає знайти дві функції:

- $F(x)$, яка аналітична в заданій області A;
- $P(x)$, яка аналітична в області $\overline{A}$, що доповнює задану в усій комплексній площині.

На спільній межі областей шукані функції задовільняють лінійному рівнянню. Таке рівняння називають крайовою умовою.

Нехай область A - це напівплощина $Imz > 0$, тоді доповненням до області A є область $\overline{A} = \{z: Imz < 0\}$. В такому випадку крайові умови будуть задані на множині $Imz = 0$, тобто на дійсній осі.

Запишемо цю умову для функцій, що належать простору L_2 .

Нехай задана крайова умова

$$F^{+}(x) = A(x)F^{-}(x) + G(x), \quad {}_{-\infty<x<+\infty}, \tag{2.1}$$

де функції $A(x)$ та $G(x)$ - відомі. Тут функцію $A(x)$ назвемо коефіцієнтом задачі Римана.

Нехай функції $G(x)$ та $K(x)$ належать простору L_2, а $A(x) = 1 + K(x)$.

Нехай $K(x)$ задовольняє умові Гельдера на усій замкненій осі та

$$A(x) = 1 + K(x) \neq 0 \tag{2.2}$$

Розв'язки $F^{-}(x)$ та $F^{+}(x)$ задачі Римана будемо шукати у просторах L_2^{+} та L_2^{-},

тобто будемо вважати, що $F^{+}(x) \in L_2^{+}$, $F^{-}(x) \in L_2^{-}$.

Розглянемо часні випадки.

Приклад 1

$A(x) \equiv 1,\ G(x) \equiv 0$. Таким чином, пропонується розв'язати тривіальну задачу

$$F^{+}(x) = F^{-}(x) \tag{2.3}$$

Застосуємо до рівності (2.3) оператор V^{-1}. Тоді враховуючи (2.1) та, так як $K(x)$ належать простору L_2, $f_{+}(x) \equiv f\_(x) \equiv 0$, при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Звідси, $F^{+}(x) = F^{-}(x) \equiv 0$ (2.4)

Змогли отримати наступний результат: якщо функція одночасно належить пространствам L_2^{+} та L_2^{-}, то вона тотожно дорівнює 0.

Приклад 2

$A(x) = 1,\ G(x) \in L_2$ та $G(x)$ відмінна від нуля. В цьому випадку, крайова умова (2.1) має вигляд

$$F^{+}(x) = F^{-}(x) + G(x),\ -\infty < x < +\infty \tag{2.5}$$

Розв'яжемо задачу (2.5) та помітимо, що ті самі умови являють собою задачу про "стрибок". Тобто, мі маємо знайти функції $F^{+}(x)$ та $F^{-}(x)$, котрі після перетину дійсної осі будуть мати "стрибок" рівний $G(x)$.

Для розв'язку застосуємо оператор V^{-1} до обох частин рівності (2.5) та отримаємо:

$$f_{+}(x) = f(x) + g(x), \tag{2.6}$$

де $g(x) \in L_2$, $f_{+}(x) \in L_2^{+}$, $f(x) \in L_2^{-}$.

З властивостей функцій $f_{+}(x)$ та $f\_(x)$ та (2.6) слідує, що

$$f_{+}(x) = \begin{cases} g(x),\ x > 0 \\ 0,\ x < 0 \end{cases} = g_{+}(x);\ \ f_{-}(x) = \begin{cases} 0,\ x > 0 \\ -g(x),\ x < 0 \end{cases} = g_{-}(x) \tag{2.7}$$

Тоді задача про "стрибок" для будь-якої функції $G(x) \in L_2$ має єдиний розв'язок

$$F^{+}(x) = (Vg_{+})(x),\ F^{-}(x) = (Vg\_)(x), \tag{2.8}$$

де функції $g_+(x)$ та $g\_(x)$ визначені рівностями (2.7). Сформулюємо отриманий результат: усяку функцію $G(x) \in L_2$ можно єдиним чином представити у вигляді різниці

$$G(x) = G^+(x) - G^-(x), \qquad -\infty < x < +\infty, \quad (2.9)$$

де функція $G^+(x) \in L_2^+$, а функція $G^-(x) \in L_2^-$. При цьому функції $G^+(x)$ та $G^-(x)$ визначаються наступними рівностями

$$G^+(x) = \left(V\left\{\frac{signx+1}{2}V^{-1}G\right\}\right)(x), \quad G^-(x) = \left(V\left\{\frac{signx-1}{2}V^{-1}G\right\}\right)(x) \quad (2.10)$$

Рівності (2.10) будемо називати рівностями Сохоцького.

У випадку, коли $G(x)$ матиме громіздкий вигляд будемо використовувати такі позначення

$$[G(x)]^{\pm} = \left(V\left\{\frac{signx \pm 1}{2}V^{-1}G\right\}\right)(x) \quad (2.11)$$

Приклад 3

$A(x) = \frac{x-i}{x+i}$, $G(x) \equiv 0$. Маємо задачу:

$$F^+(x) = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)F^-(x), \quad -\infty < x < +\infty \quad (2.12)$$

Один з розв’язків очевидний:

$$F_1^+(x) = \frac{1}{x+i} \in L_2^+,\ F_1^-(x) = \frac{1}{x-i} \in L_2^- \quad (2.13)$$

Покажемо, що будь-який інший розв’язок $F^+(x)$ та $F^-(x)$ відрізняються від розв’язку (2.13) тільки постійним множником. Дійсно, за будь-якої константи C маємо тотожність:

$$\left(F^+(x) + \frac{C}{x+i}\right) = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)\left(F^-(x) + \frac{C}{x-i}\right). \quad (2.14)$$

Твердження буде доведене, якщо існує така константа C, за якої обидві частини рівності (2.14) тотожно дорівнюють 0. Тобто:

$$\exists C: \left(F^{+}(x) + \frac{C}{x+i}\right) \equiv \left(\frac{x-i}{x+i}\right)\left(F^{-}(x) + \frac{C}{x-i}\right) \equiv 0$$

Оберемо значення C таке, щоб в правій частині рівняння ліквідувався полюс у точці $z = - i$. Нехай $C = 2iF^{-}(- i)$. Очевидно, що

$$F^{+}(x) + \frac{C}{x+i} \in L_{2}^{+} \qquad (2.15)$$

Крім цього,

$$\Omega(x) \equiv \left(\frac{x-i}{x+i}\right)\left(F^{-}(x) + \frac{C}{x-i}\right) \in L_{2}^{-} \qquad (2.16)$$

Враховуючи рівності (2.14)-(2.16) функція $\Omega(x)$ належить одночасно просторам L_{2}^{+} та L_{2}^{-}. Таким чином, враховуючи рівності (2.3) та (2.4), можемо зробити висновок, що $\Omega(x) \equiv 0$. Твердження доведено.

Приклад 4

$A(x) = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\chi}$, де χ - ціле число, більше нуля. $G(x) \equiv 0$. Покажемо, що відповідна однорідна задача

$$F^{+}(x) = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\chi}F^{-}(x), \qquad - \infty < x < + \infty \qquad (2.17)$$

має рівно χ лінійно незалежних розв'язків.

Загальний розв'язок має вигляд

$$F^{+}(x) = \sum_{k=0}^{\chi-1} C_{k}\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\chi}\frac{1}{x+i}, \qquad F^{-}(x) = \sum_{k=0}^{\chi-1} C_{k}\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{\chi-k}\frac{1}{x+i},$$

(2.18)

де C_{k} - константи.

Використаємо метод математичної індукції.

Базою індукції є розглянутий вище випадок $\chi = 1$.

Припустимо, що рівності (2.18) справедливі для $\chi = n - 1$. Доведемо, рівності і для $\chi = n\,(n > 1)$. Для цього підставимо в рівність (2.17) $\chi = n$. Маємо:

$$\frac{x-i}{x+i}F^{+}(x) = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{n-1}F^{-}(x) \tag{2.19}$$

Далі, згідно формул Сохоцького (2.10) ліву частину рівняння (2.19) представимо у вигляді

$$\frac{x+i}{x-i}F^{+}(x) = \Psi^{+}(x) - \Psi^{-}(\mathrm{x}) \tag{2.20}$$

Помітимо, що представлення (2.20) надає змогу представити рівність (2.19) у вигляді (2.17)

$$\Psi^{+}(x) = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{n-1}\left[F^{-}(x) + \Psi^{-}(x)\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{n-1}\right]$$

(2.21)

У рівності (3.1) ліва частина належить простору L_2^{+}, а права частина - L_2^{-}. Згідно з припущенням індукції

$\Psi^{+}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} C_k\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{k-1}\frac{1}{x+i}$, де C_k - константи. Підставимо $\Psi^{+}(x)$ у (2.20).

$$\frac{x+i}{x-i}F^{+}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} C_k\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{k-1}\frac{1}{x+i} - \Psi^{-}(x)$$

$$F^{+}(x) - \sum_{k=1}^{n-1} C_k\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{k-1}\frac{1}{x+i} =- \left(\frac{x-i}{x+i}\right)\Psi^{-}(x) \tag{2.22}$$

Рівність (2.22) являє собою задачу (2.12). Як було доведено раніше

$\Psi^{-}(x) = \frac{C_0}{x-i}$, де C_0 - це константа. Таким чином формула (2.22) справедлива за $\chi = n$, що і було необхідно довести.

РОЗДІЛ 3 Індекс. Основна схема розв'язку задачі Римана.

При дослідження задачі Римана важливу роль грає індекс коефіцієнта задачі Римана. Дамо визначення індексу коефіцієнта $A(x)$. При фіксованому x величина $A(x)$ являє собою комплексне число, зображене точкою на комплексній площині. За зміни x від $-\infty$ до $+\infty$ вказана точка опише на комплексній площині неперервну та замкнуту криву. Крім цього крива буде проходити через точку 1, коли $x =\pm \infty$ та не буде проходити через початок координат.

Означення:

Число χ - кількість оборотів кривої навколо початку координат, відлічування проти часової стрілки. χ називають індексом функції $A(x)$ та позначають

$$\chi = IndA(x).$$

Відома формула: $\chi = IndA(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dLnA(x)$ (3.1)

Розв'язність задачі Римана та множина її розв'язків залежить від індексу. Далі продемонструємо основну схему розв'язку на прикладі, коли $\chi = 0$

Приведемо крайову умову (2.1) до вигляду (2.9) та припустимо, що нам відомо наступне подання

$$A(x) = X^{+}(x)\left[X^{-}(x)\right]^{-1}, \; -\infty < x < +\infty, \tag{3.2}$$

де функції $X^{\pm}(x)$ можливо аналітично продовжити на верхню та нижню півплощини, а також ці функції не мають там нулей.

Тоді крайова умова (2.1) буде мати вигляд:

$$\frac{F^{+}(x)}{X^{+}(x)} = \frac{F^{-}(x)}{X^{-}(x)} + \frac{G(x)}{X^{+}(x)}, \quad -\infty < x < +\infty$$

(3.3)

Введемо нові позначення

$$F^{+}(x)\left[X^{+}(x)\right]^{-1} = F_1^{+}(x),$$

$$F^{-}(x)\left[X^{-}(x)\right]^{-1} = F_1^{-}(x),$$

$$G_1(x) = G(x)[X(x)]^{-1}$$

Та отримуємо задачу про “стрибок”: $F_1^{+}(x) = F_1^{-}(x) + G_1(x)$, яку вже розв’язували.

Залишилось розв’язати задачу (2.12) про факторизацію функції $A(x)$. Для визначення функцій $X^{+}(x)$ та $X^{-}(x)$ необхідно прологарифмувати рівність (2.18) та розв’язати отриману задачу про “стрибок”.

$$lnX^{+}(x) = lnX^{-}(x) + lnA(x) \tag{3.4}$$

Помітимо, що у випадку, коли $\chi \neq 0$ реалізація кінцевої схеми виявляється набагато складнішою, так як функції $X^{+}(x)$ та $X^{-}(x)$ будуть мати нулі.

РОЗДІЛ 4 Розв'язання задачі Римана в загальному випадку

Розглянемо задачу Римана в загальному випадку. Нехай $\chi = IndA(x)$. Підставимо в (2.1) замість функції $A(x)$ її факторизацію (2.11) та отримаємо

$$F^{+}(x)e^{-B^{+}(x)} = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\chi}F^{-}(x)e^{-B^{-}(x)} + G(x)e^{-B^{+}(x)}, \quad (4.1)$$

де $G(x)e^{-B^{+}(x)}$ - відома функція, що належить простору L_2. Представимо її у вигляді різниці.

$$G(x)e^{-B^{+}(x)} = \left[G(x)e^{-B^{+}(x)}\right]^{+} - \left[G(x)e^{-B^{+}(x)}\right]^{-} \quad (4.2)$$

В такому випадку крайова умова (2.1) прийме вигляд:

$$F^{+}(x)e^{-B^{+}(x)} - \left[G(x)e^{-B^{+}(x)}\right]^{+} = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\chi}F^{-}(x)e^{-B^{-}(x)} - \left[G(x)e^{-B^{+}(x)}\right]^{-} \quad (4.3)$$

Розглянемо випадки за різних значень χ.

Випадок $\chi = 0$. Ліва частина рівняння (3.1) належить L_2^{+}, а права - простору L_2^{-}.

Враховуючи, що $F^{+}(x) \in L_2^{+}$, $F^{-}(x) \in L_2^{-}$ будемо мати

$$F^{-}(x)e^{-B^{-}(x)} - \left[G(x)e^{-B^{+}(x)}\right]^{-} = F^{-}(x)e^{-B^{-}(x)} - \left[G(x)e^{-B^{+}(x)}\right]^{+} \equiv 0$$

(4.4)

Можемо бачити, що у випадку нульового індекса задача Римана (2.1) має єдиний розв'язок.

$$F^{+}(x) = e^{B^{+}(x)}\left[G(x)e^{-B^{+}(x)}\right]^{+}, \qquad F^{-}(x) = e^{B^{-}(x)}\left[G(x)e^{-B^{+}(x)}\right]^{+}$$

(4.5)

Випадок $\chi > 0$. Представимо рівність (3.1) у вигляді

$$F^{+}(x)e^{-B^{+}(x)} - \left[G(x)e^{-B^{+}(x)}\right]^{+} =$$

$$= \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\chi}\left\{F^{-}(x)e^{-B^{-}(x)} - \left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{\chi}\left[G(x)e^{-B^{-}(x)}\right]^{-}\right\} \quad (4.6)$$

Згідно з рівняннями (2.18)

$$F^{+}(x)e^{-B^{+}(x)} - \left[G(x)e^{-B^{+}(x)}\right]^{+} = \sum_{k=0}^{\chi-1} C_{k}\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{k}\frac{1}{x+i} \qquad (4.7)$$

З рівнянь (4.6) та (4.7) можемо знайти функції $F^{+}(x)$ та $F^{-}(x)$

$$F^{+}(x) = e^{B^{+}(x)}\left\{\left[G(x)e^{-B^{+}(x)}\right]^{+} + \sum_{k=0}^{\chi-1} C_{k}\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{k}\frac{1}{x+i}\right\}$$

(4.8)

$$F^{-}(x) = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\chi} e^{B^{-}(x)}\left\{\left[G(x)e^{-B^{+}(x)}\right]^{+} + \sum_{k=0}^{\chi-1} C_{k}\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{k}\frac{1}{x+i}\right\} \qquad (4.9)$$

Формули (4.8) та (4.9) є розв'язком задачі Римана для будь-яких комплексних констант C_{k}.

Можемо зробити висновок, що у випадку додатного індекса задача Римана (2.1) безумовно має розв'язок та відповідна однорідна задача має χ лінійно незалежних розв'язків.

Випадок $\chi < 0$**.** Як і у випадку $\chi = 0$, ліва частина рівності (4.3) належить L_{2}^{+}, а права частина - L_{2}^{-}. Прирівнюємо обидві частини рівності (4.3) до нуля та отримуємо

$$F^{+}(x) = e^{B^{+}(x)}\left[G(x)e^{-B^{+}(x)}\right]^{+}, \quad F^{-}(x) = \left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{\chi} e^{B^{-}(x)}\left[G(x)e^{-B^{+}(x)}\right]^{-}$$

(4.10)

Таким чином, у випадку від'ємного індекса задача Римана (2.1) може мати єдиний розв'язок (4.10). Функція $F^{+}(x)$ належить L_{2}^{+}, однак функція $F^{-}(x)$ не обов'язково має належати простору L_{2}^{-}, так як множник $\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{\chi}$ має полюс порядка $|\chi|$ у точці $z = i$. Для компенсації цього полюса необхідно, щоб функція $\left[G(x)e^{-B^{+}(x)}\right] \equiv N^{-}(x)$ була аналітично продовжена у нижню півплощину та мала у точці $z = i$ нуль порядка $|\chi|$, тобто

$$\frac{d^k}{dz^k} N^{-}(x)\Big|_{z=i} = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, |\chi| - 1 \quad (4.11)$$

Умова (4.11) необхідна та достатня для того, щоб задача Римана (2.1) мала розв’язок.

Отримані в останніх трьох випадках результати про залежність розв’язку задачі Римана (2.1) від індекса χ та числа її лінійно незалежних розв’язків складає теорему Гахова.

Теорема Гахова

Якщо індекс χ задачі Римана (2.1) більше нуля, то відповідна однорідна задача Римана безумовно має розв’язок, яких залежить від формул (4.8) та (4.9) та від χ довільних комплексних констант. Якщо $\chi \leq 0$, то відповідна однорідна задача має лише тривіальний розв’язок, а неоднорідна задача за виконання умов (4.11) має єдиний розв’язок.

РОЗДІЛ 5 Крайова задача Римана у просторі узагальнених функцій

Поставимо задачу Римана наступним чином. Нехай $A(x)$ - задана, m разів диференційована функція, яку можна представити у вигляді

$$A(x) = 1 + K(X), \tag{5.1}$$

де $K(x) \in L_2^+\{0, m\}$.

Припустимо також, що на замкненій осі x похідна $\frac{d^m}{dx^m}K(x)$ задовільняє умові Гельдера та $A(x) = 1 + K(x) \neq 0$.

Нехай G - задана основна функція у просторі $L_2^+\{0, m\}$. Необхідно знайти узагальнених функції F^- та F^+, що задовольняють наступним умовам

$$F^+ = A(x)F^- + G, \tag{5.2}$$

де $F^+ \in L_2^+\{0, m\}$, $F^- \in L_2^-\{0, m\}$ (5.3)

Рівняння (5.2) будемо розуміти так: для будь-яких (основних) функцій $\Phi(x)$ з $L_2^+\{0, m\}$ повинна виконуватись рівність

$$\left(F^+, \Phi(x)\right) = \left(F^-(x), A(x)\Phi(x)\right) + (G, \Phi(x)) \tag{5.4}$$

Розглянемо декілька часних випадків.

Приклад 5

$F^+ = F^-$. Так само, як і у прикладі 1, задача (5.2) має єдиний розв’язок

$$F^+ = F^- = 0.$$

Приклад 6

$$F^+ = F^- + G. \tag{5.5}$$

Задача про “стрибок” (5.5) розв’язується так само, як і в прикладі 2. Ця задача за будь-якої функції $G \in L_2^+\{0, m\}$ має єдиний розв’язок.

$$F^{+} = V\left\{\frac{sgnx+1}{2}V^{-1}G\right\} \in L_2^{+}\{0, m\} \tag{5.6}$$

$$F^{-} = V\left\{\frac{sgnx-1}{2}V^{-1}G\right\} \in L_2^{-}\{0, m\} \tag{5.7}$$

Для функції $G \in L_2^{+}\{0, m\}$ збережемо позначення

$$[G]^{+} = V\left\{\frac{sgnx+1}{2}V^{-1}G\right\} \in L_2^{+}\{0, m\} \tag{5.8}$$

$$[G]^{-} = V\left\{\frac{sgnx-1}{2}V^{-1}G\right\} \in L_2^{-}\{0, m\} \tag{5.9}$$

Звідси

$$[G]^{+} - [G]^{-} = G \tag{5.10}$$

Приклад 7

$$F^{+} = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)F^{-} \tag{5.11}$$

Дана задача у просторах L_2^{+} та L_2^{-} була розв'язана у прикладі 3, користуючись формулами (2.13).

$$F^{+} = \frac{1}{x+i}, \quad F^{-} = \frac{1}{x-i} \tag{5.12}$$

Покажемо, що в більш широких просторах задача Римана (5.11) не має інших розв'язків та, що будь-який розв'язок F^{+} та F^{-} відрізняється від розв'язку (5.11) тільки постійним множником. (Доведення аналогічно тому, що проведене у прикладі 3).

Для будь-якої константи C має місце тотожність

$$\left(F^{+} + \frac{C}{x+i}\right) = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)\left(F^{-} + \frac{C}{x-i}\right) \tag{5.13}$$

Очевидно, що

$$F^{+} + \frac{C}{x+i} \in L_2^{+}\{0, m\} \tag{5.14}$$

Крім цього, при

$$C = \frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} f\_(t)e^{t}dt \tag{5.15}$$

маємо

$$\left(\frac{x-i}{x+i}\right)\left(F^{+}+\frac{C}{x+i}\right)\in L_{2}^{-}\{0,m\} \qquad (5.16)$$

З (5.14), (5.13) та (5.16) слідує, що

$$F^{+}+\frac{1}{x+i}=F^{-}+\frac{1}{x-i}\equiv 0 \qquad (5.17)$$

Твердження доведено.

Приклад 8

$F^{+}=\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\chi}F^{-}$, де χ - ціле додатне число. Задача має рівно χ лінійно незалежних розв'язків. Загальний розв'язок має вигляд (2.18).

$$F^{+}=\sum_{k=0}^{\chi}C_{k}\left(\frac{x-i}{x+i}\right)\frac{1}{x+i},\quad F^{-}=\sum_{k=0}^{\chi}C_{k}\left(\frac{x+i}{x-i}\right)\frac{1}{x+i}.$$

Доведення попереднього твердження проводиться так само, як і в прикладі 4. Дійсно,

$$\left(\frac{x-i}{x+i}\right)\left(F^{+}+\frac{C}{x+i}\right)=F^{-}-\frac{2i}{x+i}F^{-}+\frac{C}{x+i}.$$

Покажемо, що $F^{-}-\frac{2i}{x+i}F^{-}+\frac{C}{x+i}\in L_{2}^{-}\{0,m\}$.

Покладемо $K(x)=-\frac{2i}{x+i}$ та застосуємо формулу згортки

$$V^{-1}\left\{F^{-}-\frac{2i}{x+i}F^{-}+\frac{C}{x+i}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}k(x-t)f\_(t)-c\begin{cases}-i\sqrt{2\pi}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

з урахуванням (5.15) отримаємо при $x>0$

$$2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{x+t}f\_(t)dt + iC\sqrt{2\pi e^{-x}}\equiv 0.$$

Що і необхідно було довести.

РОЗДІЛ 6 Особливий випадок однорідної задачі Римана на дійсній прямій у класі узагальнених функцій

Розглянемо задачу Римана такого виду

$$F^{+}D(x) = F^{-}(x), \quad (6.1)$$

де $D(x) = xD_1(x)$, а функція $D_1(x) = \frac{x+i}{x}D(x) \neq 0$ на всій дійсній осі задовольняє умові Гельдера. При цьому $\chi = Ind\left(D_1(x)\right)^{-1} = n$. Покладемо також

$$\frac{x}{x+i}F^{+} \in L_2^{+}, \quad (6.2)$$

а

$$F^{-} \in L_2^{-}. \quad (6.3)$$

Запишемо задачу Римана (6.1) у вигляді

$$F^{+}\frac{x}{x+i} = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{n}D_2(x)F^{-}, \quad (6.4)$$

де функція $D_2(x) = \left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{n}D_1^{-1}(x)$ має нульовий індекс.

Тоді маємо

$$F^{+}\frac{x}{x+i} = X^{+}(x)\sum_{k=0}^{n-1}C_k\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{k}\frac{1}{x+i}, \quad (6.5)$$

$$F^{-}(x) = X^{-}(x)\sum_{k=0}^{n-1}C_k\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{n-k}\frac{1}{x+i}, \quad (6.6)$$

де $X^{\pm}(x) = exp\left\{V\left(\frac{\underline{sgnt\pm1}}{2}\right)\left(V^{-1}D_2\right)(t)\right\}(x)$.

При цьому узагальнену функцію F^{+} визначимо наступним чином

$$F^{+} = X^{+}(x)\sum_{k=o}^{n-1}C_k\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\chi}\frac{1}{x} + C_n\delta(x).$$

Розглянемо випадок $\chi = 1$.

$$F^{+} = C_0X^{+}(x)\frac{1}{x} + C_1\delta(x), \quad (6.7)$$

де функцію F^{+} можна знайти з факторізації функції $D_2(x) = \left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{n}D_1(x)$, а $\delta(x)$ - це функція Дірака. При цьому константи C_0 та C_1 необхідно обрати так, щоб оригінал функції F^{+} при $x < 0$ дорівнював нулю.

Визначимо структуру отриманого розв'язку. Представимо функцію $F^{+}(x)$ у вигляді

$$F^{+}(x) = C_0 E^{+}(x) + \frac{C_0 X^{+}(0)}{x} + C_1 \delta(x), \quad (6.8)$$

де $$E^{+}(x) = \frac{\left(X^{+}(x) - X^{+}(0)\right)}{x}$$

(6.9)

Застосуємо до обох частин рівності (6.8) зворотне перетворення Фур'є. В результаті отримаємо

$$f_{+}(t) = \begin{cases} C_0 X^{+}(0)\, i\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{C_1}{\sqrt{2\pi}}, & t<0 \\ -C_0 e_{+}(u) - C_0 X^{+}(0)\, i\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{C_1}{\sqrt{2\pi}}, & t>0 \end{cases}, \quad (6.10)$$

де $e_{+}(u) = \left(V^{-1}E^{+}\right)(u)$. (6.11)

Так як функція $f_{+}(t)$ повинна обертатися в нуль при $t < 0$, то з рівності (6.10) одразу випливає, що константи C_0 та C_1 зв'язані між собою наступним чином

$C_1 = -\pi i C_0 X^{+}(0)$.

(6.12)

Рівність (6.12) дозволяє стверджувати, що однорідна задача Римана (6.1) при $\chi = 1$ має один лінійно незалежний розв'язок. При цьому функція F^{+} визначається з рівності (6.4) з урахуванням співвідношення, а функція F^{-} - через крайову умову (6.1). З урахування (6.12) маємо розв'язок

$$F^{+}(x) = C_0\left(E^{+}(x) + \frac{X^{+}(0)}{x}\right),\ F^{-}(x) = \frac{C_0 X^{+}(0) X^{-}(x)}{x-i},$$

(6.13)

де C_0 - це довільна комплексна константа. Відмітимо, що знайдені функції дійсно задовольняють умовам (6.2) та (6.3).

ВИСНОВОК

Підсумовуючи, варто відмітити, що методи розв'язання крайової задачі Римана у класі узагальнених функцій удосконалюються та розвиваються до цих пір. В першу чергу відбувається це завдяки багаточисельним застосування задачі Римана при розв’язанні важливих прикладних задач природознавства. Це процес і досі продовжується.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ю. І. Черський, П. В. Керекеша, Д. П, Керекеша. Методи спряження аналітичних функцій з застосуваннями - Одеса: Астропринт, 2010. - 552 с.
2. Ф. Д. Гахов, І. Ю. Черський. Рівняння типу згортки. - Наука, 1978. - 296 с.
3. I. M. Gelfand, G. E. Shilov. Generalized functions volume 1. - Academic Press, 1964. - 423 с.