

МОМЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА, ОБРАЗОВАННОГО СУПЕРПОЗИЦИЕЙ ЭРМИТ-ГАУССОВЫХ МОД

А. Я. Бекшаев

Одесский государственный университет им. И. И. Мечникова

Получены формулы для моментов функции Вигнера параксиального пучка, который представляется произвольной когерентной суперпозицией эрмит-гауссовых пучков с плоскими волновыми фронтами. Обсуждаются возможности применения результатов для моделирования реальных пучков и для расчета оптических систем, осуществляющих заданные преобразования поперечной структуры пучка.

Пространственно-угловое распределение интенсивности (ПУРИ) излучения является одной из важнейших характеристик лазерного пучка. Однако его точное описание требует, вообще говоря, задания большого числа параметров, что в практических приложениях неудобно, а нередко и излишне. Поэтому были предложены различные схемы более рациональной характеристики ПУРИ, среди которых можно выделить систематическое использование пространственно-угловых моментов функции Вигнера [1, 2] и представление пучка как суперпозиции стандартных эрмит-гауссовых (ЭГ) мод [3]. Первый способ отличается теоретической простотой, а также наглядностью и непосредственной измеримостью вводимых параметров, второй же привлекает тем, что значения параметров ПУРИ могут быть напрямую связаны с физической картиной лазерной генерации. Очевидно, найти соответствие между характеристиками пучка,

используемыми в этих подходах, было бы весьма полезным, и настоящее сообщение посвящено решению этой задачи в некоторых важных частных случаях. Результаты нижеследующего анализа могут быть использованы, между прочим, и для моделирования произвольного лазерного пучка некоторой суперпозицией ЭГ мод. Это позволит расширить возможности и сферу применимости метода "встроенного" лазерного пучка [1,2], дополняя данные ранее рекомендации по использованию некогерентной смеси двух гауссовых пучков или внеосевого гауссова пучка [1].

В случае суперпозиции ЭГ мод нормированное поперечное распределение комплексной амплитуды представляется в виде

$$u(x, y) = \sum_{m,n} a_{mn} u_{mn}(x, y), \quad \sum_{m,n} |a_{mn}|^2 = 1, \quad (1)$$

где

$$u_{mn}(x, y) = (2^{m+n} \pi m! n! b_x b_y)^{-1/2} H_m \left(\frac{x}{b_x} \right) H_n \left(\frac{y}{b_y} \right) \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{b_x^2} + \frac{y^2}{b_y^2} \right) \right] \quad (2)$$

распределение, соответствующее нормированной ЭГ моде [3]. В выражении (2) x, y — декартовы координаты в плоскости поперечного сечения пучка, $m \geq 0, n \geq 0$ — целые индексы моды, H_m — полином Эрмита порядка m , b_x и b_y — поперечные размеры ортогональных сече-

ний пучка ЭГ моды. В силу полноты системы функций (2) разложение (1) существует для любой функции $u(x, y)$, т. е. для любого реального лазерного пучка.

Матрица моментов произвольного параксиального пучка определяется равенством [1]

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} = 2k \int \begin{pmatrix} x^2 & xy & xp_x & xp_y \\ yx & y^2 & yp_x & yp_y \\ p_x x & p_x y & p_x^2 & p_x p_y \\ p_y x & p_y y & p_y p_x & p_y^2 \end{pmatrix} I(x, y, p_x, p_y) dx dy dp_x dp_y,$$

где $Q_{11} \dots Q_{22}$ — матрицы размерности 2×2 , k — волновое число излучения, p_x и p_y являются фурье-сопряженными по отношению к x и y переменны-

ми, $I(x, y, p_x, p_y)$ — функция Вигнера [4] пучка, нормированная условием $\int I(x, y, p_x, p_y) dx dy dp_x dp_y = 1$; интегралы берутся в бесконечных пределах по каж-

дой переменной (предполагается, что пространственная ограниченность пучка обеспечивает их сходимость).

Найдем матрицу моментов пучка, описываемого уравнениями (1), (2). С помощью формул

$$Q = 2 \begin{vmatrix} kb_x^2(K_x + L'_x) & kb_x b_y(M' + N') & -L''_x & \frac{b_x}{b_y}(M'' - N'') \\ kb_x b_y(M' + N') & kb_y^2(K_y + L'_y) & -\frac{b_y}{b_x}(M'' + N'') & -L''_y \\ -L''_x & -\frac{b_y}{b_x}(M'' + N'') & \frac{1}{kb_x^2}(K_x - L'_x) & \frac{1}{kb_x b_y}(M' - N') \\ \frac{b_x}{b_y}(M'' - N'') & -L''_y & \frac{1}{kb_x b_y}(M' - N') & \frac{1}{kb_y^2}(K_y - L'_y) \end{vmatrix}, \quad (3)$$

где

$$K_x = \frac{1}{2} \sum_{m,n} |a_{mn}|^2 (2m+1),$$

$$K_y = \frac{1}{2} \sum_{m,n} |a_{mn}|^2 (2n+1), \quad (4)$$

$$L_x = \sum_{m,n} a_{mn} a_{m+2,n}^* \sqrt{(m+1)(m+2)},$$

$$L_y = \sum_{m,n} a_{mn} a_{m,n+2}^* \sqrt{(n+1)(n+2)}, \quad (5)$$

$$M = \sum_{m,n} a_{m,n+1} a_{m+1,n}^* \sqrt{(m+1)(n+1)},$$

$$N = \sum_{m,n} a_{mn} a_{m+1,n+1}^* \sqrt{(m+1)(n+1)}, \quad (6)$$

штрих обозначает действительную, а два штриха — мнимую часть комплексной величины.

Результаты (3) — (6) дают общую основу для решения поставленной задачи. При этом, как и следовало ожидать, взаимно однозначного соответствия между двумя схемами характеристики пучка не обнаруживается: если для каждого пучка матрица моментов определяется единственным образом, то обратная процедура — подбор суперпозиции ЭГ мод с заданной матрицей моментов — осуществима множеством способов (если, конечно, не налагать явных ограничений на коэффициенты a_{mn}). Действительно, нетрудно видеть, что для произвольной матрицы моментов, имеющей не более десяти независимых элементов [1], из (3) — (6) вытекают уравнения, однозначно определяющие десять вещественных величин, образующих K_x , K_y , L_x , L_y , M и N . Зная их, можно однозначно определить не более десяти величин, характеризующих коэффициенты a_{mn} , а следовательно, и соответствующий вид разложения (1) будет единственным, только если ограничить число членов суперпозиции или потребовать, чтобы между ними существовали некоторые связи.

Все же, несмотря на неоднозначность моделирования произвольной матрицы моментов суперпозицией вида (1), формулы (3) — (6) позволяют определить те параметры ЭГ мод, которые при этом следует принимать во внимание. Рассмотрим

приложения А работы [1], а также рекуррентных соотношений и соотношений ортогональности для полиномов Эрмита в итоге довольно громоздких преобразований получим представление

некоторые следствия и способы использования результатов (3) — (6) на ряде примеров.

1. Пусть пучок представляется “чистой” ЭГ модой (2); в таком случае в (3) — (6) только один из коэффициентов a_{mn} равен единице, а все остальные обращаются в нули. Матрица моментов становится диагональной:

$$Q_{mn} = \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{vmatrix}_{mn} =$$

$$= \text{diag} \left[kb_x^2(2m+1), kb_y^2(2n+1), \frac{2m+1}{b_x^2 k}, \frac{2n+1}{b_y^2 k} \right], \quad (7)$$

Инварианты этой матрицы моментов (см. [1]) имеют вид

$$\Lambda_x = M_x^2 = 2m+1; \quad \Lambda_y = M_y^2 = 2n+1, \quad (8)$$

$$\det Q_{mn} = (2m+1)^2 (2n+1)^2,$$

$$\text{Sp}(Q_{11} Q_{22} - Q_{12}^2)_{mn} = (2m+1)^2 + (2n+1)^2. \quad (9)$$

Соотношения (8) и (9) позволяют подобрать ЭГ пучок с заданной матрицей моментов. Как видно из формул, это возможно не всегда, а только для таких пучков, у которых матрица моментов имеет целочисленные инварианты Λ_x и Λ_y .

2. Рассмотрим теперь пучок с простым астигматизмом [3], т. е. такой, в котором поперечное распределение комплексной амплитуды характеризуется симметрией или антисимметрией относительно осей координат (к такому типу относятся, например, все аксиально-симметричные пучки, наиболее часто встречающиеся на практике). Частным случаем такого пучка является и ЭГ мода (2), симметрия или антисимметрия которой определяется четностью или нечетностью соответствующего индекса. Очевидно, суперпозиция (1) сохраняет эти свойства, если все ее компоненты имеют одинаковую четность. Следовательно, для пучков с простым астигматизмом $M = N = 0$, а матрица моментов, как и следовало ожидать, приобретает характерный для таких пучков вид с нулями на пересечениях строк и столбцов различ-

ной четности. В таком случае пучок описывается двумя 2×2 -матрицами моментов Q_x и Q_y , где, например,

$$Q_x = 2k \int \begin{vmatrix} x^2 & xp_x \\ p_x x & p_x^2 \end{vmatrix} I(x, y, p_x, p_y) dx dy dp_x dp_y = \\ = 2 \begin{vmatrix} kb^2(K_x + L'_x) & -L'_x \\ -L'_x & \frac{1}{kb^2}(K_x - L'_x) \end{vmatrix},$$

а инварианты пучка удовлетворяют соотношениям

$$\Lambda_x^2 = \det Q_x = 4(K_x^2 - |L'_x|^2), \\ \Lambda_y^2 = \det Q_y = 4(K_y^2 - |L'_y|^2),$$

из которых для чистой эрмит-гауссовой моды вытекают равенства (8), (9).

3. Еще одна любопытная ситуация возникает, когда все коэффициенты разложения (1) действительны. В этом случае фазы всех членов суперпозиции одинаковы, и так как каждый из них обладает плоским фронтом, то и результирующий пучок должен иметь плоский фронт. Действительно, тогда равны нулю все мнимые части величин (4) — (6), и матрица (3) оказывается блочно-диагональной с $Q_{12} = Q_{21} = 0$, что, согласно [1], и является признаком перетяжки пучка [3] (плоского фронта).

4. Типичные случаи реального осуществления суперпозиций вида (2) возникают при многомодовой генерации в резонаторах с вырожденными модами типа (1). Ограничимся рассмотрением ситуации, когда $b_x = b_y = b$; тогда вырождены все пучки вида (2) с одинаковыми значениями $m + n$. Рассмотрим две простейшие суперпозиции, которые относятся к случаю $m + n = 1$. При этом из всех коэффициентов разложения (1) отличными от нуля могут быть только два из коэффициентов a_{mn} : a_{10} и a_{01} .

а) Пусть $a_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $a_{01} = \frac{i}{\sqrt{2}}$. Такой пучок описывается распределением

$$u_a(x, y) = \frac{1}{b^2 \sqrt{\pi}} (x + iy) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2b^2}\right) = \\ = \frac{1}{b^2 \sqrt{\pi}} r \exp\left(-\frac{r^2}{2b^2} + i\varphi\right) \quad (10)$$

(r и φ — полярные координаты) и представляет собой элементарный пример «сингулярного» пучка с винтовой дислокацией волнового фронта [5, 6]. Здесь $K_x = K_y = 1$, $L_x = L_y = 0$, $M = i/2$, $N = 0$ и матрица моментов имеет вид

$$Q = Q_a = \begin{vmatrix} 2kb^2 \mathbf{I} & \mathbf{J} \\ -\mathbf{J} & \frac{2}{kb^2} \mathbf{I} \end{vmatrix}, \quad (11)$$

где $\mathbf{I}$ — единичная, $\mathbf{J} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ — простейшая антисимметричная 2×2 матрицы.

б) Следующая суперпозиция отличается от рассмотренной выше тем, что оба ненулевых коэффициента разложения действительны: $a_{10} = a_{01} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Такая незначительная разница приводит к заметным физическим следствиям. Соответствующее распределение комплексной амплитуды

$$u_b(x, y) = \frac{1}{b^2 \sqrt{\pi}} (x + y) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2b^2}\right) = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x'}{b^2} \exp\left(-\frac{x'^2 + y'^2}{2b^2}\right) \quad (12)$$

представляет собой «чистую» ТЕМ₁₀ моду в системе координат, развернутой на 45 градусов: $x' = (x + y)/\sqrt{2}$, $y' = (-x + y)/\sqrt{2}$, а матрица моментов пучка (8) имеет блочно-диагональный вид

$$Q = Q_b = \begin{vmatrix} kb^2 \mathbf{P} & 0 \\ 0 & \frac{1}{kb^2} \mathbf{P} \end{vmatrix}, \quad (13)$$

где 0 — нулевая 2×2 матрица, а $\mathbf{P} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Этот пример показателен тем, что различие в виде матриц Q_a и Q_b можно напрямую связать с присутствием винтовой дислокации в первом из пучков. Между тем легко убедиться, что инварианты матриц (11) и (13) одинаковы:

$$\det Q_{a,b} = 9, \text{Sp}(Q_{11} Q_{22} - Q_{12}^2)_{a,b} = 10;$$

следовательно, матрица Q_a может быть преобразована к виду (13) некоторым симплектическим преобразованием [1]. Поскольку как пучок (10), так и пучок (12) образованы комбинацией одних и тех же ЭГ мод, это означает, что распределение комплексной амплитуды (10) можно преобразовать к виду (12) с помощью некоторой оптической системы, состоящей только из квадратичных корректоров фазы и свободных промежутков [1].

Этот вывод может иметь значение для адаптивной оптики, где принято считать, что исправление фазовых возмущений, приводящих к дислокациям волнового фронта, представляет собой сложную проблему из-за невозможности создать корректирующее зеркало требуемой формы. Как видно, по крайней мере, в данном частном случае из пучка с дислокацией фронта нетрудно получить пучок того же качества, но без дислокации, который затем, если надо, можно корректировать обычными средствами адаптивной оптики.

В заключение приведем пример такого преобразования. С помощью схемы преобразования произвольной матрицы моментов к блочно-диагональному виду ([1], разд. 4) можно рассчитать оптическую систему, через которую следует пропустить пучок (10), чтобы он приобрел вид (12). Такая система определяется неоднозначно, и прак-

тический выбор того или иного варианта диктуется в конечном счете соображениями удобства. В частности, можно показать, что

$$Q_b = H Q_a \bar{H},$$

где

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & kb^2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & kb^2 \\ -(kb^2)^{-1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -(kb^2)^{-1} & 0 & -1 \end{vmatrix} -$$

матрица передачи преобразующей оптической системы. Данная матрица передачи имеет нули на пересечениях строк и столбцов различной четности, т. е. описывает систему с простым астигматизмом; она распадается на независимые подматрицы

$$H_x = \begin{vmatrix} A_x & B_x \\ C_x & D_x \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & kb^2 \\ -(kb^2)^{-1} & 1 \end{vmatrix},$$

$$H_y = \begin{vmatrix} A_y & B_y \\ C_y & D_y \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} -1 & kb^2 \\ -(kb^2)^{-1} & -1 \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Нетрудно уяснить физический смысл этих матриц. Обе допускают представление

$$H_{x,y} = \begin{vmatrix} -g_{2x,y} & z_{01}z_{02}/f \\ -1/f & -g_{1x,y} \end{vmatrix}$$

соответствующее матрице преобразования «перетяжки в перетяжку»; при этом $f = \sqrt{2}kb^2$, $z_{01} = z_{02} = kb^2$ — совпадающие конфокальные параметры входного и выходного пучков, $g_{1x} = g_{2x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $g_{1y} = g_{2y} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Несложно пред-

ставить и оптическую систему, выполняющую преобразование H ; один из возможных вариантов изображен на рисунке. Эта система образована двумя одинаковыми астигматическими линзами, расположенными во входной и выходной плоскостях. Расстояние между линзами равно $L = kb^2/\sqrt{2}$, фокусное расстояние в плоскости xz составляет $f_x = \sqrt{2}L(\sqrt{2}-1)^{-1}$, а в плоскости yz

$f_y = \sqrt{2}L(\sqrt{2}+1)^{-1}$. Это приводит к тому, что в плоскости yz пучок фокусируется, и TEM_{01} -составляющая (10) приобретает дополнительный набег фазы, который компенсирует исходную разность фаз. Действительно, при проходе системы с матрицами передачи (14) мода TEM_{10} приобретает

множитель [3] $\left(A_x + \frac{B_x}{\bar{\rho}}\right)^{-3/2} \left(A_y + \frac{B_y}{\bar{\rho}}\right)^{-1/2}$, а мода

TEM_{01} — множитель $\left(A_x + \frac{B_x}{\bar{\rho}}\right)^{-1/2} \left(A_y + \frac{B_y}{\bar{\rho}}\right)^{-3/2}$

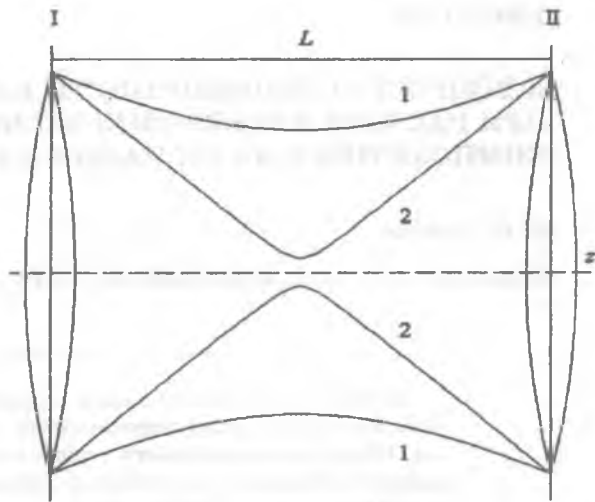


Рис. 1. Оптическая система, позволяющая устранить дислокацию волнового фронта: z — ось системы; I, II — входная и выходная опорные плоскости, в которых расположены тонкие линзы; 1 и 2 — схематические контуры сечения пучка в плоскостях xz и yz соответственно

(здесь $\bar{\rho} = -ikb^2$ — комплексный радиус кривизны фронта исходного пучка). Из (14) легко видеть, что отношение этих факторов в точности равняется i , и потому разность фаз между ЭГ составляющими пучка (10) после прохождения оптической системы исчезает.

Рассмотренные примеры, перечень которых может быть продолжен, иллюстрируют особенности двух способов характеристики пучка и демонстрируют эффективность их комбинированного применения. Все это должно облегчить использование полученных результатов в конкретных исследованиях лазерных пучков.

Литература

1. Ананьев Ю. А., Бекшаев А. Я. Теория моментов интенсивности произвольных световых пучков // *Опт. и спектр.* — 1994. — Т. 76, № 4. — С. 624—635.
2. Siegman A. E. Handbook of Laser Beam Propagation and Beam Quality Formulas Using the Spatial-Frequency and Intensity-Moment Analysis // *Draft version of 7/2/1991.*
3. Ананьев Ю. А. Оптические резонаторы и лазерные пучки. — М.: Наука, 1990. — 264 с.
4. Bastiaans M. J. Second-order moments of the Wigner distribution function in first-order optical systems // *Optik.* — 1991. — V. 88. — P. 163—168.
5. Soskin M. S., Vasnetsov M. V., Basistiy I. V. Optical wavefront dislocations // *Proc. SPIE.* — 1995. — V 2647. — P. 57—62.
6. Basistiy I. V., Soskin M. S., Vasnetsov M. V. Optical wavefront dislocations and their properties // *Opt. Commun.* — 1995. — V. 119. — P. 604—612.