

О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ ФУНКЦИИ $\bar{S}_k(n)$

An asymptotic formula is constructed for a mean value of the function $\bar{S}_k(n)$ which is dual to the Smarandache function $S_k(n)$. O - and Ω -estimates for the second moment of the remainder term are obtained.

Побудовано асимптотичну формулу для середнього значення функції $\bar{S}_k(n)$, яка є дуальною до функції Смарандача $S_k(n)$. Отримано O - і Ω -оцінки другого моменту залишкового члена.

1. Введение. Пусть k — фиксированное натуральное число. Обозначим через $S_k(n)$ функцию натурального аргумента, которая определяется как наибольшее натуральное число m такое, что $m^k | n$. Функцию $\bar{S}_k(m)$ можно рассматривать как двойственную к функции Смарандача, исследованной в работах [1, 2]. Функция $\bar{S}_k(n)$ изучалась в работах [3, 4].

Целью настоящей статьи является построение верхних и нижних оценок остаточного члена в асимптотической формуле для среднего значения $\bar{S}_k(n)$.

Легко видеть, что функция $\bar{S}_k(n)$ мультипликативна и $\bar{S}_k(p^a) = p^{[a/k]}$ для простого числа p (здесь $[u]$ обозначает целую часть вещественного числа u). Отсюда следует, что производящий ряд Дирихле для последовательности $\{S_k(n)\}$, $n = 1, 2, \dots$, в области $\Re s > 1$ имеет вид

$$F_k(s) := \sum \frac{\bar{S}_k(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)\zeta(k s - 1)}{\zeta(k s)}. \quad (1)$$

Будем различать случаи $k = 2$ и $k \geq 3$.

Нам понадобятся некоторые стандартные обозначения: $s = \sigma + it$ — комплексное число; $\sigma = \Re s$, $t = \Im s$; $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана; символ Виноградова $\ll$ означает то же, что и символ Ландау O ; γ — постоянная Эйлера; $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера; $\varepsilon > 0$ — произвольно малое, не всегда одно и то же; $\exp(u) = e^u$.

2. Вспомогательные результаты. Будем использовать некоторые факты о дзета-функции Римана $\zeta(s)$.

Лемма 1. Для $\zeta(s)$ справедливы следующие соотношения:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + O(|s-1|) \quad \text{в окрестности точки } s=1, \quad (2)$$

$$\zeta(s) \ll |t|^{c(1-\sigma)^{3/2}} (\log |t|)^{2/3}, \quad c > 0 \text{ — константа,}$$

$$\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 2, \quad |t| \geq 3, \quad (3)$$

$$(\zeta(s))^{-1} \ll (\log(|t|+3))^{2/3}, \quad \text{если } \sigma \geq 1,$$

$$\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s), \quad \text{где } \chi(s) = \pi^{-1/2+s} \frac{\Gamma((1-s)/2)}{\Gamma(s/2)}, \quad (4)$$

$$|\chi(s)| \asymp (1+|t|)^{1/2-\sigma},$$

$$\begin{aligned}
\int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^2 dt &\ll T \min \left(\log T, \frac{1}{\sigma - 1/2} \right), & \text{если } \sigma \geq \frac{1}{2}, \\
\int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^4 dt &\ll \frac{\zeta^4(2\sigma)}{\zeta(4\sigma)} T, & \text{если } \sigma > \frac{1}{2}, \\
\int_1^T \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^4 dt &\ll T \log^4 T & \text{в остальных случаях.}
\end{aligned} \tag{5}$$

Доказательство см. в [5].

Лемма 2 (верхняя оценка среднего значения полинома Дирихле). Пусть $S(s) = \sum_{N_1 < n \leq N_2} a_n n^{-s}$ — полином Дирихле, $a_n \in \mathbb{C}$. Тогда для любых вещественных T_0 и T_1 имеем

$$\int_{T_0}^{T_0+T} |S(it)|^2 dt = \sum_{N_1 < n \leq N_2} (T + Bn) |a_n|^2, \tag{6}$$

где B — абсолютная постоянная.

Доказательство см. в [4]).

Лемма 3 [6]. Пусть для $\Re s \geq \sigma_0$ ряд Дирихле $1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n n^{-s}$ сходится абсолютно и определяет регулярную в области $\left\{ \Re s \geq \frac{1}{2}, M \leq \Im s \leq 2M \right\}$ функцию $F(s)$, причем $F(s) \ll \exp(M^D)$ и $a_n \ll \exp(M^D)$ для некоторого $D > 0$. Тогда

$$\frac{1}{M} \int_M^{2M} \left| F \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 dt \gg \sum_{n \leq \frac{1}{100} M} \frac{|a_n|^2}{n} \left(1 - \frac{\log n}{\log M} + \frac{1}{\log \log M} \right). \tag{7}$$

3. Верхняя оценка $\Delta_k(x)$. В работе [7] получена асимптотическая формула для суммы

$$G_k(x) := \sum_{n \leq x} \bar{S}_k(n).$$

Докажем теорему, которая уточняет главный член асимптотики для $G(x)$ и улучшает остаточный член.

Теорема 1. — При $x \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$G_k(x) = A_k(x) + \Delta_k(x),$$

где

$$A_k(x) = \begin{cases} \frac{3}{\pi^2} x \left(\log x + 3\gamma - 1 - \frac{12}{\pi^2} \zeta'(2) \right), & \text{если } k = 2, \\ \frac{\zeta(2)}{\zeta(3)} x + \frac{\zeta(2/3)}{2\zeta(2)} x^{2/3}, & \text{если } k = 3, \\ \frac{\zeta(k-1)}{\zeta(k)} x, & \text{если } k \geq 4, \end{cases}$$

$$\Delta_k(x) \ll \begin{cases} x^{3/4}(\log x)^{3/2}, & \text{если } k = 2, \\ x^{1/2}(\log x)^2, & \text{если } k = 3, \\ x^{1/2}(\log x)^{3/2}, & \text{если } k = 4, \\ x^{1/2} \log x, & \text{если } k \geq 5. \end{cases}$$

Замечание 1. В работе [7] пропущено второе слагаемое главного члена асимптотики при $k = 3$, а в остаточных членах x^ε мы заменили степенями $\log x$.

Доказательство теоремы 1. Поскольку $\bar{S}_k(n) \leq n^{1/k}$, то, полагая $c_k = \frac{k+1}{k} + \frac{1}{\log x}$, по формуле Перрона для каждого $T > 1$ получаем

$$\sum_{n \leq x} \bar{S}_k(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k - iT}^{c_k + iT} \frac{\zeta(s)\zeta(ks-1)}{\zeta(ks)} \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^{(k+1)/k}}{T} (\log x)^\alpha\right), \quad (8)$$

где α — кратность полюса подынтегральной функции в точке $s = 1$ (т. е. $\alpha = 2$, если $k = 2$, и $\alpha = 1$ при $k \geq 3$).

Пусть сначала $k = 2$. Передвинем контур интегрирования на прямую $\Re s = \frac{3}{4}$. Тогда из оценок (3)–(5) и неравенства Коши – Шварца имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \bar{S}_2(n) &= \operatorname{res}_{s=1} \left(\frac{\zeta(s)\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)} \frac{x^s}{s} \right) + \\ &+ O\left(\frac{x^{3/2}}{T}\right) + O\left(x^{3/4}(\log T)^{3/2}\right) + O\left(\frac{x^{3/2}}{T} \log^2 x\right). \end{aligned}$$

Учитывая (2) и разложения

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta(2s)} &= \frac{1}{\zeta(2)} - \frac{\zeta'(2)}{\zeta^2(2)}(s-1) + O(|s-1|^2), \quad \left(\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}\right), \\ \frac{x^s}{s} &= x + (x \log x - 1)(s-1) + O(|s-1|^2), \end{aligned}$$

при $T = x$ получаем

$$S_2(x) = \frac{3}{\pi^2} x \left(\log x + 3\gamma - 1 - \frac{12}{\pi^2} \zeta'(2) \right) + O\left(x^{3/4}(\log x)^{3/2}\right). \quad (9)$$

При $k \geq 3$ передвинем контур интегрирования в (8) на прямую $\Re s = \frac{1}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned} S_3(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2} - iT}^{\frac{1}{2} + iT} \frac{\zeta(s)\zeta(3s-1)}{\zeta(3s)} \frac{x^s}{s} ds + \\ &+ O\left(x^{1/2} \log^2 T\right) + O\left(\frac{x^{4/5}}{T} \log x\right) + \\ &+ \operatorname{res}_{s=1} \left(\frac{\zeta(s)\zeta(3s-1)}{\zeta(3s)} \frac{x^s}{s} \right) + \operatorname{res}_{s=\frac{2}{3}} \left(\frac{\zeta(s)\zeta(3s-1)}{\zeta(3s)} \frac{x^s}{s} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Теперь в силу (5) и неравенства Коши – Шварца имеем

$$\left| \int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} \frac{\zeta(s)\zeta(3s-1)}{\zeta(3s)} \frac{x^s}{s} ds \right| \ll x^{1/2} \left(\int_1^T \frac{|\zeta(\frac{1}{2}+it)|^2}{t} dt \right)^{1/2} \times \\ \times \left(\int_1^T \frac{|\zeta(\frac{1}{2}+3it)|^2}{t} dt \right)^{1/2} \ll x^{1/2} \log^2 T. \quad (11)$$

Полагая $T = x$, получаем утверждение теоремы при $k = 3$. В случае $k = 4$ подынтегральная функция имеет полюс первого порядка в точке $s = \frac{1}{2}$. Поэтому в новом контуре мы предусматриваем обход точки $s = \frac{1}{2}$ по правой полуокружности $\left| s - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{\log x}$. При $k \geq 5$ этот обход не нужен. Следовательно, рассуждая, как и в случае $k = 3$, находим

$$A_k(x) = \frac{\zeta(k-1)}{\zeta(k)} x, \quad k = 4, 5, \dots,$$

$$\Delta_4(x) = O\left(x^{1/2}(\log x)^{3/2}\right),$$

$$\Delta_k(x) = O\left(x^{1/2} \log x\right), \quad k = 5, 6, \dots,$$

что и завершает доказательство теоремы 1.

4. О-оценка среднего квадрата остаточного члена $\Delta_k(x)$. Основной целью данной статьи является исследование $\Delta_k(x)$ в среднем квадратичном.

Теорема 2. Для $X \rightarrow \infty$ имеем

$$\int_1^X \Delta_k^2(x) dx \ll \begin{cases} X^2 (\log X)^{14/3}, & \text{если } k = 2, \\ X^{(k+3)/k} \log^2 X, & \text{если } k \geq 3. \end{cases} \quad (12)$$

Доказательство. Сначала приведем стандартную формулу Перрона

$$\sum_{n \leq x} \bar{S}_k(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F_k(s) \frac{x^s}{s} ds, \quad c > 2, \quad (13)$$

где $F_k(s)$ определено формулой (1).

Положим

$$a(k) = a = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{\log x}, & \text{если } k = 2, \\ \frac{3}{2k} + \frac{1}{\log x}, & \text{если } k \geq 3. \end{cases}$$

Рассмотрим случай $k = 2$.

Передвинем контур интегрирования в (13) на прямую $\Re s = \frac{1}{2} + \frac{1}{\log x}$. Тогда согласно теореме о вычетах имеем

$$\Delta_2(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F_2(s) \frac{x^s}{s} ds. \quad (14)$$

Из (14) следует, что $\frac{1}{s}F_2(s)$ является преобразованием Меллина для функции $\Delta_2\left(\frac{1}{x}\right)$, а потому равенство Парсеваля для преобразования Меллина приводит к соотношению

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} |F_2(a+it)|^2 \frac{dt}{|a+it|^2} = \\ & = \int_0^{\infty} \Delta_2^2\left(\frac{1}{x}\right) x^{2a-1} dx = \int_0^{\infty} \Delta_2^2(x) x^{-2a-1} dx. \end{aligned} \quad (15)$$

Известно, что интегралы в (15) слева и справа сходятся или расходятся одновременно.

Учитывая, что $F_2(s) = \zeta(s)\zeta(2s-1)\zeta^{-1}(2s)$, из (15) получаем

$$\begin{aligned} \int_X^{2X} \Delta_2^2(x) dx & \ll X^{2a+1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\zeta(a+it)|^2 |\zeta(2a-1+2it)|^2}{|\zeta(2a+2it)|^2} \frac{dt}{|a+it|^2} \ll \\ & \ll X^{2a+1} \int_0^{\infty} \Delta_2^2(x) dx. \end{aligned} \quad (16)$$

В последнем интеграле разобьем промежуток интегрирования на три части: $(0, 3)$, $(3, Y)$ и (Y, ∞) , где $Y = \exp(10 \log X \log \log X)$.

В силу (3), (4) имеем

$$\begin{aligned} & \zeta(2a-1+2it) = \\ & = \zeta\left(\frac{2}{\log X} + 2it\right) \ll (1+t)^{1/2-2/\log X} \left| \zeta\left(1 - \frac{2}{\log X} + 2it\right) \right| \ll \\ & \ll \begin{cases} \log X, & \text{если } 0 \leq t \leq 3, \\ t^{1/2-2/\log X + C_1(\log X)^{-3/2}} (\log t)^{2/3}, & \text{если } t \geq 3, \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\zeta^{-1}\left(1 + \frac{2}{\log X} + 2it\right) \ll (\log(t+3))^{2/3}. \quad (18)$$

Поэтому, используя (2)–(5), (17), (18), получаем

$$\begin{aligned} I_1 & := \int_0^3 |F_2(a+it)|^2 \frac{dt}{|a+it|^2} \ll \log^2 X, \\ I_2 & := \int_3^Y t^{-1-4/\log X} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\log X} + it\right) \right|^2 t^{C_1(\log X)^{-3/2}} (\log t)^{8/3} dt \ll \end{aligned} \quad (19)$$

$$\ll \int_3^Y \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\log X} + it \right) \right|^2 t^{-1+3/(\log X)} (\log t)^{8/3} dt. \quad (20)$$

Для вычисления последнего интеграла полагаем

$$U(t) = t^{-1+3/\log X} (\log t)^{8/3}, \quad V(t) = \int_3^t \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\log X} + iv \right) \right|^2 dv,$$

а затем, интегрируя по частям и используя (5), приходим к оценке

$$I_2 \ll (\log X)^{14/3}. \quad (21)$$

Далее, имеем

$$I_3 = \int_Y^\infty |F_2(a+it)|^2 \frac{dt}{|a+it|^2} = \sum_{j=1}^\infty \int_{2^{j-1}Y}^{2^jY} |F_2(a+it)|^2 \frac{dt}{|a+it|^2}. \quad (22)$$

Теперь, применяя предыдущие рассуждения, для каждого $M \geq Y$ получаем

$$\int_M^{2M} |F_2(a+it)|^2 \frac{dt}{|a+it|^2} \ll M^{-2/\log X} (\log M)^{11/3} \ll M^{-1/\log X}. \quad (23)$$

Следовательно, из (22), (23) имеем $I_3 \ll 1$, а потому

$$I_1 + I_2 + I_3 \ll (\log X)^{14/3}. \quad (24)$$

Таким образом, при $k = 2$ теорема доказана.

При $k \geq 3$ переносим контур интегрирования в (13) на прямую $\Re s = \frac{3}{2k} + \frac{1}{\log X}$ и, проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, получаем

$$I_1 \ll \log^2 X, \quad I_2, I_3 \ll 1. \quad (25)$$

Поскольку соотношение (16) при $k \geq 3$ принимает вид

$$\int_X^{2X} \Delta_k^2(x) dx \ll X^{2a(k)+1} (I_1 + I_2 + I_3), \quad (26)$$

непосредственно получаем утверждение теоремы при $k \geq 3$:

$$\int_X^{2X} \Delta_k^2(x) dx \ll X^{(k+3)/k} \log^2 X. \quad (27)$$

Теорема доказана.

5. Ω -оценка. Теперь установим Ω -результат для второго момента остаточного члена $\Delta_k(x)$. При этом будем использовать схему А. Иви́ч, который в работе [8] получил Ω -оценку второго момента для остаточного члена в задаче о числе неизоморфных абелевых групп конечного порядка.

Теорема 3. *Справедлива оценка*

$$\int_1^X \Delta_2^2(x) dx = O(X^2 \log X).$$

Доказательство. Воспользуемся парой Меллина $e^x, \Gamma(z)$:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1} dx, \quad \Re z > 0.$$

С помощью обратного преобразования Меллина получаем

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(z) x^{-z} dz, \quad c > 0.$$

Положим $x = U^h$, $h > 0$, и учтем, что $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$. Тогда приходим к стартовому интегралу

$$\exp(-U^h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_0-i\infty}^{c_0+i\infty} U^{-\omega} \Gamma\left(1 + \frac{\omega}{h}\right) \frac{d\omega}{\omega}, \quad c_0 > 0. \quad (28)$$

Умножая обе части (28) на $n^{-s} \bar{S}_2(n)$, полагая $U = \frac{n}{Y}$ и суммируя по n , имеем

$$\sum_{n=1}^\infty \bar{S}_2(n) n^{-s} \exp\left(\left(-\frac{n}{y}\right)^h\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_0-i\infty}^{c_0+i\infty} F_2(s+\omega) Y^\omega \Gamma\left(1 + \frac{\omega}{h}\right) \frac{d\omega}{\omega}. \quad (29)$$

В дальнейшем считаем, что $s = \frac{1}{2} + it$, $T^{1-\delta} \leq t \leq T$, $Y = T^B$, $h = \log^2 T$, $\delta > 0$ — достаточно малое, $B > 1$ — подходящая постоянная (ее значение будет уточнено позже).

В (29) передвинем контур интегрирования на прямую $\Re s = -\frac{1}{4}$, при этом мы пройдем через два полюса подынтегральной функции в точках $\omega = 0$ и $\omega = 1-s$.

Учтем, что вычет в точке $\omega = 0$ равен $F_2(s)$, а вычет в точке $\omega = 1-s$ дает вклад в оценку интеграла в (29), равный $O(1)$ (чтобы это увидеть, достаточно воспользоваться формулой Стирлинга для $\Gamma(z)$ в полосе $-1 < \Re z \leq 2$). Кроме того, интеграл на прямой $\Re \omega = -\frac{1}{4}$ также оценивается как $O(1)$ (в силу экспоненциального убывания $\Gamma(z)$ при $|\Im z| \rightarrow \infty$).

Таким образом, из (29) следует

$$\begin{aligned} F_2(s) &= \sum_{n=1}^\infty \frac{\bar{S}_2(n)}{n^s} \exp\left(-\left(\frac{n}{Y}\right)^h\right) + O(1) = \\ &= \sum_{n \leq T} \frac{\bar{S}_2(n)}{n^s} \exp\left(-\left(\frac{n}{Y}\right)^h\right) + \sum_{T < n \leq 2Y} \frac{\bar{S}_2(n)}{n^s} \exp\left(-\left(\frac{n}{Y}\right)^h\right) + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{n > 2Y} \frac{\bar{S}_2(n)}{n^s} \exp \left(- \left(\frac{n}{Y} \right)^h \right) + O(1) := \sum_1 + \sum_2 + \sum_3 + O(1). \quad (30)$$

Из определения $\bar{S}_2(n)$ следует, что $\bar{S}_2(n) \leq n^{1/2}$, а потому условие $n > 2Y$ в сумме $\sum_3$ приводит к оценке $\sum_3 \ll 1$.

Таким образом,

$$F_2(s) = \sum_1 + \sum_2 + O(1).$$

Установим верхнюю и нижнюю оценки для интеграла

$$\int_{T^{1-\delta}}^T \left| F_2 \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 \frac{dt}{t^2}.$$

Пусть $M \in [T^{1-\delta}, T]$. В силу представления (1) имеем

$$\int_M^{2M} \left| F_2 \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 \frac{dt}{t^2} \gg M^{-2} \int_M^{2M} \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 \frac{|\zeta(it)|^2}{|\zeta(1+2it)|^2} dt. \quad (31)$$

Поскольку $|\zeta(\sigma + it)| = |\zeta(\sigma - it)|$, в силу (4)

$$|\zeta(1+2it)| = |\zeta(-2it)| |\chi(1+2it)| = |\zeta(2it)| |t|^{-1/2}.$$

Поэтому можно записать

$$\int_M^{2M} \left| F_2 \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 \frac{dt}{t^2} \gg \int_M^{2M} \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 \frac{dt}{t} \gg \log M. \quad (32)$$

Тогда

$$\int_{T^{1-\delta}}^T \left| F_2 \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 \frac{dt}{t^2} \geq \sum_{j=1}^{[\delta \log(T/4)]} \int_{2^{-j-1}T}^{2^{-j}T} \left| F_2 \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 \frac{dt}{t^2} \gg \log^2 T \quad (33)$$

с постоянной в символе $\gg$, зависящей от δ .

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_{T^{1-\delta}}^T \left| F_2 \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 \frac{dt}{t^2} &\ll \int_{T^{1-\delta}}^T \left(\left| \sum_1 \right|^2 + \left| \sum_2 \right|^2 + O(1) \right) \frac{dt}{t^2} := \\ &:= \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + O(T^{-1+\delta}). \end{aligned} \quad (34)$$

Далее, полагая $T_1 = T^{1-\delta}$, $T_{1j} = 2^j T_1$ и применяя лемму 2, имеем

$$\mathcal{J}_1 \ll T^{-2-2\delta} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-2j} \int_{T_{1j-1}}^{T_{1j}} \left| \sum_{n \leq T} \bar{S}_2(n) n^{-1/2+it} \exp \left(- \left(\frac{n}{Y} \right)^h \right) \right|^2 dt \ll$$

$$\begin{aligned} &\ll T^{-2+2\delta} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-2j} \sum_{n \leq T} (n - T_{1j}) \frac{\bar{S}_2^2(n)}{n} \ll \\ &\ll T^{-\frac{3}{2}+2\delta} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-2j} T \sum_{n \leq T} \frac{\bar{S}_2(n)}{n} \ll T^{-1/2+2\delta} \log^2 T \ll T^{-\varepsilon} \end{aligned} \quad (35)$$

(здесь $\delta < \frac{1}{8}$, $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число).

Осталось оценить $\mathfrak{I}_2$.

По теореме 1 имеем

$$\sum_{n \leq x} \bar{S}_2(n) = A_2(x) + O\left(x^{3/2} \log^{3/2} x\right) = A_2(x) + \Delta_2(x),$$

$$\text{где } A_2(x) = \frac{3}{\pi^2} x \left(\log x + 3\gamma - 1 - \frac{12}{\pi^2} \zeta'(2) \right).$$

Поэтому, применяя абелево суммирование, получаем

$$\begin{aligned} &\sum_{T < n \leq Y} \bar{S}_2(n) h^{-1/2-it} \exp\left(-\left(\frac{n}{Y}\right)^h\right) \ll \\ &\ll YT^{-1/2} t^{-1} \log T + \int_T^{2Y} u^{-1/2-it} \exp\left(-\left(\frac{u}{Y}\right)^h\right) d\Delta_2(u) := I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (36)$$

Возьмем $B = 2 - \frac{3}{2}\delta$, тогда в силу $Y = T^B$, $T^{1-\delta} < t \leq T$ имеем

$$I_1 \ll T^{-\varepsilon}. \quad (37)$$

Далее, интегрированием по частям в I_2 получаем

$$\begin{aligned} I_2 &= O\left(T^{-1/2} T^{3/4}\right) + \\ &+ \int_T^{2Y} \Delta_2(u) \exp\left(-\left(\frac{u}{Y}\right)^h\right) \left(\frac{1}{2} + it + h\left(\frac{u}{Y}\right)^h\right) u^{-3/2-it} dt. \end{aligned} \quad (38)$$

В последнем интеграле наибольший вклад дает слагаемое, содержащее множитель t . Поэтому простые вычисления приводят к оценке

$$I_2 \ll T^{1/4} + \left| \int_T^{2Y} t \Delta_2(u) \exp\left(-\left(\frac{u}{Y}\right)^h\right) u^{-3/2-it} du \right|. \quad (39)$$

Таким образом, из (34)–(39) находим

$$\begin{aligned} &\int_{T^{1-\delta}}^T \left| F_2\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 \frac{dt}{t^2} \ll \int_{T^{1-\delta}}^T \left| \sum_{T \leq n \leq 2Y} \int_0^1 \Delta_2(u+n) \times \right. \\ &\times \exp\left(-\left(\frac{u+n}{Y}\right)^h\right) (u+n)^{-3/2-it} du \left. \right|^2 dt + O(1). \end{aligned} \quad (40)$$

В последнем внутреннем интеграле применим неравенство Коши – Шварца, изменим порядок интегрирования, а затем применим лемму 1. В результате получим

$$\begin{aligned} & \int_{T^{1-\delta}}^T \left| F_2 \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 \frac{dt}{t^2} \ll \\ & \ll \int_0^1 \sum_{T \leq n \leq 2Y} \Delta_2^2(u+n) \exp \left(-2 \left(\frac{u+n}{Y} \right)^h \right) (u+n)^{-3} (n+T) du + O(1) \ll \\ & \ll \int_T^Y \Delta_2^2(x) x^{-2} dx + O(1). \end{aligned} \quad (41)$$

Итак, в силу (33) и (41) имеем

$$\log^2 T \ll \int_{T^{1-\delta}}^T \left| F_2 \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 \frac{dt}{t^2} \ll \int_T^Y \Delta_2^2(x) x^{-2} dx + O(1). \quad (42)$$

Если теперь предположить, что

$$\int_M^{2M} \Delta_2^2(x) x^{-2} dx = o(M^2 \log M),$$

то соотношение (42) перейдет в противоречивое соотношение

$$\log^2 T \ll \int_{T^{1-\delta}}^T \left| F_2 \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 \frac{dt}{t^2} \ll o(\log^2 T).$$

Следовательно, мы доказали, что

$$\int_X^{2X} \Delta_2^2(x) dx = \Omega(X^2 \log X).$$

Теорема 3 доказана.

Следствие 1. $\Delta_2(x) = \Omega \left(x^{1/2} \log^{1/2} x \right)$.

Замечание 2. По рассмотренной выше схеме доказательства теоремы 3 можно рассмотреть и случаи $k = 3, 4, \dots$

При $k = 3, 4, \dots$, дословно повторяя предыдущие рассуждения, получаем неравенство

$$\int_{T^{1-\delta}}^T \left| F_2 \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 \frac{dt}{t^2} \ll \int_T^Y \Delta_k(x) x^{-2} dx + O(1). \quad (43)$$

Кроме того, при $k = 3$

$$\left| F_2 \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 = \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + 3it \right) \right|^2 \left| \zeta^{-1} \left(\frac{3}{2} + 3it \right) \right|^2.$$

Заметим, что при $\sigma > 1$

$$\zeta(\sigma + it)\zeta(\sigma + 3it) = \sum \frac{C_n}{n^{\sigma+it}},$$

где

$$C_n = \sum_{m^3 d=n} a_m, \quad a_m = \begin{cases} m^{1/3}, & \text{если } m = \ell^3, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Отсюда

$$\sum_{n \leq x} \frac{|C_n|^2}{n} \gg \sum_{\substack{n \leq x \\ n=\ell^3}} n^{-1/3} \gg \log x.$$

Поэтому при $k = 3$, применяя лемму 3, имеем

$$\frac{1}{M} \int_M^{2M} \left| F_3 \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 dt \gg \log M. \quad (44)$$

При $k \geq 4$ непосредственно получаем

$$\frac{1}{M} \int_M^{2M} \left| F_k \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 dt \gg \frac{1}{M} \int_M^{2M} \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 dt \gg \log M.$$

Следовательно, из оценок (43), (44) можно получить Ω -оценки вида

$$\int_X^{2X} \Delta_k(x) dx = \Omega(X \log X), \quad k \geq 3,$$

которые, по-видимому, не интересны.

6. Заключение. Из теоремы 2 можно вывести, что для почти всех $x \leq X$ при $X \rightarrow \infty$, за исключением $o(X)$, справедлива оценка $\Delta_2(x) \ll x^{1/2} \log^{1/2} x$. Поэтому можно сделать предположение, что при всех $k = 2, 3, \dots$ и всех $x \rightarrow \infty$ $\Delta_k(x) \ll x^{1/2} \log^{\alpha_k} x$, $\alpha_k \geq 0$. Кроме того, сравнение теорем 2 и 3 показывает, что O - и Ω -оценки второго момента остаточного члена $\Delta_2(x)$ близки к неулучшаемым. Проблема построения Ω -оценок для второго момента $\Delta_k(x)$, $k \geq 3$, остается открытой.

1. Balaceno J., Seleacu V. History of the Smarandache function // Smarandache Not. J. – 1999. – 10, № 1–3. – P. 192–201.
2. Ding Liping. On the mean value of the Smarandache ceil function // Sci. Magna. – 2005. – 1, № 2. – P. 74–77.
3. Lu Yaming. On a dual function of the Smarandache function // Res. on Smarandache Problems in the Number Theory (Hexis, Phoenix, AZ). – 2005. – 2. – P. 55–57.
4. Montgomery H., Vaughan R. Hilbert's inequality // J. London Math. Soc. – 1974. – 2, № 8. – P. 73–82.
5. Ivić A. The Riemann zeta-function. – New York: Joun Wiley Sons, 1985.
6. Ramachandra K. On the mean-value and Omega-theorems for the Riemann zeta-function // Tata Inst. Found. Res. – Bombay, 1995.
7. Xiaoyan Li. The mean value of the k th Smarandache dual function // Proc. Fifth Int. Conf. Number Theory and Smarandache Notions. – Hexis, 2009. – P. 128–132.
8. Ivić A. On the number of subgroups of finite abelian groups // J. Théorie Nombres Bordeaux. – 1997. – 9. – P. 371–381.

Получено 25.10.10