УДК 517.9

УСРЕДНЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ

О.Д. Кичмаренко
Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова
Украина, 650082, Одесса, Дворянская ул., 2
E-mail: olga.kichmarenko@gmail.com

М.Л. Карпычева
Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова
Украина, 650082, Одесса, Дворянская ул., 2
E-mail: m.karpblcheva@gmail.com

Ключевые слова: система дискретных уравнений, переменное запаздывание, задача управления, задача оптимального управления, малый параметр, метод усреднения, асимптотическое управление, асимптотически оптимальное управление.

Аннотация: Рассматриваются системы дискретных уравнений с переменным запаздыванием и соответствующие задачи управления и оптимального управления. Для нахождения решений указанных задач используется метод усреднения при условии, что правые части уравнений являются периодическими функциями по дискретному времени. Предлагается схема построения асимптотического или асимптотически оптимального управления в исходной задаче, если известно соответствующее управление в усредненной задаче. Формулируются условия, при которых решения исходной и усредненной задач близки на асимптотически большом промежутке дискретного времени.

1. Введение

Динамические процессы, происходящие в окружающем мире и представляющие интерес для исследования, далеко не всегда моделируются при помощи непрерывно меняющегося времени и других характеристик системы. Измерение различных параметров, определяющих динамику системы, с определенным временным интервалом, учет импульсных воздействий на систему, влияющих на поведение системы, приводят к моделированию дискретных процессов. Для их описания используются системы дискретных уравнений.

Если при моделировании динамических процессов учитываются управляющие воздействия на систему, то получается задача управления. Если при этом задается критерий качества, регулирующий выбор наилучшего управления, то получается задача оптимального управления. Реакция изучаемой системы на некоторые воздействия, в том числе и управляющие, может носить запаздывающий характер. Для описания таких процессов используются системы дискретных уравнений с запаздыванием.

Применение метода усреднения к системам дискретных уравнений известно давно. Так, в работе [1] доказана первая теорема Н.Н. Боголюбова для конечно-разностных уравнений, а в работе [2] – вторая теорема Н.Н. Боголюбова для систем разностных уравнений. Однако, в этих работах присутствует требование непрерывности функций, находящихся в правых частях уравнений. Более общая схема усреднения систем дискретных уравнений стандартного вида и соответствующих задач управления и оптимального управления приведена в работе [3]. Применение метода усреднения к системам дискретных уравнений с быстрыми и медленными переменными и соответствующих задач управления и оптимального управления проиллюстрировано в работах [4, 5]. Применение метода усреднения к системам дискретных уравнений с постоянным запаздыванием и соответствующих задач управления и оптимального управления показано в работах [6, 7]. Все приведенные работы не содержат требования непрерывности функций в правых частях дискретных уравнений.

Данная работа посвящена применению метода усреднения для исследования систем дискретных уравнений с переменным запаздыванием. При этом так же рассматриваются соответствующие задачи управления и оптимального управления.

2. Усреднение систем дискретных уравнений с переменным запаздыванием

Рассмотрим систему дискретных уравнений с переменным запаздыванием вида

(1) $$x_{i+1} = x_i + \varepsilon \cdot f\left(i, x_i, x_{s(i)}\right),\ x_0 = x^0,$$

где $x_i \in D \subset R^n$ – текущее состояние системы, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $f\left(i, x_i, x_{s(i)}\right)$ – заданная вектор-функция, $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$, $N = E\left(L\varepsilon^{-1}\right)$, $L = const$, $E(a)$ – целая часть числа a, непрерывная или дискретная функция $s(i) \in \{0, 1, 2, ..., i\}$ определяет момент дискретного времени влияния переменного запаздывания на текущее состояние.

Пусть в системе (1) функция $f\left(i, x_i, x_{s(i)}\right)$ является периодической по i с периодом p, то есть для любого $i \in I$ выполняется равенство

$$f\left(i + p, x_i, x_{s(i)}\right) = f\left(i, x_i, x_{s(i)}\right),$$

тогда проведем усреднение функции по формуле

(2) $$f_0\left(\xi^1, \xi^2\right) = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} f\left(j, \xi^1, \xi^2\right).$$

Системе (1) поставим в соответствие усредненную задачу вида

(3) $$y_{i+1} = y_i + \varepsilon \cdot f_0\left(y_i, y_{s(i)}\right), \qquad y_0 = x^0.$$

и исследуем вопрос о близости решений систем (1) и (3) на асимптотически большом промежутке дискретного времени.

Теорема 1. *Пусть в области $Q = \{\, i \in I;\ x_i \in D \,\}$ выполнены условия:*

- *функция $f\left(i, \xi^1, \xi^2\right)$ равномерно ограничена константой M и удовлетворяет условию Липшица по ξ^1, ξ^2 с постоянной λ;*
- *функция $f\left(i, \xi^1, \xi^2\right)$ – периодическая по i с периодом p,*
- *функция $s(i)$ – непрерывная или дискретная, принимающая значения из множества $\{0, 1, 2, ..., i\}$;*
- *решение $y = y_i, i \in I$ системы (3) при $y_0 = x^0 \in D' \subset D$ вместе с ρ-окрестностью принадлежит области D.*

Тогда для любого $L>0$ существуют такие $C>0$ и $\varepsilon_0>0$, что для любого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ и для любого $i\in I=\{0,1,2,...,N\}$, $N=E\left(L\varepsilon^{-1}\right)$ справедливо:

$$\left\|x_i-y_i\right\|\le C\varepsilon,$$

где x_i и y_i – решения систем уравнений (1) и (3) соответственно.

Доказательство теоремы 1. Пусть $x=x_i, i\in I$ – решение исходной задачи (1), а $y=y_i, i\in I$ – решение усредненной задачи (3) при $x_0=y_0=x^0\in D'\subset D$, которое определено и лежит вместе со своей ρ-окрестностью в области D.

Систему из (1) и усредненную систему из (3) представим в виде

$$x_{i+1}=x^0+\varepsilon\sum_{j=0}^{i}f\left(j,x_j,x_{s(j)}\right),\ y_{i+1}=x^0+\varepsilon\sum_{j=0}^{i}f_0\left(y_j,y_{s(j)}\right).$$

и оценим разность между ними

$$\left\|x_{i+1}-y_{i+1}\right\|=\left\|\varepsilon\cdot\sum_{j=0}^{i}f\left(j,x_j,x_{s(j)}\right)-\varepsilon\cdot\sum_{j=0}^{i}f_0\left(y_j,y_{s(j)}\right)\right\|\le$$

$$\le\varepsilon\cdot\sum_{j=0}^{i}\left\|f\left(j,x_j,x_{s(j)}\right)-f\left(j,y_j,y_{s(j)}\right)\right\|+\left\|\varepsilon\cdot\sum_{j=0}^{i}\left[f\left(j,y_j,y_{s(j)}\right)-f_0\left(y_j,y_{s(j)}\right)\right]\right\|.$$

С учетом выполнения условий теоремы, неравенство примет вид

(4) $$\left\|x_{i+1}-y_{i+1}\right\|\le\varepsilon\lambda\cdot\sum_{j=0}^{i}\left[\left\|x_j-y_j\right\|+\left\|x_{s(j)}-y_{s(j)}\right\|\right]+$$

$$+\varepsilon\cdot\left\|\sum_{j=0}^{i}\left[f\left(j,y_j,y_{s(j)}\right)-f_0\left(y_j,y_{s(j)}\right)\right]\right\|\le\varepsilon\lambda 2\sum_{j=0}^{i}\delta_j+\varepsilon Z,$$

где

(5) $$Z=\max_{i\in I}\left\|\sum_{j=0}^{i}\left[f\left(j,y_j,y_{s(j)}\right)-f_0\left(y_j,y_{s(j)}\right)\right]\right\|,$$

$\delta_i=\max\limits_{0\le j\le i}\left\|x_j-y_j\right\|$ – равномерная дискретная метрика. Так как неравенство (4) выполняется для любого $i\in\{0,1,2,...,N-1\}$, то

$$\left\|x_{i+1}-y_{i+1}\right\|\le\varepsilon\lambda 2\sum_{j=0}^{i}\delta_j+\varepsilon Z\le\varepsilon\lambda 2\sum_{j=0}^{N-1}\delta_j+\varepsilon Z.$$

Учитывая дискретный аналог леммы Гронуолла-Беллмана [8], получим

(6) $$\delta_N\le\varepsilon\lambda 2\sum_{j=0}^{N-1}\delta_j+\varepsilon Z\le\varepsilon Ze^{2\varepsilon\lambda N}\le\varepsilon Ze^{2\lambda L}.$$

Осталось оценить выражение Z из (5). Для этого множество $I=\{\,0,1,2,...,N\,\}$ пройдем с шагом p и зафиксируем точки kp, $k\in I_k=\{0,1,2,...,N_k\}$, выбор значений k определим из условия

(7) $$kp\le\frac{L}{\varepsilon},\ N_k=E\left(\frac{L}{\varepsilon p}\right).$$

Для произвольного $i\in I$ по выбранному p, удовлетворяющему (7), определим соответствующее значение индекса $k\in I_k=\{0,1,2,...,N_k\}$ такое, что $i\in\left[kp,(k+1)\cdot p-1\right)$, а в соотношении (5) получим

$$\left\|\sum_{j=0}^{i}\left[f\left(j,y_j,y_{s(j)}\right)-f_0\left(y_j,y_{s(j)}\right)\right]\right\| \le \tag{8}$$

$$\le \left\|\sum_{j=0}^{kp-1}\left[f\left(j,y_j,y_{s(j)}\right)-f_0\left(y_j,y_{s(j)}\right)\right]\right\| + \left\|\sum_{j=kp}^{i}\left[f\left(j,y_j,y_{s(j)}\right)-f_0\left(y_j,y_{s(j)}\right)\right]\right\|.$$

В неравенстве (8) оценим каждое слагаемое, начнем со второго. Учитывая условия теоремы и то, что $i\in\left[kp,(k+1)\cdot p-1\right)$, получим

$$\left\|\sum_{j=kp}^{i}\left[f\left(j,y_j,y_{s(j)}\right)-f_0\left(y_j,y_{s(j)}\right)\right]\right\| \le \sum_{j=kp}^{i}\left\|f\left(j,y_j,y_{s(j)}\right)\right\| + \sum_{j=kp}^{i}\left\|f_0\left(y_j,y_{s(j)}\right)\right\| \le \tag{9}$$

$$\le pM + \sum_{j=kp}^{i}\left\|\frac{1}{p}\sum_{l=kp}^{(k+1)p-1} f\left(l,y_l,y_{s(l)}\right)\right\| \le 2pM .$$

Первое слагаемое в (8) примет вид

$$\left\|\sum_{j=0}^{kp-1}\left[f\left(j,y_j,y_{s(j)}\right)-f_0\left(y_j,y_{s(j)}\right)\right]\right\| \le \tag{10}$$

$$\le \sum_{l=0}^{k-1}\left\|\sum_{j=lp}^{(l+1)p-1}\left[f\left(j,y_j,y_{s(j)}\right)-f_0\left(y_j,y_{s(j)}\right)\right]\right\| \le$$

$$\le \sum_{l=0}^{k-1}\left\|\sum_{j=lp}^{(l+1)p-1}\left[f\left(j,y_j,y_{s(j)}\right)-f\left(j,y_{lp},y_{s(lp)}\right)\right]\right\| +$$

$$+ \sum_{l=0}^{k-1}\left\|\sum_{j=lp}^{(l+1)p-1}\left[f\left(j,y_{lp},y_{s(lp)}\right)-f_0\left(y_{lp},y_{s(lp)}\right)\right]\right\| +$$

$$+ \sum_{l=0}^{k-1}\left\|\sum_{j=lp}^{(l+1)p-1}\left[f_0\left(y_{lp},y_{s(lp)}\right)-f_0\left(y_j,y_{s(j)}\right)\right]\right\| \le$$

$$\le \sum_{l=0}^{k-1}\sum_{j=lp}^{(l+1)p-1}\left\|f\left(j,y_j,y_{s(j)}\right)-f\left(j,y_{lp},y_{s(lp)}\right)\right\| +$$

$$+ \sum_{l=0}^{k-1}\left\|\sum_{j=lp}^{(l+1)p-1} f\left(j,y_{lp},y_{s(lp)}\right)-p\cdot f_0\left(y_{lp},y_{s(lp)}\right)\right\| +$$

$$+ \sum_{l=0}^{k-1}\sum_{j=lp}^{(l+1)p-1}\left\|f_0\left(y_{lp},y_{s(lp)}\right)-f_0\left(y_j,y_{s(j)}\right)\right\| \le$$

$$\le 2\lambda\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{j=lp}^{(l+1)p-1}\left(\left\|y_j-y_{lp}\right\|+\left\|y_{s(j)}-y_{s(lp)}\right\|\right).$$

Слагаемые в (10) при $j\in\left[lp,(l+1)\cdot p-1\right)$ можно оценить следующим образом

$$\left\|y_j-y_{lp}\right\| = \varepsilon\left\|\sum_{i=lp}^{j-1} f_0\left(y_i,y_{s(i)}\right)\right\| \le \varepsilon pM ,$$

$$\left\|y_{s(j)}-y_{s(lp)}\right\| \le \varepsilon\left\|\sum_{i=s(lp)}^{s(j)-1} f_0\left(y_i,y_{s(i)}\right)\right\| \le \varepsilon M\left|s(j)-s(lp)\right| \le \varepsilon MS ,$$

где числовое значение $S = \sup\left\{ \left|s(j) - s(lp)\right| : lp \le j < (l+1)p, \forall l \in I_k \right\}$, если функция запаздывания $s(i)$ – непрерывная, или $S = \max\left\{ \left|s(j) - s(lp)\right| : lp \le j < (l+1)p, \forall l \in I_k \right\}$, если функция запаздывания $s(i)$ – дискретная.

Используя полученные оценки, из (8) с учетом (9), (10) имеем

$$\left\| \sum_{j=0}^{i} \left[f\left(j, y_j, y_{s(j)}\right) - f_0\left(y_j, y_{s(j)}\right) \right] \right\| \le$$

$$\le 2\lambda \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{j=lp}^{(l+1)p-1} \left(\varepsilon pM + \varepsilon SM \right) + 2pM \le 2\lambda M \varepsilon kp\left(p + S\right) + 2pM ,$$

откуда, учитывая (7) и определение значения S, получим оценку

$$Z \le 2\lambda ML\left(p + S\right) + 2pM .$$

Окончательно, из (6) получим

$$\delta_N \le \varepsilon\left(2\lambda ML\left(p + S\right) + 2pM\right)e^{2\lambda L} .$$

По условию теоремы решение усредненной задачи вместе со своей ρ-окрестностью должно находиться в области D. Зафиксируем $L > 0$, по нему выберем $\varepsilon_0 > 0$ так, чтобы для всех $\varepsilon \in \left(0, \varepsilon_0\right]$ выполнялось неравенство

$$\varepsilon\left(2\lambda ML\left(p + S\right) + 2pM\right)e^{2\lambda L} \le \rho ,$$

которое обеспечивает нахождение решения заданной системы в ρ-окрестности решения усредненной системы, а значит и в области D. Откуда можно получить

$$\varepsilon_0 = \frac{\rho}{\left(2\lambda ML\left(p + S\right) + 2pM\right)e^{2\lambda L}} .$$

Если в качестве постоянной $C > 0$ взять

$$C = \left(2\lambda ML\left(p + S\right) + 2pM\right)e^{2\lambda L} ,$$

то получим утверждение теоремы. Теорема 1 доказана.

В работе [1] В.А. Плотниковым было доказано, что для систем дискретных уравнений в стандартном виде применение метода усреднения позволяет находить численное решение усредненной системы с шагом, который существенно больше, чем шаг нахождения решения заданной системы. Для уравнений с периодическими правыми частями этот шаг можно взять равным периоду функции. Поэтому наряду с системой (3) рассмотрим систему вида

$$\xi_{k+1} = \xi_k + \varepsilon p \cdot f_0\left(\xi_k, \xi_{m(k)}\right),\ \xi_0 = x^0 , \tag{11}$$

$$\gamma_i = \xi_k + \frac{(i - kp)\left(\xi_{k+1} - \xi_k\right)}{p} , \tag{12}$$

где $i \in \left[kp, (k+1)p\right)$ – текущее дискретное время задачи (1), находящееся между соответствующими моментами дискретного времени усредненной задачи (11), $k \in I_k = \left\{0, 1, 2, ..., N_k\right\}$, $N_k = E\left(\dfrac{L}{\varepsilon p}\right)$; $s(i) \in \left[m(k)p, \left(m(k) + 1\right)p\ \right)$ – моменты времени, определяющими запаздывание в системе (1), находящееся между соответствующими моментами времени усредненной задачи, $m(k) \in \left\{0, 1, 2, ..., k\right\}$.

Теорема 2. *Пусть в области* $Q = \left\{ i \in I;\ x_i \in D \right\}$ *выполнены первые три условия теоремы 1. Кроме того:*

- *решение* $\xi = \xi_k, k \in I_k$ *системы (11) при* $\xi_0 = x^0 \in D' \subset D$ *вместе с* ρ*-окрестностью принадлежит области* D.

Тогда для любого $L > 0$ *существуют такие* $C > 0$ *и* $\varepsilon_0 > 0$, *что для любого* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *и для любого* $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$, $N = E(L\varepsilon^{-1})$ *справедливо:*

$$\|x_i - \gamma_i\| \le C\varepsilon,$$

а для всех $k \in I_k = \{0, 1, 2, ..., N_k\}$ *и* $i \in [kp, (k+1)p)$ *выполняется*

$$\|x_i - \xi_k\| \le C\varepsilon,$$

где x_i *– решение задачи (1),* ξ_i *– решение задачи (11),* γ_k *– решение задачи (12), если* $x_0 = \gamma_0 = \xi_0 = x^0 \in D' \subset D$.

Доказательство теоремы 2. Пусть $x = x_i, i \in I$ – решение заданной системы (1), $\xi = \xi_k, k \in I_k$ – решение усредненной системы (11) в медленном времени. Из условий теоремы следует, что решение $\gamma = \gamma_i, i \in I$ системы (12) при $\gamma_0 = x_0 = \xi_0 = x^0 \in D' \subset D$ определено и лежит вместе со своей ρ-окрестностью в области D.

Докажем второе неравенство теоремы. Для любого $i \in [kp, (k+1)p)$, $k \in I_k$ получим

(13) $$\|x_i - \xi_k\| \le \|x_i - y_i\| + \|y_i - y_{kp}\| + \|y_{kp} - \xi_k\|,$$

где $y = y_i, i \in I$ – решение усредненной системы (3).

Из теоремы 1 следует, что для любого $L > 0$ найдутся такие $C_1 > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ и $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$, $N = E(L\varepsilon^{-1})$ для первого слагаемого в (13) будет:

(14) $$\|x_i - y_i\| \le C_1\varepsilon.$$

Второе слагаемое в (13) оценим, учитывая полученное значение в (9),

(15) $$\|y_i - y_{kp}\| = \varepsilon \left\| \sum_{i=kp}^{i-1} f_0(y_i, y_{s(i)}) \right\| \le \varepsilon pM.$$

Для оценки третьего слагаемого в (13) воспользуемся представлениями

$$y_{(k+1)p} = y_{kp} + \varepsilon \cdot \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} f_0(y_j, y_{s(j)}),$$

$$\xi_{k+1} = \xi_k + \varepsilon p f_0(\xi_k, \xi_{m(k)}) = \xi_k + \varepsilon \cdot \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} f_0(\xi_k, \xi_{m(k)}),$$

тогда

$$\|y_{(k+1)p} - \xi_{k+1}\| = \|y_{kp} - \xi_k\| + \varepsilon \cdot \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} \|f_0(y_j, y_{s(j)}) - f_0(\xi_k, \xi_{m(k)})\| \le$$

$$\le \|y_{kp} - \xi_k\| + \varepsilon \cdot \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} \|f_0(y_j, y_{s(j)}) - f_0(y_{kp}, y_{m(k)p})\| +$$

$$+ \varepsilon \cdot \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} \|f_0(y_{kp}, y_{m(k)p}) - f_0(\xi_k, \xi_{m(k)})\| \le$$

$$\le \|y_{kp} - \xi_k\| + \varepsilon\lambda \cdot \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} \left(\|y_j - y_{kp}\| + \|y_{s(j)} - y_{m(k)p}\|\right) +$$

$$+ \varepsilon\lambda \cdot \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} \left(\|y_{kp} - \xi_k\| + \|y_{m(k)p} - \xi_{m(k)}\|\right) \le$$

$$\le \|y_{kp} - \xi_k\| + \varepsilon\lambda p 2\varepsilon pM + \varepsilon\lambda p\|y_{kp} - \xi_k\| + \varepsilon\lambda p\|y_{m(k)p} - \xi_{m(k)}\|.$$

Из определения равномерной дискретной метрики $\delta_k = \max\limits_{0 \le j \le k} \left\| y_{jp} - \xi_j \right\|$ следует, что

$$\delta_{k+1} \le (1 + 2\varepsilon\lambda p)\delta_k + 2\varepsilon^2 p^2 \lambda M .$$

Полученное рекуррентное соотношение можно оценить следующим образом

$$\delta_{k+1} \le 2\varepsilon^2 p^2 \lambda M \cdot \frac{(1+2\varepsilon\lambda p)^k - 1}{(1+2\varepsilon\lambda p) - 1} \le \varepsilon p M \left(e^{2\lambda L} - 1\right). \tag{16}$$

Из (13), учитывая (14) – (16), получим

$$\left\| x_i - \xi_k \right\| \le \varepsilon C_1 + \varepsilon p M + \varepsilon p M \left(e^{2\lambda L} - 1\right) = \varepsilon\left(C_1 + pMe^{2\lambda L}\right). \tag{17}$$

По условию теоремы решение усредненной задачи вместе с ρ-окрестностью должно находиться в области D, поэтому потребуем, чтобы

$$\varepsilon\left(C_1 + pMe^{2\lambda L}\right) \le \rho .$$

Зафиксируем $L > 0$, по нему выберем $\varepsilon_0 = \min\left\{\varepsilon_1, \dfrac{\rho}{C_1 + pMe^{2\lambda L}}\right\}$ такое, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ из (17) будет следовать выполнение второго неравенства теоремы.

В качестве постоянной $C > 0$ можно взять значение $C = C_1 + pMe^{2\lambda L}$, где $C_1 = \left(2\lambda ML(p+S) + 2pM\right)e^{2\lambda L}$ было получено в теореме 1.

Для доказательства первого неравенства теоремы воспользуемся представлением

$$\left\| x_i - \gamma_i \right\| \le \left\| x_i - \xi_k \right\| + \left\| \xi_k - \gamma_i \right\|, \tag{18}$$

второе слагаемое в котором

$$\left\| \xi_k - \gamma_i \right\| \le \left\| \frac{(i-kp)(\xi_{k+1} - \xi_k)}{p} \right\| \le \left\| \frac{(i-kp)\cdot \varepsilon p \cdot f_0\left(\xi_k, \xi_{m(k)}\right)}{p} \right\| \le \varepsilon p M ,$$

тогда из (17), (18) следует требуемая оценка

$$\left\| x_i - \gamma_i \right\| \le \varepsilon\left(C_1 + pMe^{2\lambda L}\right) + \varepsilon p M$$

при $\varepsilon_0 = \min\left\{\varepsilon_1, \dfrac{\rho}{C_1 + pMe^{2\lambda L} + pM}\right\}$, $C = C_1 + pM\left(e^{2\lambda L} + 1\right)$. Теорема 2 доказана.

3. Усреднение систем дискретных уравнений с переменным запаздыванием в задачах управления

Рассмотрим систему дискретных уравнений управляемого движения

$$x_{i+1} = x_i + \varepsilon \cdot \left[f\left(i, x_i, x_{s(i)}\right) + A\left(x_i, x_{s(i)}\right) \cdot \varphi(i, u_i) \right], \; x_0 = x^0 , \tag{19}$$

где $x_i \in D \subset R^n$ – текущее состояние системы, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $f\left(i, x_i, x_{s(i)}\right)$ – заданная вектор-функция, $A\left(x_i, x_{s(i)}\right)$ – заданная $n \times q$-матрица, $\varphi(i, u_i)$ – заданная вектор-функция, $u_i \in U \subset \mathrm{comp}\left(R^r\right)$ – управление, $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$, $N = E\left(L\varepsilon^{-1}\right)$, $L = const$, $E(a)$ – целая часть числа a, непрерывная или дискретная функция $s(i) \in \{0, 1, 2, ..., i\}$ определяет момент дискретного времени влияния переменного запаздывания на текущее состояние.

Определение 1. *Допустимыми управлениями задачи (19) назовем функции* $u = u_i, i \in I$ *из компактного множества* U*, для которых существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое,* *что для всех* $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ *соответствующие решения* $x_i \in D$, *задачи (19) определены для всех* $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$.

Предположим, что функции $f\left(i, x_i, x_{s(i)}\right)$ и $\varphi(i, u_i)$ являются p-периодическими по i, тогда усреднение в (19) проведем по формулам

(20) $$f_0\left(\xi^1, \xi^2\right) = \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1} f\left(j, \xi^1, \xi^2\right),$$

(21) $$V = \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1} \varphi(j, U).$$

Так как многозначная функция $\varphi(i, U)$ является ограниченной для любого допустимого управления $u_i \in U \subset \mathrm{comp}\left(R^r\right)$, то построенное множество V также компактно.

Системе (19) поставим в соответствие усредненную задачу с управлениями $v \in V$, для этого разобьем множество $I = \{0, 1, 2, ..., N\}$ на отрезки длиной p точками деления $kp,\ k \in I_k = \{0, 1, 2, ..., N_k\},\ N_k = E(L/\varepsilon p)$.

На множестве значений $k \in I_k = \{0, 1, 2, ..., N_k\}$, учитывая соотношения (20), (21), построим усредненную задачу вида:

(22) $$\xi_{k+1} = \xi_k + \varepsilon p \cdot \left[f_0\left(\xi_k, \xi_{m(k)}\right) + A\left(\xi_k, \xi_{m(k)}\right) \cdot v_k\right],\ \xi_0 = x^0,$$

(23) $$\gamma_i = \xi_k + \frac{(i - kp)\left(\xi_{k+1} - \xi_k\right)}{p},\ i \in [kp, (k+1)p),$$

где запаздывание $s(i) \in [m(k)p, (m(k)+1)p),\ m(k) \in \{0, 1, 2, ..., k\}$.

На каждом частичном промежутке $i \in [kp, (k+1)p)$ установим соответствие между управлениями $u_i \in U$ системы (13) и управлениями $v_k \in V$ усредненной системы (16) с помощью соотношения

(24) $$\frac{1}{p}\sum_{i=kp}^{(k+1)p-1} \varphi(i, u_i) = v_k, \quad k \in I_k.$$

Теорема 3. *Пусть в области* $Q = \{i \in I;\ x_i \in D;\ u_i \in U\}$ *выполнены условия:*

- *функции* $f\left(i, \xi^1, \xi^2\right)$, $A\left(\xi^1, \xi^2\right)$, $\varphi(i, u_i)$ *равномерно ограничены константой* M *и удовлетворяет условию Липшица по* ξ^1, ξ^2 *с постоянной* λ*;*
- *функции* $f\left(i, \xi^1, \xi^2\right)$ *и* $\varphi(i, u_i)$ *– периодические по* i *с периодом* p*,*
- *функция* $s(i)$ *– непрерывная или дискретная со значениями* $s(i) \in \{0, 1, 2, ..., i\}$*;*
- *для любого допустимого управления* $v_k \in V$ *решение* $\xi = \xi_k, k \in I_k$ *системы (22) при* $\xi_0 = x^0 \in D' \subset D$ *вместе с* ρ*-окрестностью принадлежит области* D.

Тогда для любого $L > 0$ *существуют такие* $C > 0$ *и* $\varepsilon_0 > 0$, *что для любого* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *и для любого* $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$, $N = E\left(L\varepsilon^{-1}\right)$ *справедливы следующие утверждения:*

- *для любого допустимого управления* $u_i \in U$, $i \in I$ *и соответствующего решения* $x_i \in D$, $i \in I$ *системы (19) существует допустимое управление* $v_k \in V$, $k \in I_k$, *построенное по (24), и соответствующее решение* $\gamma_i \in D$, $i \in I$, $x_0 = \gamma_0 = x^0 \in D$ *усредненной системы (22), (23), что выполняется соотношение:*

(25) $$\left\|x_i - \gamma_i\right\| \le C\varepsilon,$$

- *для любого допустимого управления* $v_k \in V$, $k \in I_k$ *и соответствующего решения* $\gamma_i \in D$, $i \in I$ *усредненной системы (22), (23) существует допустимое управление* $u_i \in U$, $i \in I$, *построенное по (24), и соответствующее решение* $x_i \in D$, $i \in I$, $\gamma_0 = x_0 = x^0 \in D$ *системы (19), что справедлива оценка (25).*

Доказательство теоремы 3. Докажем первое утверждение теоремы. Пусть $u_i \in U$, $i \in I$ – допустимое управление системы (19), $x_i \in D$, $i \in I$ – соответствующее ему решение. Пусть $v_k \in V$, $k \in I_k$ – управление усредненной системы (22), (23), построенное по формуле (24), а $\gamma_i \in D$, $i \in I$ – соответствующее ему решение, удовлетворяющее $\gamma_0 = x_0 = x^0 \in D$, которое по условию теоремы вместе со своей ρ-окрестностью лежит в области D, значит построенное управление $v_k \in V$, $k \in I_k$ является допустимым.

Для любого $i \in I$ найдется $k \in I_k$ такое, что при $i \in [kp, (k+1)p-1)$ справедливо

$$\|x_{i+1} - \gamma_{i+1}\| \le \|x_{i+1} - x_{kp}\| + \|x_{kp} - \gamma_{kp}\| + \|\gamma_{kp} - \gamma_{i+1}\|. \tag{26}$$

Для первого слагаемого с учетом условий теоремы справедлива оценка

$$\|x_{i+1} - x_{kp}\| \le \varepsilon \left\| \sum_{j=kp}^{i} \left[f\left(j, x_j, x_{s(j)}\right) + A\left(x_j, x_{s(j)}\right) \cdot \varphi\left(j, u_j\right) \right] \right\| \le \varepsilon p M (1 + M). \tag{27}$$

Из уравнений усредненной системы (22), (23) следует представление

$$\gamma_{i+1} = \gamma_{kp} + \varepsilon \sum_{j=kp}^{i} \left[f_0\left(\xi_k, \xi_{m(k)}\right) + A\left(\xi_k, \xi_{m(k)}\right) \cdot v_k \right],$$

из которого получим оценку для третьего слагаемого в (26)

$$\|\gamma_{i+1} - \gamma_{kp}\| \le \varepsilon \left\| \sum_{j=kp}^{i} \left[f_0\left(\xi_k, \xi_{m(k)}\right) + A\left(\xi_k, \xi_{m(k)}\right) \cdot v_k \right] \right\| \le \varepsilon p M (1 + M). \tag{28}$$

В (26) осталось оценить второе слагаемое, для этого соответствующие системы представим в виде

$$x_{(k+1)p} = x_{kp} + \varepsilon \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} \left[f\left(j, x_j, x_{s(j)}\right) + A\left(x_j, x_{s(j)}\right) \cdot \varphi\left(j, u_j\right) \right],$$

$$\gamma_{(k+1)p} = \gamma_{kp} + \varepsilon \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} \left[f_0\left(\gamma_{kp}, \gamma_{m(k)p}\right) + A\left(\gamma_{kp}, \gamma_{m(k)p}\right) \cdot v_k \right].$$

Получим

$$\begin{aligned}
&\|x_{(k+1)p} - \gamma_{(k+1)p}\| \le \|x_{kp} - \gamma_{kp}\| + \\
&+ \varepsilon \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} \left\| f\left(j, x_j, x_{s(j)}\right) - f\left(j, \gamma_{kp}, \gamma_{m(k)p}\right) \right\| + \\
&+ \varepsilon \left\| \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} f\left(j, \gamma_{kp}, \gamma_{m(k)p}\right) - p \cdot f_0\left(\gamma_{kp}, \gamma_{m(k)p}\right) \right\| + \\
&+ \varepsilon \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} \left\| A\left(x_j, x_{s(j)}\right) \cdot \varphi\left(j, u_j\right) - A\left(\gamma_{kp}, \gamma_{m(k)p}\right) \cdot \varphi\left(j, u_j\right) \right\| + \\
&+ \varepsilon \left\| A\left(\gamma_{kp}, \gamma_{m(k)p}\right) \right\| \cdot \left\| \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} \varphi\left(j, u_j\right) - p \cdot v_k \right\|.
\end{aligned}$$

В полученном неравенстве третье и пятое слагаемые в силу соотношений (20) и (24) обращаются в ноль, поэтому при выполнении условий теоремы, имеем

$$\left\|x_{(k+1)p}-\gamma_{(k+1)p}\right\|\le\left\|x_{kp}-\gamma_{kp}\right\|+$$
$$+\varepsilon\sum_{j=kp}^{(k+1)p-1}\left\|f\left(j,x_j,x_{s(j)}\right)-f\left(j,x_{kp},x_{m(k)p}\right)\right\|+$$
$$+\varepsilon\sum_{j=kp}^{(k+1)p-1}\left\|f\left(j,x_{kp},x_{m(k)p}\right)-f\left(j,\gamma_{kp},\gamma_{m(k)p}\right)\right\|+$$
$$+\varepsilon\sum_{j=kp}^{(k+1)p-1}\left\|\varphi\left(j,u_j\right)\right\|\cdot\left\|A\left(x_j,x_{s(j)}\right)-A\left(x_{kp},x_{m(k)p}\right)\right\|+$$
$$+\varepsilon\sum_{j=kp}^{(k+1)p-1}\left\|\varphi\left(j,u_j\right)\right\|\cdot\left\|A\left(x_{kp},x_{m(k)p}\right)-A\left(\gamma_{kp},\gamma_{m(k)p}\right)\right\|\le$$
$$\le\left\|x_{kp}-\gamma_{kp}\right\|+\varepsilon\lambda\sum_{j=kp}^{(k+1)p-1}\left(\left\|x_j-x_{kp}\right\|+\left\|x_{s(j)}-x_{m(k)p}\right\|\right)+$$
$$+\varepsilon\lambda\sum_{j=kp}^{(k+1)p-1}\left(\left\|x_{kp}-\gamma_{kp}\right\|+\left\|x_{m(k)p}-\gamma_{m(k)p}\right\|\right)+$$
$$+\varepsilon\lambda M\sum_{j=kp}^{(k+1)p-1}\left(\left\|x_j-x_{kp}\right\|+\left\|x_{s(j)}-x_{m(k)p}\right\|\right)+$$
$$+\varepsilon\lambda M\sum_{j=kp}^{(k+1)p-1}\left(\left\|x_{kp}-\gamma_{kp}\right\|+\left\|x_{m(k)p}-\gamma_{m(k)p}\right\|\right)\le$$
$$\le\left\|x_{kp}-\gamma_{kp}\right\|+\varepsilon\lambda(1+M)\sum_{j=kp}^{(k+1)p-1}\left(\left\|x_j-x_{kp}\right\|+\left\|x_{s(j)}-x_{m(k)p}\right\|\right)+$$
$$+\varepsilon\lambda(1+M)\sum_{j=kp}^{(k+1)p-1}\left(\left\|x_{kp}-\gamma_{kp}\right\|+\left\|x_{m(k)p}-\gamma_{m(k)p}\right\|\right)\le$$
$$\le\left\|x_{kp}-\gamma_{kp}\right\|+\varepsilon\lambda(1+M)\cdot p\cdot 2\varepsilon pM(1+M)+$$
$$+\varepsilon\lambda(1+M)\cdot p\cdot\left(\left\|x_{kp}-\gamma_{kp}\right\|+\left\|x_{m(k)p}-\gamma_{m(k)p}\right\|\right).$$

Из полученного неравенства и определения равномерной дискретной метрики $\delta_k=\max\limits_{0\le j\le k}\left\|x_{jp}-\gamma_{jp}\right\|$ следует, что

$$\delta_{k+1}\le\left(1+2\varepsilon\lambda p(1+M)\right)\delta_k+2\varepsilon^2p^2\lambda M(1+M)^2.$$

Полученное рекуррентное соотношение можно оценить следующим образом

$$\delta_{k+1}\le 2\varepsilon^2p^2\lambda M(1+M)^2\cdot\frac{\left(1+2\varepsilon\lambda p(1+M)\right)^k-1}{\left(1+2\varepsilon\lambda p(1+M)\right)-1}\le\varepsilon pM(1+M)\left(e^{2\lambda L(1+M)}-1\right).\tag{29}$$

Из (26), учитывая (27), (28), получим

$$\left\|x_{i+1}-\gamma_{i+1}\right\|\le 2\varepsilon pM(1+M)+\max_{0\le j\le k}\left\|x_{jp}-\gamma_{jp}\right\|\le$$
$$\le 2\varepsilon pM(1+M)+\varepsilon pM(1+M)\left(e^{2\lambda L(1+M)}-1\right)\le\varepsilon pM(1+M)\left(e^{2\lambda L(1+M)}+1\right).\tag{30}$$

По условию теоремы решение усредненной задачи вместе с ρ-окрестностью должно находиться в области D, откуда $\left\|x_{i+1}-\gamma_{i+1}\right\|\le\rho$, то есть

$$\varepsilon pM(1+M)\left(e^{2\lambda L(1+M)}+1\right)\le\rho.$$

Зафиксируем $L > 0$, по нему выберем $\varepsilon_0 = \dfrac{\rho}{pM(1+M)\left(e^{2\lambda L(1+M)}+1\right)}$ такое, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ из (30) следует выполнение первого утверждения теоремы, если в качестве постоянной $C > 0$ взять значение $C = pM(1+M)\left(e^{2\lambda L(1+M)}+1\right)$.

Докажем второе утверждение теоремы. Пусть $v_k \in V$, $k \in I_k$ – допустимое управление усредненной системы (22), (23), а $\gamma_i \in D,\ i \in I$ – соответствующее ему решение, которое по условию теоремы вместе со своей ρ-окрестностью лежит в области D. Пусть $u_i \in U,\ i \in I$ – управление системы (19), построенное по формуле (24), а $x_i \in D$, $i \in I$ – соответствующее ему решение, удовлетворяющее условию $x_0 = \gamma_0 = x^0 \in D$.

Требование $\|x_{i+1} - \gamma_{i+1}\| \le \rho$ для любого $i \in I$ означает, что решение $x = x_i$, $i \in I$ находится в ρ-окрестности решения $\gamma = \gamma_i$ и не выходит на границу области D ни для какого момента дискретного времени $i \in I$, а значит построенное по формуле (24) управление $u_i \in U$ будет допустимым, однако может быть получено неоднозначно.

Оценка разности для траекторий, соответствующих указанным управлениям, проводится так же, как и в первой части доказательства. То есть для любого $L > 0$ найдется $\varepsilon_0 = \dfrac{\rho}{pM(1+M)\left(e^{2\lambda L(1+M)}+1\right)}$ такое, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$ будет выполняться неравенство (25) при $C = pM(1+M)\left(e^{2\lambda L(1+M)}+1\right)$. Теорема 3 доказана.

4. Усреднение систем дискретных уравнений с переменным запаздыванием в задачах оптимального управления

Рассмотрим задачу оптимального управления, которая описывается системой дискретных уравнений с переменным запаздыванием (19) и терминальным критерием качества

(31) $$J(u) = \Phi(x_N) \to \min_{u \subset U}.$$

Предположим, что функции $f\left(i, x_i, x_{s(i)}\right)$ и $\varphi(i, u_i)$ являются p-периодическими по i, тогда усреднение в (19) проведем по формулам (20), (21). На множестве значений $k \in I_k = \{0, 1, 2, ..., N_k\}$ построим усредненную задачу вида (22), (23) и критерием

(32) $$\bar{J}(v) = \Phi(\gamma_N) \to \min_{v \subset V}.$$

Теорема 4. *Пусть в области* $D = \{\, i \in I;\ x_i \in D;\ u_i \in U \,\}$ *выполнены условия теоремы 3. Кроме того:*

- *функция* $\Phi(x)$ *удовлетворяет условию Липшица с постоянной* $\lambda > 0$.

Тогда для любого $L > 0$ *существуют такие* $C > 0$ *и* $\varepsilon_0 > 0$, *что для любого* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *и для любого* $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$, $N = E\left(L\varepsilon^{-1}\right)$ *справедливы следующие утверждения:*

- *если для данной задачи (19), (31) существует оптимальное решение* $u_i^* \in U$, $x_i^* \in D$, $J\left(u^*\right)$, $i \in I$, *то существует допустимое управление* $\bar{v}_k \in V$, $k \in I_k$, *построенное по формуле (24), и соответствующая траектория* $\bar{\gamma}_i \in D$ *усредненной системы (22), (23), что справедливо*

(33) $\left\| x_i^* - \bar{\gamma}_i \right\| \le C\varepsilon$, $\left| J\left(u^*\right) - \bar{J}(\bar{v}) \right| \le C\varepsilon$;

- *для оптимального решения* $v_k^* \in V, \gamma_i^* \in D, \bar{J}\left(v^*\right), k \in I_k, i \in I$ *усредненной задачи (22), (23), (32) существует допустимое управление* $\bar{u}_i \in U$ *, построенное по формуле (24), и траектория* $\bar{x}_i \in D$ *заданной системы (19), что*

(34) $\left\| \gamma_i^* - \bar{x}_i \right\| \le C\varepsilon$, $\left| \bar{J}\left(v^*\right) - J(\bar{u}) \right| \le C\varepsilon$;

- *оптимальное решение усредненной задачи (22), (23), (32) является асимптотически оптимальным решением задачи (19), (31), то есть*

(35) $\left| J\left(u^*\right) - \bar{J}\left(v^*\right) \right| \le C\varepsilon$, $J(\bar{u}) - J\left(u^*\right) \le C\varepsilon$.

Доказательство теоремы 4. Докажем первую часть теоремы. Предположим, что для задачи (19), (31) существует оптимальное управление u_i^*, $i \in I$, соответствующая ему оптимальная траектория x_i^*, $i \in I$ и оптимальное значение критерия качества $J\left(u^*\right)$. При выполнении условий теоремы будут выполнены все условия теоремы 3 для любого допустимого управления $u_i \in U$, $i \in I$ задачи (19), а значит и для оптимального управления u_i^*, $i \in I$ задачи (19), (31).

Следовательно, для выбранного $L > 0$ существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ и $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$ найдется допустимое управление $\bar{v}_k \in V$, $k \in I_k$, построенное по формулам (24), и соответствующее решение $\bar{\gamma}_i \in D$, $i \in I$, $x_0 = \bar{\gamma}_0 = x^0 \in D$ усредненной системы (22), (23), что будет выполняться соотношение

$$\left\| x_i^* - \bar{\gamma}_i \right\| \le C_1 \varepsilon .$$

Неравенство выполняется для любого $i \in I$, значит и для $i = N$, поэтому с учетом первого условия теоремы получим

$$\left| J\left(u^*\right) - \bar{J}(\bar{v}) \right| = \left| \Phi\left(x_N^*\right) - \Phi\left(\bar{\gamma}_N\right) \right| \le \lambda \cdot \left\| x_N^* - \bar{\gamma}_N \right\| \le \lambda \cdot C_1 \varepsilon .$$

Выберем $\varepsilon_0 > 0$ так, чтобы $\max\left\{ C_1, \lambda C_1 \right\} \le C$, и получим выполнение неравенств (33) теоремы. Первая часть теоремы доказана.

Перейдем к доказательству второй части теоремы. Пусть существует оптимальное управление $v_k^* \in V$, $k \in I_k$, соответствующая оптимальная траектория γ_i^*, $i \in I$, удовлетворяющая начальному условию $\gamma_0^* = x^0$, и оптимальное значение критерия качества $\bar{J}\left(v^*\right)$ усредненной задачи (22), (23), (32).

При выполнении условий теоремы выполняются все условия теоремы 3 для любого допустимого управления $v_k \in V$, $k \in I_k$ задачи (22), (23), а значит и для оптимального управления $v_k^* \in V$, $k \in I_k$ задачи (22), (23), (32).

Следовательно, существует $\varepsilon_2 > 0$ такое, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ и $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$ найдется такое допустимое управление $\bar{u}_i \in U$, $i \in I$, определяемое равенством (24), и соответствующая ему траектория $\bar{x}_i \in D$, $i \in I$, $x_0 = \bar{\gamma}_0 = x^0 \in D$ заданной системы (19), что будет выполняться соотношение

$$\left\| \bar{x}_i - \gamma_i^* \right\| \le C_2 \varepsilon .$$

Неравенство выполняется для любого $i \in I$, значит и для $i = N$, поэтому с учетом первого условия теоремы получим, что

$$\left| J(\overline{u}) - \overline{J}(v^*) \right| = \left| \Phi(\overline{x}_N) - \Phi(\gamma_N^*) \right| \le \lambda \cdot \left\| \overline{x}_N - \gamma_N^* \right\| \le \lambda \cdot C_2 \varepsilon .$$

Выберем $\varepsilon_0 > 0$ так, чтобы $\max\{ C_2, \lambda C_2 \} \le C$, и получим выполнение неравенств (34) теоремы. Вторая часть теоремы доказана.

Перейдем к третьей части теоремы. На оптимальном управлении критерий качества принимает наименьшее значение, поэтому для любого другого управления задачи выполняется неравенство

(36) $$J(\overline{u}) \ge J(u^*),$$

(37) $$\overline{J}(\overline{v}) \ge \overline{J}(v^*).$$

Для оптимальных значений критериев качества данной и усредненной задач может выполняться одно из двух неравенств

(38) $$J(u^*) \ge \overline{J}(v^*)$$

или

(39) $$J(u^*) < \overline{J}(v^*).$$

В первом случае из (36), (38) и (34) следует

$$J(\overline{u}) \ge J(u^*) \ge \overline{J}(v^*) \ge J(\overline{u}) - C\varepsilon, \text{ значит } \left| J(u^*) - \overline{J}(v^*) \right| \le C\varepsilon .$$

Во втором случае из (37), (39) и (33) следует

$$\overline{J}(\overline{v}) \ge \overline{J}(v^*) > J(u^*) \ge \overline{J}(\overline{v}) - C\varepsilon, \text{ значит } \left| \overline{J}(v^*) - J(u^*) \right| \le C\varepsilon .$$

Следовательно, в обоих случаях справедливо первое неравенство (35), из которого с учетом неравенства (34) следует второе неравенство (35). Теорема 4 доказана.

Список литературы

1. Белан Е.Л. О методе усреднения в теории конечно-разностных уравнений // Украинский математический журнал. 1967. Т. 19, № 3. С. 85-90.
2. Мартынюк Д.И., Данилов В.И., Паньков В.Г. Вторая теорема Н.Н. Боголюбова для систем разностных уравнений // Украинский математический журнал. 1996. Т. 48, № 4. С. 464-475.
3. Плотников В.А., Плотникова Л.И., Яровой А.Т. Метод усреднения дискретных систем и его приложение к задачам управления // Нелинейные колебания. 2004. Т.7, № 2. С. 241-254.
4. Бойцова И.А. Метод усреднения в системах дискретных уравнений с быстрыми и медленными переменными // Вестник ОНУ. Математика и механика. 2008. Т. 13, Вып. 18. С. 7-22.
5. Бойцова И.А. Численно-асимптотический метод решения дискретных задач оптимального управления с быстрыми и медленными переменными // Вестник БГУ. Сер. I. 2011. № 1. С. 105-110.
6. Кичмаренко О.Д., Карпычева М.Л. Усреднение систем дискретных уравнений с постоянным запаздыванием // Научный вестник Ужгородского университета. Математика и информатика. 2012. Вып. 23, № 2. С. 76-85.
7. Кичмаренко О.Д., Карпычева М.Л. Усреднение периодических управляемых систем с постоянным запаздыванием на дискретном времени. // Вестник Одесского национального университета. Математика и механика. 2012. Т. 17, Вып. 1-2. С. 54-69.
8. Апарцин А.С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1999. 193 с.