

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра методів математичної фізики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Крутильні коливання однорідного стрижня»

«Torsional vibrations of a homogeneous rod»

Виконав(ла): здобувач(ка) денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика

Освітня програма «Прикладна математика»

Скуріхін Іван Сергійович

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Фесенко Г. О. _____

Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. Журавльова З. Ю.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від _____ 2023 р.

Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № _____

Протокол № ____ від _____ 2023 р.

Оцінка _____ / _____ / _____

Голова ЕК

ЗМІСТ

Вступ	3
1 Коливання стрижня	6
1.1 Задача о крутильних коливаннях однорідного стрижня з одним вільним кінцем	6
1.1.1 Постановка задачі	6
1.1.2 Розв'язання задачі	7
1.1.3 Чисельні розрахунки	10
1.2 Задача о крутильних коливаннях однорідного стрижня з одним закріпленим кінцем	12
1.2.1 Постановка задачі	12
1.2.2 Чисельні розрахунки	13
2 Мішана задача теорії пружності для півнескінченного шару	15
2.1 Постановка задачі.	15
2.2 Результати чисельних розрахунків.	27
Висновки	30
Додаток А	31
Додаток В	33
Додаток С	35
Список літератури	37

ВСТУП

Розглянемо однорідний круговий циліндричний стрижень довжини l . Припустимо, що під впливом будь-якої причини цей стрижень здійснює так звані крутильні коливання, тобто. такі коливання, у яких його поперечні перерізи залишаються плоскими і повертаються без будь-якого спотворення одне щодо одного, обертаючись навколо осі стрижня. У разі кругового циліндричного стрижня при крученні поперечні перерізи не зміщуються паралельно до його осі.

Розглянемо малі коливання. Доведемо, що в цьому випадку кут повороту якогось перерізу стрижня задовольнятиме хвильове рівняння. З цією метою помістимо початок координат в один із кінців стрижня, а ось Ox направимо по його осі.

Нехай mn і m_1n_1 два поперечні перерізи, відстань між якими дорівнює dx . Для того щоб перетин mn повернувся щодо перерізу m_1n_1 на кут θ необхідно докласти до нього деякий момент M . Його називають крутильним моментом.

Для обчислення цього моменту зробимо таким чином. Виділимо зі стрижня нескінченно тонкий циліндр із поперечним перерізом $d\theta$; припустимо, що під дією крутильного моменту, прикладеного до цього перерізу, кінець A прямолінійної образуючої AA_1 переміститься на дуже малу відстань

$$\sphericalangle AB = r\theta \quad (0.1)$$

Позначимо через τ величину напруги, викликаного зсувом утворює AA_1 у положення BA_1 . Застосовуючи закон Гука, знайдемо, що

$$\tau = G\phi$$

де ϕ — кут AA_1B , а G — постійна величина, яка називається модулем зсуву. Звідси випливає, що зусилля, що припадає на поперечний переріз $d\sigma$, виражається добутком

$$\tau d\sigma = G\phi d\sigma. \quad (0.2)$$

Далі, в силу дуже малих розмірів трикутника AA_1B , можна вважати, що

$$\sphericalangle AB = \phi dx, \quad (0.3)$$

а з порівняння формул (0.1) і (0.3) видно, що

$$\phi = r \frac{\partial \theta}{\partial x};$$

отже,

$$\tau d\sigma = G \frac{\partial \theta}{\partial x} r d\sigma.$$

Якщо позначити через dM елементарний крутильний момент, прикладений до перерізу $d\sigma$, отримаємо

$$dM = r\tau d\sigma = G \frac{\partial \theta}{\partial x} r d\sigma.$$

Щоб знайти повний момент, що закручує M , треба проінтегрувати цю рівність по всій площі перерізу mn ; тоді отримаємо

$$M = G \frac{\partial \theta}{\partial x} \int \int r^2 d\sigma$$

Але так як інтеграл

$$\int \int r^2 d\sigma$$

є полярний момент інерції перерізу mn , то, позначивши його через J , знайдемо остаточний вираз шуканого крутильного моменту:

$$M = GJ \frac{\partial \theta}{\partial x}. \quad (0.4)$$

Виведемо тепер диференційне рівняння крутильних коливань стрижня.

З цією метою розглянемо частину стрижня, укладену між двома поперечними перерізами mn і m_1n_1 з абсцис x і $x + dx$. Крутильний момент у перерізі з абсцисою x дорівнює $GJ \frac{\partial \theta}{\partial x}$; момент у перерізі з абсцисою $x + dx$ дорівнює $GJ \frac{\partial \theta}{\partial x} + GJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dx$. Для отримання рівняння крутильних коливань

треба прирівняти результуючий момент $GJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dx$ добутку кутового ускорення $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$ на момент інерції елемента $mnm_1 n_1$ щодо осі стрижня. Таким чином, отримаємо

$$GJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dx = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} K dx,$$

де через K позначено момент інерції одиниці довжини стрижня. Звідси, після скорочення на dx , отримаємо

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad a = \sqrt{GJ/K}. \quad (0.5)$$

Це і є диференціальне рівняння крутильних коливань кругового циліндричного стрижня. Якщо ми маємо справу не з круговим циліндричним стрижнем, то при крученні поперечні перерізи стрижня не залишаються плоскими, а викривляються. На підставі теорії кручення стрижнів, крутильний момент визначається за формулою

$$M = C \frac{\partial \theta}{\partial x},$$

де C — жорсткість при крученні.

Диференціальне рівняння крутильних коливань циліндричного стрижня має той самий вид 0.5, у якому GJ замінено C .

РОЗДІЛ 1

КОЛИВАННЯ СТРИЖНЯ

1.1 Задача о крутильних коливаннях однорідного стрижня з одним вільним кінцем

1.1.1 Постановка задачі

Вивчимо крутильні коливання однорідного стрижня, коли один з його кінців $x = 0$ вільний, а до іншого кінця $x = l$ приєднаний масивний диск з моментом інерції K_1 щодо осі стрижня. Прирівняємо момент інерції диска до крутильного моменту на перетині $x = l$, отримаємо наступну граничну умову на кінці $x = l$:

$$K_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \Big|_{x=l} = -GJ \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=l}.$$

Задача, таким чином, зводиться до розв'язання рівняння

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad a = \sqrt{\frac{GJ}{K}}. \quad (1.1)$$

за граничних умов

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \Big|_{x=l} = -c^2 \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=l} \quad \left(c = \sqrt{\frac{GJ}{K_1}} \right) \quad (1.2)$$

та початкових умов

$$\theta|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(x). \quad (1.3)$$

1.1.2 Розв'язання задачі

Відповідно до методу Фур'є, частні розв'язки рівняння (5) будемо шукати у вигляді

$$\theta(x,t) = T(t)X(x); \quad (1.4)$$

тоді отримаємо рівняння

$$T''(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0, \quad (1.5)$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0. \quad (1.6)$$

Щоб функція 1.4, відмінна від тотожного нуля, задовольняла граничним умовам 1.2 очевидно, потрібно вимагати виконання умов:

$$X'(0) = 0, \quad c^2 X'(l) - a^2 \lambda^2 X(l) = 0. \quad (1.7)$$

Таким чином ми приходимо до задачі на власні числа для рівняння 1.5 при граничних умовах 1.7

Інтегруючи рівняння 1.5, отримаємо

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Задовольняючи граничні умови 1.7 знаходимо

$$C_2 = 0, \quad -(c^2 \lambda \sin \lambda l + a^2 \lambda^2 \cos \lambda l) C_1 = 0.$$

Покладемо $C_2 \neq 0$, отримаємо трансцендентне рівняння

$$c^2 \lambda \sin \lambda l + a^2 \lambda^2 \cos \lambda l = 0, \quad (1.8)$$

яке визначає власні числа задачі 1.5, 1.7

Дослідимо рівняння 1.8. Покладемо

$$l\lambda = \mu, \quad p = \frac{lc^2}{a^2} = \frac{lK}{K_1}, \quad (1.9)$$

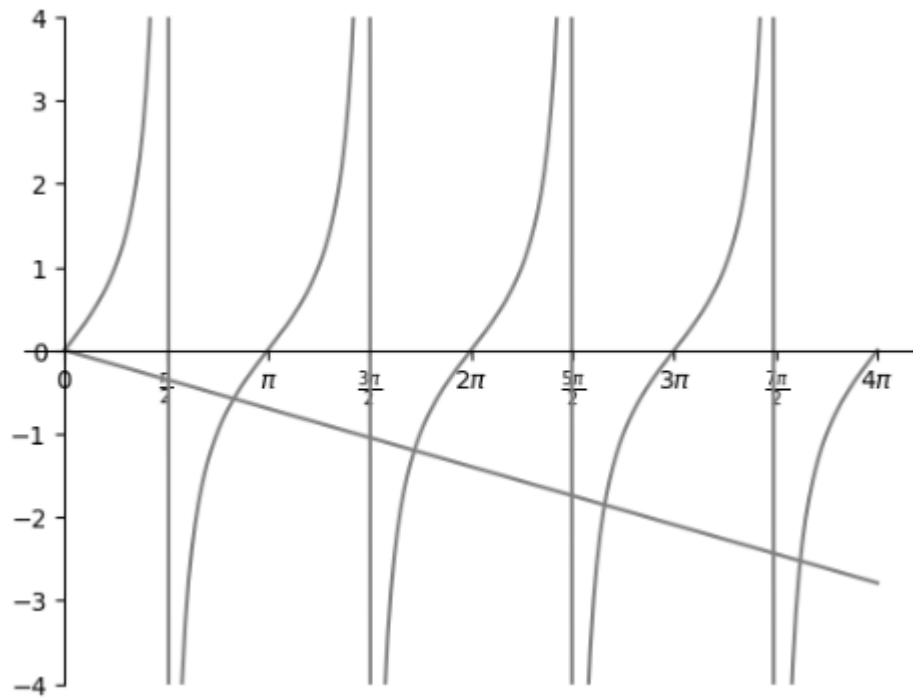


Рис. 1.1

то рівняння 1.8 буде мати наступний вигляд

$$\mu \cos \mu + p \sin \mu = 0 \quad (p > 0). \quad (1.10)$$

Для знаходження дійсних коренів цього рівняння достатньо побудувати графіки функцій

$$y = \operatorname{tg} \mu, \quad y = -\frac{\mu}{p} \quad (1.11)$$

та визначити абсциси точок перетину цих кривих (рис. 1.1). При достатньо великих значеннях k можна асимптотично покласти

$$\mu_k \approx \frac{\pi(2k-1)}{2} \quad (1.12)$$

Позначимо через

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3$$

додатні, дійсні корені рівняння 1.10. Тоді згідно 1.9, власні числа мають вигляд

$$\lambda_k^2 = \left(\frac{\mu_k}{l} \right)^2 \quad (1.13)$$

Кожному власному числу λ_k^2 відповідає власна функція

$$X_k(x) = \cos \frac{\mu_k x}{l} \quad (1.14)$$

Ці власні функції не ортогональні на проміжку $(0, l)$. При $\lambda = \lambda_k$ загальний розв'язок рівняння 1.5 має вигляд

$$T_k(t) = a_k \cos \frac{\mu_k at}{l} + b_k \sin \frac{\mu_k at}{l},$$

де a_k, b_k — довільні постійні. В силу 1.4 отримаємо функцію

$$\theta_k(x, t) = \left(a_k \cos \frac{\mu_k at}{l} + b_k \sin \frac{\mu_k at}{l} \right) \cos \frac{\mu_k x}{l},$$

задовольняє рівнянню 1.1 та граничним умовам 1.2 при довільних a_k, b_k . Далі складемо ряд

$$\theta(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{\mu_k at}{l} + b_k \sin \frac{\mu_k at}{l} \right) \cos \frac{\mu_k x}{l},$$

Для виконання початкових умов (1.3) необхідно, щоб

$$\theta(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{\mu_k x}{l} = f(x), \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a \mu_k}{l} b_k \cos \frac{\mu_k x}{l} = F(x) \quad (1.16)$$

З цих формул бачимо, що для знаходження коефіцієнтів a_k та b_k необхідно розкласти функції $f(x)$ $F(x)$ у ряд Фур'є по власним функціям (1.14). Відносно цих функцій відомо, що вони не утворюють ортогональну систему. Але функції

$$\sin \frac{\mu_k x}{l} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (1.17)$$

є ортогональними у проміжку $(0, l)$. Доведемо ортогональність цієї системи

та знайдемо норму.

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin \frac{\mu_k x}{l} \sin \frac{\mu_n x}{l} dx &= \frac{1}{2} \left[\int_0^l \cos \left((\mu_k - \mu_n) \frac{x}{l} \right) dx - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^l \cos \left((\mu_k + \mu_n) \frac{x}{l} \right) dx \right] = \frac{1}{2} \frac{l}{\mu_k - \mu_n} \sin((\mu_k - \mu_n)) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{l}{\mu_k + \mu_n} \sin((\mu_k + \mu_n)) = 2 \cos \mu_k \cos \mu_n \frac{\mu_n \operatorname{tg} \mu_k - \mu_k \operatorname{tg} \mu_n}{\mu_k^2 - \mu_n^2} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Звідки знайдемо

$$\int_0^l \sin \frac{\mu_k x}{l} \sin \frac{\mu_n x}{l} dx = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ \frac{l}{4m_k} (2\mu_k - \sin 2\mu_k) \end{cases} \quad (1.19)$$

Отримуємо коефіцієнти розкладання a_k b_k :

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\mu_k} \cdot \frac{p^2 + \mu_k^2}{p(p+1) + \mu_k^2} \int_0^l f'(x) \sin \frac{\mu_k x}{l} dx, \\ a_k &= \frac{2l}{a\mu_k^2} \cdot \frac{p^2 + \mu_k^2}{p(p+1) + \mu_k^2} \int_0^l F'(x) \sin \frac{\mu_k x}{l} dx. \end{aligned}$$

1.1.3 Чисельні розрахунки

Під час побудови графіків були прийняті значення параметрів $K = 1/2$ $K_1 = 4$ які були знайдені по формулі $K = \frac{1}{2}mr^2$. Де $m = 1$ $r = 1$ для K — момент інерції одиниці довжини стрижня. Де $m = 2$ $r = 2$ для K — момент інерції масивного диску. Довжина стрижня $l = 5$ враховуючи ці параметри знаходимо $p = \frac{lK}{K_1} = 5/8$. Власні числа $\mu_k = p \operatorname{tg}(\mu_k)$ були знайдені за допомогою функції `fsolve` з пакету `scipy` на мові програмування Python.

На малюнках (1.2)–(1.4) показано розподіл функції $\theta(x,t)$ при значеннях $t = 0.1$, $t = 2$, $t = 5$ в залежності від $x \in [0,5]$ $f'(x) = sh(x)$ $F'(x) = ch(x)$. Видно, що при $t = 0.1$ $t = 2$ функція $\theta(x,t)$ спадає, а при $t = 5$ навпаки зростає. На малюнках (1.5)–(1.7) зображена функція $\theta(x,t)$ у випадку $f'(x) = -\sin(x)$ $F'(x) = \cos(x)$. Що відповідає функціям у вихідній постановці задачі $f(x) = \cos(x)$ $F(x) = \sin(x)$. Код програми для

обчислення значень коливань наведено у Додатку А.

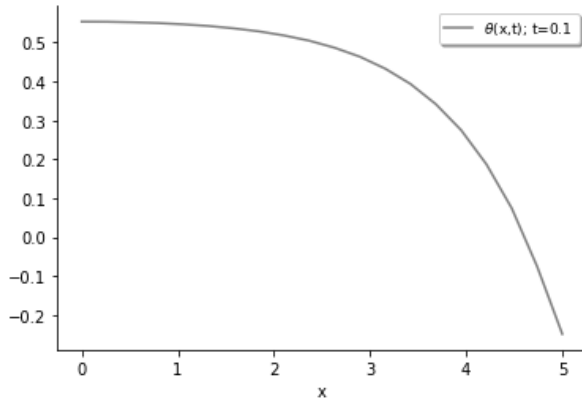


Рис. 1.2. $t = 0.1$

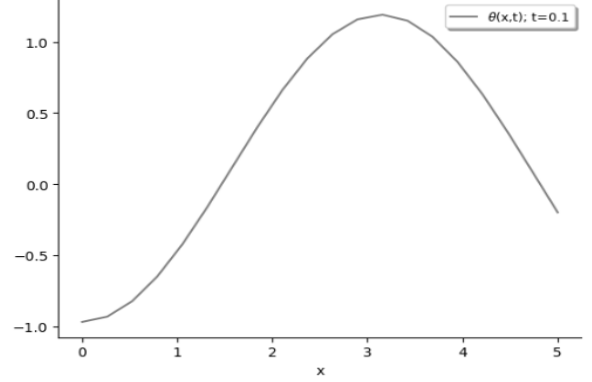


Рис. 1.5. $t = 0.1$

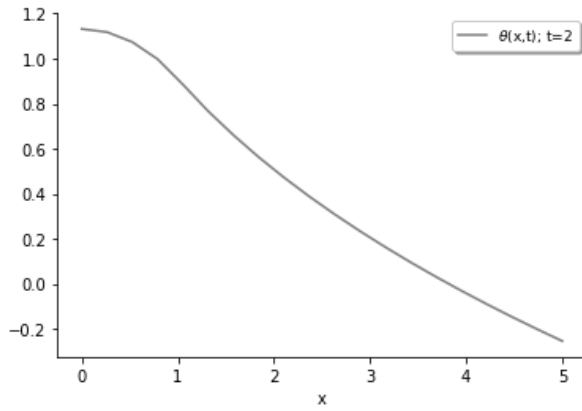


Рис. 1.3. $t = 2$

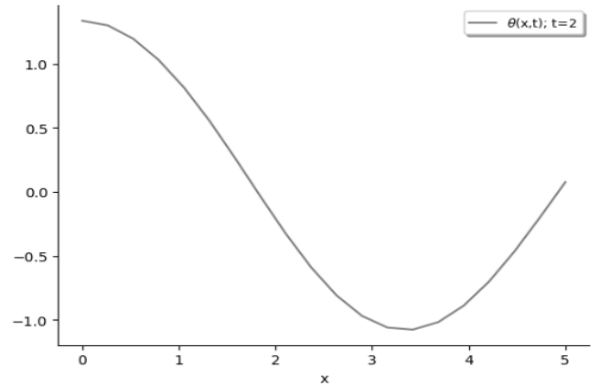


Рис. 1.6. $t = 2$

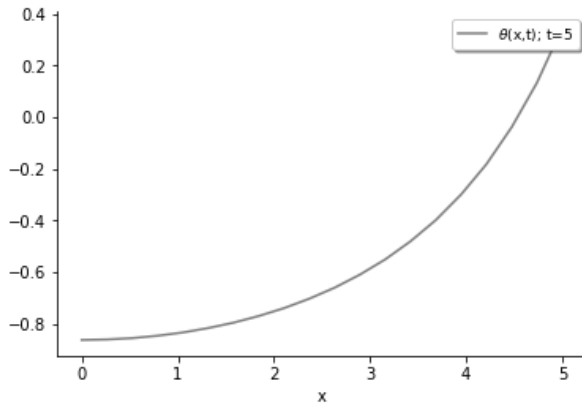


Рис. 1.4. $t = 5$

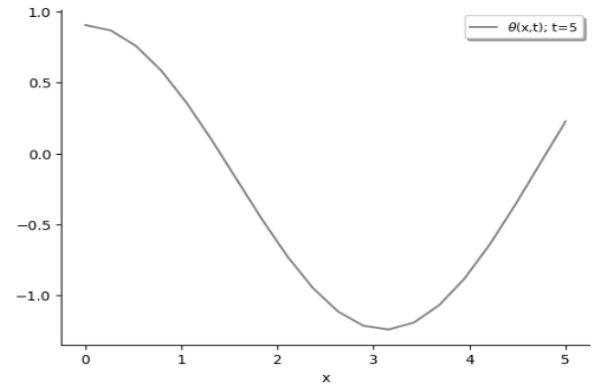


Рис. 1.7. $t = 5$

1.2 Задача о крутильних коливаннях однорідного стрижня з одним закріпленим кінцем

1.2.1 Постановка задачі

Вивчимо крутильні коливання однорідного стрижня, коли один з його кінців $x = 0$ закріплений, а до іншого кінця $x = l$ приєднаний масивний диск з моментом інерції K_1 щодо осі стрижня. Прирівняємо момент інерції диска до крутильного моменту на перетині $x = l$, отримаємо наступну граничну умову на кінці $x = l$:

$$K_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \Big|_{x=l} = -GJ \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=l}.$$

Задача, таким чином, зводиться до розв'язання рівняння

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad a = \sqrt{\frac{GJ}{K}}. \quad (1.20)$$

за граничних умов

$$\theta|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \Big|_{x=l} = -c^2 \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=l} \quad \left(c = \sqrt{\frac{GJ}{K_1}} \right) \quad (1.21)$$

та початкових умов

$$\theta|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(x). \quad (1.22)$$

У праці Кошлякова Н. С. [1] знайдено розв'язок задачі для однорідного стрижня, коли один з його кінців $x = 0$ закріплений, а до іншого $x = l$ прикріплений масивний диск з моментом інерції K_1 відносно осі стрижня.

$$\theta(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{\mu_k at}{l} + b_k \sin \frac{\mu_k at}{l} \right) \sin \frac{\mu_k x}{l}. \quad (1.23)$$

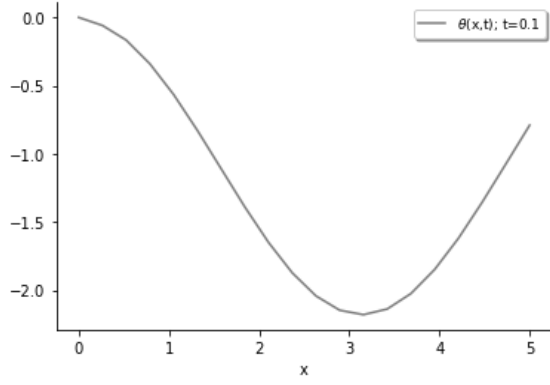
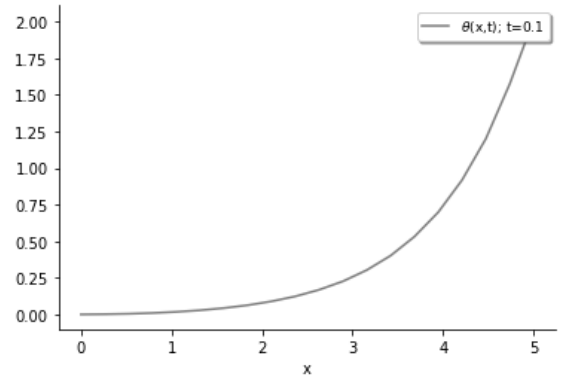
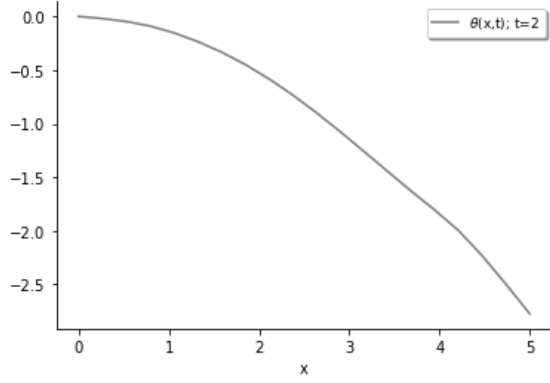
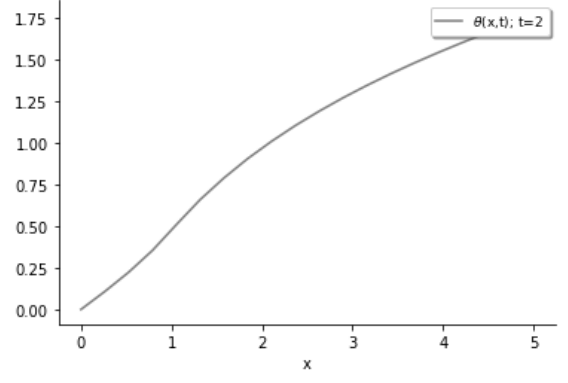
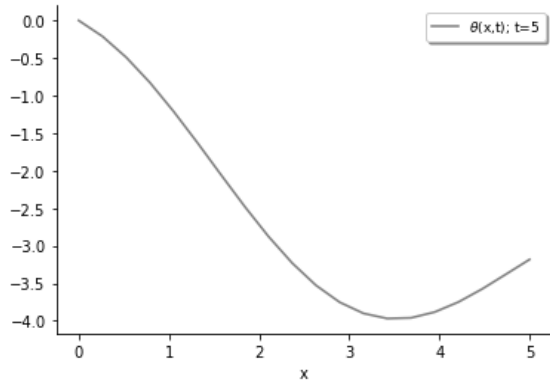
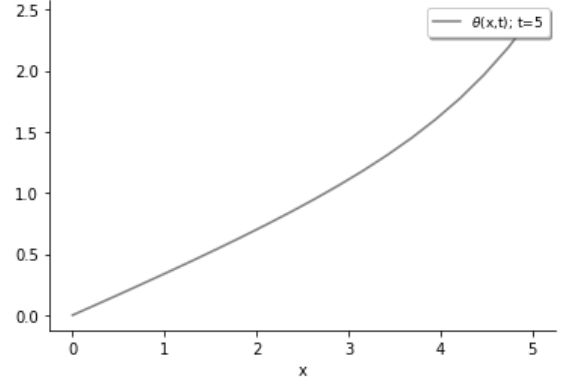
$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{4}{2\mu_k + \sin 2\mu_k} \int_0^l f'(x) \cos \frac{\mu_k x}{l} dx, \\
 b_k &= \frac{4l}{a\mu_k} \cdot \frac{1}{2\mu_k + \sin 2\mu_k} \int_0^l F'(x) \cos \frac{\mu_k x}{l} dx,
 \end{aligned}
 \tag{1.24}$$

де μ_k знаходимо з рівняння $\mu_k = \text{pctg}(\mu_k)$

1.2.2 Чисельні розрахунки

Під час побудови графіків для цієї задачі були прийняті значення параметрів $l = 5$ $p = 5/8$. Власні числа були знайдені за допомогою функції `fsolve` з пакету `scipy` на мові програмування Python.

На малюнках (1.8)–(1.10) показано розподіл функції $\theta(x, t)$ для випадку закріпленого стрижня у точці $x = 0$ при значеннях $t = 0.1$, $t = 2$, $t = 5$ в залежності від $x \in [0, 5]$ $f'(x) = -\sin(x)$ $F'(x) = \cos(x)$. Видно, що при $t = 0.1$, $t = 5$ функція $\theta(x, t)$ має періодичний характер, а при $t = 2$ спадає. На малюнках (1.11)–(1.13) зображена функція $\theta(x, t)$ у випадку $f'(x) = -\sin(x)$ $F'(x) = \cos(x)$. Що відповідає функціям у вихідній постановці задачі $f(x) = \cos(x)$ $F(x) = \sin(x)$. У всіх випадках (1.11)–(1.13) функція зростає. Код програми для обчислення значень коливань наведено у Додатку В.

Рис. 1.8. $t = 0.1$ Рис. 1.11. $t = 0.1$ Рис. 1.9. $t = 2$ Рис. 1.12. $t = 2$ Рис. 1.10. $t = 5$ Рис. 1.13. $t = 5$

РОЗДІЛ 2

МІШАНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВНЕСКІНЧЕННОГО ШАРУ

2.1 Постановка задачі.

Розглянемо мішану задачу теорії пружності для півнескінченного шару, що описується у декартовій системі координат співвідношеннями

$$0 < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad 0 < z < h. \quad (2.1)$$

Вважається, що по торцю шару $x = 0$ задано умови гладкого контакту. На шар діє сила ваги та зосереджена у точці з координатами (a, b) грані $z = h$ сила. На грані $z = 0$ задано умови гладкого контакту.

Необхідно знайти переміщення точок шару $u^*(x, y, z)$, $v^*(x, y, z)$, $w^*(x, y, z)$, що задовольняють системі рівнянь Ламе

$$\begin{aligned} G\Delta u + (\lambda + G)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + P_x &= 0, \\ G\Delta v + (\lambda + G)\frac{\partial \Theta}{\partial y} + P_y &= 0, \\ G\Delta w + (\lambda + G)\frac{\partial \Theta}{\partial z} + P_z &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

де $P_x = 0$, $P_y = 0$, $P_z = q_z/G$, q_z — питома вага матеріалу, та граничним умовам

$$\begin{aligned} \sigma_z|_{z=h} &= -\delta(x-a)\delta(y-b), \quad \tau_{zx}|_{z=h} = 0, \quad \tau_{zy}|_{z=h} = 0, \\ u^*|_{x=0} &= 0, \quad \tau_{xz}|_{x=0} = 0, \quad \tau_{zx}|_{z=h} = 0, \\ w^*|_{z=0} &= 0, \quad \tau_{zx}|_{z=0} = 0, \quad \tau_{zy}|_{z=0} = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

де $\delta(\xi)$ — дельта-функція Дірака.

Розв'язок будемо шукати у вигляді суперпозиції полей переміщень

напружень

$$\begin{aligned} [u^*, v^*, w^*, \sigma_x^*, \sigma_y^*, \tau_{xz}^*]^T &= \\ &= [u, v, w, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xz}]^T + [u^\gamma, v^\gamma, w^\gamma, \sigma_x^\gamma, \sigma_y^\gamma, \tau_{xz}^\gamma]^T \end{aligned} \quad (2.4)$$

В цьому поданні відсутність індексу означає переміщення та напруження у півшарі без урахування власної ваги. Індекс γ — переміщення та напруження, що виникають у шарі з урахуванням власної ваги.

Для відшукування останніх розглянемо задачу з вагою для шару $-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, 0 < z < h$. Розв'язок будемо у формі

$$u^\gamma = f_0(z), v^\gamma = f_1(z), w^\gamma = f_2(z).$$

В силу симетрії задачі можна вважати, що $u^\gamma = f_0(z) \equiv 0, v^\gamma = f_1(z) \equiv 0$, тоді дотичне напруження $\tau_{xy} = G(u + w') \equiv 0$, тому для переміщень, що задані у такому вигляді автоматично виконується гранична умова гладкого контакту на торці шару. Відповідні переміщення задовольняють системі рівнянь Ламе

$$\Delta u^\gamma + \mu_0 \Theta^{\gamma'} = 0, \Delta v^\gamma + \mu_0 \Theta^{\gamma'} = 0, \Delta w^\gamma + \mu_0 \Theta^{\gamma'} + q_z/G = 0.$$

Верхня грань $z = h$ припускається вільною від напружень

$$\sigma_z|_{z=h} = 0, \tau_{zx}|_{z=h} = 0, \tau_{zy}|_{z=h} = 0.$$

На нижній грані $z = 0$ виконуються умови гладкого контакту.

Для функції $w^\gamma = f_2(z)$ в обох випадках отримаємо крайову задачу

$$(1 + \mu_0)f_2''(z) + \gamma = 0, f_2'(h) = 0, f_2(0) = 0,$$

звідки знайдемо розв'язок

$$w^\gamma = (1 + \mu_0)^{-1} q_z G^{-1} (hz - z^2/2),$$

за яким побудовано нормальне напруження

$$\sigma_x^\gamma = \mu(1 - \mu)^{-1}q_z(h - z).$$

Тоді формула для напружень, що отримана для півшару, з урахуванням його власної ваги набуває вигляду

$$\sigma_x^*(x, y, z) = \sigma_x(x, y, z) + \mu(1 - \mu)^{-1}q_z h(1 - z), \quad (2.5)$$

Знайдемо переміщення і напруження, що виникають у шарі (2.1), без урахування його власної ваги. Для визначення напруженого стану під дією довільно розподіленого нормального навантаження достатньо отримати розв'язок під дією одиничної нормальної стискаючої сили, що зосереджено у точці з координатами (a, b, h) .

Переміщення задовольняють рівнянням Ламе, записаним у векторній формі

$$\Delta(u_0, v_0, w_0)^T + \mu_0(\Theta', \Theta', \Theta')^T = 0 \quad (2.6)$$

(u_0, v_0, w_0 — переміщення від одиничної сили), та граничним умовам

$$\begin{aligned} \sigma_z|_{z=h} &= -\delta(x - a)\delta(y - b), \quad \tau_{zx}|_{z=h} = 0, \quad \tau_{zy}|_{z=h} = 0, \\ u|_{x=0} &= 0, \quad \tau_{xz}|_{x=0} = 0, \quad \tau_{xy}|_{x=0} = 0, \\ w|_{z=0} &= 0, \quad \tau_{zx}|_{z=0} = 0, \quad \tau_{zy}|_{z=0} = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Переформулюємо граничні умови (2.7) у термінах переміщень, враховуючи відомі формули зв'язку переміщень та напружень [3]

$$\mu [u'(x, y, h) + v(x, y, h)] + (1 - \mu)w'(x, y, h) = -\delta(x - a)\delta(y - b)/(2G\mu_0),$$

$$w(x, y, h) + w'(x, y, h) = 0, \quad w(x, y, h) + v(x, y, h) = 0,$$

$$u(0, y, z) = v'(0, y, z) = w'(0, y, z) = 0,$$

$$w(x, y, 0) = 0 \quad w(x, y, 0) + w'(x, y, 0) = 0,$$

$$w(x, y, 0) + v(x, y, 0) = 0.$$

За схемою, що описана у другому розділі, отримано однорідну систему

рівнянь (2.2) з крайовими умовами

$$\begin{aligned}
Z'(0,y,z) &= 0, \quad w'(0,y,z) = 0, \quad Z^*(0,y,z) = 0, \\
Z'(x,y,0) &= 0, \quad w(x,y,0) = 0, \quad Z^*(x,y,0) = 0, \\
\nabla_{xy}w(x,y,h) + Z'(x,y,h) &= 0, \quad Z^*(x,y,h) = 0, \\
\mu Z(x,y,h) + (1 - \mu)w'(x,y,h) &= -\delta(x - a)\delta(y - b)/(2G\mu_0).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Після використання інтегральних перетворень

$$(w_{\beta\alpha}, Z_{\beta\alpha})^T = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (w_{\beta\alpha}, Z_{\beta\alpha})^T e^{i\beta y} \cos \alpha x \, dx dy \tag{2.9}$$

запишемо крайову задачу у трансформантах

$$\begin{cases} w''_{\beta\alpha}(z) - \mu_*^{-1}N^2w_{\beta\alpha}(z) + \mu_*^{-1}\mu_0Z'_{\beta\alpha}(z) = 0, & 0 < z < h, \\ Z''_{\beta\alpha}(z) - N^2[\mu_*Z_{\beta\alpha}(z) + \mu_0w'_{\beta\alpha}(z)] = 0, & N^2 = \alpha^2 + \beta^2, \end{cases} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
-N^2w_{\beta\alpha}(h) + Z'_{\beta\alpha}(h) &= 0, \quad \mu Z_{\beta\alpha}(h) + (1 - \mu)w'_{\beta\alpha}(h) = \\
&= -(2G\mu_0)^{-1} \cos \alpha a \cdot e^{i\beta b}, \\
w_{\beta\alpha}(0) &= 0, \quad Z'_{\beta\alpha}(0) = 0.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Для функції Z^* отримано незалежно розв'язувану однорідну крайову задачу, що у трансформантах (2.9) має вигляд

$$\begin{aligned}
Z''_{\beta\alpha}(z) - N^2Z^*_{\beta\alpha}(z) &= 0, \quad 0 < z < h \\
Z^*_{\beta\alpha}(h) &= 0, \quad Z^*_{\beta\alpha}(0) = 0
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Очевидно, що крайова задача (2.12) має тривіальний розв'язок $Z^*_{\beta\alpha}(z) = 0$, а значить $Z^*(x,y,z) = 0$.

Введемо шуканий вектор трансформант переміщень $\mathbf{y}(\mathbf{z})$ та матриці \mathbf{P}, \mathbf{Q} (2.9), тоді систему (2.10) запишемо у векторній формі

$$L_2\mathbf{y}(\mathbf{z}) = 0, \quad 0 < z < h, \tag{2.13}$$

де диференційний оператор L_2 визначено у (2.8).

Загальний розв'язок рівняння (2.13) будується у формі

$$\mathbf{y}(\mathbf{z}) = \mathbf{Y}_-(\mathbf{z})(C_0^0 \ C_0^1)^T + \mathbf{Y}_+(\mathbf{z})(C_1^0 \ C_1^1)^T$$

Постійні вектори знайдемо, задовольнив крайовим умовам (2.10). Із отриманої системи рівнянь знайдено

$$\begin{aligned} C_0^0 = C_1^0 &= \frac{\cos \alpha a \cdot e^{i\beta b}}{2G\mu_0\kappa} \frac{1}{N} \frac{1}{D_N} (-Nh \cdot \operatorname{ch} Nh - \mu_1^{-1} \operatorname{sh} Nh), \\ C_0^1 = -C_1^1 &= -\frac{\cos \alpha a \cdot e^{i\beta b}}{2G\mu_0\kappa} \frac{\mu_*}{D_N} (Nh \cdot \operatorname{ch} Nh - \mu_0^{-1} \operatorname{sh} Nh), \\ D_N &= 2 \operatorname{sh} 2Nh + 4Nh, \end{aligned} \quad (2.14)$$

де $\mu_1 = (2 - 2\mu)^{-1}$.

Шуканий вектор набуває вигляду

$$w_{\beta\alpha}(z) = \frac{\cos \alpha a \cdot e^{i\beta b}}{2GD_N} \cdot F_1(N, z), w_{\beta\alpha}(z) = \frac{\cos \alpha a \cdot e^{i\beta b}}{2GD_N} \cdot F_2(N, z), \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}F_1(N, z) &= (z + h) \operatorname{sh} N(h - z) - (h - z) \operatorname{sh} N(h + z) - \\ &\quad - \mu_1^{-1} \frac{1}{N} (\operatorname{ch} N(h + z) - \operatorname{sh} N(h - z)), \\ \frac{1}{2}F_2(N, z) &= N(z + h) \operatorname{ch} N(h - z) + N(h - z) \operatorname{ch} N(h + z) - \\ &\quad - \mu_0^{-1} (\operatorname{sh} N(h + z) + \operatorname{sh} N(h - z)). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Для відшукування трансформант $u_{\beta\alpha}(z)$ та $v_{\beta\alpha}(z)$, виходячи з виконаної заміни, необхідно розв'язати рівняння Пуассона

$$\nabla_{xy}u = Z' - Z^*, \nabla_{xy}v = Z \cdot - Z^*.$$

Шляхом використання введених інтегральних перетворень (2.7) із урахуванням (3.10) отримаємо

$$u_{\beta\alpha}(z) = \alpha N^{-2} Z_{\beta\alpha}(z), \quad v_{\beta\alpha}(z) = i\beta N^{-2} Z_{\beta\alpha}(z). \quad (2.17)$$

Розв'язок (2.17) побудовано на основі рівнянь, що були отримані

шляхом диференціювання перших двох із системи рівнянь Ламе (2.2). Тому може виявитись, що ці рівняння можуть бути не задовільненими. Для того щоб довести правильність отриманого розв'язку, необхідно показати, що оригінали трансформант задовольняють першим двом рівнянням із системи рівнянь Ламе (2.2) або що функції (2.17) задовольняють вказаним рівнянням, трансформованим по Фур'є

$$\begin{aligned} u''_{\beta\alpha}(z) - N^2 u_{\beta\alpha}(z) - \mu_* \alpha Z_{\beta\alpha}(z) - \mu_0 \alpha w'_{\beta\alpha}(z) + Z_{\beta\alpha}(z) &= 0, \\ v''_{\beta\alpha}(z) - N^2 v_{\beta\alpha}(z) - \mu_* i \beta Z_{\beta\alpha}(z) - \mu_0 i \beta w'_{\beta\alpha}(z) + i \beta Z_{\beta\alpha}(z) &= 0. \end{aligned}$$

Якщо підставити сюди вирази (2.17), а також впливаючі із нього рівності

$$u''_{\beta\alpha}(z) = \alpha N^{-2} Z''(z), v''_{\beta\alpha}(z) = i \beta N^{-2} Z''(z),$$

то обидва рівняння перейдуть у друге рівняння із (2.5), яке було задовільнено при отриманні розв'язку (2.17). А це і обґрунтовує правильність розв'язку.

Для того щоб отримати оригінали переміщень, використаємо до (2.15) обернені косинус (синус) і повне перетворення Фур'є

$$w_0(x, y, z) = \frac{1}{2G\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{F_1(N, z)}{D_N} e^{-i\beta(y-b)} \cos \alpha a \cos \alpha x d\beta d\alpha,$$

де w_0 — переміщення у шарі, що виникає під дією одиничної сили. Використаємо формулу Ейлера, формулу (1.314(3), [4]) та парність підінтегральної функції за змінною α

$$\begin{aligned} w_0(x, y, z) &= \\ &= \frac{1}{8\pi^2 G} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_1(N, z)}{D_N} e^{-i\beta(y-b)} \left(e^{-i\alpha(x-a)} + e^{-i\alpha(x+a)} \right) d\beta d\alpha. \end{aligned}$$

Для переходу до одновимірного інтеграла скористаємося формулою [37], враховуючи, що $N^2 = \alpha^2 + \beta^2$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right) e^{-i\alpha x - i\beta y} d\alpha d\beta &= \\ &= \int_0^{\infty} t F(t) J_0 \left(t \sqrt{x^2 + y^2} \right) dt, \quad (2.18) \end{aligned}$$

де $J_0(t)$ – функція Бесселя. Тоді отримаємо

$$w_0(x,y,z) = \frac{1}{4\pi G} \int_0^\infty t \cdot \frac{J_0^*(t,x,y,a,b)}{D_t} F_1(t,z) dt, \quad (2.19)$$

$$D_t = 2 \operatorname{sh} 2ht + 4ht,$$

де функція $F_1(t,z)$ аналогічна (2.16) зі заміною змінної N на t . У отриманому інтегралі (2.19) при $t \rightarrow 0$ підінтегральна функція – величина скінченна. Для перевірки цього факту було використано правило Лопітала з урахуванням вида невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$. На нескінченності характер збіжності інтегралу визначається поведінкою на нескінченності функції Бесселя, що дає можливість встановити, що інтеграл (2.19) є умовно збіжним.

Побудоване переміщення від одиничної нормальної стискаючої сили дозволяє знайти переміщення при довільному нормальному завантаженні шару по ділянці $0 < x < A$, $-B < y < B$

$$w(x,y,z,A,B) = \int_0^A \int_{-B}^B p(a,b) w_0(x,y,z; a,b) da db, \quad (2.20)$$

де $p(a,b)$ – інтенсивність діючого навантаження.

Для визначеності будемо вважати навантаження кусково-постійним $p(a,b) = P$, $a \in [0, A]$, $b \in [-B, B]$, $P = 1$.

Тоді для (2.19) з урахуванням (2.20) будемо мати

$$w(x,y,z) = \frac{1}{4\pi G} \int_0^A \int_{-B}^B \int_0^\infty t \cdot \frac{J_0^*(t,x,y,a,b)}{D_t} F_1(t,z) da db dt. \quad (2.21)$$

Зауважимо, що при даній постановці задача буде еквівалентною задачі для нескінченного шару з навантаженням, розподіленим на ділянці $a \in [-A, A]$, $b \in [-B, B]$. На основі співвідношень (2.15), (2.17) знайдено переміщення

$$u_0(x,y,z) = \frac{1}{2G\pi^2} \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha \cos \alpha a e^{i\beta b}}{N^2 D_N} F_2(N,z) e^{-i\beta y} \sin \alpha x d\beta d\alpha,$$

де функцію $F_2(N,z)$ визначено у (2.16), D_N – у (2.14). Врахуємо

формулу (1.314(1), [5]) та факт, що $\alpha = -i \cdot i\alpha$, у подальшому використаємо парність підінтегральної функції за змінною α та формулу Ейлера

$$\begin{aligned} u_0(x,y,z) &= \\ &= \frac{1}{8G\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\alpha}{N^2 D_N} F_2(N,z) e^{-i\beta(y-b)} \left[e^{-i\alpha(x+a)} + e^{-i\alpha(x-a)} \right] d\beta d\alpha. \end{aligned}$$

Очевидно співвідношення

$$i\alpha \left[e^{-i\alpha(x+a)} + e^{-i\alpha(x-a)} \right] = -\frac{\partial}{\partial x} \left[e^{-i\alpha(x+a)} + e^{-i\alpha(x-a)} \right],$$

тоді маємо

$$\begin{aligned} u_0(x,y,z) &= \\ &= \frac{1}{8G\pi^2} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_2(N,z)}{N^2 D_N} e^{-i\beta(y-b)} \left[e^{-i\alpha(x+a)} + e^{-i\alpha(x-a)} \right] d\beta d\alpha. \end{aligned}$$

В останньому інтегралі використаємо формулу (2.20)

$$u_0(x,y,z) = \frac{1}{4G\pi} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right) \int_0^{\infty} \frac{F_2(t,z)}{t D_t} J_0^*(t,x,y,a,b) dt. \quad (2.22)$$

За аналогією знайдено

$$v_0(x,y,z) = \frac{1}{2G\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{i\beta \cos \alpha a e^{i\beta b}}{N^2 D_N} F_2(N,z) e^{-i\beta y} \cos \alpha x d\beta d\alpha. \quad (2.23)$$

Тут використано формулу (1.314(3), [4]) та парність підінтегральної функції за змінною α та формула Ейлера. Перед застосуванням формули (2.18) зауважимо, що $i\beta e^{-\beta(y-b)} = -\frac{\partial}{\partial y} e^{-i\beta(y-b)}$

$$v_0(x,y,z) = \frac{1}{4G\pi} \left(-\frac{\partial}{\partial y} \right) \int_0^{\infty} \frac{F_2(t,z)}{t D_t} J_0^*(t,x,y,a,b) dt. \quad (2.24)$$

Приведемо формулу (2.21) до виду, зручного для чисельної реалізації. З цією метою підставимо у інтеграл інтегральне подання функції Бесселя

та обчислимо інтеграли як повторні

$$w(x,y,z) = \frac{2}{\pi^2 G} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty S_t^{A,B}(\psi) \cdot \cos(tx \cos \psi) \cos(ty \sin \psi) \frac{F_1(t,z)}{t D_t} d\psi dt, \quad (2.25)$$

в отриманому інтегралі зробимо заміну змінних та введемо позначення

$$\begin{aligned} z &= z'h, z' \in [0,1], \\ t &= t'/h, A_h = A/h, B_h = B/h, x_h = x/h, y_h = y/h \\ F(t, \tau_k) &= \\ &= \sin\left(tA_h \sqrt{1 - \tau_k^2}\right) \sin(tB_h \tau_k) \cos\left(tx_h \sqrt{1 - \tau_k^2}\right) \cos(ty_h \tau_k), \end{aligned} \quad (2.26)$$

штрихи далі писати не будемо. Отримаємо

$$w(x,y,z) = \frac{h}{\pi G N} \sum_{k=1}^N \int_0^\infty \frac{F(t, \tau_k)}{t^2 \sqrt{1 - \tau_k^2} \tau_k} \frac{F_1(t,z)}{D_t} dt. \quad (2.27)$$

Виходячи із співвідношень (2.20), (2.22), (2.23), знайдемо переміщення $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ від розподіленого навантаження, далі діючи аналогічно, як і для переміщення $w(x,y,z)$, знайдено

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= \frac{h^2}{\pi G N} \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) \sum_{k=1}^N \int_0^\infty \frac{F(t, \tau_k)}{t^3 \sqrt{1 - \tau_k^2} \tau_k} \frac{F_2(t,z)}{D_t} dt, \\ v(x,y,z) &= \frac{h^2}{\pi G N} \left(-\frac{\partial}{\partial y}\right) \sum_{k=1}^N \int_0^\infty \frac{F(t, \tau_k)}{t^3 \sqrt{1 - \tau_k^2} \tau_k} \frac{F_2(t,z)}{D_t} dt, \end{aligned} \quad (2.28)$$

або остаточно

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= \frac{h}{\pi G N} \sum_{k=1}^N \int_0^\infty \frac{F(t, \tau_k)}{t^2 \tau_k} \frac{F_2(t,z)}{D_t} dt, \\ v(x,y,z) &= \frac{h}{\pi G N} \sum_{k=1}^N \int_0^\infty \frac{F(t, \tau_k)}{t^2 \sqrt{1 - \tau_k^2}} \frac{F_2(t,z)}{D_t} dt, \end{aligned} \quad (2.29)$$

Таким чином, розв'язок задачі (2.6), (2.8) має вигляд (2.25), (2.27). Шукане напруження будується за формулою [3]

$$\sigma_x = 2G\mu_0 [(1 - \mu)u' + \mu v + \mu w]. \quad (2.30)$$

Отримано вираз для нормального напруження

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)}(x, y, z) = & \frac{2}{\pi N} \left[\sum_{k=1}^N \frac{\sqrt{1 - \tau_k^2}}{\tau_k} \int_0^\infty \frac{F(t, \tau_k)}{D_t^{*(1)}} \times \right. \\ & \times \{ (z + 1) \operatorname{ch} t(1 - z) + (1 - z) \operatorname{ch} t(1 + z) \} dt + \\ & \left. + \sum_{k=1}^N \frac{\mu_0^{-1} \tau_k^2 - 1}{\tau_k \sqrt{1 - \tau_k^2}} \int_0^\infty \frac{F(t, \tau_k)}{D_t^{*(1)} \cdot t} \cdot \{ \operatorname{sh} t(1 + z) + \operatorname{sh} t(1 - z) \} dt \right], \quad (2.31) \end{aligned}$$

де

$$D_t^{*(1)} = \operatorname{sh} 2t + 2t.$$

У якості контролю за зробленими розрахунками знайдемо значення нормального напруження у точці шару з координатами $(0, 0, h)$. Для цього, враховуючи вираз (2.24), введемо позначення

$$F_0(t, \tau_k) = \sin \left(t A_h \sqrt{1 - \tau_k^2} \right) \sin (t B_h \tau_k). \quad (2.32)$$

В інтегралі (2.25) покладемо $x = 0, y = 0$ та знайдемо похідну за змінною z , враховуючи зроблену заміну (2.24), тобто $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial z'}$. Після диференціювання покладемо $z = 1$

$$w'(0, 0, 1) = -\frac{1}{\pi GN} \sum_{k=1}^N \int_0^\infty \frac{F_0(t, \tau_k)}{t \sqrt{1 - \tau_k^2} \tau_k} f_1(t) dt, \quad (2.33)$$

$$\text{де } f_1(t) = \frac{4t + \mu_0^{-1}(e^{2t} - e^{-2t})}{e^{2t} + 4t - e^{-2t}}.$$

Виконаємо під знаком інтеграла (2.32) наступне перетворення

$$f_1(t) - \mu_0^{-1} + \mu_0^{-1} = \frac{8\mu \cdot t e^{-2t}}{1 + 4t e^{-2t} - e^{-4t}} + \mu_0^{-1},$$

де перший доданок являє собою спадаючу функцію. Тоді похідна переміще-

ння (2.32) запишеться у формі

$$w'(0,0,1) = -\frac{1}{\pi GN} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\tau_k \sqrt{1-\tau_k^2}} \times \\ \times \left[8\mu \int_0^\infty \frac{F_0(t, \tau_k)}{D_t} dt + \mu_0^{-1} \int_0^\infty \frac{\sin(tA_h \sqrt{1-\tau_k^2}) \sin(tB_h \tau_k)}{t} dt \right].$$

Тут у другому інтегралі використаємо формулу (3.741(1), [4]) та наступне позначення

$$F^*(\tau_k; A, B) = \ln \left(\frac{\sqrt{1-\tau_k^2} + (B/A)\tau_k}{\sqrt{1-\tau_k^2} - (B/A)\tau_k} \right)^2, \quad (2.34)$$

тоді запишемо похідну переміщення у вигляді

$$w'(0,0,1) = -\frac{1}{\pi GN} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\tau_k \sqrt{1-\tau_k^2}} \times \\ \left\{ 8\mu \int_0^\infty \frac{F_0(t, \tau_k)}{2 \operatorname{sh} 2t + 4t} dt + \frac{1}{4\mu_0} F^*(\tau_k; A, B) \right\}. \quad (2.35)$$

У переміщеннях, визначених у (2.26), покладемо для $u(x, y, z)$ $y = 0$, $z = 1$, а для $v(x, y, z)$ $x = 0$, $z = 1$

$$u(x, 0, 1) = \frac{h^2}{\pi GN} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right) \sum_{k=1}^N \frac{1}{\tau_k \sqrt{1-\tau_k^2}} \times \\ \times \int_0^\infty F_0(t, \tau_k) \cos \left(t \frac{x}{h} \sqrt{1-\tau_k^2} \right) \frac{f_2(t)}{t^3} dt$$

$$v(0, y, 1) = \frac{h^2}{\pi GN} \left(-\frac{\partial}{\partial y} \right) \sum_{k=1}^N \frac{1}{\tau_k \sqrt{1-\tau_k^2}} \times \\ \times \int_0^\infty F_0(t, \tau_k) \cos \left(t \frac{y}{h} \tau_k \right) \frac{f_2(t)}{t^3} dt \quad (2.36)$$

$$\text{де } f_2(t) = \frac{4t - \mu_0^{-1}(e^{2t} - e^{-2t})}{e^{2t} + 4t - e^{-2t}}.$$

Знайдемо необхідні похідні $u'(x, 0, 1)$ та покладемо $x = 0$, $v(0, y, 1)$ та

$y = 0$

$$u'(0,0,1) = \frac{1}{\pi GN} \sum_{k=1}^N \frac{1 - \tau_k^2}{\tau_k \sqrt{1 - \tau_k^2}} \int_0^\infty F_0(t, \tau_k) \frac{f_2(t)}{t} dt,$$

$$v'(0,0,1) = \frac{1}{\pi GN} \sum_{k=1}^N \frac{\tau_k^2}{\tau_k \sqrt{1 - \tau_k^2}} \int_0^\infty F_0(t, \tau_k) \frac{f_2(t)}{t} dt,$$

Виконаємо наступне перетворення

$$f_2(t) + \mu_0^{-1} - \mu_0^{-1} = \frac{4\mu_1^{-1} \cdot te^{-2t}}{1 + 4te^{-2t} - e^{-4t}} - \mu_0^{-1},$$

де перший доданок являє собою спадаючу функцію. Тоді у (2.36) отримаємо суму інтегралів, де у другому використаємо формулу (3.741(1), [4]). У підсумку похідні переміщень мають вигляд

$$u'(0,0,1) = \frac{1}{\pi GN} \sum_{k=1}^N \frac{1 - \tau_k^2}{\tau_k \sqrt{1 - \tau_k^2}} \left\{ 4\mu_1^{-1} \int_0^\infty \frac{F_0(t, \tau_k)}{2D_t^{*(1)}} dt - \frac{1}{4\mu_0} F^*(\tau_k; A, B) \right\},$$

$$v'(0,0,1) = \frac{1}{\pi GN} \sum_{k=1}^N \frac{\tau_k^2}{\tau_k \sqrt{1 - \tau_k^2}} \left\{ 4\mu_1^{-1} \int_0^\infty \frac{F_0(t, \tau_k)}{2D_t^{*(1)}} dt - \frac{1}{4\mu_0} F^*(\tau_k; A, B) \right\},$$

$$w'(0,0,1) = -\frac{1}{\pi GN} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\tau_k \sqrt{1 - \tau_k^2}} \left\{ 8\mu_1^{-1} \int_0^\infty \frac{F_0(t, \tau_k)}{2D_t^{*(1)}} dt + \frac{1}{4\mu_0} F^*(\tau_k; A, B) \right\},$$

де функція $D_t^{*(1)}$ визначена у (2.30).

На основі отриманих похідних переміщень побудовано нормальне напруження (2.28)

$$\sigma_x^{(1)}(0,0,1) = \frac{1}{\pi N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\tau_k \sqrt{1 - \tau_k^2}} \cdot \left\{ 4(2 - \mu_1^{-1} \tau_k^2) \int_0^\infty \frac{F_0(t, \tau_k)}{D_t^{*(1)}} dt + \frac{\mu_0^{-1} \tau_k^2 - 1}{2} F^*(\tau_k; A, B) \right\}.$$

Буде показано нижче, що має місце співвідношення

$$\frac{C}{2\pi N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\tau_k \sqrt{1 - \tau_k^2}} \ln \left(\frac{\sqrt{1 - \tau_k^2} + \frac{B}{A} \tau_k}{\sqrt{1 - \tau_k^2} - \frac{B}{A} \tau_k} \right) = C. \quad (2.37)$$

Приймаючи до уваги співвідношення (2.37), маємо остаточний вираз для нормального напруження

$$\sigma_x^{(1)}(0,0,1) = \frac{1}{\pi N} \left\{ \sum_{k=1}^N \frac{4(2 - \mu_1^{-1} \tau_k^2)}{\tau_k \sqrt{1 - \tau_k^2}} \int_0^\infty \frac{F_0(t, \tau_k)}{D_t^{*(1)}} dt + \frac{\mu_0^{-1}}{2} \sum_{k=1}^N \frac{\tau_k}{\sqrt{1 - \tau_k^2}} F^*(\tau_k; A, B) \right\} - 1. \quad (2.38)$$

Розглянемо отриманий вираз для N — непарного, тоді знайдеться корінь $\tau_k = 0, k = \frac{N+1}{2}$. У першій сумі (2.38) буде доданок, що являє собою невизначеність виду $\frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0}$, що розгортається за правилом Лопітала, та збіжність отриманого інтеграла забезпечено експоненціальним спаданням підінтегральної функції. Також у першій сумі буде доданок, що обернеться на 0 за рахунок кореня $\tau_k = 0$; аналогічно і для другої суми. Таким чином, значення параметра N — довільне.

2.2 Результати чисельних розрахунків.

Формула переміщення

$$W_0^{AB} = a \frac{4ABP}{\pi GN} \sum_{k=1}^N \int_0^\infty \frac{F(t, \tau_k)}{t^2 \sqrt{1 - \tau_k^2} \tau_k^2} \frac{F_1(t, z)}{D_t} dt$$

де τ — це нулі полінома Чебишева

$$\tau_k = \cos \left(\frac{2k - 1}{2N} \pi \right), \quad k = 1, N$$

$$F(t, \tau_k) = \frac{\sin(tB\tau_k)}{tB\tau_k} \frac{1 - \cos(tA\sqrt{1 - \tau_k^2})}{tA\sqrt{1 - \tau_k^2}} \sin(tx\sqrt{1 - \tau_k^2}) \cos(ty\tau_k)$$

$$D_t = 2t + sh(t)$$

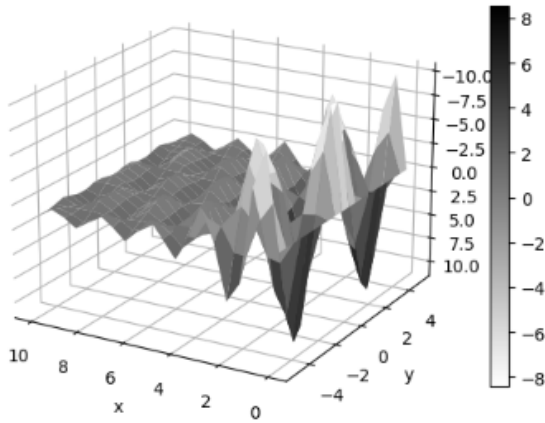
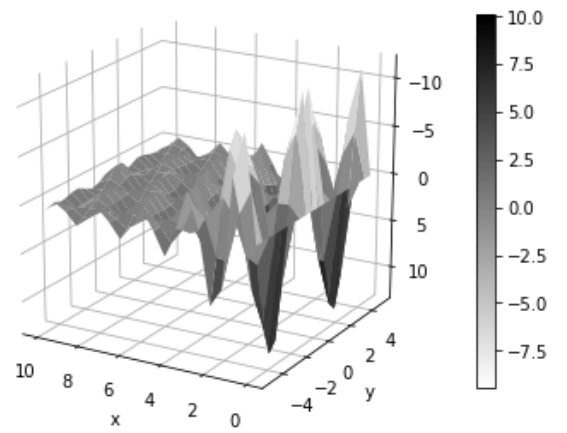
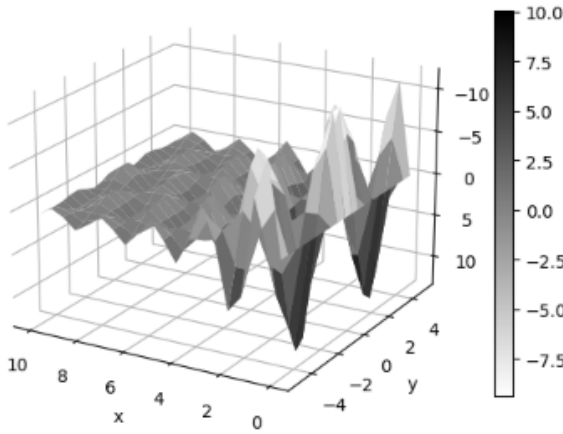
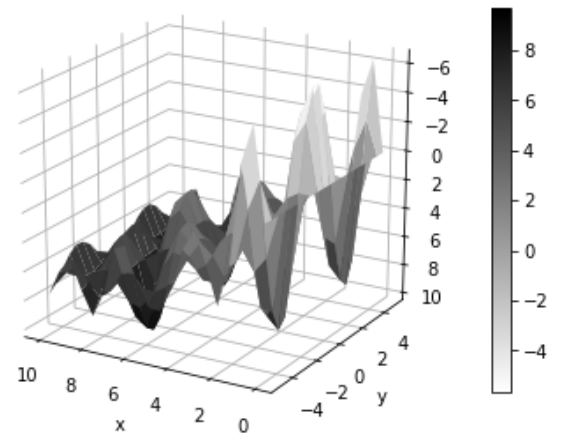
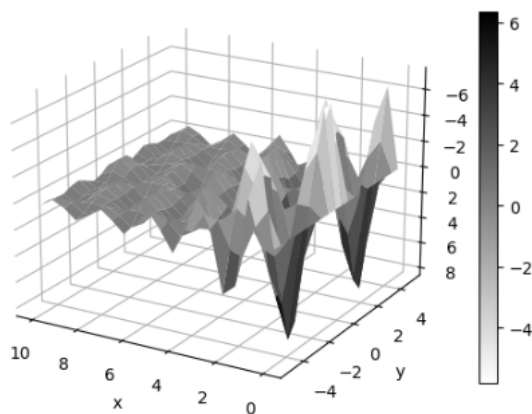
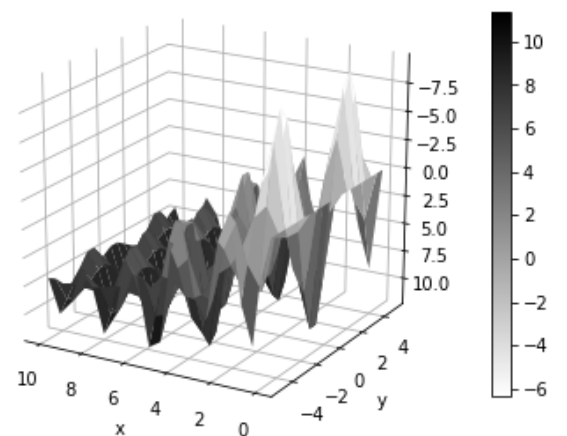
$$F(t, z) = (z + 1) sh(t(1 - z)) - (1 - z) sh(t(1 + z)) + \\ + \frac{\kappa + 1}{2} \frac{1}{t} - ch(t(1 + z)) + ch(t(1 - z))$$

використані параметри

$$A = 6 \quad A = 4 \quad A = 2 \quad P = 1 \quad \mu = 1/3 \quad \mu = 1/4 \quad \kappa = 3 - (4/3)$$

$$a = 1/2 \quad G = 82 \quad N = 20 \quad z = 1$$

Інтеграли розраховувалися між значеннями $a = 0.1$, $b = 15$ (де a — нижня границя, b —верхня границя). Порівнюючи значення функції W^{AB} для різних ділянок Рис. Під час побудови графіків значення функції W^{AB} були поділені на 10 за рахунок G . Код для побудови графіків наведений у додатку С.

Рис. 2.1. $B = A; \mu = 1/3; A = 2$ Рис. 2.4. $B = A/2; \mu = 1/4; A = 2$ Рис. 2.2. $B = A/2; \mu = 1/3; A = 2$ Рис. 2.5. $B = A/4; \mu = 1/3; A = 6$ Рис. 2.3. $B = A/4; \mu = 1/3; A = 2$ Рис. 2.6. $B = A; \mu = 1/3; A = 4$

ВИСНОВКИ

- 1) Знайдено розв'язок для задачі про крутильні коливання однорідного стрижня довжини l .
- 2) Розв'язок задачі був знайдений за методом Фур'є.
- 3) Побудовано графіки крутильних коливань однорідного стрижня коли один з його кінців вільний а до іншого приєднаний масивний диск при фіксованій змінній t в залежності від змінної x .
- 4) Побудовано графіки крутильних коливань однорідного стрижня коли один з його кінців $x = 0$ закріплений а до іншого приєднаний масивний диск при фіксованій змінній t в залежності від змінної x .
- 5) Розроблено чисельні алгоритми побудови графіків крутильних коливань у двох випадках.
- 6) Проаналізовано отримані чисельні розрахунки.

ДОДАТОК А

Код написаний мовою Python. Для побудови графіків розв'язка задачі о крутильних коливаннях однорідного стрижня з одним вільним кінцем.

```
import math
import scipy.integrate as spint
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d
from scipy.special import*
import numpy as np # linear algebra
muarray = [1.8901417, 4.84078982, 7.93260792,\
           11.05206464, 14.18121084, 17.31484013, 20.45090374,\
           23.58843474, 26.72691796, 29.86605392,\
           33.00565675, 36.14560497, 39.28581588,\
           42.42623121, 45.56680874, 48.70751712,\
           51.84833259, 54.98923681, 58.1302154,\
           61.27125693, 64.4123522]
x = np.linspace(0, 5, 20)
l=5
p=5/8
a=2
N=20
def integral1_f(x, mu):
    return -np.sin(x)*np.sin((mu*x)/l)
def integral2_F(x, mu):
    return np.cos(x)*np.sin((mu*x)/l)
def a_func(mu,x):
    return (2/mu)*(p**2+ mu**2)/(p*(p+1)+ mu**2)*\
    spint.quad(integral1_f, 0, l, args = (mu))[0]
def b_func(mu,x):
    return ((2*l)/(a*mu**2))*(p**2+ mu**2)/(p*(p+1)+ mu**2)*\
    spint.quad(integral1_f, 0, l, args = (mu))[0]
def Res(x, t):
    sum=0
```

```

for i in range(1,N):
    mu = muarray[i-1]
    sum += (a_func(mu, x)*np.cos((mu*a*t)/l)+\
           b_func(mu, x)* np.sin((mu*a*t)/l))* np.cos((mu*x)/l)
return sum
fig, ax = mpl.subplots()
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')
ax.set_xlabel('x')
t=5
ax.plot(x, Res(x, t), label = r"$\theta(x,t); "+f"t={t}",\
color = 'gray')
legend = ax.legend(loc = 1, fontsize = 9, shadow = True)
mpl.show()

```

ДОДАТОК В

Код написаний мовою Python. Цей код буде графік функції $\theta(x,t)$ коли кінець $x = 0$ закріплений, а до іншого $x = l$ прикріплений масивний диск.

```
import math
import scipy.integrate as spint
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d
from scipy.special import*
import numpy as np # linear algebra
muarray = [0.71697094, 3.32727063, 6.38082359, 9.49053807,\
12.61587092, 15.74763096, 18.88264302,\
22.01952486, 25.15757953, 28.29641789,\
31.4358057, 34.57559356,\
37.71568168, 40.85600093, 43.99650187, \
47.13714821, 50.27791272, 53.41877458,\
56.55971758, 59.70072892, 62.84179835]
x = np.linspace(0, 5, 20)
l=5
p=5/8
a=2
N=20
def integral1_f(x, mu):
    return np.sinh(x)*np.cos((mu*x)/l)
def integral2_F(x, mu):
    return np.cosh(x)*np.cos((mu*x)/l)
def a_func(mu,x):
    return (4)/(2*mu+ np.sin(2*mu))*\
    spint.quad(integral1_f, 0, l, args = (mu))[0]
def b_func(mu,x):
    return ((4*l)/(a*mu))*(1)/(2*mu+np.sin(2*mu))*\
    spint.quad(integral1_f, 0, l, args = (mu))[0]
def Res(x, t):
```

```

sum=0
for i in range(1,N):
    mu = muarray[i-1]
    sum += (a_func(mu, x)*np.cos((mu*a*t)/l)+\
           b_func(mu, x)* np.sin((mu*a*t)/l))* np.sin((mu*x)/l)
return sum
fig, ax = mpl.subplots()
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')
ax.set_xlabel('x')
t=0.1
ax.plot(x, Res(x, t), label = r"$\theta(x,t); "+f"t={t}",\
        color = 'gray')
legend = ax.legend(loc = 1, fontsize = 9, shadow = True)
mpl.show()

```

ДОДАТОК С

Код написаний мовою Python. Для побудови розв'язка мішаної задачі теорії пружності для півнескінченного шару.

```
import math
import scipy.integrate as spint
import matplotlib.pyplot as mpl
import copy
import seaborn as sns
from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d
from scipy.special import*
import copy
import numpy as np # linear algebra

x = np.linspace(0, 10, 20)
y = np.linspace(-5, 5, 20)
X, Y = np.meshgrid(x, y)
n = int(np.sqrt(X.size))
fW=np.zeros((20, 20))
kappa = 3-(4/3)
a = 1/2
A = 2
P=1
G=82
B = A/2
N = 20
def F(t, tau, x, y):
    sqtau = np.sqrt(1-tau**2)
    return (np.sin(t*B*tau)/(t*B*tau))*\
        (1-np.cos(t*A*sqttau))/(t*A*sqttau)*\
            np.sin(t*x*sqttau)*np.cos(t*y*tau)
def F1(t, z):
    return (z+1)*np.sinh(t*(1-z))-(1-z)*np.sinh(t*(1+z))+\
        ((kappa+1)/2)*(1/t)-np.cosh(t*(1+z))+np.cosh(t*(1-z))
```

```

def integral_func_W(t, tau, x, y):
    z=1
    sqtau = np.sqrt(1-tau**2)
    return F(t, tau, x,y)/(t**2*sqtau*tau**2)*\
        F1(t,z)/(2*t+np.sinh(t))
def S_W(x, y):
    a=0.1
    b=15
    sum = 0
    for i in range(1, N):
        tau = np.cos((2*i-1)/(2*N)*np.pi)
        h, e = spint.quad(integral_func_W, a, b, \
            args = (tau, x, y))
        sum += h
    return sum
def WAB(x, y):
    return ((a*4*A*B*P)/(G*np.pi*N*10))*S_W(x, y)
for i in range(20):
    for j in range(20):
        fW[i, j] = WAB(X[i,j], Y[i,j])
fig = mpl.figure(figsize = (14, 11))
ax = fig.add_subplot(2,2,1, projection = '3d')
ax.xaxis.set_pane_color((1,1,1,1))
ax.yaxis.set_pane_color((1,1,1,1))
ax.zaxis.set_pane_color((1,1,1,1))
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.view_init(200, 60)
p = ax.plot_surface(X, Y, fW, cmap = mpl.cm.binary)
cb = fig.colorbar(p, shrink = 0.8)
mpl.show()

```

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кошляков Н. С. Рівняння в частинних похідних математичної фізики. / Н. С. Кошляков, Е. Б. Глинер, М. М.Смирнов, 1970. — 712 с.
2. Фесенко А. А. Змішана задача теорії пружності для товстої півнескінченної плити / А. А. Фесенко // Пробл. роз. мех. та міцності конструкції. — 2009. — Вип. 11. — С. 138–149.
3. Новацкій В. Питання термопружності / В. Новацкій, 1962. — 364с.
4. Градштейн І. С. Таблиці інтегралів, сум, рядів та добутків / І. С. Градштейн, І. М. Рижик. — 1971. — 1108 с.
5. Лур'є А. І. Просторові задачі теорії пружності / А.І. Лур'є.— 1955. — 491 с.
6. Вайсфельд Н. Д., Фесенко Г. О. Мішані задачі теорії пружності для півнескінченного шару / Н. Д. Вайсфельд, Г. О. Фесенко, 2019. — 116с.