УДК 539.3

ТРІЩИНА В НЕРОЗРІЗНІЙ СМУГОВИДНІЙ ПЛАСТИНІ

Віктор Реут, Станіслав Роговський

Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова, вул. Дворянська, 2, м. Одеса, 65082, Україна

Розглядається задача про напружений стан нерозрізної смуговидної пластинки, яка шарнірно оперта по краях (x = a, x = b). Уздовж прямих $x = a_n \left(a_n = a + kl, l = {(b-a)}/{n}, k = \overline{1, n-1}; a < 0 \right)$ пластинка також спирається на n-1 нерухому опору. На інтервалі $x = 0, y \in (-1,1)$ між m-ою та m +1 − ою опорами пластинка має тріщину, що паралельна краям пластинки. До берегів тріщини прикладені згинальний момент інтенсивності $M(y)$ та узагальнена перерізуюча сила інтенсивності q (y).

Особливістю такої задачі є наявність двох невідомих стрибків при переході через тріщину − стрибка кута повороту $\gamma(y) = \langle w \rangle$ і стрибка кута повороту $\chi(y) = \left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle$.

Двовимірну функцію Гріна для нерозрізної смуговидної пластинки можна побудувати за допомогою інтегрального перетворення Фур'є за змінною y та застосування для вирішення отриманої крайової задачі методу трьох моментів. Зокрема, при $a_m < x < a_{m+1}$ маємо

$$G^*(x,y,\xi,\eta) = G(x,y,\xi,\eta) - \mu_m(\xi,\eta)\frac{\partial G}{\partial \xi}(x,y,a_m,\eta) +$$
$$+\mu_{m+1}(\xi,\eta)\frac{\partial G}{\partial \xi}(x,y,a_{m+1},\eta)$$

де $G(x,y,\xi,\eta)$ − функція Гріна для шарнірно-опертої смуговидної пластинки $\left(a_m < x < a_{m+1}, |y| < \infty\right)$, а $\mu_m(\xi)$ і $\mu_{m+1}(\xi)$ − моменти, що компенсують вплив решти пластинки та припускають точні подання. За допомогою двовимірної функції Гріна прогин пластинки припускає зображення

$$w(x,y)=\int_{-1}^{1}\left\{\chi(\eta)\left[\mathrm{M}_{\xi}G^{*}(x,y,\xi,\eta)\right]\Big|_{\xi=0}-\gamma(\eta)\left[V_{\xi}G^{*}(x,y,\xi,\eta)\right]\Big|_{\xi=0}\right\}d\eta .$$

Вимагаючи виконання умов на тріщині, задачу зведено до системи двох сингулярних інтегральних рівнянь щодо невідомих стрибків $\chi(\eta)$ і $\gamma(\eta)$ на проміжку (-1, 1)

$$\kappa\frac{d^2}{dy^2}\int_{-1}^{1}\chi(\eta)\ln\frac{1}{|y-\eta|}d\eta+\int_{-1}^{1}\left[\chi(\eta)\mathrm{K}_{11}(y,\eta)+\gamma(\eta)\mathrm{K}_{12}(y,\eta)\right]d\eta=\mathrm{M}(y)$$

$$\kappa\frac{d^4}{dy^4}\int_{-1}^{1}\gamma(\eta)\ln\frac{1}{|y-\eta|}d\eta+\int_{-1}^{1}\left[\chi(\eta)\mathrm{K}_{21}(y,\eta)+\gamma(\eta)\mathrm{K}_{2}(y,\eta)\right]d\eta=q(y)$$

де $\kappa=\dfrac{(3+v)(1-v)}{4\pi}$, $\mathrm{K}_{ij}(y,\eta)$ − нескінченно диференційовані функції.

Тоді, слідуючи за схемою методу ортогональних многочленів, враховуючи особливість розв’язків за методом Вільямса, розв’язок системи сингулярних інтегральних рівнянь можна шукати у вигляді

$$\gamma(y)=\left(1-y^2\right)^{3/2}\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k\mathrm{P}_k^{\left(3/2,3/2\right)}(y);\quad \chi(y)=\left(1-y^2\right)^{1/2}\sum_{k=0}^{\infty}\chi_k\mathrm{P}_k^{\left(1/2,1/2\right)}(y).$$

При цьому задача зводиться до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь типу Пуанкаре-Коха другого роду

$$\sigma_n^{(1)}\chi_k+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathrm{A}_{nk}^{(1,1)}\chi_k+\mathrm{A}_{nk}^{(1,2)}\gamma_k\right)=f_n,\quad n=\overline{0,\infty},$$

$$\sigma_n^{(2)}\gamma n+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathrm{A}_{nk}^{(2,1)}\chi_k+\mathrm{A}_{nk}^{(2,2)}\gamma_k\right)=q_n,\quad n=\overline{0,\infty},$$

для якої $\mathrm{A}_{nk}^{(i,j)}=\int_{0}^{\infty}\dfrac{e^{2a\lambda}}{\lambda^{i+j}}F_{ij}(\lambda)J_{n+1}(\lambda)J_{k+j}(\lambda)d\lambda,\quad a<0$, $F_{ij}(\lambda)$ − алгебраїчні функції, що не мають особливості при $\lambda=0$ і зростаючі на ∞ не більше ніж λ^{i+j}. Причому $\mathrm{A}_{nk}^{(i,j)}$ зменшуються при n + k, які прямують до ∞ як експоненти, що дозволяє застосовувати метод редукції.

Таким чином, поставлена задача зведена до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду типу Пуанкаре-Коха. Коефіцієнти системи при цьому визначаються за допомогою однієї квадратури.

A CRACK IN AN NOT CUTTING STRIP PLATE

The new method for the solving of elasticity problem for a continuous strip plate, that contain the crack, is proposed. The problem is reduced to a system of the singular integral equations relatively to the unknown jumps of the rotation angles. The resulting system is solved approximately by the method of orthogonal polynomials.