Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра диференціальних рівнянь, геометрії та топології

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

« Асимтотичне поводження розв'язків деяких диференціальних систем »

« Asymptotic behaviour of solutions of some differential systems»

Виконала: здобувачка денної форми навчання
спеціальності 111 Математика
Освітня програма «Математика»

Баєва Катерина Олегівна

Керівник: доцент, канд. фіз.-мат. наук Шарай Н.В.

Рецензент: доктор фіз.-мат. наук, професор Євтухов В.М.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

No_____ від _________ 2023 р

Завідувач кафедри

__________ ____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Захищено на засіданні ДЕК No

протокол No____ від ________2023 р.

Оцінка___________/___ ___/_____
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Голова ЕК

__________ ____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Одеса – 2023 року

Зміст

Вступ

Опублікована в 1948 році робота Н. Левінсона послужила новим поштовхом до розвитку асимптотичної теорії лінійних диференціальних рівнянь. Суть наведених у цій роботі результатів полягала в наступному. Тут була встановлена теорема про асимптотику, так званих, L-діагональних систем лінійних диференціальних рівнянь, і було з'ясовано питання про приведення систем лінійних диференціальних рівнянь з "майже сталими" коефіцієнтами до L-діагонального вигляду.

Починаючи з 1948 року в напрямку приведення систем до L-діагонального вигляду було виконано велику кількість досліджень. Серед них особливо слід відзначити монографії І.М. Рапопорта , М.В. Федорюка , М. Істхама , а також роботи Ф. Хартмана і А. Уінтнера, А. Девінатца і Ж. Каплана , Ж. Харріса і Д. Лутца, і багатьох інших авторів.

Асимптотичне поводження розв'язків диференціальних систем є однією з центральних тем у теорії диференціальних рівнянь. Воно вивчає доведення, як розв'язки системи поводяться в межах нескінченності, тобто при дуже великих або дуже малих значеннях незалежної змінної.

Аналізуючи асимптотичне поводження, намагатимемося зрозуміти довідкові характеристики розв'язків системи, такі як стаціонарні точки, усталені стани, стійкість та нестійкість розв'язків. Це дозволяє нам отримати глибше розуміння фізичних або математичних процесів, описаних диференціальними рівняннями.

Кваліфікаційна робота присвячена дослідженню аналітичних методів та методів розв'язання диференціальних рівнянь і систем. Основною метою дослідження буде вивчення асимптотичної поведінки розв'язків диференціальних систем у межах різних класів функцій. Вона складається з вступу і двох глав, розбитих на параграфи.

Перша частина включає в себе системи лінійних диференціальних рівнянь, асимптотично близьких до діагональних, приклад приведення до них та теорему Рапопорта. Друга частина асимптотичну поведінку розв'язків диференціальних систем, як лінійних так і нелінійних.

У роботі будуть розглянуті такі види диференціальних систем, як звичайні диференціальні рівняння, диференціальні рівняння з частинними похідними, системи диференціальних рівнянь та інші. Для кожного типу систем буде досліджена асимптотична поведінка розв'язків у межах різних класів функцій, наприклад, збіжність розв'язків, їх поведінка на нескінченності та інші.

У результаті дослідження будуть отримані нові знання про асимптотичну поведінку розв'язків диференціальних систем, що можуть бути застосовані в різних областях науки та техніки.

Отже, дослідження асимптотичної поведінки розв'язків диференціальних систем має великий практичний і науковий потенціал, і може бути застосовано в різних областях науки та техніки.

РОЗДІЛ 1

Основна теорія L-діагональних систем лінійних диференціальних рівнянь

1.1. Системи лінійних диференціальних рівнянь, асимптотично близьких до діагональних

Система лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_i}{dx} = \lambda_i(x)y_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

де $\lambda_i: [a, +\infty) \to R$ (i = 1, …, n)- неперервні функції, називається діагональною. Запроваджуючи вектор–стовпчик $Y = (y_i)_{i=1}^{n}$ і матрицю

$$\Lambda(x) = diag[\lambda_1(x), \ldots, \lambda_n(x)],$$

запишемо її в векторно–матричній формі

$$\frac{dY}{dx} = \Lambda(x)Y \qquad (1.1.1)$$

Ця система рівнянь має фундаментальну систему розв'язків $Y_j = (y_{ij})_{i=1}^{n}$ $(j = 1, \ldots, n)$ наступного виду

$$Y_j(x) = e_j \exp \int_{x_0}^{x} \lambda_j(s)ds, \qquad j = 1, \ldots, n, \qquad (1.1.2)$$

де e_j – одиничний n -мірний вектор, j-а компонента якого дорівнює одиниці, а інші – нулю. Виникає природне питання: при яких умовах на неперервну матрицю-функцію R=$(r_{ij})_{i,j=1}^{n}: [a, +\infty[\to R^{n\times n}$ система лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dY}{dx} = [\Lambda(x) + R(x)]Y, \qquad (1.1.3)$$

або рівносильна їй система, записана в координатній формі

$$\begin{cases}\frac{dy_i}{dx} = \lambda_i(x)y_i + \sum_{k=1}^{n} r_{ik}(x)y_k, \\ \qquad\qquad\qquad i = 1, \dots, n\end{cases} \tag{1.1.4}$$

має розв’язки, асимптотично близькі при $x \to +\infty$ до розв’язків системи (1.1.2)?

В 1914 році в роботі О. Перрона була впроваджена

Теорема 1.1.1. Якщо дотримуються умови

$$\lambda_i(x) \equiv \lambda_{0i} = \mathrm{const}(i = 1, \dots, n), \quad \lambda_{0i} \neq \lambda_{0j} \text{ при } i \neq j$$

$$\lim_{x \to +\infty} |R(x)| = 0,$$

то система диференціальних рівнянь (1.1.1) має фундаментальну систему розв’язків $Y_j(x)= (y_{ij})_{i=1}^{n}$ (j=1, …, n), кожне з яких задовільняє при $x \geq x_1 \geq \alpha$ нерівностям

$$c_2 \exp\left[\mathrm{Re}(\lambda_{0j})x - d_2 \int_{x_0}^{x} |R(s)|\, ds\right] \leq |Y_j(x)| \leq$$

$$\leq c_1 \exp\left[\mathrm{Re}\,(\lambda_{0j})x + d_1 \int_{x_0}^{x} |R(s)|\, ds\right],$$

де c_1, c_2, d_1, d_2 і x_1 – деякі додатні сталі.

Зокрема,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln |Y_j(x)|}{x} = \mathrm{Re}\,(\lambda_{0j}) \quad j = 1, \dots, n. \tag{1.1.5}$$

Вказані в цій теоремі граничні умови для Y_j ($j=\overline{1,n}$) дають достатньо грубу інформацію про поведінку розв’язків системи (1.1.1), оскільки цим співвідношенням поряд з ($1.1.2_0$), задовільнять вектор–функції

$$Y_j(x) = x^{\alpha_j} e^{\lambda_{0j}x}\,[e_j + o(1)], \quad Y_j(x) = x^{\alpha_j} \ln^{\beta_j} x\, e^{\lambda_{0j}x}\,[e_j + o(1)],$$

де α_j, $\beta_j \in R$ і багато інших.

Виділимо тепер з (1.1.3) клас систем, отримавших назву L–діагональних і які допускають встановлення точних асимптотичних формул для всіх їх розв'язків.

Означення 1.1.1. Система лінійних диференціальних рівнянь виду (1.1.3) називається L–діагональною, якщо матриця R задовільняє умові

$$\int_{\alpha}^{+\infty} |\mathrm{R(x)}|\, \mathrm{dx} < +\infty. \tag{1.1.6}$$

Для того щоб з'ясувати чи є система рівнянь

$$\frac{dY}{dx} = P(x)Y,$$

де $P: [a, +\infty[\to C^{n\times n}$- неперервна матриця, L- діагональною, необхідно з матриці P вилучити в окрему матрицю $R = (r_{ik})_{i,k=1}^{n}$ ті елементи, для яких дотримуються умови

$$\int_{\alpha}^{+\infty} |r_{ij}(x)|\ dx < +\infty \qquad (i, j = 1,\ \dots,\ n). \tag{1.1.7}$$

Якщо при цьому залишаться лише функції, які стоять на головній діагоналі, то система буде L- діагональною.

Приклад. Розглянемо на півосі $[2, +\infty)$ систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \left(a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{a_{11}}{x^{1+\varepsilon_1}}\right) y_1 + \dfrac{a_{12}\cos\gamma x}{x^{1+\varepsilon_2}} y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = \dfrac{a_{21}}{x \ln^{1+\varepsilon_3} x} y_1 + \left(c + \dfrac{d}{x\ln x} + a_{22}x^{\mu}e^{-\nu x}\right) y_2 \end{cases}$$

де $a, b, c, d, a_{ij}(i, j = 1, 2), \varepsilon_i (i = 1, 2, 3), \gamma, \nu, \mu$ - дійсні сталі, причому $\varepsilon_i > 0\ (i = 1, 2, 3), \nu > 0\ \ a_{ij} \neq 0\ (i, j = 1, 2).$

Матриця коефіцієнтів цієї системи представлена у вигляді

$$P(x)=\begin{pmatrix} a+\frac{b}{x}+\frac{a_{11}}{x^{1+\varepsilon_1}} & \frac{a_{12}\cos\gamma x}{x^{1+\varepsilon_2}} \\ \frac{a_{21}}{x\ln^{1+\varepsilon_3}x} & c+\frac{d}{x\ln x}+a_{22}x^{\mu}e^{-\nu x} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a+\frac{b}{x} & 0 \\ 0 & c+\frac{d}{x\ln x} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{x^{1+\varepsilon_1}} & \frac{a_{12}\cos\gamma x}{x^{1+\varepsilon_2}} \\ \frac{a_{21}}{x\ln^{1+\varepsilon_3}x} & a_{22}x^{\mu}e^{-\nu x} \end{pmatrix}=$$

$$=\Lambda(x)+R(x),$$

де Λ - діагональна матриця, а Rтака, що $\int\limits_{2}^{+\infty}\|R(x)\|dx<+\infty.$

$$\lim_{A\to+\infty}\int_2^A a_{11}\,x^{-1-\xi_1}dx=\lim_{A\to+\infty}a_{11}\frac{x^{-1-\xi_1+1}}{-\xi_1}|_2^A=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{-a_{11}}{\xi_1}\right)\left(\left(\frac{1}{A^{\xi_1}}\right)-\frac{1}{2^{\xi_1}}\right)$$
$$=\frac{a_{11}}{\xi_1 2^{\xi_1}}<\infty$$

$$\lim_{A\to+\infty}\int_2^A\frac{a_{21}}{xln^{1+\xi_3}x}dx=\begin{bmatrix} t=lnx \\ dt=\frac{1}{xdx} \\ x=2\quad t=ln2 \\ x=A\quad t=lnA\end{bmatrix}=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{a_{21}}{-\xi_2}\right)\left(\frac{1}{lnA^{\xi_3}}-\frac{1}{ln2^{\xi_3}}\right)=$$
$$=\frac{a_{21}}{\xi_2 ln2^{\xi_3}}<\infty$$

Значить, дана система лінійних диференціальних рівнянь є L-діагональною.

Оскільки система рівнянь є L - діагональною і при будь-яких дійсних *a, b, c, d* різниця

$$\left(a+\frac{b}{x}\right)-\left(c+\frac{d}{x\,ln\,x}\right)$$

чи то тотожно дорівнює нулю, чи то зберігає знак в деякій околиці +∞, то згідно з теоремою 1.2. дана система має фундаментальну систему розв’язків $Y_j = (y_{1j}, y_{2j})$ ($j = 1, 2$), яка допускають при $x\to+\infty$ асимптотичне уявлення

$$y_{11}(x) = e^{ax}x^b[1+o(1)], \qquad y_{21}(x) = o(e^{ax}x^b),$$
$$y_{12}(x) = o(e^{cx}ln^d\, x), \qquad y_{22}(x) = e^{cx}ln^d\, x\big(1+o(1)\big).$$

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = [\,\Lambda(t) + Q(t)]\, x \tag{1.1.8}$$

1.2 Положення та властивості теорем Рапопорта та Хартмана-Уінтера

Теорема 1.2.1(Рапопорта) Нехай $\Lambda(t) = \mathrm{diag}[\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)] \in C[t_0, \infty)$ и $Q(t) \in L\,[t_0, \infty)$, тобто Q(t) вимірна і

$$\int_{t_0}^{\infty} \| Q(t) \|\, dt < \infty, \tag{1.2.1}$$

причому інтеграл (1.1.8) розуміється або в елементарному сенсі, або в сенсі інтеграла Лебега. Припустимо, що діагональні елементи матриці $\Lambda(t)$ асимптотично розділені, і для кожної пари (j, k) існує скінчений чи нескінченний інтеграл

$$\int_{t_0}^{\infty} \mathrm{Re}\,[\lambda_j(t) - \lambda_k(t)]\, dt. \tag{1.2.2}$$

Тоді, при $t \to \infty$, система (1.18) має фундаментальну систему розв’язків, яка має вигляд

$$x_s(t) = \exp \int_{t_0}^{t} \lambda_s(t_1)\, d\, t_1\, [e_s + \eta_s(t)] \quad (s=1, \ldots, n;\ t \geq T) \tag{1.2.3}$$

де $\eta_s(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

ДОВЕДЕННЯ. Позначатимемо через

$$\mu_s(t) = \int_{t_0}^{t} \lambda_s(t_1)\, d\, t_1 \tag{1.2.4}$$

(s=l, ... , n). Фіксуємо індекс s в системі (1.1.8), зробимо заміну змінних

$$x = e^{\mu_s(t)}\, y_s. \tag{1.2.5}$$

Маємо $\frac{dx}{dt} \equiv e^{\mu_s(t)} \frac{d\,y_s}{dt} + e^{\mu_s(t)}\, \lambda_s(t)\, y_s = \Lambda(t)\, e^{\mu_s(t)}\, y_s + Q(t)\, e^{\mu_s(t)}\, y_s.$

Враховуючи, що $e^{\mu_s(t)}$ — скалярна функція, то ми отримаємо

$$\frac{d\,y_s}{dt} = [\Lambda(t) - \lambda_s(t)\, E]\, y_s + Q(t)\, y_s. \tag{1.2.6}$$

Далі будемо вводити матричну функцію

$$K^{(s)}(t, \tau) = \exp \int_{\tau}^{t} [\Lambda(t_1) - \lambda_s(t_1)\, E]\, d\, t_1, \tag{1.2.7}$$

що є нормованим при $t = \tau$ розв'язком однорідної системи

$$K_t^{(s)}(t, \tau) = [\Lambda(t) - \lambda_s(t)\, E]\, K^{(s)}(t, \tau), \tag{1.2.8}$$

що задовольняє початкову умову: $K^{(s)}(\tau, \tau) = E$.

Розглянемо систему сингулярних інтегральних рівнянь

$$y_s(t) = e_s + \int_{a}^{t} K^{(s)}(t, \tau)\, Q(\tau)\, y_s(\tau)\, d\tau, \tag{1.2.9}$$

де

$$e_s = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

причому координати вектора a обираємо таким чином:

1) якщо

$$\int_{t_0}^{\infty} \mathrm{Re}\, [\lambda_j(t) - \lambda_s(t)]\, dt = -\infty \tag{1.2.10}$$

(коротко, $j \in I$), то вважають $a_j = T$, де $T \geq t_0$ скінчено;

2) якщо ж

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} \mathrm{Re}\,[\lambda_j\,(t) - \lambda_s\,(t)]\,dt > -\infty \qquad (1.2.11)$$

(j $\in$ II), то вважають $a_j = \infty$.

Неперервний розв'язок $y_s(t)$ системи інтегральних рівнянь (1.2.9) задовольняє диференціальне рівняння (1.2.6). Диференціюючи рівність (1.2.9) за параметром t і враховуючи формулу (1.2.8), маємо

$$\frac{d\,y_s}{dt} = K^{(s)}\,(t, t)\,Q(t)\,y_s(t) + \int\limits_{a}^{t} [\Lambda(t) - \lambda_s(t)\,E]K^{(s)}\,(t, \tau)\,Q\,(\tau)\,y_s(\tau)\,d\tau \;\equiv$$

$$\equiv Q(t)\,y_s(t) + [\Lambda(t) - \lambda_s(t)\,E]\,[y_s(t) - e_s]. \qquad (1.2.12)$$

Так як

$$[\Lambda(t) - \lambda_s(t)\,E]\,e_s = \mathrm{diag}\,[\lambda_1(t), \ldots, \lambda_{s-1}(t), 0, \lambda_{s+1}(t) \ldots.$$

$$\ldots, \lambda_n(t)]\,\mathrm{diag}(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) = 0,$$

то рівняння (1.2.9) буде співпадати з диференціальним рівнянням (1.2.6).

Розглянемо, що елементи рядків матриці

$$K^{(s)}\,(t, \tau) = \mathrm{diag}\,[K_1^{(s)}\,(t, \tau), \ldots, K_n^{(s)}\,(t, \tau)]$$

обмежені в областях: $w_j = \{T \le t < \infty\}$, $\tau \in [T, t]$ при j $\in$ I и $w_j = \{T \le t < <\infty\}$, $\tau \in [t, \infty]$ при j $\in$ II.

Якщо j $\in$ I, то із (1.2.10) маємо

$$\mathrm{Re}\,[\lambda_j\,(t) - \lambda_s\,(t)] \le 0 \quad \text{при} \quad t \ge T,$$

причому $\tau \le t$. Отже,

$$|\,K_j^{(s)}\,(t, \tau)\,| = \exp\,\{\int\limits_{\tau}^{t} \mathrm{Re}\,[\lambda_j\,(t_1) - \lambda_s\,(t_1)]\,dt_1\} \le 1.$$

Нехай тепер j $\in$ II, тоді $\tau \ge t$, і, значить,

$$|\,K_j^{(s)}\,(t, \tau)\,| = \exp\,\{-\int\limits_{t}^{\tau} \mathrm{Re}\,[\lambda_j\,(t_1) - \lambda_s\,(t_1)]\,dt_1\}.$$

Якщо

$$\mathrm{Re}\,[\lambda_j\,(t) - \lambda_s\,(t)] \ge 0 \quad \text{при} \quad t \ge T,$$

то $$| K_j^{(s)} (t, \tau) | \le 1.$$

Якщо ж

$$\operatorname{Re} [\lambda_j (t) — \lambda_s (t)] \le 0,$$

то в силу нерівності (1.2.12) отримаємо

$$| K_j^{(s)} (t, \tau) | \le \exp \{—\int_T^{\infty} \operatorname{Re} [\lambda_j (t_1) — \lambda_s (t_1)]\, dt_1\} < \infty.$$

Таким чином,

$$| K_j^{(s)} (t, \tau) | \le c < \infty$$

в кожній із областей w_j.

Отже, якщо T таке, що виконується нерівність

$$c\int_T^{\infty} \| Q(\tau) \|\, d\tau \le q < 1, \qquad (1.2.13)$$

то при $t \ge T$ існує неперервний обмежений розв'язок інтегрального рівняння (1.2.9), яке можна, покладаючись на метод послідовних приближень, зобразити у вигляді абсолютно і рівномірно збіжного ряду

$$y_s(t) = e_s + \sum_{p=1}^{\infty} [y_s^{(p)} (t) – y_s^{(p-1)}(t)],$$

де $$y_s^{(p)} (t) = e_s + \int_a^t K^{(s)} (t, \tau) Q(\tau) y_s^{(p-1)} (\tau)\, d\tau \qquad (p=1, 2, \ldots)$$

$$y_s^{(0)}(t) = e_s.$$

Із рівняння (1.2.9), враховуючи, що $[a_j, t] \subset [T, \infty]$, маємо оцінку:

$$\| y_s(t) \| \le \| e_s \| + c\int_T^{\infty} \| Q(\tau) \| \| y_s(\tau) \|\, d\tau ;$$

Використовуючи нерівність (1.2.13), отримуємо

$$\| y_s(t) \| \le 1 + q \sup_t \| y_s(t) \|$$

і, тому $$\sup_t \| y_s(t) \| \le \frac{1}{1-q} \quad \text{при } T \le t < \infty. \qquad (1.2.14)$$

Доведемо, що

$$y_s(\infty) = \lim_{t\to\infty} y_s(t) = e_s. \qquad (1.2.15)$$

Будемо вважати

$$y_s(t) = \mathrm{colon}\,[y_{1s}(t), \dots , y_{ns}(t)],$$

із рівняння (1.2.9) отримаємо

$$y_{js}(t) = \delta_{js} + \int_{a_j}^{t} \exp\int_{\tau}^{t} [\lambda_j(t_1) — \lambda_s(t_1)]\,dt_1 \sum_k Q_{jk}(\tau)\, y_{ks}(\tau)d\tau, \qquad (1.2.16)$$

де δ_{js} — символ Кронекера.

Якщо $j \in I$, то $j \neq s$ і, значить, $\delta_{js} = 0$. При $T \le t' \le t$ маємо

$$y_{js}(t) = \int_{T}^{t'} \exp\int_{\tau}^{t'} [\lambda_j(t_1) — \lambda_s(t_1)]\,dt_1 \exp\int_{t'}^{t} [\lambda_j(t_1) — \lambda_s(t_1)]\,dt_1 \times$$

$$\times \sum_k Q_{jk}(\tau)\, y_{ks}(\tau)d\tau + \int_{t'}^{t} \exp\int_{\tau}^{t} [\lambda_j(t_1) — \lambda_s(t_1)]\,dt \sum_k Q_{jk}(\tau)\, y_{ks}(\tau)d\tau =$$

$$= \exp\int_{t'}^{t} [\lambda_j(t_1) — \lambda_s(t_1)]\,dt_1\, y_{js}(t') + \int_{t'}^{t} K_j^{(s)}(t,\tau) \sum_k Q_{jk}(\tau)\, y_{ks}(\tau)d\tau. \qquad (1.2.17)$$

Так як для $j \in I$ виконана нерівність

$$|K_j^{(s)}(t,\tau)| \le 1,$$

то, обираємо t' достатньо великим, при $t \ge t'$ маємо

$$\left|\int_{t'}^{t} K_j^{(s)}(t,\tau) \sum_k Q_{jk}(\tau)\, y_{ks}(\tau)d\tau\right| \le \int_{t'}^{t} |Q_{jk}(\tau)|\,|y_{ks}(\tau)|\,d\tau \le$$

$$\le \sup_t |y_{ks}(t)| \int_{t'}^{\infty} \|Q(\tau)\|\,d\tau < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Фіксуючи t' і враховуючи, що

$$\int_{t'}^{t} \mathrm{Re}\,[\lambda_j(t_1) — \lambda_s(t_1)]\,d\tau_1 \to —\infty$$

при $t \to \infty$, отримаємо

$$\left|\exp\int_{t'}^{t} [\lambda_j(t_1) — \lambda_s(t_1)]\,dt_1\, y_{js}(t')\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

якщо $t > t''$.

Отже, із формули (1.2.17) отримуємо

$$| y_{js}(t) | < \varepsilon \quad \text{при} \quad t > \max (t',t'')$$

і, значить, $\lim\limits_{t\to\infty} y_{js}(t) = 0 = \delta_{js}.$

Якщо ж $j \in II$, то на підставі формули (1.2.16), враховуючи обмеженість підінтегральної функції при $t \to \infty$, маємо

$$y_{js}(t) = \delta_{js} - \int_t^{\infty} \exp \int_{\tau}^{t} [\lambda_j (t_1) - \lambda_s (t_1)]\, dt_1 \sum_k Q_{jk}(\tau)\, y_{ks}(\tau) d\tau \to \delta_{js}.$$

Таким чином, рівність (1.2.16) доведено. Отже,

$$y_s(t) = e_s + \eta_s(t), \qquad \text{де } \eta_s(t) \to 0 \text{ при } t \to \infty.$$

Повертаючись до змінної x, в силу (1.2.5) отримуємо, що L-діагональна система (1.1.7) має систему розв’язків у вигляді

$$x_s(t) = \exp \int_{t_0}^{t} \lambda_s (t_1)\, d t_1 [e_s + \eta_s(t)] \quad (s=1, \ldots, n;\ t \geq T). \tag{1.2.18}$$

Ця система буде фундаментальною, так як при досить великому t детермінант Вронского

$$W (t) = \det [x_{js} (t)] = \exp \int_{t_0}^{t} \sum_s \lambda_s (t_1)\, d t_1 \det [\delta_{js} + \eta_{js}(t)] \neq 0.$$

Зважаючи на те, що лінійна система (1.1.7) для кожної початкової умови $x_s(T)=c_s$ допускає єдиний розв’язок, визначений на проміжку $[t_0, \infty)$, фундаментальну систему (1.2.18) можна однозначно продовжити на проміжок $[t_0, \infty)$.

Теорема 1.2.2 (**Хартмана - Уінтнера**).

Нехай $\Lambda(t)$– діагональна матриця розмірності $n \times n$,

$$\Lambda(t) = \mathrm{diag}[\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)]$$

І нехай існує константа $\delta > 0$ така, що:

$$\left|\mathrm{Re}\{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)\}\right| \geq \delta \tag{1.2.19}$$

на деякому проміжку [a, ∞) для будь-якої пари чисел i, j $\in \overline{1,n}$, i $\neq$ j. Нехай матриця $n\times n$ R(x) задовольняє умову:

$$\int_a^\infty |R(x)|^p dx < \infty \tag{1.2.20}$$

для деякого $1 < p \leq 2$. Тоді, при $x \to \infty$, рівняння має асимптотичний розв'язок y_k вигляду

$$y_k(x) = \{e_k + \underline{o}(1)\} exp\left(\int_a^x \{\lambda_i(t) + r_{kk}(t)\}\, dt\right); (1 \leq k \leq n) \tag{1.2.21}$$

ДОВЕДЕННЯ. Позначимо через

$$\Lambda_1 = \Lambda + diagR = diag(\lambda_i + r_{ii}) \tag{1.2.22}$$

і

$$\widetilde{R} = R - diag\, R. \tag{1.2.23}$$

Використовуючи перетворення Харіса і Лутца

$$y(x) = \{I + Q(x)\}\, z(x), \tag{1.2.24}$$

де I - тотожна матриця, $Q(x) \to 0$ і $z(x)$ має вигляд

і підставляючи (1.2.24) в

$$\dot{x} = [\Lambda(t) + R(t)]x$$

отримаємо

$$(I + Q)\dot{z} = \{(\Lambda + R)(I + Q) - Q'\}z = \{(I + Q)\Lambda + \Lambda Q - Q\Lambda + R - Q' + RQ\}z = \left\{(I + Q)\Lambda_1 + \Lambda Q - Q\Lambda + \widetilde{R} - Q' + RQ - QdiagR\right\}z \tag{1.2.25}$$

Обираємо Q таким чином, щоб:

$$Q' = \Lambda Q - Q\,\Lambda + \tilde{R}, \tag{1.2.26}$$

Тоді (1.2.25) буде мати вигляд:

$$\dot{z} = (\Lambda_1 + R_1) \tag{1.2.27}$$

де

$$R_1 = (I + Q)^{-1}(RQ - QdiagR) \tag{1.2.28}$$

Покажемо, що (1.2.26) має розв'язок Q такий, що:

$$Q(x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \infty \tag{1.2.29}$$

і

$$\int_a^\infty |R_1(x)| dx < \infty \tag{1.2.30}$$

Таким чином, (1.2.29) гарантує інування с $(I + Q)^{-1}$ і отже R_1 на деякому проміжку $[x, +\infty)$. З (1.2.26) витікає:

$$q'_{jj} = 0\ ;\ q'_{ij} = \lambda_i - \lambda_j q_{ij} + r_{ij} \qquad (i \neq j) \tag{1.2.31}$$

Нехай $q_{ii}(x) = 0$ для будь-якого x. Тоді (1.2.31) – це диференціальне рівняння 1-го порядку відносно q_{ij} і, посилаючись на (2.4.21) і враховуючи в першу чергу ті і та j, для яких

$$Re\{\lambda_i(x) - \lambda_j(x)\} \geq \delta \tag{1.2.32}$$

покладемо

$$q_{ij} = -e^{-\mu(x)} \int_x^\infty e^{-\mu(t)} r_{ij}(t)dt \tag{1.2.33}$$

де

$$\mu(x) = \int_a^x \{\lambda_i(s) - \lambda_j(s)\} ds \tag{1.2.34}$$

З іншої сторони, для тих i та j, для яких виконується

$$Re\{\lambda_i(x) - \lambda_j(x)\} \leq -\delta \tag{1.2.35}$$

покладемо

$$q_{ij} = e^{\mu(x)} \int_a^x e^{-\mu(t)} r_{ij}(t)dt \tag{1.2.36}$$

З (1.2.20) і (1.2.30) випливає, що невизначений інтеграл в (1.2.33) збігається і, окрім цього:

$$|\, q_{ij}(x)| \leq \int_x^\infty e^{-\delta(t-x)} |r_{ij}(t)| dt \tag{1.2.37}$$

Застосовуючи нерівність Гельдера покажемо, що $q_{ij}(x) \to 0$ при $x \to \infty$. У випадку (1.2.35) та (1.2.36) маємо:

$$|\, q_{ij}(x)| \leq \int_a^x e^{-\delta(t-x)} |r_{ij}(t)| dt \leq e^{-\frac{1}{2}\delta x} \int_a^{\frac{1}{2}x} |r_{ij}(t)| dt + \int_{\frac{1}{2}x}^x |r_{ij}(t)| dt$$

Таким чином, Q може бути обрано так, щоб задовольняти (1.2.26) та (1.2.37).

Покажемо, що виконується (1.2.30), де R_1 визначено із (1.2.28). Для цього вимагатимемо виконання додаткової властивості:

$$Q \in L^p\ (a, \infty). \tag{1.2.40}$$

Для доведення (1.2.40) перепишемо (1.2.39) у вигляді:

$$|\, q_{ij}(x)| \leq \int_0^\infty e^{-\delta u} |r_{ij}(x+u)| du$$

Використовуючи нерівність Міньковського, отримаємо:

$$\left(\int_a^\infty \left| q_{ij}(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \int_0^\infty e^{-\delta u}\left(\int_a^x \left|r_{ij}(x+u)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} du$$

де права частина нерівності обмежена в силу (1.2.20). Отже, q_{ij} в (1.2.37) із $L^p\ (a,\infty)$. Аналогічно для випадку (1.2.38) маємо:

$$\left| q_{ij}(x)\right| \le \int_0^\infty e^{-\delta u}\left|r_{ij}(x-u)\right| du$$

де, для зручності, приймаємо $r_{ij}(x) = 0$ для $x\ <\ a$. Звідси випливає, що q_{ij} із $L^p\ (a,\infty)$, і (1.2.39) доведено.

Використовуючи нерівність Гельдера маємо:

$$\int_x^\infty \|R_1(x)\| dx \le K\left(\int_x^\infty \|R(x)\|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_x^\infty \|Q(x)\|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1.2.41)$$

де $K - const$, де $1/p\ +\ 1/p' =\ 1$. Тут використовуємо припущення, що $p \le 2$. Тоді $p' \ge p$. Тоді з (1.2.29) і (1.2.30) випливає, що $Q \in L^p\ (a,\infty)$. Таким чином, права сторона нерівності (1.2.41) обмежена і (1.2.30) доведено.

Можна застосувати теорему Левінсона до (1.2.27). При цьому Λ_1 з (1.2.22). Це випливає з того, що $\left\{\lambda_i(x) - \lambda_j(x)\right\} \ge \delta$.

Для $x\ >\ t$ из (1.2.42) та нерівності Гельдера маємо:

$$\int_t^x Re\left\{\lambda_i(s) + r_{ij}(s) - \lambda_j(s) - r_{ij}(s)\right\} ds \ge \int_t^x \left(Re\left\{\lambda_i(s) - \lambda_j(s)\right\} - \left|r_{ij}(s)\right| - \right.$$
$$\left. -\left|r_{ij}(s)\right|\right) ds \ge \delta(x-t) - K(x-t)^{\frac{1}{p'}} \qquad (1.2.42)$$

Таким чином, теорема Левінсона може бути застосованадо (1.2.27) для побудови розв’язку z_k

$$z_k(x) = \{e_k + \underline{o}(1)\} exp\left(\int_a^x \{\lambda_k(t) + r_{kk}(t)\}\, dt\right);$$

Тоді (1.2.42) випливає $\dot{x} = [\Lambda(t) + R(t)]x$ використовуючи (1.2.24).

РОЗДІЛ 2

Асимптотична поведінка розв'язків диференціальних систем

2.1 Асимптотична поведінка розв’язків майже лінійних диференціальних систем

Розглянемо лінійну диференціальну систему з одним рівнянням:

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t),$$

де x(t) ∈ $\mathbb{R}^n$, а A - матриця розміру nxn зі сталими коефіцієнтами. Розв'язок цієї системи можна записати у вигляді:

$$x(t) = e^{At}x_0,$$

де x_0 - початковий вектор.

Для того, щоб дослідити асимптотичну поведінку розв'язків, необхідно дослідити власні значення матриці A. Якщо всі власні значення дійсні та від'ємні, то при t→∞ розв'язок x(t) прямує до нуля. Якщо хоча б одне власне значення додатнє, то розв'язок збільшується експоненційно при t→∞.

Якщо всі власні значення матриці A дійсні та від'ємні, то можна записати матрицю A у вигляді:

$$A = Q\Lambda Q^{-1},$$

де Λ - діагональна матриця, елементи на діагоналі якої відповідають власним значенням матриці A, а Q - обернена матриця з векторами власних векторів матриці A в якості стовпців.

Застосовуючи цей результат до розв'язку

$$x(t) = e^{At}\ x_0,$$

маємо:

$$x(t) = e^{At}\,x_0 = (Qe^{\Lambda t}Q^{-1})\,x_0.$$

Таким чином, асимптотична поведінка розв'язків x(t) визначається власними значеннями матриці A, а саме, якщо всі власні значення від'ємні, то при t → ∞ розв'язок прямує до нуля.

З іншого боку, якщо хоча б одне власне значення додатнє, то розв'язок x(t) збільшується експоненційно при t → ∞.

У випадку, коли матриця A не є діагональною, можна використовувати аналогічний підхід, знаходячи її жорданову нормальну форму і визначаючи асимптотичну поведінку розв'язків за допомогою жорданових клітин.

Таким чином, аналіз власних значень і векторів матриці A є важливим інструментом для вивчення асимптотичної поведінки розв'язків диференціальних систем з одним рівнянням.

Для систем з коефіцієнтами, які залежать від часу, використовуються інші методи дослідження асимптотичної поведінки. Наприклад, метод Ляпунова дозволяє досліджувати умови стійкості розв'язків диференціальних систем з одним рівнянням, які залежать від часу. Також існують інші методи, наприклад, метод Пуанкаре, які дозволяють досліджувати асимптотичну поведінку розв'язків систем з неоднорідними коефіцієнтами.

2.2 Основні теореми про асимптотику фундаментальних розв'язків при t→∞

Теорема 2.2.1. Нехай Λ(t)= diag [$\lambda_1(t)$,..., $\lambda_n(t)$] — неперервна діагональна матриця, а C(t) — неперервна матриця така, що

$$\int_{t_0}^{\infty} |C(t)|dt < \infty. \qquad (2.2.1)$$

Якщо для деякого фіксованого цілого k ($1 \le k \le n$) жодна з різниць

$$R\{\lambda_i - \lambda_k(t)\} \quad (i = 1, \ldots\ldots, n)$$

не змінює знак, тоді диференціальна система

$$x' = [\Lambda(t) + C(t)]x \tag{2.2.2}$$

має такий розв’язок x(t), що при t→ ∞

$$x_k(t) \sim exp\left(\int_{t_0}^{t} \lambda_k(s)ds\right) e_k, \tag{2.2.3}$$

де e позначає сталий вектор, усі координати якого дорівнюють нулю, крім k-ї, яка дорівнює 1.

ДОВЕДЕННЯ. Зміна змінних

$$x = exp\left(\int_{t_0}^{t} \lambda_k(s)ds\right) y$$

перетворює (2.2.2) на рівняння такої самої форми із заміною Λ(2.2.1) на

$$\Lambda(t) - \lambda_k(t)I.$$

Тому ми можемо з самого початку припустити, що $\lambda_k(t)$ дорівнює тотожно нулю. Потім

$$\Lambda(t)\, e_k = 0$$

і гіпотеза стверджує, що дійсні частини $\lambda_1(t), \ldots.. \lambda_n(t)$ не змінюють знак. Таким чином

$$\mu_i(t) = \mathrm{R}\int_{t_0}^{t} \lambda_\mathrm{i}(s)ds$$

є монотонною функцією.

Нехай P_1 позначає діагональну матрицю, i-й діагональний елемент якої дорівнює 1 або 0 відповідно до $\mu_i(\infty)$= -∞ або $\neq -\infty$, і нехай $P_2 = I - P_1$. Діагональна матриця

$$\mathrm{Y(t)} = \mathrm{exp}\left(\int_{t_0}^{t} \Lambda(s)ds\right)$$

є фундаментальною матрицею для незбуреного рівняння

$$y' = \Lambda(t)y. \tag{2.2.4}$$

Елементи діагональних матриць Y(t)P_1 Y^{-1}(s) та Y(t) P_2 Y^{-1}(s) дорівнюють нулю або мають вигляд

$$exp\left(\int_{t_0}^{t} \lambda_i(\tau)d\tau\right),$$

де $\mu_i(\infty)$= -∞ для першої матриці та $\neq -\infty$ для другої. Тепер

$$\left|exp\left(\int_s^t \lambda_i(\tau)d\tau\right)\right| = exp\left(R\int_s^t \lambda_i(\tau)d\tau\right) = exp[\mu_i(t)\text{-}\ \mu_i(s)].$$

Якщо $\mu_i(\infty)$= -∞, то $\mu_i(t)$ є незростаючою функцією, а отже,

$$\left|exp\left(\int_s^t \lambda_i(\tau)d\tau\right)\right| \leq 1 \qquad \text{для } t_0 \leq s \leq t.$$

Аналогічно, якщо $\mu_i(\infty) \neq$ -∞, і $\mu_i(t)$ є неспадною функцією, то

$$\left|exp\left(\int_s^t \lambda_i(\tau)d\tau\right)\right| \leq 1 \qquad \text{для } t_0 \leq t \leq s,$$

а якщо $\mu_i(\infty) \neq$ -∞ і $\mu_i(t)$ є незростаючою функціює, то

$$\left|exp\left(\int_s^t \lambda_i(\tau)d\tau\right)\right| \leq exp[\mu_i(\infty)] \quad \text{для } t_0 \leq t \leq s.$$

Таким чином, існує стала К > 0 така, що

$$|\mathrm{Y(t)}P_1\, Y^{-1}(\mathrm{s})| \leq \text{К для } t_0 \leq t \leq s,$$

$$|\mathrm{Y(t)}P_2\, Y^{-1}(\mathrm{s})| \leq \text{К для } t_0 \leq t \leq s.$$

Крім того, за визначенням P_1, Y(t)$P_1 \rightarrow 0$ де $t \rightarrow \infty$.

Оскільки (2.2.4) має сталий розв’язок e_k, то (2.2.2) має розв’язок $x_k(t) \rightarrow e_k$, де $t \rightarrow \infty$.

Теорема доведена.

Важливим наслідком є

Теорема 2.2.2. Нехай A – стала матриця, усі характеристичні корені $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ якої прості, і нехай ξ_i – характеристичний вектор A, що належить характеристичному кореню $\lambda_i (i = 1, \dots, n)$.

Якщо B(t) є неперервною матрицею, визначеною для t ≥ t_0 до такої, що

$$\int_{t_0}^{\infty} |B(t)| dt < \infty, \qquad (2.2.5)$$

то рівняння

$$x' = [A + B(t)]x \qquad (2.2.6)$$

має фундаментальну систему розв'язків $x_1(t), \dots, x_n(t)$, що задовольняє при $t \to \infty$

$$x_k(t) \sim e^{\lambda_k t} \xi_k \qquad (k = 1, \dots, n).$$

ДОВЕДЕННЯ. Якщо T – стала матриця, стовпцями якої є вектори $\xi_1, \dots, \xi_n$ і якщо

$$\Lambda = \mathrm{diag}\,[\lambda_1, \dots, \lambda_n],$$

то T є оборотною і $T^{-1}AT = \Lambda$. Отже, заміна x = Ty переносить (2.2.6) у

$$y' = [\Lambda + C(t)]y,$$

де $C = T^{-1}BT$, а результат відразу випливає з Теореми 2.2.1.

2.3 Приклади

Приклад 1. Припустимо, що b(t) є неперервним для t ≥ t_0 і

$$\int_{t_0}^{\infty} |b(t)| dt < \infty. \qquad (2.3.1)$$

тоді рівняння

$$x'' + [1 + b(t)]x = 0 \qquad (2.3.2)$$

за теоремою 2.2.2 має фундаментальну систему розв'язків $x_1(t)$, $x_2(t)$, що для $t \to \infty$

$$x_1 \sim e^t, \qquad x_2 \sim e^{-t},$$

Причому

$$x_1' \sim ie^{it}, \qquad x_2' \sim ie^{-it};$$

переходячи до системи

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = x' \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -(1 + b(t))y_1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Складемо характеристичний многочлен

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Звідки

$$\lambda^2 + 1 = 0; \ \ \lambda_{1,2} = \pm i$$

Так як $Re\lambda_{1,2} \leq 0$ і виконується умова 2.3.1

$$\int_{t_0}^{\infty} |b(t)|dt < \infty.$$

тобто виконується 2.2.5, тоді за теоремою 2.2.2 система, а значить і рівняння 2.3.2 має фундаментальну систему розв’язків $x_1(t), \ x_2(t)$ для $t \to \infty$.

Приклад 2. Розглянемо рівняння

$$x'' - [1 + b(t)]\mathrm{x} = 0 \qquad (2.3.3)$$

тоді за теоремою 2.2.2 рівняння має фундаментальну систему розв’язків $x_1(t), \ x_2(t)$, що для $t \to \infty$ виконуються умови

$$x_1 \sim e^t, \qquad x_2 \sim e^{-t},$$

$$x_1' \sim e^t, \qquad x_2' \sim e^{-t}.$$

Одержуємо систему

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = x' \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = (1 + b(t))y_1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Складемо характеристичний многочлен

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Звідки

$$\lambda^2 - 1 = 0; \;\; \lambda_{1,2} = \pm 1$$

Так як $Re\lambda_{1,2} = 1 > 0$, що означає що система є нестійкою і виконується 2.2.5, тоді за теоремою 2.2.2 система, а значить і рівняння 2.3.3 має фундаментальну систему розв’язків $x_1(t),\ x_2(t)$ для $t \to \infty$.

Зауваження 2.3.1. Теорема 2.2.2 не виконується, коли матриця А в (2.2.6) має кратні характеристичні корені. Далі ми покажемо, як можна вирішувати такі виняткові випадки. Розглянемо спочатку найпростіший можливий випадок

$$x' = [J + B(t)]x\,, \tag{2.3.4}$$

Де

$$J = \begin{pmatrix} 0\,0\,0 \ldots 0\,0 \\ 1\,0\,0 \ldots 0\,0 \\ 0\,1\,0 \ldots 0\,0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot \qquad \cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot \qquad \cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot \qquad \cdot\;\cdot \\ 0\,0\,0 \ldots 1\,0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, матриця J вже знаходиться в канонічній формі Жордана, і ця канонічна форма складається з одного блоку з нулями на головній діагоналі.

Незбурене рівняння $x' = Jx$ має фундаментальну матрицю

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} 1\,0\,0 & \dots & 0 \\ t\,1\,0 & \dots & 0 \\ \frac{t^2}{2!}\ t\ 1 & \dots & 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \dots\dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Якщо поставити $D_n(t) = diag[1, t, \dots, t^{n-1}]$, то, легко перевірити,

$$e^{tJ} D_n(t) = D_n(t) e^{J}. \qquad (2.3.5)$$

Отже, зміна змінних $x = e^{tJ} D_n(t) y$ призводить до (2.3.4)

$$y' = t^{-1} E y + e^{-J} C(t) e^{J} y, \qquad (2.3.6)$$

де E = -t ${D_n}^{-1}\, {D_n}' = diag\ [0, -1, \dots, 1-n]$

і C = ${D_n}^{-1} B D_n$. З Теореми 2.2.1 випливає, що якщо

$$\int^{\infty} |C(t)| dt < \infty, \qquad (2.3.7)$$

рівняння (2.3.6) має фундаментальну систему розв'язків $y_1(t), \dots, y_n(t)$ таку, що

$$y_k(t) \sim t^{1-k} e_k \qquad (k = 1, \dots, n).$$

то відповідний розв'язок

$$x_k(t) = D_n(t) e^{J} y_k(t)$$

із (2.3.4) має властивість

$$x_{ik}(t) \begin{cases} = \quad o\left(t^{i-k}\right) & \text{для } \ 1 \le i < k, \\ \sim \quad t^{i-k}/(i-k)! & \text{для } \ k \le i \le \ n, \end{cases}$$

тоді як умова (2.13), виражена через елементи $b_{ik}(t)$ матриці B(t), говорить, що

$$\int^{\infty} t^{i-k} |b_{ik}(t)| dt < \infty \qquad (i, k = 1, \dots, n).$$

$x_{ik}(t)$ позначає i-ту координату вектора x_k.

Цей результат можна застосовувати до рівняння n-го порядку

$$x^{(n)} + b_1(t)x^{(n-1)} + \dots + b_n(t)x = 0, \qquad (2.3.8)$$

що еквівалентно системі

$$x_1' = -\sum_{k=1}^{n} b_k(t)x_k, \qquad x_i' = x_{i-1} \qquad (i = 2, \dots, n).$$

Таким чином доведено наступну теорему Гіззетті.

2.4 Асимптотика ФСР для диференцавльних рівнянь n-го порядку. Теорема Гіззетті

Теорема 2.4.1.(Гіззетті) Якщо коефіцієнти $b_k(t)$ неперервні при t ≥ t_0 і

$$\int^{\infty} t^{i-k}|b_k(t)|dt < \infty \qquad (k = 1, \dots, n). \qquad (2.4.1)$$

тоді рівняння n-го порядку (2.3.8) має фундаментальну систему розв’язків $x_0(t), x_1(t), \dots, x_{n-1}(t)$ таку, що

$$\lim_{t\to\infty} x_k^{(i)}(t)/t^{k-i} = \begin{cases} 1/(k-i)! & \text{для } \ 0 \le i \le k, \\ 0 & \text{для } \ k < i < n. \end{cases}$$

Перейдемо до вивчення рівняння (2.2.6), в якому стала матриця A є необмеженою. Щоб уникнути подальших повторень, сформулюємо та доведемо наш результат також для нелінійних рівнянь.

Теорема 2.4.2. У жордановій канонічній формі матриці A нехай m > 0 – максимальний порядок тих блоків, які відповідають характеристичним кореням з дійсною частиною μ а $y(t)$ – розв’язок автономного лінійного рівняння

$$y' = Ay \qquad (2.4.2)$$

точного порядку $t^h e^{\mu t}$;

$$0 < \underline{\lim}_{t\to\infty} t^{-h}e^{-\mu t}\,|y(t)| \le \overline{\lim}_{t\to\infty} t^{-h}e^{-\mu t}\,|y(t)| < \infty \qquad (2.\ 4.3)$$

Нехай f(t,x) є неперервною функцією для $t \ge t_0$, $|x| < \infty$, що $f(t,0) = 0$ і

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \le \gamma(t)\, |x_1 - x_2|, \qquad (2.4.4)$$

де γ(t) – неперервна невід'ємна функція, що задовольняє

$$\int_{t_0}^{\infty} t^{m-1}\,\gamma(t)dt < \infty. \qquad (2.4.5)$$

Тоді збурене рівняння

$$x' = Ax + f(t,x) \qquad (2.4.6)$$

має такий розв'язок x(t), що при $t \to \infty$

$$x(t) = y(t) + o(t^h e^{\mu t}). \qquad (2.4.7)$$

Крім того, різним розв'язкам $y(t)$ із (2.4.2), що задовольняють (2.4.3), відповідають різні розв'язки $x(t)$ із (2.4.6), що задовольняють (2.4.7).

Це означає, що h є цілим числом і $0 \le h < m$.

ДОВЕДЕННЯ. Не втрачаючи загальності, ми можемо припустити, що A є в Жордановій канонічній формі:

$$\mathrm{A} = J_1 \oplus \dots \oplus J_s \oplus A_1 \oplus A_2,$$

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

є квадратною матрицею порядку m_i та $\mathbb{R}\lambda_i = \mu(i = 1, \dots, s)$; A_1, A_2 - квадратні матриці порядків p_1, p_2, усі характеристичні корені яких мають дійсні частини відповідно менші, більші за μ. Отже, m = max(m_i) (i=1, … , s).

Знову нехай $D_n(t) = diag[1, t, \dots, t^{n-1}]$ та виконані зміни змінних x = T(t)z, де

$$T = T_1 \oplus \dots \oplus T_s \oplus e^{\mu t} I_{p_1} \oplus e^{\mu t} I_{p_2}$$

та

$$T_i = t^{h+1-m_i} e^{tJ_i} D_{m_i}(t) \qquad (i = 1, \dots, s).$$

Це випливає із співвідношення

$$e^{tJ} D_n(t) = e^{\lambda t} D_n(t) e^{J - \lambda I}$$

$$|T| = O(t^h e^{\mu t}), \quad |T^{-1}| = O(t^{m-h-1} e^{-\mu t}).$$

Рівняння (2.4.6) перетворюється на

$$z' = C(t)z + g(t, z) \qquad (2.4.8)$$

де

$$g(t, z) = T^{-1} f(t, Tz),$$

$$C = T^{-1}AT - T^{-1}T' = t^{-1}E_1 \oplus \dots \oplus t^{-1}E_s \oplus \left(A_1 - \mu I_{p_1}\right) \oplus \left(A_2 - \mu I_{p_2}\right),$$

та

$$E_i = diag[m_i - h - 1,\ m_i - h - 2, \dots, -h] \ \ (i = 1, \dots, s).$$

Перенумерувавши координати, ми можемо записати

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix},$$

де

$$C_i = \begin{pmatrix} t^{-1}\Lambda_i & 0 \\ 0 & A_i - \mu I_{p_i} \end{pmatrix} \qquad (i = 1,2)$$

та $\Lambda_1, \Lambda_2 -$ діагональні матриці, усі діагональні елементи яких є відповідно від’ємними, невід’ємними цілими числами.

Лінійне рівняння

$$w' = C(t)w \qquad (2.4.9)$$

має фундаментальну матрицю

$$W(t) = \begin{pmatrix} W_1(t) & 0 \\ 0 & W_2(t) \end{pmatrix}, \qquad (2.4.10)$$

де

$$W_i(t) = \begin{pmatrix} t^{\Lambda_i} & 0 \\ 0 & e^{t\,(A_i - \mu I_{p_i})} \end{pmatrix} \quad (i = 1,2).$$

Відповідно умові (2.2.10), покладемо

$$P_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що існує стала K > 0 така, що

$$\left.\begin{array}{l} |W(t)P_1W^{-1}(s)| \le K \quad \text{для} \quad 0 < s \le t, \\ |W(t)P_1W^{-1}(s)| \le K \quad \text{для} \quad 0 < t \le s. \end{array}\right\} \qquad (2.4.1)$$

Крім того, W(t) $P_1 \to 0$ при t →∞. Оскільки

$$|g(t,z_1) - g(t,z_2)| \le |T^{-1}|\,|f(t,Tz_1) - f(t,Tz_2)| \le |T^{-1}||T|\gamma(t)|z_1 - z_2|$$
$$= O(t^{m-1})\gamma(t)|z_1 - z_2|$$

Отже існує відповідність 1-1 між обмеженими розв'язками (2.4.8) і обмеженими розв'язками (2.2.9), така що різниця між відповідними розв'язками прямує до нуля при t →∞.

Тепер розв'язок y(t) = $e^{tA}c$ з (2.4.2) задовольняє (2. 4.3) тоді і тільки тоді, коли c має вигляд

$$c = c_1 \oplus \ldots \oplus c_s \oplus \; d_1 \oplus d_2,$$

де d_1 є довільним, $d_2 = 0$, c_i має свої перші $m_i - h - 1$ координати нуль (i=1,…, s) і принаймні для одного значення i, $m_i > h$ та c_i має свою $(m_i - h)$ −я координату, відмінну від нуля. З визначення T випливає, що

$$w(t) = T^{-1}(t)y(t)$$

також має скінчену ненульову межу. Таким чином, як ми вже довели, рівняння (2.4.8) має такий розв’язок z(t), що при t →∞

$$z(t) = w(t) + o(1),$$

і отже

$$x(t) = T(t)z(t) = y(t) + o(|T|) = y(t) + o(t^h e^{\mu t}).$$

Теорема доведена.

Отже, хоча аналіз асимптотичної поведінки розв'язків нелінійних систем є складнішим, ніж для лінійних систем, існують методи, які дозволяють досліджувати цю поведінку. Важливим етапом є використання власних значень і векторів матриці для лінійних систем, які дозволяють зрозуміти, як розв'язки системи змінюються з часом і як вони поводяться в межах нескінченно великої кількості часу.

Також важливим є розуміння того, як ці властивості відображаються на фізичних процесах. Наприклад, лінійна диференціальна система може відповідати рівнянню руху деякого фізичного об'єкту, а власні значення матриці A можуть вказувати на деякі характеристики цього руху, такі як швидкість або прискорення.

У більш складних системах, де розв'язки не можна записати у вигляді простих експоненційних функцій, аналіз асимптотичної поведінки розв'язків може виявитися складним і потребувати використання спеціальних методів, таких як методи фазових просторів, чисельне моделювання, аналіз стійкості та ін.

Навички аналізу асимптотичної поведінки диференціальних систем з одним рівнянням мають важливе застосування в багатьох галузях, таких як фізика, електротехніка, економіка, біологія та багато інших. Вивчення цих навичок дозволяє краще розуміти різноманітні фізичні та соціальні явища, а також розробляти більш точні моделі та методи їх аналізу.

2.5 Асимптотична поведінка розв’язків нелінійних систем

Асимптотичне поведінка розв'язків нелінійних диференціальних систем з одним рівнянням взагалі не може бути визначена точно, оскільки вони не мають стандартної форми розв'язку, як у випадку лінійних систем.

Однак, для деяких спеціальних класів нелінійних систем можна дослідити асимптотичну поведінку розв'язків. Наприклад, для системи

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{f(x)},$$

де x $\in \mathbb{R}^n$і f: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$є неперервною функцією, асимптотичне поведінка розв'язків може бути вивчена за допомогою теорії Ляпунова.

Зокрема, якщо існує позитивно визначена функція Ляпунова V(x), тобто функція, яка задовольняє умовам:

$$\mathrm{V(x)} > 0 \text{ для всіх } \mathrm{x} \neq 0;$$

$$\frac{dV(x)}{dt} = \leq 0 \text{ для всіх } \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n,$$

то будь-який розв'язок системи

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{f(x)}$$

прямує до невід'ємного непорушного множини, яка складається з множини x, для яких V(x) = 0.

Ця теорема Ляпунова дозволяє встановити асимптотичну поведінку розв'язків для класу нелінійних систем, які задовольняють вищезгаданим умовам.

Загалом, асимптотичне поведінка розв'язків диференціальних систем залежить від властивостей системи та початкових умов. Для лінійних систем асимптотичне поведінка визначається власними значеннями матриці, а для деяких класів нелінійних систем можна використовувати теорію Ляпунова для визначення асимптотичної поведінки розв'язків. Однак, загалом, асимптотична поведінка розв'язків нелінійних систем не має стандартизованого підходу і зазвичай вивчається для конкретних класів нелінійних систем окремо.

Можемо розглянути асимптотику розв’язків рівняння

$$x' = Ax + f(t, x), \tag{2.5.1}$$

де A – стала матриця, а f – неперервна вектор-функція, визначена для $t \geq t_0$, |x| < c.

Нехай μ – довільне дійсне число. Тоді базовий векторний простір X може бути однозначно представлений як пряма сума трьох підпросторів X_0, X_1 інваріантних щодо A, на яких усі характеристичні корені A мають дійсні частини відповідно менші, рівні, більші μ. Позначимо P_i відповідну проекцію X на X_i $(i = -1, 0, 1)$.

На прикладах було видно, що якщо B(t) → 0 при t→∞, тоді розв’язки системи лінійних диференціальних рівнянь

$$x' = [A(t) + B(t)]x \tag{2.5.2}$$

не обов’язково мають таку саму асимптотику, як розв’язки незбуреного рівняння $y' = Ay$. Перші результати показують, що, незважаючи на це, логарифми норм розв’язків мають однакову асимптотику. Це набагато слабше твердження, але в деяких ситуаціях його достатньо.

Теорема 2.5.1. Якщо x(t) є таким розв’язком рівняння (2.5.1), що |x(t)| < c і

$$|f[t, x(t)]| \leq \gamma(t)|x(t)| \tag{2.5.3}$$

для $t \geq t_0$, де γ є непервною невід’ємною функцією, що задовольняє

$$\int_t^{t+1} \gamma(s)ds \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty \tag{2.5.4}$$

тоді або x(t) = 0 для всіх великих t , або

$$\mu = \lim_{t\to\infty} t^{-1} \log|x(t)| \tag{2.5.5}$$

існує і дорівнює дійсній частині одного з характеристичних коренів A. Крім того,

$$|P_{\pm 1}x(t)| = o(|P_0x(t)|) \quad \text{для } t \to \infty \tag{2.5.6}$$

(Іншими словами, розв'язок також є дотичним до підпростору X_0 для $t \to \infty$)

ДОВЕДЕННЯ. Оскільки всі норми у скінченому векторному просторі є еквівалентними, верхня та нижня межі $t^{-1}\log|x(t)|$ не залежать від використовуваної норми та є інваріантними відносно сталого оборотного лінійного перетворення. Таким чином, ми можемо припустити, що A знаходиться в канонічній формі Жордана. Шляхом подальшого перетворення x = Ty, де $T = diag[1, \alpha^{-1}, \dots, \alpha^{1-n}]$, ми можемо організувати, щоб усі ненульові кодіагональні елементи A дорівнювали α, де α – будь-яке задане додатнє число. Таким чином 2.5.1 набуває вигляду

$$x_i' = \lambda_i x_i + \alpha_i x_{i-1} + f_i(t,x) \quad (i = 1, \dots, n),$$

де $Re\lambda_1 \geq Re\lambda_2 \geq \cdots \geq Re\lambda_n$, $\alpha_i = 0$ або α і $\alpha_i = 0$ якщо $\lambda_i \neq \lambda_{i-1}$.

З цього випливає, що

$$\frac{d}{dt}|x_i|^2 = 2Re(x_i^- x_i') = 2Re(\alpha_i x_i^- x_{i-1}' + x_i^- f_i).$$

Отже, записуючи $r_i = |x_i(t)|$, ми маємо

$$\left|\frac{d}{dt}\left(r_i^2\right) - 2Re\lambda_i r_i^2\right| \leq 2\alpha_i r_i r_{i-1} + 2r_i|f_i[t, x(t)]|. \tag{2.5.7}$$

Відтепер нехай |x| позначимо евклідову норму $(\sum |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$. Нехай $\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_h$ різні дійсні частини характеристичних коренів A, і припустимо, що вибрано α настільки малим, що 2α < $\mu_k - \mu_{k+1}$ (k = 1, … , h-1). Покладемо

$$L_k = \sum_{Re\lambda_i = \mu_k} r_i^2, \qquad M_k = \sum_{Re\lambda_i > \mu_k} r_i^2, \qquad N_k = \sum_{Re\lambda_i \leq \mu_k} r_i^2,$$

так що $M_k + N_k = |x(t)|^2$, отримуємо з (2.5.7) за нерівністю Коші

$$|L_k' - 2\,\mu_k L_k| \le 2\alpha L_k + 2\gamma(t) L_k^{\frac{1}{2}}\,(M_k + N_k)^{\frac{1}{2}}, \qquad (2.5.8)$$

$$M_k' \ge 2(\mu_{k-1} - \alpha) M_k - 2\gamma(t) M_k^{\frac{1}{2}}\,(M_k + N_k)^{\frac{1}{2}}, \qquad (2.5.9)$$

$$N_k' \le 2(\mu_k + \alpha) N_k + 2\gamma(t) N_k^{\frac{1}{2}}\,(M_k + N_k)^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.5.10)$$

Зокрема, $N_1 = M_{h+1} = |x(t)|^2$ задовольняє

$$2[\,\mu_h - \alpha - \gamma(t)] N_1 \le N_1' \le 2[\,\mu_1 + \alpha + \gamma(t)] N_1.$$

Інтегруючи, отримуємо для $t \ge t_1$

$$\left[exp\left\{(\,\mu_h - \alpha)(t - t_1) - \int_{t_1}^{t} \gamma(s)ds\right\}\right] |x(t_1)| \le |x(t)|$$

$$\le \left[exp\left\{(\,\mu_1 + \alpha)(t - t_1) - \int_{t_1}^{t} \gamma(s)ds\right\}\right] |x(t_1) \qquad (2.5.11)$$

Це показує, що якщо $|x(t)|$ дорівнює нулю для $t = t_1 \ge t_0$, дорівнює нулю для всіх $t > t_1$. Відтепер ви виключаємо цей випадок.

Таким чином функція

$$\upsilon = \upsilon_k(t) = \frac{M_k}{M_k + N_k}$$

визначено для всіх $t \ge t_1$ і задовольняє $0 \le \upsilon \le 1$. Крім того, оскільки

$$\upsilon' = \frac{M'N - M\,N'}{(M+N)^2} \quad i \quad \upsilon(1-\upsilon) = \frac{MN}{(M+N)^2},$$

з нерівностей (2.5.9), (2.5.10) випливає

$$\upsilon' \ge b\upsilon(1-\upsilon) - 2\gamma(t), \qquad (2.5.12)$$

де $$b = b_k = 2(\,\mu_{k-1} - \,\mu_k - 2\alpha) > 0.$$

Теорема 2.5.2. Нехай хоча б один характеристичний корінь A має дійсну частину $\mu < 0$ і виконується

$$f(t,x) = o(|x|) \qquad \text{для } \ t \to \infty, |x| \to 0. \qquad (2.2.13)$$

Тоді існують додатні сталі η, K, що залежать лише від A і додатні сталі T, ρ, що залежать також від f, такі, що якщо t, T і якщо $\xi_{-1} \in X_{-1}, \xi_0 \in X_0$ задовольняють

$$|\xi_{-1}| \leq \eta\, |\xi_0|, \quad 0 < |\xi_0| < \frac{\rho}{2K},$$

тоді рівняння (2.5.1) має принаймні один розв'язок x(t) для $t \geq t_1$, що задовольняє

$$P_{-1}x(t_1) = \xi_{-1}, \qquad P_0 x(t_1) = \xi_0, \qquad (2.5.14)$$

|x(t)| ≤ ρ для $t \geq t_1$ і (2.5.5)

$$\mu = \lim_{t\to\infty} t^{-1} \log|x(t)|.$$

Цей розв'язок єдиний, якщо f задовольняє умову Ліпшица

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq L|\,x_1 - \ x_2| \qquad (2.5.15)$$

для t ≥ T, $|x_1| \leq \rho,\ |x_2| \leq \rho$ з достатньо малою додатною сталою L.

ДОВЕДЕННЯ. Ми можемо знайти додатні сталі α, β, γ такі, що

$$-\beta + \alpha < \mu < -\gamma - \alpha$$

і кожен характеристичний корінь A, який має дійсну частину, меншу за μ, має дійсну частину, меншу за $-\beta - \alpha$, а кожен характеристичний корінь, який має дійсну частину, більшу за μ , має дійсну частину більшу за $-\gamma + \alpha$. Тоді існує стала K > 0 така, що

$$|e^{tA}P_{-1}| \leq \tfrac{1}{2}Ke^{-(\beta+\alpha)t}, \qquad |e^{tA}P_0| \leq \tfrac{1}{2}Ke^{-(\gamma+\alpha)t} \qquad t \geq 0;$$
$$|e^{tA}P_0| \leq \tfrac{1}{2}Ke^{-(\beta-\alpha)t}, \qquad |e^{tA}P_1| \leq \tfrac{1}{2}Ke^{-(\gamma-\alpha)t} \qquad t \leq 0.$$

За (2.5.14)ми можемо вибрати T ≥ t_1 і ρ > 0 так, щоб

$$|f(t,x)| \leq \left(\frac{\alpha}{4K}\right)|x| \qquad \text{для t} \ \geq \ \mathrm{T}, |x| \leq \rho.$$

Нехай $\xi_{-1} \in \mathrm{X}_{-1}, \xi_0 \in \mathrm{X}_0$ задовольняє

$$|\xi_{-1}| \leq \frac{\rho}{2K}, \quad |\xi_0| \leq \frac{\rho}{2K}.$$

Тоді нехай x(t) - будь-яка неперервна функція, визначена для $t \geq t_1 (\geq T)$, така що $|x(t)| \leq \rho$ і x(t) = O($e^{-\gamma t}$) для $t \geq t_1$. Ми визначаємо

$$|x| = \sup_{t \geq t_1} e^{\gamma(t-t_1)}|x(t)|$$

і встановити

$$\begin{aligned}\mathscr{C}x(t) = e^{(t-t_1)A}(\xi_{-1} + \xi_0) + \int_{t_1}^{t} e^{(t-s)A}(P_{-1} + P_0)f[s, x(s)]\, ds \\ - \int_{t}^{\infty} e^{(t-s)A}P_1 f[s, x(s)]\, ds.\end{aligned}$$

Потім

$$\begin{aligned}|\mathscr{C}x(t)| &\leq \tfrac{1}{2}Ke^{-(\gamma+\alpha)(t-t_1)}(|\xi_{-1}| + |\xi_0|) \\ &\quad + \tfrac{1}{4}\alpha\left\{\int_{t_1}^{t} e^{-(\gamma+\alpha)(t-s)}\,|x(s)|\, ds + \int_{t}^{\infty} e^{-(\gamma-\alpha)(t-s)}\,|x(s)|\, ds\right\} \\ &\leq \tfrac{1}{2}Ke^{-\gamma(t-t_1)}(|\xi_{-1}| + |\xi_0|) + \tfrac{1}{2}\,|x|\, e^{-\gamma(t-t_1)},\end{aligned}$$

і отже

$$|\mathscr{C}x| \leq \tfrac{1}{2}K(|\xi_{-1}| + |\xi_0|) + \tfrac{1}{2}\,|x|. \tag{2.5.16}$$

Таким чином, якщо$|x(t)| \leq \rho$, то також $|Gx| \leq \rho$. Можна побачити, що умови теореми про нерухому точку Шаудера і Тихонова виконуються. Отже, інтегральне рівняння $x = Gx$ має принаймні один неперервний розв'язок x(t) такий, що $|x| \leq \rho$. Шляхом диференціювання легко побачити, що x(t) є розв'язком диференціального рівняння (2.5.1). Крім того, згідно (2.5.16)

$$|x(t_1)| \leq K(|\xi_{-1}| + |\xi_0|).$$

Навпаки, будь-який розв'язок x(t) диференціального рівняння (2.5.1), для якого виконується (2.5.14) і x(t) = O($e^{-\gamma t}$) є розв'язком інтегрального рівняння x = Gx. Фактично, якщо покласти z = x – Gx, то

$$(P_{-1} + P_0)z(t_1) = 0, \;\; z(t) = O(e^{-\gamma t}), \;\text{ і }\; z' = Az,$$

тоді це можливо, лише якщо z ≡ 0.

Подібним чином ми можемо показати, що рівняння (2.5.1) має принаймні один розв'язок x^- (t), визначений для $t \geq t_1$ такий, що $P_{-1}x^-(t_1) = \xi_{-1}$, $|x^-$ (t)| ≤ ρ і x^- (t) = O($e^{-\beta t}$) для $t \geq t_1$. Крім того, будь-який такий розв'язок задовольняє

$$|x^-(t)| \leq K|\xi_{-1}|.$$

Якщо x^- (t)збігається з попереднім розв'язком x(t), то, оскільки $|P_0| \leq \frac{1}{2}K$,

$$|\xi_0| = |P_0x(t_1)| \leq \frac{1}{2}K|x(t_1)| \leq \frac{1}{2}K|\xi_{-1}|.$$

Таким чином, якщо ця нерівність не виконується, x(t) має порядок $O(e^{-\gamma t})$, але не O($e^{-\beta t}$) .За теоремою 2.5.1 це означає, що log |(x(t)|~ μt для t→ ∞. Нарешті , припустимо, що (2.5.15) виконується з L = α/4K. Звідси випливає, що для будь-яких двох неперервних функцій $x_1(t)$, $x_2(t)$, таких що $|x_i(t)|$ ≤ p і $x_i(t)$| = $O(e^{-\gamma t})$ для $t \geq t_1$ (i = 1, 2) маємо

$$|\mathcal{G}x_1 - \mathcal{G}x_2| \leq \tfrac{1}{2}|x_1 - x_2|.$$

Отже, згідно з принципом згортання інтегральне рівняння x = Gx має не більше одного розв'язку в межах розглянутого класу і фактично один розв'язок x(t), що задовольняє $|x(t)| \leq \rho$. *Це завершує доказ.*

Теорема 2.5.3. У жордановій канонічній формі матриці A нехай m> 0 — максимальний порядок тих блоків, які відповідають характеристичним кореням з дійсною частиною μ, і нехай x(t) — розв'язок рівняння 2.5.1, який задовольняє 2.5.5 . Якщо

$$|[f(t, x(t)]| \leq \gamma(t)|x(t)|, \tag{2.5.17}$$

де $t^{m-1}\gamma(t) \in L[t_0, \infty]$ то існує такий автономний розв’язок y(t)

$$y' = Ay \qquad (2.5.18)$$

що при $t \to \infty$
$$x(t) = y(t) + o(|y(t)|). \qquad (2.5.19)$$

Наступна теорема, також завдяки Хартманну та Уінтнеру , обмежена лінійними рівняннями. Це залежить від того самого методу доведення, що й Теорема 2.5.1, і ми зберігаємо позначення цього доведення.

Теорема 2.5.4. Нехай λ — простий характеристичний корінь сталої матриці A, і припустимо, що жоден інший характеристичний корінь A не має такої ж дійсної частини, як λ. Нехай B(t) — неперервна матрична функція, визначена для $t \geq t_0$ до такої, що

$$\int^{\infty} |B(t)|^2 dt < \infty. \qquad (2.5.20)$$

Якщо x(t) є нетривіальним розв’язком лінійного рівняння (2.5.2) таким, що

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1} \log|x(t)| = \mu = \mathbb{R}\lambda$$

для $t \to \infty$
$$x(t) = \exp\left[\int_{t_0}^{t}\{\lambda + \beta(s)\}ds\right][\xi + o(1)], \qquad (2.5.21)$$

де ξ– характеристичний вектор A, що належить характеристичному кореню λ, а β(t) – скалярна функція, визначена виразом

$$P_0 B(t)\xi = \beta(t)\xi.$$

Теореми 2.4.2 і 2.5.3 разом показують, що розв’язки рівняння (2.5.1) нагадують розв’язки незбуреного рівняння (2.5.18) за дуже загальних умов на функцію f. Накладаючи суворіші обмеження на f, ми можемо зробити більш точні твердження про зв’язок між розв’язками двох рівнянь.

Теорема 2.5.5. Нехай принаймні один характеристичний корінь A має дійсну частину μ < 0 і

$$|f(t,x)| \leq L|x|^{1+\rho} \qquad (2.5.22)$$

для $t \geq t_0$, |x| ≤ δ, де L, ρ і δ є додатними сталими.

Тоді існує додатна константа n така, що якщо x(t) є розв'язком рівняння (2.5.1) задовольняє

$$\mu = \lim_{t\to\infty} t^{-1} \log|x(t)|,$$

автономне лінійне рівняння (2.5.18) має єдиний розв'язок y(t), що задовольняє

$$P_{-1}x(t_0) = P_{-1}y(t_0) \qquad (2.5.23)$$

і

$$\text{x(t)} = \text{y(t)} + O\left(e^{(\mu-\eta)t}\right). \qquad (2.5.24)$$

І навпаки, якщо y(t) є розв'язком (2.5.18), для якого

$$\mu = \lim_{t\to\infty} t^{-1} \log|y(t)|$$

і якщо $|y(t_0)|$ є достатньо малим, рівняння (2.5.1) має принаймні один розв'язок x(t), для якого |x(t)| ≤ δ для t ≥ t_0 та виконуються (2.5.23) і (2.5.24). Цей розв'язок єдиний, якщо f задовольняє умову Ліпшица

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq \gamma \mid x_1 - x_2| \qquad (2.5.25)$$

для t ≥ t_0 , $|x_1|$ ≤ δ, $|x_2|$ ≤ δ із достаньо малою додатною сталою γ.

Враховуючи складність дослідження асимптотичної поведінки нелінійних диференціальних систем, важливо мати математичні навички та розуміння принципів диференціальних рівнянь та теорії хаосу. Застосування цих методів дозволяє отримати глибше розуміння динаміки системи та зрозуміти, як розв'язки змінюються в межах великих та малих значень часу.

Одержання асимптотичних результатів для розв'язків нелінійних диференціальних систем є важливим кроком у вивченні складних динамічних систем і має велике значення для різних галузей науки та інженерії. Розуміння асимптотичної поведінки допомагає в прогнозуванні системного розвитку, контролі руху та вирішенні багатьох практичних завдань.

Висновок

В даній кваліфікаційній роботі розглянуто асимптотичну поведінку фундаментальної системи розв'язків деяких диференціальних систем. Далі дослідили, як змінюється поведінка розв'язків при різних значеннях параметрів системи, та знайшли асимптотики розв'язків для великих і малих значень часу.

Доведено теорему про існування таких розв’язків у випадку майже лінійних та нелінійних систем в ситуації різних коренів та досліджена їх стійкість або нестійкість в кожному випадку.

В результаті досліджень було встановлено, що асимптотична поведінка розв'язків диференціальних систем може бути різноманітною і залежить від різних параметрів системи. Наприклад, система може мати стійку точку рівноваги, що приводить до збіжності розв'язків до неї при $t \to \infty$. Але вона також може мати нестійку точку рівноваги, що викликає періодичні розв'язки або хаотичні рухи.

В цілому, дослідження асимптотичного поведінки розв'язків диференціальних систем є важливим етапом в аналізі динаміки складних систем. Вони дозволяють розуміти як система поводиться в довгостроковій перспективі і дозволяють здійснювати прогнози про її майбутнє. Такі дослідження знайшли застосування в багатьох галузях науки, включаючи фізику, біологію, економіку та інші.

Список використаної літератури

- W. A. Coppel Stability and asymptotic behavior of differential equations. // D.C. Heath and Company Boston , 1965. - 172 c.
- Євтухов В.М. Деякі питання асимптотичної теорії лінійних диференціальних рівнянь. – Укр. Мат. Ж. – 2002. – 20-42 с.
- M.S.P. Eastham The asymptotic solution of linear differential systems. // Oxford University Press, New York, 1989. – 241 c.
- A.Devinatz The asymptotic nature of the solutions of certain linear systems of differential equations. // Pacific journal of mathematics, 1965.- 9 c.
- Bronson R. Differential equations // McGrow Hill, 2003. - 136 c.
- Асимптотичні властивості розв’язків диференціальних рівнянь. Перестюк М.О., Капустян О.В., Фекета П.В., Задоянчук Н.В., Київ 2015р.
- Рапопорт І.М. Про деякі асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь. Вид. АН УРСР, Київ. - 1954. - 290с.
- Levinson N. The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations// Duke Math. J. - 1948.- 15. - P. 111-126.
- Hartman P., Wintner A. Asymptotic integrations of linear differential equations. // Am. J. Math. - 1955. - 77 - P. 48-86 and 932