

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І. І. МЕЧНИКОВА
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Н. В. Шарай, М. О. Білозерова

**ВИЩА МАТЕМАТИКА В ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ
ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ
І ЕЛЕМЕНТИ СТАТИСТИКИ**

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК
для студентів 1 курсу факультету хімії та фармації
спеціальностей 102 «Хімія», «Фармацевтична хімія»
та 226 «Фармація, промислова фармація»

ОДЕСА
ОНУ
2023

УДК 51:519.2](076)
Ш25

Автори:

Н. В. Шарай, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри диференціальних рівнянь, геометрії та топології;

М. О. Білозерова, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри диференціальних рівнянь, геометрії та топології.

Рецензенти:

В. М. Євтухов, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри диференціальних рівнянь, геометрії та топології Одеського національного університету імені І. І. Мечникова;

В. М. Пивоварчик, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики та статистики ДЗ «Південноукраїнський державний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського.

*Рекомендовано до друку науково-методичною радою
ОНУ імені І. І. Мечникова.
Протокол № 6 від 15 червня 2023 р.*

Шарай Н. В.

Ш25 Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірностей і елементи статистики : навч.-метод. посіб. для студентів ф-ту хімії та фармації спец. 102 «Хімія», «Фармацевтична хімія» та спец. 226 «Фармація, промислова фармація» / Н. В. Шарай, М. О. Білозерова. – Одеса : Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2023. – 122 с.

ISBN 978-617-689-489-6

В навчально-методичному посібнику викладені теоретичні відомості, приклади для практичних занять з розв'язанням для самостійної роботи, методичні указівки для розв'язання і оформлення РГР за розділом «Теорія ймовірностей. Елементи статистики», наведені приклади розв'язання задач, які наведені в РГР, і подані варіанти задач для самостійного розв'язання. Наведена контрольна робота для студентів заочного відділення.

Надана довідкова інформація може бути корисна при засвоєнні студентами лекційного курсу «Вища математика». Може бути корисний для студентів та спеціалістів, які вивчають теорію ймовірностей та елементи статистики.

УДК 51:519.2](076)

ISBN 978-617-689-489-6

© Шарай Н. В., Білозерова М. О. 2023

© Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2023

Задача будь-якої науки полягає у з'ясуванні та дослідженні важливих закономірностей, яким підкоряються реальні процеси. Виявлення та дослідження закономірностей має як теоретичне, так і практичне значення у плануванні, управлінні та прогнозуванні. У переважній більшості випадків закономірності можуть бути виявлені при цілеспрямованому статистичному дослідженні масових явищ, яке полягає у збиранні даних, їх систематизації і упорядкуванні. Оскільки спостережуваний процес або явище підлягають впливу множини факторів, то їх індивідуальні прояви будуть різнитися. Тільки у масових сукупностях об'єктів спостережень проявляються загальні закономірності, у формування яких кожна одиниця сукупності вносить свій «внесок».

Теорія ймовірностей – це розділ математики, який вивчає закономірності масових випадкових явищ. Її предметом є дослідження взаємозв'язків між випадковими подіями, характеристик величин, числові значення яких змінюються в залежності від випадка, закономірностей поведінки масивів таких випадкових величин. Основним методом теорії ймовірностей є побудова ймовірносних моделей, які є частинними випадками математичних моделей.

Тема 1. Короткі теоретичні відомості з комбінаторики

При розв'язанні задач з теорії ймовірностей відповідно класичному означенню ймовірності випадкових подій необхідно порахувати кількість яких-небудь об'єктів – елементів деяких скінченних множин або кількість різних способів, за допомогою яких можливо здійснити вибір того або іншого результату. Такі задачі вивчає комбінаторика.

Задачі визначення кількості комбінацій та пошуку алгоритмів для побудови таких комбінацій відносяться до основних задач розділу математики, що називається комбінаторним аналізом або комбінаторикою.

1.1. Основні принципи комбінаторики

Означення. Множина – це сукупність деяких об'єктів, виділених за певною ознакою з інших об'єктів.

Позначимо множини великими латинськими буквами: $A, B, C, \dots$, а їх елементи – малими: $a, b, c, \dots$

Означення. Множина A називається **впорядкованою**, якщо кожному її елементу поставлено у відповідність деяке натуральне число, тобто елементи занумеровані.

Нехай з пункту A в пункт B можливо проїхати трьома різними видами транспорту, а з B в C — двома:

$A \rightarrow B \rightarrow C$. Необхідно знати, скількома способами можливо проїхати з A в C через B ?

Розв'язання:

Кількість різних доріг з A в C дорівнює $3 \cdot 2 = 6$, оскільки для кожного з трьох можливих способів мандрування з A в B маємо два можливих способу подорожі з B в C .

Роздуми, які наводять на розв'язання цієї задачі, ілюструють один з основних принципів комбінаторики. Сформулюємо його.

Правило добутку. Якщо потрібно здійснити k -шагову операцію, перший крок якої можливо виконати n_1 числом способів, другий крок – n_2 числом способів..., k -ий шаг – n_k числом способів, то всю операцію можливо виконати: $n = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ числом способів.

Для скінченних множин: якщо маємо дві множини $A = \{a_1, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. Тоді множина усіх можливих пар $C = \{(a_i, b_j) | i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\}$ містить $m \cdot n$ елементів.

Справедливе також

Правило суми. Якщо дві дії взаємно виключають одна одну, причому одну із них можна виконати m способами, а іншу – n способами. Тоді виконати хоча б одну із цих дій можна $m + n$ способами.

Для скінченних множин: якщо для двох множин A і B (див. вище) $A \cap B = \emptyset$, то множина $A \cup B$ містить $m + n$ елементів.

1.2. Розміщення

Розглянемо різні типи комбінацій, які можливо скласти із n різних елементів, якщо вибирати k з них, $k \leq n$.

Означення. Розміщенням із n елементів по k називають підмножини, що складаються із k елементів, вибраних із даних n елементів і розміщених у певному порядку (іншими словами – всі впорядковані підмножини даної множини).

Кількість розміщень із n елементів по k позначають A_n^k , $k \leq n$ і обчислюють за формулою:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \quad (1)$$

Для кількості розміщень справедлива наступна рекурентна формула:

$$A_n^{k+1} = A_n^k \cdot (n-k), \quad k \leq n-1.$$

Розміщення з n елементів по m називають будь-які впорядковані m -елементні підмножини множини, яка складається з n елементів, тобто такі комбінації елементів, які можуть відрізнятися друг від друга або самими елементами, або їх порядком, або і тим, і іншим.

Приклад. Нехай дані три елементи: A, B, C ($n = 3$). Складемо з них всі можливі розміщення по 2 елементи ($m = 2$).

Розв'язання

Одержимо такі пари: AB, AC, BC, BA, CA, CB . Кількість таких розміщень можливо обчислити за формулою:

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

1.3. Сполучення (комбінації)

Означення. Будь-яка підмножина із m елементів даної множини, яка містить n елементів, називається **комбінацією із n елементів по m** .

Комбінації різняться складом елементів. Кількість комбінацій позначають C_n^m і обчислюють за формулою: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Для кількості комбінацій справедливі наступні формули:

1) $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$ (наслідок біноміальної формули

Ньютона).

2) $C_n^m = C_n^{n-m}$ (властивість симетрії).

3) $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$, де $0 \leq m < n$ (рекурентне співвідношення або правило Паскаля).

Між кількостями розміщень, переставлень та комбінацій існує очевидний зв'язок: $A_n^m = P_m \cdot C_n^m$.

Приклад

Нехай є три елементи: A, B, C ($n = 3$). Складемо з них комбінацію з $m = 2$ елементів.

Розв'язання

Одержимо наступні пари: AB, BC, AC . Обчислимо кількість комбінацій за формулою:

$$C_3^2 = \frac{3!}{2! 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 3.$$

1.4. Переставлення (перестановки)

Нехай потрібно підрахувати число способів, за якими можна розмістити в ряд n елементів множини, тобто кожне розміщення є скінченною множиною, елементи якої записано у певному порядку.

Скінченні множини, для яких істотним є порядок елементів, називають **впорядкованими**. Вказати порядок розміщення елементів у скінченній множині означає нумерацію елементів множини. Дві впорядковані множини рівні, якщо вони складаються із однакових елементів і однаково впорядковані. Наприклад, множини (a,b) і (b,a) – різні впорядковані множини, елементами яких є елементи неупорядкованої множини $\{a,b\}$.

Означення. Будь-яка впорядкована множина, що складається із n елементів, називається **перестановкою із n елементів**.

Таким чином, перестановками із n елементів будемо називати такі комбінації, які відрізняються між собою тільки порядком елементів, тобто перестановки – це розміщення із n елементів за n .

Помітимо, що перестановки складаються з одних і тих самих елементів, а відрізняються лише порядком елементів.

Кількість перестановок у множині із n елементів позначається P_n і обчислюється за формулою: $P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$. (3)

Для кількості перестановок справедлива наступна рекурентна формула:

$$P_n = n \cdot P_{n-1}$$

Приклад. Скількома способами можливо розмістити 5 людей в черзі в касу?

Розв'язання

Легко бачити, що кількість способів розміщення п'яти людей в черзі в касу можемо обчислити за формулою: $P_5 = 5! = 120$.

Приклад. Скільки можливо скласти перестановок з n елементів, в яких дані 2 елементи не розміщені разом?

Розв'язання

Означимо спочатку кількість перестановок, в яких дані два елементи А і В розташовані рядом. Можливі наступні випадки:

1. А стоїть на першому місці, В стоїть на другому місці;
2. А стоїть на другому місці, В стоїть на третьому місці;
- ...

$n-1$. А стоїть на $(n-1)$ -му місці, В стоїть правіше А.

Кількість таких випадків – $(n-1)$. Крім того, А і В можливо змінити місцями, і тоді кількість випадків, коли А і В рядом дорівнює $2 \cdot (n-1)$. В кожному з цих випадків інші $n-2$ елементи можливо розставити $(n-2)!$ способами. Таким чином, кількість перестановок, в яких А і В будуть стояти разом, дорівнює $2 \cdot (n-1) \cdot (n-2)! = 2 \cdot (n-1)!$. Тому шукана кількість перестановок дорівнює $n! - 2 \cdot (n-1)!$

Контрольні запитання до теми 1

1. Які основні правила комбінаторики ви знаєте?
2. Що називається розміщенням? Наведіть формулу та приклади.

3. Як формулюються правило суми та правило обутку? Наведіть приклади.

4. Яку формулу використовують при обчисленні сполучень?

5. Що таке переставлення? За якою формулою обчислюють в цьому випадку?

Тема 2. Короткі теоретичні відомості з теорії ймовірностей

2.1. Простір елементарних подій. Події. Класифікація подій

Теорія ймовірностей вивчає закономірності в явищах, які при багаторазовому відтворенні одного і того ж досвіду можуть відбуватись кожний раз по-іншому. Таким чином, теорія ймовірностей містить справу з експериментами (досвідами), результати яких заздалегідь не визначені.

Результат експеримента (випробування) або досвіду будемо називати **подією**. Події позначають великими буквами латинського алфавіта: $A, B, C, \dots$. Для того, щоб подія відбулася, необхідно, щоб виконувався означений комплекс умов, який позначимо літерою S .

Під **випробуванням** (дослідом, експериментом) розуміють відтворення (реалізацію) певного комплексу умов, які можна повторювати необмежену кількість разів.

Під **подією** розуміють можливий наслідок (результат) випробування. Події, як правило, позначають великими літерами.

Означення. **Випадковою подією** називається подія, яка може настати (з'явитись) або не настати у даному випробуванні. Всюди надалі для скорочення слово випадкова опускатимемо.

Події поділяють на *достовірні, неможливі, випадкові*.

Означення. **Достовірною подією** будемо називати подію, яка при виконанні умови S обов'язково відбудеться в даному випробуванні.

Означення. **Неможливою** будемо називати **подію**, яка при виконанні умови S не може відбутися в даному випробуванні.

Означення. **Випадковою** будемо називати **подію**, яка при випробуванні S може відбутися, а може і не відбутися.

Означення. Дві події A і B будемо називати **несумісними**, якщо поява одної з них виключає появу другої в даному випробуванні.

В супротивному випадку подію будемо називати **сумісною**, тобто дві події A і B називають сумісними, якщо в даному випробуванні можливо їх спільне здійснення.

Означення. Події $A_1, A_2, \dots, A_n$ будемо називати **попарно несумісними**, якщо будь-які дві з них несумісні.

Означення. Дві події A і $\bar{A}$, які утворюють повну групу, називаються взаємно **протилежними**.

Означення. Події A і B будемо називати **рівноможливими**, якщо при виконанні умови S однакова вірогідність появи подій A і B .

Означення. Події $A_1, A_2, \dots, A_n$ будемо називати **рівноможливими**, якщо кожна з них має однакову можливість відбутися або не відбутися.

Означення. Будемо говорити, що події $A_1, A_2, \dots, A_n$ **утворюють повну групу**, якщо вони попарно несумісні і при даному випробуванні одна з них обов'язково відбудеться.

Означення. Множина, яка складається з рівноможливих подій, які складають повну групу, будемо називати **множиною або простором елементарних подій (ПЕП)**, яке ми будемо позначати Ω , а його елементи (крапки), буквами ω_i .

Сама множина Ω є достовірною подією, порожня множина $\emptyset$ – неможливою подією. Підмножини простору елементарних подій будемо називати також подіями (подія A настає, якщо будь-яке з елементарних подій $\omega \in A$). Таким чином, простір елементарних подій – усі єдино можливі, рівноможливі та несумісні події, які неможливо поділити на більш прості події.

Приклад 1

Гральний кубик підкидають один раз. Позначимо через X кількість очок, які випали на верхній межі грального кубика. Необхідно:

- 1) *Описати множину елементарних подій Ω ;*

2) Вказати склад підмножин множини Ω , яка відповідає наступним подіям:

$A = \{X \text{ кратно числу три}\};$

$B = \{X \text{ непарне}\};$

$C = \{X > 3\};$

$D = \{X < 7\};$

$E = \{X \text{ дробне}\};$

$F = \{0,5 < X < 1,5\};$

3) Означити пари сумісних подій серед переліку в п. 2.

Розв'язання

1) Простір елементарних подій складається з шести елементарних подій (за числом граней кубика). Елементарна подія ω_i складається з того, що кількість очок на верхньої грані дорівнює i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$);

ПЕС: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

2) $A = \{\omega_3, \omega_6\}, B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}, C = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\},$

$D = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}, E = \emptyset, F = \{\omega_1\}.$

3) Перевіряючи наявність спільних елементів, будемо шукати пари спільних подій: $A \cap B, A \cap C, A \cap D, B \cap C, B \cap D, B \cap F, C \cap D, D \cap F$.

Приклад 2

Експеримент складається в радіолокаційному виявленні повітряної цілі. Результат, який, можливо, спостерігається – положення світлової плями на моніторі індикатора цілі, який має форму круга радіуса 10 см, в системі декартових координат з початком, який співпадає з центром монітору. Необхідно:

1) Описати ПЕП;

2) Описати склад підмножин, які відповідають наступним подіям:

$A = \{\text{ціль знаходиться в першому квадранті}\};$

$B = \{\text{ціль знаходиться в крузі радіусом 5 см, центр якого співпадає з центром екрану}\};$

$C = \{\text{ціль знаходиться в крузі радіусом 2,5 см, центр якого зміщений на 5 см за віссю } Ox \text{ в недостатньому напрямку}\};$

3) Чи є сумісними пари подій: A і B , A і C , B і C ?

Розв'язання

1) Так як елементарна подія в цьому експерименті – це положення світлової плями на екрані індикатора цілі, які мають форму круга радіусом 10 см в системі декартових координат з початком, який є центром екрану, то елементарну подію зручно описати як координати випадкової точки на площині, яка відповідає центру плями. Тоді

$$\Omega = \{(X, Y): X^2 + Y^2 \leq 100\}.$$

$$2) \quad A = \{(X, Y): X^2 + Y^2 \leq 100, X > 0, Y > 0\};$$

$$B = \{(X, Y): X^2 + Y^2 \leq 25\};$$

$$C = \{(X, Y): (X + 5)^2 + Y^2 \leq 6,25\}.$$

3) Події A і B , B і C сумісні, а події A і C – несумісні.

2.2. Алгебра подій

Означення. Сумою $A + B$ подій A і B будемо називати таку подію, яка полягає в тому, що відбувається хоч би одна з подій A або B .

Події $A + B$ відповідає об'єднання множин елементарних подій, які відповідають подіям A і B .

Означення. Додутком $A \cdot B$ подій A і B будемо називати таку подію, яка складається з того, що відбуваються обидві події A і B .

Події $A \cdot B$ відповідає перетин множин елементарних подій, які відповідають подіям A і B .

Події $\bar{A}$ відповідає множина елементарних подій, які є доповненням множини A до множини Ω .

Приклад. Гральну кісточку підкидають один раз. Результат, який спостерігається – кількість очок на верхній межі. Події:

$$A = \{X \text{ кратне до числа } 3\};$$

$$B = \{X \text{ непарне}\};$$

$$C = \{X > 3\};$$

$$D = \{X < 7\};$$

$$E = \{X \text{ дробове}\};$$

$$F = \{0,5 < X < 1,5\};$$

Описати склад і виявити значення наступних подій:

$$E_1 = \bar{B}; E_2 = \bar{C}; E_3 = A \cdot B; E_4 = A + B; E_5 = E + D; E_6 = E \cdot F.$$

Розв'язання. Простір елементарних подій описано в прикладі 1.

$E_1 = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ – випало парна кількість очок;

$E_2 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ – випала кількість очок, яка більше 3;

$E_3 = \{\omega_3\}$ – кількість очок непарна і кратна 3;

$E_4 = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_6\}$ –

кількість очок або непарна, або кратна 3;

$$E_5 = \emptyset + D = \Omega;$$

$$E_6 = \emptyset.$$

2.3. Класичне означення ймовірності

Нехай простір елементарних подій для розглянутого експеримента є скінченною множиною.

Означення. Ймовірністю події A будемо називати відношення числа $M = M(A)$ рівноможливих результатів, які сприяють появі події A , до кількості всіх рівноможливих результатів N , які складають ПЕП:

$$P(A) = \frac{M}{N} \quad (4)$$

З означення ймовірності витікає, що ймовірність події задовольняє наступним властивостям:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Якщо $P(A_\emptyset)$ – достовірна подія, то $P(A) = 1$.

Якщо $P(A_H)$ – неможлива подія, то $P(A) = 0$.

Приклад. В партії з 10 виробів є 3 нестандартних. Визначити ймовірність того, що серед обраних навмання 5 виробів нестандартними виявляться 2 вироби.

Розв'язання. Елементарною подією є вибір будь-яких 5 виробів з 10 наявних. Кількість усіх таких подій дорівнює кількості сполучень з 10 по 5, т. ч. $N = C_{10}^5$. Подія A – це подія, яка складається з того, що витягнули 5 виробів, з яких 2 нестандартних. Сприятливим події A є такі групи по 5 виробів, в яких 3 вироби стандартні, а 2 – нестандартні. Кількість таких груп $M = C_7^3 \cdot C_3^2$, так як 3 стандартних вироби можливо вибрати C_7^3 способами, а два нестандартних вироби – C_3^2

способами, причому будь-яка група стандартних виробів може комбінуватись з будь-якою групою нестандартних виробів. Звідси

$$P(A) = \frac{C_7^3 \cdot C_3^2}{C_{10}^5} = \frac{5}{12}.$$

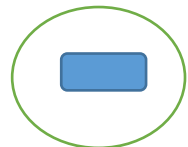
Приклад. В урні знаходяться 3 білі і 3 чорні кулі. Із урни навмання дістають одну кулю і розглядають подію A – куля біла. Потім цю кулю повертають до урни (схема «повернених куль») і дістають навмання одну із куль. Розглядається подія B – куля чорна. Очевидно, що у цьому випадку імовірність появи події B : $P(B) = \frac{3}{6}$ і не залежить від появи чи не появи події A , оскільки події незалежні.

2.4. Геометричне означення імовірності

Розглянемо деяку область Ω в R^m (на прямій, на площині, у просторі). Припустимо, що «міра» Ω (довжина, площа, об'єм відповідно) скінченна. Нехай випадковий експеримент складається в тому, що ми навмання кидаємо в цю область точку. Термін навмання означає, що ймовірність влучення точки в будь-яку частину $A \subset \Omega$ не залежить від форми або розташування A всередині Ω , а залежить от міри області A $mes(A)$ і міри області Ω $mes(\Omega)$.

Означення. Імовірність події A дорівнює:

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)},$$



де $mes(\Omega)$ – геометрична міра простору елементарних подій,

а $mes(A)$ – геометрична міра частини простору елементарних подій, яка сприяє появі події A .

Якщо для точки, яку кинули в область Ω , виконано умови геометричного означення ймовірності, то будемо говорити, що точка рівномірно розподілена в області Ω .

Приклад. Точку навмання кидаємо на відрізок $[0,1]$. Ймовірність кинути в точку $(0,5)$ дорівнює нулю, так як міра множини, яка складається з однієї точки, дорівнює нулю. Разом з тим, влучення в точку $(0,5)$ не є неможливою подією – це одна з елементарних подій.

2.5. Статистичне означення імовірності

Означення. Нехай проводиться n випробувань (які можна повторювати при незмінних умовах необмежено). **Частотою** $m(A)$ називається кількість випробувань (із n), в яких з'явилась подія A .

Відносною частотою або часткою $w(A) = \frac{m(A)}{n}$ називається відношення частоти появи події A до загальної кількості випробувань.

Означення. Статистичною імовірністю події A називають число, що характеризує можливість появи події і яке дорівнює:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} w(A).$$

2.6. Теорема додавання і множення ймовірностей

Теорема 1 (теорема множення ймовірностей). *Ймовірність додавання двох подій дорівнює множенню ймовірностей одного з них на умовну ймовірність другого при умові, що перша подія вже відбулася, тобто*

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B). \quad (5)$$

Означення. Події A і B називаються **незалежними**, якщо поява або не поява однієї з них не впливає на імовірність настання іншої. У супротивному випадку події називаються **залежними**.

Якщо події A і B незалежні, то для цього випадка попередня теорема може бути записана так:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B), \quad (6)$$

а для n незалежних подій

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n) \quad (7)$$

Теорема 2. Для будь-яких подій A і B

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \quad (8)$$

Означення. Умовною ймовірністю $P(A|B)$ події A за умовою B будемо називати ймовірність події A при умові, що подія B вже була.

Теорема. Імовірність суми двох подій A і B дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх добутку. Іншими словами,

імовірність появи хоча б однієї із двох подій дорівнює сумі їх імовірностей без імовірності їх сумісної появи:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (6)$$

Доведення. Для доведення скористуємось теоремою про добуток (див. вище). За класичним означенням :

$$P(A + B) = \frac{m + l - k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{l}{n} - \frac{k}{n} = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Зауважимо, що теорема досить важко розповсюджується на випадок скінченної кількості доданків-подій. Так, наприклад, для трьох подій:

$$\begin{aligned} P(A + B + C) &= P(A) + P(B + C) - P(A(B + C)) = \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC). \end{aligned}$$

Наслідок 1. *Імовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі їх імовірностей:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Наслідок легко розповсюджується на випадок фіксованої кількості несумісних подій-доданків.

Наслідок 2. *Сума імовірностей подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, що утворюють повну групу, дорівнює одиниці:*

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$$

Наслідок 3. *Для взаємно протилежних подій A і $\bar{A}$:*

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1, \quad P(A) = 1 - P(\bar{A}), \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Приклад. *Із скриньки, яка містить 3 білі і 5 чорних куль, виймається одна куля без повернення, а потім виймається друга куля. Знайти:*

- 1) *Ймовірність того, що другою буде витягнута біла куля за умовою, що першою також була білою;*
- 2) *Ймовірність того, що другою може бути біла куля за умовою, що перша витягнута куля була чорною.*

Розв'язання. Якщо першою була витягнута біла куля, то в урні залишилось 2 білих кулі і 5 чорних. Тому умовна ймовірність дорівнює $\frac{2}{7}$.

Якщо першою була вынута чорна куля, то в урні залишилось 3 білі кулі і 4 чорні. Тому шукана умовна ймовірність дорівнює $\frac{3}{7}$.

Приклад. Знайти ймовірність найбільшого виграшу в спортлото 5 з 36.

Розв'язання:

Найбільши виграш можливо одержати в тому випадку, коли будуть вгадані всі 5 номерів з 36. Ймовірність того, що перший обраний номер вказан вірно, дорівнює $\frac{5}{36}$. Ймовірність того, що другий номер вказан вірно, за умовою, що перший вже вгадан, дорівнює $\frac{4}{35}$ і т. ч. тому за теоремою 3 одержуємо шукану ймовірність:

$$P(A) = \frac{5}{36} \cdot \frac{4}{35} \cdot \frac{3}{34} \cdot \frac{2}{33} \cdot \frac{1}{32} \approx 2,65 \cdot 10^{-6}.$$

Приклад. В урні знаходяться 3 білі і 3 чорні кулі. Із урни навмання дістають одну кулю і розглядають подію A – куля біла. Першу витягнуту кулю не повертають до урни (схема «неповернених куль») і дістають навмання наступну кулю. Розглядається подія B – куля чорна. Очевидно, що у цьому випадку ймовірність появи події B буде залежати від того, якого кольору була перша куля, тобто необхідно розглядати умовні ймовірності:

а) ймовірність події B при умові, що настала подія A :

$$P_A(B) = P(B/A) = \frac{3}{5};$$

б) ймовірність події B при умові, що не настала подія A (тобто, настала подія $\bar{A}$): $P_{\bar{A}}(B) = P(B/\bar{A}) = \frac{2}{5};$

Отже, у другому прикладі події залежні.

Теорема 4. Ймовірність появи хоч би одної з подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ незалежних в сукупності, дорівнює різниці між одиницею і множенням ймовірностей подій, які протилежні даним: $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$.

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n. \quad (9a)$$

Тут $q_i = 1 - p(A_i) = p(\bar{A}_i), i = 1, 2, \dots, n$.

Задачі для розв'язання на практичному занятті

Задача 1. У готелі знаходиться зал ігрових автоматів. На одному з автоматів працює наступна схема гри: після кидання жетону незалежно один від одного обертаються три диски, на кожному з яких розташовано цифри від 0 до 9. Якщо при зупинці дисків принаймні на двох із них з'явиться число „5”, то гравець отримує виграш. Знайти ймовірність виграшу при киданні одного жетона.

Розв'язання. Нехай подія A полягає у тому, що гравець отримає виграш при одному киданні жетона. Скористуємося класичним означення ймовірності події. Оскільки будь-яка цифра на котрій зупинився перший диск може поєднуватися з будь-якою цифрою на другому та третьому дисках, то загальна кількість можливих подій випробування:

$$n = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000.$$

Події A сприяє

$$m = 1 \cdot 1 \cdot 10 + 1 \cdot 10 \cdot 1 + 10 \cdot 1 \cdot 1 = 30$$

результатів випробування („5” – на першому і другому дисках, „5” – на першому і третьому дисках, „5” – на другому і третьому дисках). Отже,

$$P(A) = \frac{30}{1000} = \frac{3}{100} = 0,03.$$

Задача 2. Для залучення клієнтів власниками ігрового автомату схема роботи якого наведена у задачі 1, введено додаткову функцію: якщо при зупинці дисків з'явиться одна „5”, то клієнт отримує право на другу спробу без кидання жетону. Чи набагато покращить це вірогідність успіху гравця?

Розв'язання. Нехай подія A_1 полягає в тому, що гравець виграв з першої спроби, подія A_2 – гравець виграв з другої спроби. З розв'язання задачі 1 маємо: $P(A_1) = 0,03$.

Подія A_2 є добутком двох подій: B_1 – у першій спробі з’явилась одна „5”, B_2 – з’явилися принаймні дві „5” у другій спробі. Подія B_2 залежить від події B_1 , тому

$$P(A_2) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(B_2) = \left(\frac{1}{10} \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{10} \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{10} \right) \cdot \frac{3}{100} = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{100} = \frac{9}{1000}.$$

Подія A – клієнт виграв при одному киданні жетона, є сумою подій A_1 і A_2 :

$$A = A_1 + A_2.$$

Події A_1 і A_2 несумісні, тому:

$$P(A) = \frac{3}{100} + \frac{9}{1000} = \frac{39}{1000} = 0,039.$$

Отже, додаткова функція не покращить суттєво вірогідність успіху гравця.

Задача 3. У невеликому курортному містечку на морському узбережжі розташовано 10 готелів, 7 з яких мають власні басейни. Туристична агенція підписала контракти із навімання обраними 6 готелями. Знайти ймовірність того, що принаймні 5 із них мають власний басейн.

Розв’язання Нехай подія A_1 – 5 із 6 обраних готелів мають власний басейн, A_2 – 6 із 6 обраних готелів мають власний басейн, A – принаймні 5 із 6 обраних готелів мають власний басейн. Події A_1 і A_2 несумісні, подія

$$A = A_1 + A_2.$$

Знайдемо ймовірність подій A_1 і A_2 . Скористуємось класичним означенням події. Загальна кількість способів, якими можливо вибрати 6 готелів із 10

$$n = C_{10}^6 = \frac{10!}{6!4!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210.$$

Події A_1 сприяють

$$m = C_7^5 \cdot C_3^1 = \frac{7!}{5!2!} \cdot \frac{3!}{2!1!} = 21 \cdot 3 = 63 \text{ наслідків випробування (5 із 7, що}$$

мають басейн, та 1 із 3, що його не мають).

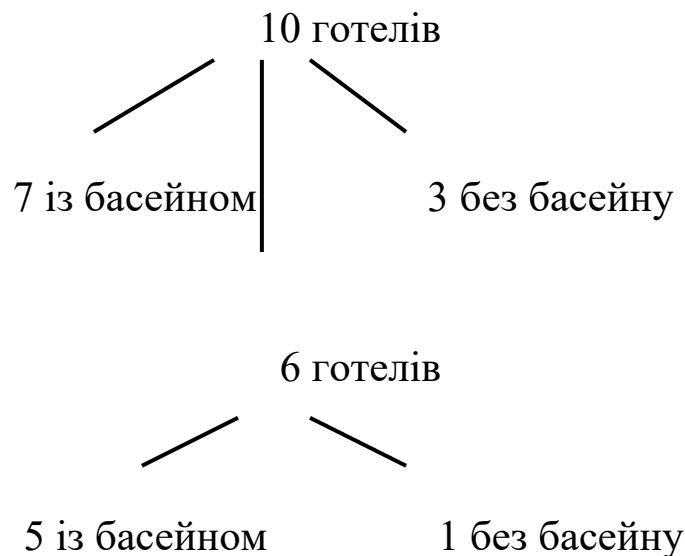
Події A_2 сприяють

$$m = C_7^6 \cdot C_3^0 = \frac{7!}{6! \cdot 1!} \cdot \frac{3!}{0! \cdot 3!} = 7 \text{ результатів випробування.}$$

$$\text{Отримуємо } P(A_1) = \frac{63}{210} = \frac{9}{30}; \quad P(A_2) = \frac{7}{210} = \frac{1}{30}.$$

$$\text{За теоремою суми ймовірностей } P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{9}{30} + \frac{1}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

Зауваження. Для розв'язку задач даного типу зручно їх умову записувати у вигляді:



Задача 4. У Буковелі розташовано магазин із продажу різноманітних сувенірів. Із попереднього досвіду власника сувенірної крамниці відомо, що 60 % громадян Румунії та 70 % громадян України, що завітали у крамницю, роблять покупку. У крамницю увійшли двоє покупців: один – румун, другий – українець. Знайти ймовірність того, що: а) обидва покупці зроблять покупку; б) один покупець зробить покупку; в) жоден з них не зробить покупку; г) хоча б один покупець зробить покупку.

Розв'язання. Нехай A_1 – подія, що перший покупець зробить покупку; тоді протилежна їй подія $\overline{A_1}$ полягає в тому, що він не зробить покупку. Аналогічно, відповідні події для другого покупця позначимо через A_2 та $\overline{A_2}$. Події A_1, A_2 незалежні, отже, $\overline{A_1}$ і $\overline{A_2}$ теж незалежні.

а) Нехай B – подія, що обидва покупці зроблять покупку. Це станеться тоді і тільки тоді, коли і перший, і другий покупець зроблять покупку, тобто з'являться одночасно дві події A_1 і A_2 . Таким чином,

$$B = A_1 \cdot A_2.$$

За допомогою теореми множення ймовірностей для незалежних подій

$$P(B) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,6 \cdot 0,7 = 0,42.$$

б) Нехай C – подія, що один покупець зробить покупку. Тоді

$$C = A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2.$$

Події $A_1 \cdot \overline{A_2}$ і $\overline{A_1} \cdot A_2$ – несумісні. Враховуючи, що сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці, отримаємо

$$P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1), \quad P(\overline{A_2}) = 1 - P(A_2).$$

За допомогою відповідних теорем додавання та множення ймовірностей отримуємо:

$$P(C) = P(A_1 \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} A_2) = P(A_1)P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1})P(A_2) = 0,6 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,7 = 0,46. \text{ в)}$$

Нехай D – подія, що жоден з покупців не зробить покупку. Тоді

$$D = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2}; \quad P(D) = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12.$$

г) Нехай E – подія, що хоча б один покупець зробить покупку. З'ясуємо, що становить собою протилежна подія $\overline{E}$. У даному випадку $\overline{E}$ – це подія того, що жоден з покупців не зробить покупку, тобто $\overline{E}$ співпадає з подією D . Таким чином, події E та D є протилежними, тому

$$P(E) = 1 - P(D) = 0,88.$$

Подію E можна було б виразити таким чином: $E = A_1 + A_2$ (впливає безпосередньо з визначення суми двох подій) або

$$E = A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2 + A_1 \cdot A_2.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Адміністрація готелю проводить лотерею для туристичної фірми. У скриньку поклали 10 кульок, серед яких – 3 призові. Турист намання дістав 2 кульки. Знайти ймовірність того, що: а) обидві кульки призові; б) одна з кульок призова.

Відповідь: а) $\frac{1}{15}$; б) $\frac{7}{15}$.

2. У готелі працюють 8 прибиральників, серед яких – 5 жінок. Для прибирання ресторану вибрали намання 4 прибиральники. Знайти ймовірність того, що серед них 2 жінки.

Відповідь: $\frac{3}{7}$.

3. Із п'яти карток з буквами А, Б, В, Г, Д вибирають намання одну за одною три картки і розташовують в ряд у послідовності появи. Яка ймовірність того, що при цьому буде отримано слово „ДВА”?

Відповідь: $\frac{3}{7}$.

4. Кожна з літер слова „ІНТЕГРАЛ” записана на окремому аркуші. Аркуші перемішані. Яка ймовірність того, що: а) з'явиться слово „ГРА” при витягуванні трьох аркушів (у порядку їх появи); б) з перших чотирьох узятих літер можна скласти слово „ГРАЛ”?

Відповідь: а) $\frac{1}{336}$; б) $\frac{1}{70}$.

5. На гору ведуть 8 різних стежок. Турист підіймається на гору, а потім, через деякий час, спускається з неї. Обчислити ймовірність того, що при підйомі та спуску були використані різні стежки.

Відповідь: $\frac{7}{8}$.

6. На полиці розташовані 10 книг, серед яких 6 написані українською мовою. Навмання обирають 3 книги. Знайти ймовірність

того, що серед них: а) одна написана українською мовою; б) дві написані українською мовою.

Відповідь: а) $\frac{3}{10}$; б) $\frac{1}{2}$.

7. У першій скриньці 20 білетів, серед яких 5 виграшних, у другій скриньці 25 білетів, серед яких 10 виграшних. Турист дістав 2 білети: один – з 1-ої скриньки, другий – з 2-ої скриньки. Знайти ймовірність того, що: а) один білет виграшний; б) жоден білет не виграв; в) обидва білети виграли.

Відповідь: а) $\frac{9}{20}$; б) $\frac{9}{20}$; в) $\frac{2}{10}$.

8. 80 % холодильників фірми „NORD” і 90 % фірми „INDESIT” справно працюють протягом гарантійного терміну. Для ресторану придбали 2 холодильники фірми „NORD” і один – фірми „INDESIT”. Знайти ймовірність того, що:

а) всі три холодильники будуть справно працювати протягом гарантійного терміну; б) два з трьох холодильників будуть справно працювати протягом гарантійного терміну;

в) принаймні один холодильник зіпсується протягом гарантійного терміну.

Відповідь: а) 0,576; б) 0,352; в) 0,424.

9. Туристична агенція має три автобуси для перевезення клієнтів: „MERSEDES”, „NEOPLAN” та „IKARUS”. Ймовірність того, що під час туру автобус зламається, дорівнює: 0,1 – для „MERSEDES”, 0,05 – для „NEOPLAN” та 0,2 – для „IKARUS”. На травневі свята кожен автобус відправлено у тур. Знайти ймовірність того, що:

а) всі три автобуси будуть справно працювати протягом туру;

б) один з трьох автобусів зламається;

в) два з трьох автобусів зламаються.

Відповідь: а) 0,684; б) 0,283; в) 0,032.

10. З колоди 36 карт навмання вибирають 3 карти. Знайти ймовірність того, що серед них буде не менше одного туза.

Відповідь: $\frac{109}{357}$.

11. З колоди 36 карт навмання вибирають 4 карти. Яка ймовірність того, що всі вони будуть однієї масті?

Відповідь: $\frac{8}{935}$.

2.7. Формула повної ймовірності. Формула Байєса

Нехай дана повна група подій $H_1, H_2, \dots, H_n$, ймовірності, які відомі. Нехай A – будь-яка подія, причому відомі умовні ймовірності $P_{H_i}(A), i = 1, 2, \dots, n$

Теорема. Нехай подія A може настати лише сумісно з хоча б однією із подій-гіпотез $H_1, H_2, \dots, H_n$, які утворюють повну групу. Тоді ймовірність (повна ймовірність) події A дорівнює:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P_{H_i}(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + \dots + P(H_n)P_{H_n}(A) \quad (10)$$

тобто сумі добутків ймовірностей гіпотез на умовні ймовірності події, при умові, що настала відповідна гіпотеза.

Формулу(10) будемо називати **формулою повної ймовірності**.

Приклад. *Одинакові деталі виготовляють на трьох верстатах. Перший верстат виготовляє 50 % всіх деталей, другий – 30 % і третій – 20 %. При цьому ймовірність браку на першому верстаті дорівнює 0,025, на другому – 0,02, а на третьому – 0,015. Знайти ймовірність того, що навмання взята на складі деталь виявиться без браку.*

Розв’язання. Позначимо через H_1, H_2, H_3 події, які складаються з того, що деталь виготовлена відповідно на першому, другому і третьому верстатах. Тоді

$$P(H_1) = 0,5; P(H_2) = 0,3; P(H_3) = 0,2.$$

Подію, яка полягає в тому, що деталь не містить браку, означимо буквою E . Тоді

$$P_{H_1}(E) = 1 - 0,025 = 0,975;$$

$$P_{H_2}(E) = 1 - 0,02 = 0,98;$$

$$P_{H_3}(E) = 1 - 0,015 = 0,985.$$

За формулою повної ймовірності знайдемо

$$P(E) = 0,5 \cdot 0,975 + 0,3 \cdot 0,98 + 0,2 \cdot 0,985 = 0,9785.$$

Теорема. Нехай подія A може настати лише сумісно з хоча б однією із подій-гіпотез $H_1, H_2, \dots, H_n$, які утворюють повну групу. Якщо подія A настала, то умовні (уточнені) імовірності гіпотез дорівнюють:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{P(A)}, i = 1, 2, \dots, n; \quad (11)$$

де повна імовірність $P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P_{H_i}(A)$.

Доведення. Зазначимо, що виконуються усі умови теореми – формули повної ймовірності. Розглянемо одну із подій AH_i і скористуємось теоремою добутку:

$$P(AH_i) = P(A)P_A(H_i) = P(H_i)P_{H_i}(A).$$

Звідси:

$$P_A(H_i) = P(H_i)P_{H_i}(A) / P(A),$$

де $P(A)$ – повна імовірність.

Зауваження. Доведені формули називають формулами переоцінки гіпотез. В них приймають участь апіорні (до випробування) імовірності $P(H_i)$ гіпотез та їх апостеріорні (після випробування) імовірності $P_A(H_i)$, тобто формули дають можливість переоцінити імовірності гіпотез після настання події.

Формулу (11) називають **формулою Байєса**.

Задачі для розв’язання на практичному занятті

Задача 5. Страхова компанія провела маркетингові дослідження і з’ясувалось, що страхові виплати отримують 4 % відпочиваючих на гірськолижних курортах, 3 % відпочиваючих на морському узбережжі і 2 % туристів, що відвідують пам’ятки культури. За рік страхова компанія надала послуги 1000 гірськолижникам, 3000 шанувальникам морського відпочинку і 6000 туристам, що відвідують пам’ятки культури. Знайти ймовірність виплати страхової суми деякому навантаженню обраному туристу.

Розв’язання. Нехай A – випадкова величина, що полягає у виплаті страхової суми деякому туристу. Події A сприяють наступні гіпотези:

H_1 – застрахований турист є гірськолижником;

H_2 – застрахований турист є шанувальником морського відпочинку;

H_3 – застрахований турист відвідував пам’ятки культури.

Ймовірності гіпотез:

$$P(H_1) = \frac{1000}{10000} = 0,1; \quad P(H_2) = \frac{3000}{10000} = 0,3; \quad P(H_3) = \frac{6000}{10000} = 0,6.$$

Ймовірність настання страхового випадку за умови, що застрахований турист є гірськолижником

$$P_{H_1}(A) = 0,04.$$

Ймовірність настання страхового випадку за умови, що застрахований турист є шанувальником морського відпочинку

$$P_{H_2}(A) = 0,03.$$

Ймовірність настання страхового випадку за умови, що застрахований турист відвідував пам’ятки культури

$$P_{H_3}(A) = 0,02.$$

За допомогою формули повної ймовірності знаходимо ймовірність того, що деякий навімання обраний застрахований турист отримає страхову виплату

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^3 P(H_i) \cdot P_{H_i}(A) = \\ &= 0,1 \cdot 0,04 + 0,3 \cdot 0,03 + 0,6 \cdot 0,02 = 0,004 + 0,009 + 0,012 = 0,025 \end{aligned}$$

Отже, ймовірність виплати страхової суми деякому навімання обраному туристу дорівнює 0,025.

Зауваження. Відповідь задачі дає можливість знайти середній відсоток настання страхових випадків серед клієнтів – 2,5 %.

Задача 6. Для заліку викладач підготував 50 задач: 20 з вищої математики, 20 з теорії ймовірностей та 10 з чисельних методів. Для отримання заліку необхідно розв’язати першу задачу, запропоновану викладачем. Студент вміє розв’язувати 18 задач з вищої математики,

15 задач з теорії ймовірностей і 5 – з чисельних методів. Студент склав залік. Знайти ймовірність того, що йому дісталась задача з теорії ймовірностей.

Розв’язання. Нехай A – подія, яка полягає в тому, що студент склав залік. Події A сприяють наступні гіпотези:

H_1 – студенту запропоновано задачу з вищої математики;

H_2 – студенту запропоновано задачу з теорії ймовірностей;

H_3 – студенту запропоновано задачу з чисельних методів.

$P(H_1)$ – ймовірність того, що студент отримав задачу з вищої математики;

$P(H_2)$ – ймовірність того, що студент отримав задачу з теорії ймовірностей;

$P(H_3)$ – ймовірність того, що студент отримав задачу з чисельних методів.

$P_{H_i}(A)$ – умовна ймовірність того, що студент склав залік при умові, що задача була з відповідної дисципліни. Згідно з умовою задачі

$$P(H_1) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5};$$

$$P_{H_1}(A) = \frac{18}{20} = \frac{9}{10};$$

$$P(H_2) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5};$$

$$P_{H_2}(A) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4};$$

$$P(H_3) = \frac{10}{50} = \frac{1}{5};$$

$$P_{H_3}(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Тоді ймовірність того, що йому була запропонована задача з теорії ймовірностей за умови, що він її розв’язав, за формулою Байєса дорівнює:

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)}{\sum_{i=1}^3 P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{9}{10} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{15}{38}.$$

Отже, з ймовірністю $\frac{15}{38}$ ми можемо стверджувати, що студенту, який склав залік, була запропонована задача з теорії ймовірностей.

Завдання для самостійної роботи

1. 60 % електроламп, що знаходяться на складі готелю, виготовлені в Україні, 40 % – іноземними виробниками. Продукція українських виробників містить 15 % браку, іноземних – 5 % браку. Знайти ймовірність того, що навмання взята на складі лампа буде якісною.

Відповідь: 0,89

2. У першій скриньці 3 білі та 7 чорних куль, у другій скриньці 6 білих та 4 чорні кулі. Навмання вибирається скринька і з неї виймається куля. Знайти ймовірність того, що вона біла.

Відповідь: 0,45.

3. Для готелю придбали телевізори: 6 телевізорів фірми „SONY”, 5 – фірми „TOSHIBA” та 9 – фірми „LG”. Ймовірність справної роботи протягом гарантійного терміну дорівнює: 0,95 – для „SONY”, 0,9 – для „TOSHIBA”, 0,8 – для „LG”. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний телевізор буде справно працювати протягом гарантійного терміну.

Відповідь: 0,87.

4. З Києва до Стамбулу щодобово вилітають 6 літаків: два – „Як-40”, три – „BOING-747” і один – „ТУ-144”. У „Як-40” 15 % місць першого класу, у „BOING-747” 40 % місць першого класу, у „ТУ-144” 30 % місць першого класу. Туристична компанія для свого клієнта заздалегідь бронює місце, незважаючи на № рейсу та на клас місця у літаку. Знайти ймовірність того, що він буде летіти першим класом.

Відповідь: 0,3.

5. У програму туру входить риболовля. Турист Петренко навмання обирає один з трьох човнів, що відходять на риболовлю. Перший човен відходить у місце, де ймовірність спіймати рибу великого розміру дорівнює 0,7. Другий човен відвозить туристів до місця, де ймовірність спіймати рибу великого розміру дорівнює 0,8. Третій човен відходить у місце, де ймовірність спіймати таку рибу дорівнює 0,6. Турист Петренко повернувся з рибою великого розміру. Знайти ймовірність того, що він рибалив на 3-му човні.

Відповідь: $\frac{2}{7}$.

6. У побутовий відділ готелю придбали 10 прасок: 2 – фірми „BOSH”, 3 – фірми „SIMENS” та 5 – китайського виробництва. Ймовірність безвідмовної роботи протягом року для праски „BOSH” дорівнює 0,8, для праски „SIMENS” – 0,7, для праски китайського виробництва – 0,5. Черговому побутового відділу повідомили, що зламалась праска. Знайти ймовірність того, що зламана праска виготовлена фірмою „SIMENS”.

Відповідь: $\frac{21}{62}$.

7. У крамницю для продажу надійшла продукція з трьох фабрик, відносними частками яких є: 1 – 50 %; 2 – 30 %; 3 – 20 %. Брак продукції цих фабрик становить 2 %, 3 % та 5 % відповідно. Знайти ймовірність того, що навімання куплених у магазині виріб цих фабрик буде якісним.

Відповідь: 0,971.

8. Маємо дві однакові скриньки. У першій з них 8 пар взуття 41-го розміру та 6 пар 42-го розміру, а у другій – 10 пар 41-го розміру та 4 пари 42-го розміру. З вибраної навімання скриньки витягли одну пару взуття 42-го розміру. Знайти ймовірність того, що ця пара взята з першої скриньки.

Відповідь: 0,6.

Контрольні запитання до теми 2

1. *Що таке подія? Наведіть приклади подій.*
2. *Які види випадкових подій ви знаєте? Що називають достовірною подією, неможливою подією, випадковою подією? Наведіть приклади.*
3. *Які події називають сумісними, які несумісними? Коли можливо сказати, що маємо повну групу подій?*
4. *Як визначити сумму та добуток подій? Які теореми можливо навести?*

5. Дайте означення класичної ймовірності. За якою формулою можливо обчислювати таку ймовірність?
6. Що таке геометрична ймовірність? За якою формулою обчислюють ймовірність в цьому випадку?
7. Чим відрізняється класичне та статистичне означення ймовірності?
8. Які властивості мають сума та добуток подій?
9. Що таке умовна ймовірність? Навести приклади.
10. Що таке повна ймовірність? Сформулюйте теорему.
11. В яких випадках використовується формула Байєса? Наведіть приклад.

Тема 3. Повторення незалежних випробувань. Формула Бернуллі.

Теорема Пуасона. Локальна і інтегральна теореми Лапласа

3.1. Повторення незалежних випробувань. Формула Бернуллі

Ряд випробувань будемо називати *незалежними* по відношенню до події A , якщо ймовірність появи події A в кожному випробуванні не залежить від результатів інших випробувань.

Приклади незалежних випробувань: 1) підкидання монети або грального кубіка; 2) стрельба по цілі без коректіровки при одних і тих же умовах; 3) многоразове виймання з скриньки кулі при умові, що витягнута куля після фіксування її кольора повертається назад в урну і кулі після цього перемішуються.

У багатьох практичних задачах доводиться мати справу із серіями випробувань, які проводяться за так званою схемою Бернуллі або схемою незалежних повторних випробувань (НПВ).

Означення. Якщо серію n випробувань проводити в однакових умовах і ймовірність появи події A в кожному окремому випробуванні однакова та не залежить від появи або неяви події A в інших випробуваннях, то таку послідовність НПВ називають *схемою Бернуллі*.

Приклад. Нехай проводять n незалежних випробувань, в кожному з яких подія A настане з ймовірністю $P(A) = p$.

1. Знайти ймовірність того, що подія A настане во всіх n випробуваннях.

Розв'язання. Оскільки випробування незалежні, то за теоремою додавання ймовірностей одержимо

$$P(\underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ раз}}) = p \cdot p \cdot \dots \cdot p = p^n.$$

2. Знайти ймовірність того, що подія A настане в перших k випробуваннях і не настане в інших $(n - k)$ випробуваннях.

Розв'язання

$$\begin{aligned} P\left(\underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k \text{ раз}} \cdot \underbrace{\bar{A} \cdot \bar{A} \cdot \dots \cdot \bar{A}}_{(n-k) \text{ раз}}\right) \\ = \underbrace{P(A) \cdot P(A) \cdot \dots \cdot P(A)}_{k \text{ раз}} \cdot \underbrace{P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) \cdot \dots \cdot P(\bar{A})}_{(n-k) \text{ раз}} \\ = p^k \cdot (1 - p)^{n-k}. \end{aligned}$$

3. Знайти ймовірність того, що подія A настане рівно k раз в n випробуваннях.

Розв'язання. На відміну від попередньої задачі тут k номерів випробувань, в яких відбувається подія A , можуть бути довільними. Кількість способів, якими можливо задати номери таких успішних випробувань, дорівнює кількості сполучень C_n^k . Тому шукана ймовірність дорівнює

$$P_{k,n} = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}, \text{ где } q = 1 - p. \quad (12)$$

Теорема. Нехай проводиться n НПВ за схемою Бернуллі і ймовірність появи події A в кожному із випробувань $p = P(A)$ незмінна (ймовірність не появи події A в кожному із випробувань $q = P(\bar{A}) = 1 - p$). Тоді ймовірність того, що подія A з'явиться k разів у n НПВ $P_n(k) = P_{n,k}$ знаходиться за формулою Бернуллі:

$$P_{k,n} = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}. \quad (12)$$

Формулу (12) будемо називати **формулою Бернуллі**.

Приклад 1. Знайти імовірність того, що при 5 кидках монети герб випаде 3 рази.

Розв’язування. Опишемо стандартну схему НПВ:

$n = 5$ – кількість НПВ (кидки монети);

A – поява герба (подія, що розглядається у кожному окремому випробуванні);

$p = P(A) = 1/2$ – імовірність появи події A ;

$q = 1 - p = 1/2$ – імовірність не появи події A ;

$m = 3$ – частота (скільки разів) появи події A у n НПВ.

Знайти $P_5(3) = P_{3,5}$.

3.2. Повторення незалежних випробувань. Теорема Пуассона.

Локальна і інтегральна теореми Лапласа

Обчислення імовірностей $P_{m,n}$ за точною формулою Бернуллі при великій кількості незалежних повторних випробувань (НПВ) n стає досить громіздким, тому на практиці часто використовують так звані асимптотичні формули.

Теорема (локальна формула Муавра-Лапласа). Якщо у схемі Бернуллі із n НПВ імовірність появи події A дорівнює p ($0 < p < 1$), а кількість НПВ досить велика, то імовірність появи події A m разів у n НПВ наближено дорівнює (тим точніше, чим більше n):

$$P_{m,n} \approx \frac{f(x)}{\sqrt{npq}},$$

де $f(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ – функція Гауса, а $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Відзначимо деякі властивості функції Гауса (локальної функції Лапласа):

1. Функція визначена на всій дійсній осі.
2. Функція набуває тільки додатних значень.
3. Функція парна, тобто $f(-x) = f(x)$.
4. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. На практиці при $|x| > 4$ $f(x) \approx 0$.

Значення цієї функції табульовані для невід'ємних значень x . Графік функції називають *кривою Гауса* або *нормальною кривою*.

Зауваження. Локальна формула Лапласа дає наближені результати тим ближчі до точних, чим більше значення $\sqrt{npq}$ (при $n \geq 100$, $npq \geq 20$). Це наближення відбувається досить швидко (на практиці формулу застосовують вже навіть при $n > 10$).

Локальна формула Лапласа при малих значеннях $p \leq 0,1$ дає досить великі похибки, тому в цих випадках застосовують формулу Пуассона.

Теорема Пуассона. Якщо імовірність появи події A в кожному із випробувань $p \rightarrow 0$ при необмеженому зростанні кількості n незалежних повторних випробувань (НПВ) ($n \rightarrow \infty$), причому добуток np прямує до сталого числа ($np \rightarrow a$), то імовірність того, що подія A з'явиться m разів у n НПВ $P_n(m) = P_{m,n}$ задовольняє граничну рівність:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{m,n} = \frac{a^m e^{-a}}{m!}.$$

На практиці, якщо імовірність p стала і мала, кількість випробувань n - досить велика і число $a = np$ - невелике (при $n \geq 100$, $a = np \leq 10$), то користуються наближеною формулою Пуассона:

$$P_{m,n} \approx \frac{a^m e^{-a}}{m!}.$$

Формулу називають асимптотичною формулою Пуассона.

Означення. При виконанні умов теореми Пуассона ВВ $X = m$ (яка приймає нескінченну злічену множину значень $m = 0, 1, 2, \dots$, а відповідні імовірності знаходяться за формулою $P_m = \frac{a^m e^{-a}}{m!}$, де $a = \text{const} > 0$) називають **розподіленою за законом Пуассона (закон рідкісних подій)**.

Таким чином, для великого n і p , які близькі до нуля, і невеликому k можливо скористатись асимптотичною формулою Пуассона:

$$P_{k,n} \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad (13)$$

де $\lambda = np$ і точність обчислення тем вище, чим більше n і менше p .

Для великих n і будь-яких p і k можливо використовувати локальну формулу Лапласа:

$$P_{k,n} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (14)$$

де $\sigma = \sqrt{npq}$, $x = \frac{k-np}{\sigma}$.

Приклад. Ймовірність попадання в ціль при одному пострілі дорівнює 0,7. Яка ймовірність того, що при 20 пострілах має бути 15 попадань?

Розв'язання. За формулою (12) знаходимо $P_{15,20} = \frac{20! \cdot (0,7)^{15} \cdot (0,3)^5}{15! \cdot 5!} = 0,179$.

За формулою (14) $P_{15,20} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2,05} e^{-\frac{0,49^2}{2}} = 0,173$.

Нехай проведено n незалежних випробувань (n – велике число), в кожному з яких подія A може статися з ймовірністю $P(A) = p$. Тоді ймовірність того, що при n випробуваннях подія A відбудеться не менш k_1 і не більш k_2 раз, приблизно дорівнює:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad (15)$$

де $x_1 = \frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$ і $x_2 = \frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$.

Формулу (15) будемо називати *інтегральною формулою Лапласа*.

Функцію $\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ будемо називати **функцією Лапласа**.

Ця функція є непарною. Для функції $\Phi(u)$ складені таблиці її значень (додаток, с.103)

3.3. Випадкові величини і закони їх розподілу

Випадковою величиною будемо називати змінну, яка може приймати внаслідок випробування те або інше значення, незделгідь.

Конкретні значення, які може приймати випадкова величина, називають *можливими її значеннями*. Значення випадкової величини залежить від результату випробувань, тобто від елементарної події. Тому випадкову величину можливо означити як функцію, яка задана в просторі елементарних подій.

Випадкову величину, всі можливі значення якої заповнюють деякий проміжок, будемо називати неперервною випадковою величиною. Якщо кожне можливе значення випадкової величини може бути пронумеровано, тобто записано у вигляді послідовності $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, то таку випадкову величину будемо називати *дискретною*.

Законом розподілу випадкової величини будемо називати всяке співвідношення, яке встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і їх ймовірностями. Закон розподілу дискретної випадкової величини, яка містить скінченну кількість можливих значень, може бути задана таблицею, яку будемо називати також *рядом розподілу*.

Розглянемо ймовірність події $X < x$, де x – змінна. Така ймовірність $P(X < x)$ є функцією від x . Цю функцію будемо називати *функцією розподілу випадкової величини X і позначати $F(x)$* :

$$F(x) = P(X < x).$$

Функцію розподілу іноді будемо називати *інтегральною функцією розподілу або інтегральним законом розподілу*.

Функція розподілу – універсальний спосіб завдання закону розподілу випадкової величини.

Властивості функції розподілу:

Всюди надалі вважається, що інтегральна функція визначена $\forall x \in R$.

- 1) Значення функції розподілу належать відрізьку $[0; 1]$, тобто

$$0 \leq F(x) \leq 1.$$

2) Ймовірність того, що випадкова величина приймає значення на напівінтервалі $[a, b)$, де $a < b$, дорівнює різності значень функції розподілу на кінцях цього інтервалу, тобто

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a).$$

3) Функція розподілу є неспадна, якщо $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \leq F(x_2)$.

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

Розглянуті властивості функцій розподілу можна сформулювати наступним чином: будь-яка функція розподілу є невід'ємною неспадною функцією, що задовольняє умови $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$. Справедливе і обернене твердження: будь-яка функція, що задовольняє вищевказаним властивостям, може бути функцією розподілу деякої ВВ.

3.4. Щільність розподілу

Нехай X – неперервна випадкова величина, функція розподілу $F(x)$ якої диференційована.

Функцію $f(x) = \frac{dF}{dx}$ будемо називати *щільністю розподілу* випадкової величини X . Так як $F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$, а $F(x + \Delta x) - F(x) = P(x \leq X < x + \Delta x)$, то одержимо:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X < x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Щільність розподілу є однією з форм завдання закону розподілу.

Властивості щільності розподілу:

$$1) F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx.$$

2) Щільність розподілу є невід'ємною функцією.

$$3) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

3.5. Числові характеристики випадкових величин

Математичним очікуванням дискретної випадкової величини X , яка має скінченну кількість можливих значень, будемо називати суму добутків всіх її можливих значень на їх ймовірності, тобто

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

При великій кількості випробувань середнє арифметичне спостережуваних значень випадкової величини наближається до її математичного очікування.

Математичним очікуванням неперервної випадкової величини X з щільністю розподілу $f(x)$ будемо називати інтеграл $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$, якщо цей невластний інтеграл збігається.

Якщо всі можливі значення неперервної випадкової величини належать відрітку $[a, b]$, то $M(X) = \int_a^b x f(x) dx$.

Дисперсією випадкової величини X будемо називати математичне очікування квадрата відхилення випадкової величини від її математичного очікування, тобто

$$D(X) = M[(X - M(X))^2].$$

Дисперсія характеризує середнє значення квадрата відхилення випадкової величини від її середнього значення. Іншими словами, дисперсія характеризує розсіювання (розкид) значень випадкової величини відносно її середнього значення (математичного очікування).

Дисперсію дискретної випадкової величини можливо обчислити за формулою: $D(X) = \sum_{i=1}^n [x_i - M(X)]^2 p_i$, а для неперервної випадкової величини — $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx$.

Для обчислення дисперсії можливо також скористатись формулою:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2,$$

де для дискретної випадкової величини $M(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i$, а для неперервної випадкової величини $M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$.

Квадратний корень з дисперсії будемо називати середнім квадратичним відхиленням: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Начальним моментом порядку k випадкової величини X будемо називати математичне очікування величини X^k , тобто $\nu_k = M(X^k)$.

Центральним моментом порядку k випадкової величини X будемо називати математичне очікування величини $(X - M(X))^k$, тобто

$$\mu_k = M[(X - M(X))^k] = M(\dot{X}^k), \quad \text{где} \quad \dot{X} = X - M(X) \quad -$$

центрована випадкова величина. Наприклад, при $k = 1$ $\nu_1 = M(X)$, при $k = 2$ $\mu_2 = M[X - M(X)]^2 = D(X)$.

Задача 7. Задано закони розподілу двох незалежних дискретних випадкових величин X та Y , де X – кількість груп, що обслуговує туристична агенція протягом сезону для відпочинку в Україні, Y – кількість груп, що обслуговує туристична агенція протягом сезону для відпочинку за кордоном.

X	1	2	3
P	0,3	0,5	0,2

Y	0	1	2
P	0,2	0,6	0,2

Скласти закони розподілу випадкової величини Z – загальної кількості груп, що обслуговує фірма протягом сезону. Обчислити математичне сподівання та дисперсію випадкової величини Z .

Розв'язання. Складемо закон розподілу дискретної випадкової величини $Z = X + Y$.

Z	1+0	1+1	1+2	2+0	2+1	2+2	3+0	3+1	3+2
P	0,3·0,2	0,3·0,6	0,3·0,2	0,5·0,2	0,5·0,6	0,5·0,2	0,2·0,2	0,2·0,6	0,2·0,2

Z	1	2	3	4	5
P	0,06	0,28	0,4	0,22	0,04

Зауваження. Коли випадкова величина набуває одного й того ж значення в різних випадках, то користуючись теоремою додавання, об'єднуємо ці випадки в один. Значення випадкової величини розташовують, як правило, в порядку зростання.

Знаходимо математичне сподівання та дисперсію випадкових величин X та Y .

x_i	p_i	$x_i p_i$	$x_i^2 p_i$	y_i	p_i	$y_i p_i$	$y_i^2 p_i$
-------	-------	-----------	-------------	-------	-------	-----------	-------------

1	0,3	0,3	0,3		0	0,2	0	0
2	0,5	1	2		1	0,6	0,6	0,6
3	0,2	0,6	1,8		2	0,2	0,4	0,8
Σ	1	1,9	4,1		Σ	1	1	1,4

Використовуючи результати таблиць, отримаємо математичні сподівання та дисперсії: математичні сподівання

$$M(X) = \sum_{i=1}^3 x_i p_i = 1,9; \quad M(Y) = \sum_{i=1}^3 y_i p_i = 1$$

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 p_i = 4,1; \quad M(Y^2) = \sum_{i=1}^3 y_i^2 p_i = 1,4$$

дисперсії

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 0,49; \quad D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = 0,4.$$

Для обчислення $M(Z)$, $D(Z)$ використовуємо властивості математичного сподівання та дисперсії :

$$M(Z) = M(X + Y) = M(X) + M(Y) = 2,9;$$

$$D(Z) = D(X + Y) = D(X) + D(Y) = 0,89.$$

Можливо також обчислити математичне сподівання та дисперсію випадкової величини Z , не застосовуючи їх властивості.

z_i	p_i	$z_i p_i$	$z_i^2 p_i$
1	0,06	0,06	0,06
2	0,28	0,56	1,12
3	0,4	1,2	3,6
4	0,22	0,88	3,52
5	0,04	0,2	1
Σ	1	2,9	9,3

За результатами таблиці, отримаємо математичні сподівання та дисперсію:

$$M(Z) = \sum_{i=1}^5 z_i p_i = 2,9; \quad M(Z^2) = \sum_{i=1}^5 z_i^2 p_i = 9,3; \quad D(Z) = M(Z^2) - M^2(Z) = 0,89.$$

Задача 8. Задано закони розподілу дискретних випадкових величин X та Y :

X	1	2
P	0,3	0,7

Y	- 1	2
P	0,6	0,4

Знайти $M(2X + 3Y)$, $D(2X - 3Y)$.

Розв'язання. Знайдемо математичне сподівання та дисперсію випадкових величин X та Y :

x_i	p_i	$x_i p_i$	$x_i^2 p_i$		y_i	p_i	$y_i p_i$	$y_i^2 p_i$
1	0,3	0,3	0,3		-1	0,6	-0,6	0,6
2	0,7	1,4	2,8		2	0,4	0,8	1,6
Σ	1	1,7	3,1		Σ	1	0,2	2,2

Використовуючи результати таблиць, отримаємо математичне сподівання та дисперсії:

$$M(X) = 1,7; M(Y) = 0,2; D(X) = 3,1 - (1,7)^2 = 0,21; D(Y) = 2,2 - (0,2)^2 = 2,16.$$

Використовуючи властивості математичного сподівання та дисперсії, отримаємо:

$$M(2X + 3Y) = 2M(X) + 3M(Y) = 2 \cdot 1,7 + 3 \cdot 0,2 = 3,4 + 0,6 = 4;$$

$$D(2X - 3Y) = 2^2 \cdot D(X) + 3^2 \cdot D(Y) = 4 \cdot 0,21 + 9 \cdot 2,16 = 0,84 + 19,44 = 20,28.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Дискретні незалежні випадкові величини X та Y задано таблицями розподілу:

X	2	4	5		Y	8	10
P	0,1	0,3	?		P	0,8	0,2

$$\text{Знайти } M(10X - 2Y + 0,8); D(10X - 2Y + 0,8).$$

Відповідь: 2,8; 10,96.

2. Дискретні незалежні випадкові величини X та Y задано таблицями розподілу:

X	1	2		Y	2	4
P	0,6	?		P	0,4	0,6

$$\text{Знайти } M(5X - 3Y + 1); D(5X - 3Y + 1).$$

Відповідь: -1,6; 9,84.

3. Випадкові величини X – кількість працюючих у невеличкому готелі кондиціонерів; Y – кількість працюючих у цьому готелі телевізорів. Закони розподілу X та Y мають вигляд:

X	0	1	2
P	0,3	0,4	0,3

Y	0	1	2
P	0,1	0,5	0,4

Скласти закон розподілу випадкової величини Z – загальної кількості працюючих кондиціонерів та телевізорів. Знайти числові характеристики випадкової величини Z .

Відповідь:

Z	0	1	2	3	4
P	0,03	0,15	0,35	0,31	0,12

2,3;
1,01.

Контрольні запитання до тем розділу 3.

1. Що ми розуміємо під схемою незалежних випробувань?
2. Наведіть, що визначає величина p в формулі Бернуллі?
3. Як обчислити імовірність появи події A , якщо у схемі Бернуллі імовірність появи події A дорівнює p ($0 < p < 1$), а кількість незалежних випробувань досить велика?
4. Як знайти ймовірність того, що подія A настане рівно k раз в n випробуваннях?
5. При яких умовах треба користатись теоремою Пуассона?
6. Як знайти ймовірність події, якщо імовірність появи такої події в кожному із випробувань $p \rightarrow 0$ при необмеженому зростанні кількості n незалежних повторних випробувань ($n \rightarrow \infty$)?
7. Які властивості локальної функції Лапласа ви знаєте?
8. Якщо виконуються умови теореми Пуассона для n і p , які близькі до нуля, і невеликому k , то якою асимптотичною формулою можливо скористатись для обчислення?
9. Чим відрізняються дискретна та неперервна випадкова величина?

10. Як можливо означити функцію розподілу та якими властивості ми користуємось на практиці?

11. Яку функцію будемо називати щільністю розподілу випадкової величини X та які властивості цієї функції ви знаєте?

12. Як визначається математичне очікування випадкової величини X ?

13. Чим відрізняється математичне очікування, визначене для дискретної та неперервної випадкової величини X ?

14. Як визначається дисперсія випадкової величини X і що вона характеризує?

15. Чим відрізняється дисперсія, визначена для дискретної та неперервної випадкової величини X ?

4. Деякі закони розподілу випадкової величини

4.1. Біноміальний розподіл

Нехай проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких подія A може здійснитися або не здійснитися. Ймовірність події A в кожному випробуванні дорівнює p . При виконанні умов теореми Пуассона ВВ $X = m$ (яка приймає нескінченну злічену множину значень $m = 1, 2, 3, \dots$, а відповідні імовірності знаходяться за формулою

$P_m = \frac{a^m e^{-a}}{m!}$, де $a = \text{const} > 0$) називають **розподіленою за законом**

Пуассона (закон рідкісних подій).

Таким чином, для великого n і p , які близькі до нуля, і невеликому k можливо скористатись асимптотичною формулою Пуассона:

кількість випробувань, в яких подія A відбулось. Можливими значеннями такої випадкової величини є цілі числа от 0 до n . Ймовірності цих значень обчислюють за формулою Бернуллі, тобто

$$P(X = k) = P_{k,n} = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Такий закон будемо називати *біноміальним розподілом*.

Задача 9. У туристичній групі 30 % студентів. На екскурсії туристів випадковим чином посадили на декілька човнів. Знайти

ймовірність того, що із шести туристів, які поплили на першому човні, двоє навчаються у ВНЗ.

Розв'язання. Маємо схему незалежних повторних випробувань (НПВ). Позначимо подію A – турист, що пливе на першому човні, навчається у ВНЗ. За умовою задачі:

$$p = P(A) = 0,3; \quad q = P(\bar{A}) = 1 - p = 0,7.$$

Загальна кількість туристів, що плывуть на першому човні $n = 6$. За формулою Бернуллі:

$$P_{2,6} = C_6^2 \cdot p^2 \cdot q^4 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot (0,3)^2 \cdot (0,7)^4 = 15 \cdot 0,09 \cdot 0,2401 = 0,324135.$$

Задача 10. За результатами анкетування виявилось, що 10 % клієнтів туристичної агенції незадоволені якістю наданих їм послуг. За сезон турагенція надала послуги 121 клієнту. Знайти найімовірнішу кількість незадоволених клієнтів та ймовірність цієї найімовірнішої кількості.

Розв'язання. Маємо схему НПВ. Подія A – навімання обраний турист незадоволений якістю наданих послуг. За умовою задачі

$$n = 121, \quad p = P(A) = 0,1, \quad q = 0,9.$$

Найімовірнішу кількість незадоволених m_0 знаходимо з подвійної нерівності:

$$\begin{aligned} n \cdot p - q &\leq m_0 \leq n \cdot p + p \\ 121 \cdot 0,1 - 0,9 &\leq m_0 \leq 121 \cdot 0,1 + 0,1 \\ 11,2 &\leq m_0 \leq 12,2. \end{aligned}$$

Отже, $m_0 = 12$. Для наближеного знаходження ймовірності найімовірнішої частоти $P_{12,121}$ використаємо формулу локальної теореми Муавра-Лапласа:

$$\begin{aligned} P_{m,n} &\approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot f\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right) \\ P_{12,121} &\approx \frac{1}{\sqrt{121 \cdot 0,1 \cdot 0,9}} \cdot f\left(\frac{12 - 121 \cdot 0,1}{\sqrt{121 \cdot 0,1 \cdot 0,9}}\right) = \frac{1}{3,3} \cdot f(-0,03) = \frac{0,3989}{3,3} \approx 0,1209 \end{aligned}$$

Значення функції Гауса

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$$

наведені у Додатку 1.

Задача 11. Маркетингові дослідження показали, що ймовірність настання нещасного випадку, в результаті якого туристу буде виплачено страхову суму, дорівнює 0,015. Страхова компанія за сезон підписала з туристами 100 страхових полісів. Якщо серед застрахованих туристів виявиться більше трьох страхових випадків, то компанія матиме збиток. Визначити ймовірність того, що підписані угоди принесуть компанії прибуток.

Розв'язання. Маємо схему НПВ. Нехай подія A полягає у тому, що навімання обраний турист отримає страхову суму. За умовою задачі

$$n = 100, \quad p = p(A) = 0,015.$$

Подія B – компанія отримає прибуток із угод, що були підписані, тобто кількість нещасних випадків буде дорівнювати

$$m_1 = 0, \text{ або } m_2 = 1, \text{ або } m_3 = 2: \quad P(B) = P_{0,100} + P_{1,100} + P_{2,100}.$$

Для наближеного знаходження ймовірностей $P_{0,100}, P_{1,100}, P_{2,100}$ скористуємось формулою Пуассона:

$$P_{m,n} \approx \frac{(n \cdot p)^m}{m!} \cdot e^{-np}, \quad P_{0,100} \approx \frac{(1,5)^0}{0!} \cdot e^{-1,5} = e^{-1,5} = 0,2231;$$

$$P_{1,100} \approx \frac{(1,5)^1}{1!} \cdot e^{-1,5} = 1,5 \cdot e^{-1,5} = 0,33465,$$

$$P_{2,100} \approx \frac{(1,5)^2}{2!} \cdot e^{-1,5} = 1,125 \cdot e^{-1,5} \approx 0,251.$$

Ймовірність отримання прибутку страховою компанією

$$P(B) = 0,2231 + 0,33465 + 0,251 = 0,80875.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Із статистичних даних туристичної фірми відомо, що 30 % відпочиваючих обирають чотирьохзіркові готелі. Знайти ймовірність того, що із 8 осіб, які звернулись у турфірму: а) двоє оберуть чотирьохзіркові готелі; б) троє оберуть чотирьохзіркові готелі; в) жоден турист не обере чотирьохзірковий готель.

Відповідь: а) 0,296; б) 0,254; в) 0,058.

2. Гральний кубик кидають 5 разів. Знайти ймовірність того, що 6 очок випадуть: а) один раз; б) жодного разу; в) два рази.

Відповідь: а) 0,4; б) 0,4; в) 0,16.

3. Згідно з метеорологічним спостереженням на деякому курорті у червні 6 днів йдуть дощі. Турист приїхав на відпочинок, що триває 16 червневих днів. Знайти найімовірнішу кількість дощових днів протягом відпочинку та ймовірність цієї кількості дощових днів.

Відповідь: 3; 0,25.

4. У камері зберігання 80 % усього багажу – це валізки, які впереміжку з іншими речами зберігаються на стелажах. Через вікно були отримані всі 50 речей з одного із стелажів. Знайти ймовірність того, що серед виданих речей було 38 валізок.

Відповідь: 0,11.

5. У деякій місцевості в середньому на кожні 100 вирощених кавунів трапляється один вагою не менше за 10 кг. Знайти ймовірність того, що в партії з 400 кавунів з цієї місцевості буде: а) рівно три кавуни вагою не менше ніж 10кг кожний; б) не менше від двох таких кавунів.

Відповідь: а) 0,195; б) 0,969.

6. Серед продукції електролампового заводу браковані вироби становлять в середньому 2 %. Знайти найімовірнішу кількість бракованих серед 100 електроламп, що придбали для готелю та ймовірність цієї найімовірнішої кількості електроламп.

Відповідь: 2; 0,2706.

7. За статистикою у 60 % готелів, розташованих на курорті є вільні місця. Скільки готелів потрібно перевірити, щоб найімовірніша кількість таких, у яких є вільні місця, дорівнювала 5?

Відповідь: 8 або 9.

8. Дайвінг-клуб обслуговує мешканців готелю. З досвіду працівників дайвінг-клубу відомо, що 20 % туристів, відпочиваючих у готелі, користується їх послугами. Скільки туристів повинно мешкати у готелі, щоб найімовірніша кількість клієнтів дайвінг-клубу дорівнювала 50 осіб?

Відповідь: 124 або 125 або 126.

4.2. Рівномірний розподіл

Означення. Незалежна величина X називається **рівномірно розподіленою на проміжку $[a; b]$** , якщо її щільність розподілу імовірностей є сталою на цьому проміжку, а поза цим проміжком дорівнює нулю, тобто

$$\varphi(x) = \begin{cases} c & , \quad x \in [a; b] \\ 0 & , \quad x \notin [a; b] \end{cases}$$

Знайдемо значення сталої c , скориставшись властивістю диференційовної функції (умовою нормування):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^a 0 \cdot dx + \int_a^b c \cdot dx + \int_b^{+\infty} 0 \cdot dx = 1, \quad c(b-a) = 1. \quad \text{Звідси } c = \frac{1}{b-a}.$$

Таким чином, щільність рівномірно розподіленої величини має вигляд:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \quad x \in [a; b] \\ 0 & , \quad x \notin [a; b] \end{cases}$$

Функція розподілу рівномірно розподіленої величини X :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & , \quad a \leq x \leq b \\ 1 & , \quad x > b \end{cases}$$

Числові характеристики рівномірно розподіленої випадкової величини X визначаються формулами:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Задача 12. У туристичній групі із Одеси 30 % студентів, у туристичній групі із Києва 20 % студентів. На екскурсії у печеру

випадковим чином одному із туристів кожної групи дали ліхтар. Скласти інтегральну функцію розподілу випадкової величини X – кількість студентів, що несуть ліхтар та побудувати її графік.

Розв'язання. Зрозуміло, що випадкова величина X є дискретною і набуває значень 0 або 1 або 2. Нехай подія A_1 полягає в тому, що ліхтар отримав студент із Одеси, A_2 ліхтар отримав студент із Києва. Події A_1 і A_2 незалежні, $P(A_1) = 0,3$; $P(A_2) = 0,2$.

Знаходимо ймовірність того, що випадкова величина X набуває конкретного значення:

$$P(X = 0) = P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56;$$

$$P(X = 1) = P(A_1 \cdot \bar{A}_2 + \bar{A}_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1)P(A_2) = 0,3 \cdot 0,8 + 0,7 \cdot 0,2 = 0,38;$$

$$P(X = 2) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,3 \cdot 0,2 = 0,06.$$

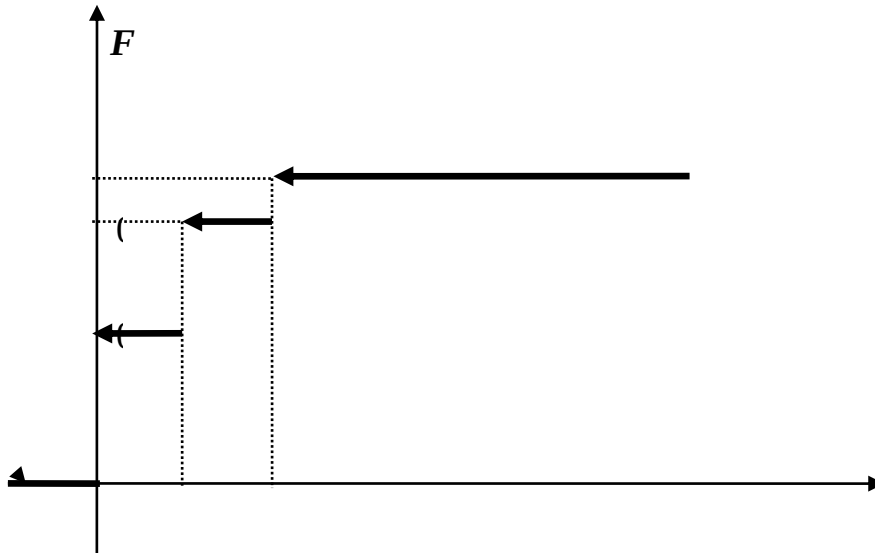
Результати обчислень заносимо у таблицю, отримуємо закон розподілу дискретної випадкової величини X :

X	0	1	2
P	0,56	0,38	0,06

Згідно з означенням інтегральної функції розподілу, вона набуває вигляду

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 0, \\ 0,56, & \text{якщо } 0 < x \leq 1, \\ 0,94, & \text{якщо } 1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

Будуємо графік функції $F(x)$



Мал. 1

Задача 13. Випадкова величина X – прибуток туристичної агенції (тис. грн.) задано функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^2, & \text{якщо } 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Необхідно: 1) Побудувати графік функції $F(x)$.

2) Знайти ймовірність одержання прибутку у проміжках $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$; $(0,5; 5)$ тис. грн.

3) Знайти щільність розподілу ймовірностей та побудувати її графік.

4) Знайти середній прибуток агенції та дисперсію прибутку.

Розв'язання. 1) На проміжку $(-\infty; 0]$ $F(x) = 0$, тому на цьому проміжку її графік співпадає з віссю абсцис; на проміжку $(0; 1]$ графік $F(x)$ є частиною параболи $F(x) = x^2$. У точці $x=0$ функція $F(x)$ неперервна і тому її графік переходить уздовж осі Ox на вказану ділянку параболи. Далі, на проміжку $(1; +\infty)$ графіком $F(x)$ є промінь, який виходить з точки з координатами $(1; 1)$ і прямує паралельно осі абсцис. У точці $x=1$ функція $F(x)$ неперервна і тому в цій точці вищевказана ділянка параболи стикується з променем (мал. 1). Функція розподілу $F(x)$ для даної випадкової величини неперервна і тому

ймовірність того, що випадкова величина набуде значення з проміжка $(a; b)$ обчислюється за формулою:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

$$P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}\right) = F\left(\frac{2}{3}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3},$$

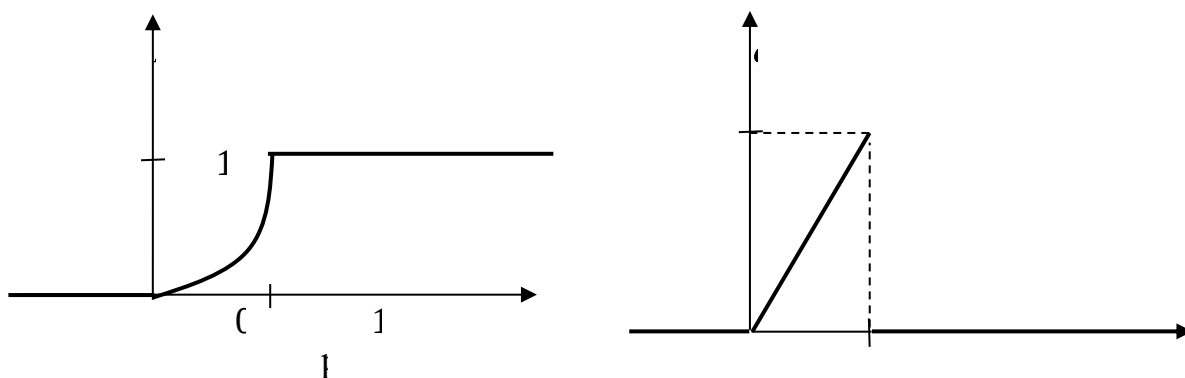
$$P\left(\frac{1}{2} < X < 5\right) = F(5) - F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Отже, ймовірність одержання туристичною агенцією прибутку від $\frac{1}{3}$ до $\frac{2}{3}$ тис. грн. дорівнює $\frac{1}{3}$, ймовірність одержання прибутку від 0,5 до 5 тис. грн. дорівнює 0,75.

3) Щільність розподілу ймовірностей має вигляд:

$$\varphi(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 2x, \text{ якщо} & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Побудуємо графік цієї функції. На проміжках $(-\infty; 0]$ та $(1; +\infty)$ щільність розподілу ймовірностей дорівнює нулю, і тому на кожному з цих проміжків графік функції $\varphi(x)$ співпадає з віссю абсцис. На проміжку $(0; 1]$ щільність розподілу ймовірностей лінійна, і її графіком є відрізок прямої, причому $\lim_{x \rightarrow 0+0} \varphi(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1-0} \varphi(x) = 2$. Графік щільності розподілу ймовірностей випадкової величини X зображений на рис. 2.



Мал. 2

1) Середній прибуток та дисперсію прибутку агенції знаходимо як математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^0 x \cdot 0dx + \int_0^1 x \cdot 2xdx + \int_1^{\infty} x \cdot 0dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi(x)dx - M^2(X) = \int_0^1 x^2 \cdot 2xdx - \frac{4}{9} = 2 \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 - \frac{4}{9} = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

Завдання для самостійної роботи

1. Гральний кубик кидають 2 рази. Скласти інтегральну функцію розподілу випадкової величини X – кількості появ „1” та побудувати її графік.

$$\text{Відповідь: } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{25}{36}, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{35}{36}, & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

2. У Діснейленді працює атракціон, у якому для виграшу потрібно влучати в мішень. Батько, мати та син зробили по одному пострілу. Знайти інтегральну функцію розподілу випадкової величини X – кількості влучань в мішень родиною, якщо батько влучає з ймовірністю 0,7, мати – з ймовірністю 0,5, син – з ймовірністю 0,6. Побудувати графік інтегральної функції розподілу.

$$\text{Відповідь: } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0,06, & 0 < x \leq 1 \\ 0,79, & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

3. Зі скриньки, в якій 4 сині і 1 біла кульки, навмання виймають по одній кульці, не повертаючи їх назад у скриньку. Знайти закон розподілу і побудувати графік функції розподілу випадкової величини X – найменшої кількості вийнятих кульок, серед яких буде біла.

Відповідь:

X	1	2	3	4
P	0,25	0,25	0,25	0,25

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 0,25, & 1 < x \leq 2 \\ 0,5, & 2 < x \leq 3 \\ 0,75, & 3 < x \leq 4 \\ 1, & x > 4. \end{cases};$$

4. У скриньці 5 однакових виробів, причому 3 з них пофарбовані. Зі скриньки навмання виймають 2 вироби. Записати закон розподілу випадкової величини X – кількості пофарбованих виробів серед відібраних. Знайти функцію розподілу $F(x)$ та побудувати її графік.

Відповідь: $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0,1, & 0 < x \leq 1 \\ 0,7, & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2. \end{cases}$

5. Випадкова величина X задана функцією розподілу. Необхідно:

- 1) Побудувати її графік;
- 2) Знайти ймовірність того, що випадкова величина набуває значення у проміжку $(\alpha; \beta)$;
- 3) Знайти диференціальну функцію розподілу і побудувати її графік;
- 4) Знайти числові характеристики випадкової величини X .

а) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 5, \\ \frac{x-5}{2}, & 5 < x \leq 7, \\ 1, & x > 7. \end{cases} \quad (-2;6); (5,5;6,5); (5,2;10).$

б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \ln x, & 1 < x \leq e, \\ 1, & x > e. \end{cases} \quad (0,5;\sqrt{e}); (\sqrt[5]{e};\sqrt[3]{e}); (\sqrt[4]{e};3).$

в) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-2x}, & x \geq 0. \end{cases} \quad (-1;1); (1;1,5); (0;2).$

$$\text{Відповідь: а) 2) } 0,5; \quad 0,5; \quad 0,9; \quad 3) f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 5, \\ \frac{1}{2}, & 5 < x \leq 7, \\ 0, & x > 7. \end{cases} \quad 4) 6; \quad \frac{1}{3}$$

$$\text{б) } 2) \quad 0,5; \quad \frac{2}{15}; \quad 0,75; \quad 3) f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & 1 < x \leq e, \\ 0, & x > e. \end{cases} \quad 4) \frac{e^2 + 1}{4};$$

$$\frac{32e^3 - 9e^4 - 18e^2 + 7}{144}. \text{ в) } 2) 0,8647; \quad 0,0856; \quad 0,9817; \quad 3) f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2e^{-2x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

; 4) $\frac{1}{2}; \quad \frac{1}{4}$.

4.3. Показниковий розподіл

Означення. Випадкову величину X будемо називати розподіленою за **показниковому (експоненціальному) закону з параметром $\lambda > 0$** , якщо її густина розподілу має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Неважко переконатись, що інтегральна функція розподілу для незалежної випадкової величини X , розподіленої за показниковим розподілом, має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Числові характеристики для незалежної випадкової величини X , розподіленої за показниковим розподілом, визначаються формулами:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Зауважимо, що показниковий розподіл широко застосовується в теорії надійності та в системах масового обслуговування тощо. Зокрема, тільки цьому закону підкоряється час між появою двох послідовних подій у найпростішій течії подій.

4.4. Нормальний розподіл

Випадкову величину X будемо називати розподіленою за нормальним законом з параметрами m і σ ($\sigma > 0$), якщо її густина розподілу має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Для нормального розподілу

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функція Лапласа.

Означення. Будемо говорити, що незалежна випадкова величина X *розподілена за нормальним законом* з параметрами a та $\sigma > 0$, якщо її щільність розподілу імовірностей має вигляд:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Скористувавшись означеннями, неважко переконатись, що числові характеристики нормально розподіленої ВВ дорівнюють:

$$M(X) = a, \quad D(X) = \sigma^2, \quad \sigma(X) = \sigma.$$

4.5. Властивості диференціальної функції $\varphi(x)$ нормально розподіленої випадкової величини

1. Функція визначена і неперервна на всій числовій осі.
2. Функція набуває лише додатних значень.
3. Графік симетричний відносно прямої $x = a$.
4. Точкою максимуму є $x_0 = a$, причому

$$\varphi_{\max}(x) = \varphi(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

5. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi(x) = 0$, тобто вісь абсцис є асимптотою графіка функції.

Знайдемо вигляд інтегральної функції розподілу. За властивостями (співвідношення між функціями розподілу):

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Зробимо заміну змінних, поклавши

$$\frac{x-a}{\sigma} = z, \quad x = a + \sigma z, \quad dx = \sigma dz :$$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(x-a)/\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 e^{-z^2/2} dz + \int_0^{(x-a)/\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right)$$

Враховуючи інтеграл Пуассона $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}$ та використавши

інтегральну функцію Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, остаточно дістаємо:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

При дослідженні інтегральної функції $F(x)$ враховані наступні властивості інтегральної функції Лапласа $\Phi(x)$:

- 1) функція визначена та неперервна на всій числовій осі;
- 2) $\Phi(0) = 0$;
- 3) функція непарна ($\Phi(-x) = -\Phi(x)$), тому її графік симетричний відносно початку координат;
- 4) функція монотонно зростає, причому
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = -1/2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1/2$.

Зазначимо, що значення функції Лапласа табульовані при $x \in [0;5]$, а при $x > 5$ $\Phi(x) \approx 1/2$.

4.6. Властивості нормального розподілу.

1. Імовірність попадання значень нормально розподіленої ВВ X до проміжку $[x_1; x_2]$ знаходиться за формулою:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right). \quad (16)$$

Імовірність того, що модуль відхилення нормально розподіленої ВВ X від свого математичного сподівання не перевищить величину $\varepsilon > 0$, дорівнює

$$P(|X - a| \leq \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \quad (17)$$

2. Правило трьох сигм. Із практичною достовірністю (з імовірністю 0,9973) можна стверджувати, що значення нормально розподіленої ВВ X попадають до проміжка $[a - 3\sigma; a + 3\sigma]$.

Розглянуті властивості дозволяють виділити три характерних особливості нормально розподіленої ВВ X :

а) найчастіше у розподілі зустрічаються значення ВВ, близькі до середнього;

б) значення ВВ, рівновіддалені від середнього, зустрічаються у розподілі однаково часто;

в) по мірі віддалення значень ВВ від центру розподілу вони зустрічаються все рідше та рідше.

***Зауваження.** Часто при розгляді нормального закону використовують так звану подвоєну інтегральну функцію Лапласа*

$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Тому інтегральна функція нормального розподілу

виражатиметься через подвоєну функцію Лапласа наступним чином:

$F(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) \right)$, а формули (16) та (17) набувають вигляду:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \frac{1}{2} \left(\Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right) \right); \quad (18)$$

$$P(|X - a| \leq \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \quad (19)$$

Задача 14. Щоденна кількість туристів, що відвідують музей є нормально розподіленою випадковою величиною X з математичним сподіванням $a = 20$ (сотень туристів) і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 5$ (сотень туристів). Необхідно:

1) записати функцію розподілу і щільність розподілу ймовірностей випадкової величини x і зобразити їх графіки.

2) знайти ймовірність того, що у деякий день музей відвідають від 1500 до 3000 туристів;

3) знайти ймовірність того, що у деякий день кількість відвідувачів музею відхилиться від свого математичного сподівання не більше, ніж на 100 осіб у ту чи іншу сторону;

4) знайти абсолютну величину відхилення кількості відвідувачів музею від свого математичного сподівання, яку необхідно гарантувати з ймовірністю $P_0 = 0,9786$, і довірчий інтервал для кількості відвідувачів музею з вказаною ймовірністю P_0 ;

5) знайти проміжок, у якому, згідно з правилом „трьох сігм”, практично вирогідно знаходиться щоденна кількість відвідувачів музею.

Розв’язання. 1) Для нормально розподіленої випадкової величини щільність розподілу ймовірностей має вигляд:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

де a – математичне сподівання, σ – середнє квадратичне відхилення; функція розподілу:

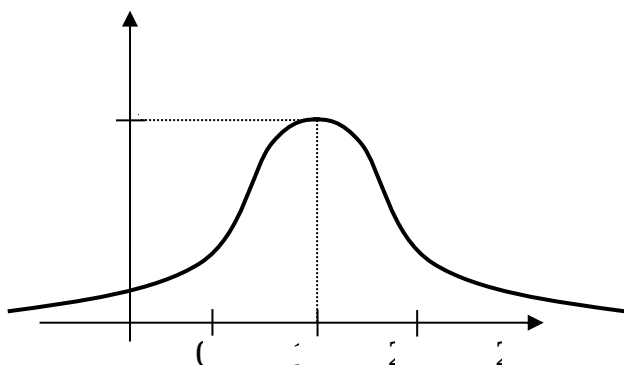
$$F(x) = \frac{1}{2} (1 + \Phi(\frac{x-a}{\sigma})),$$

$$\text{де } \Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2/2} dx -$$

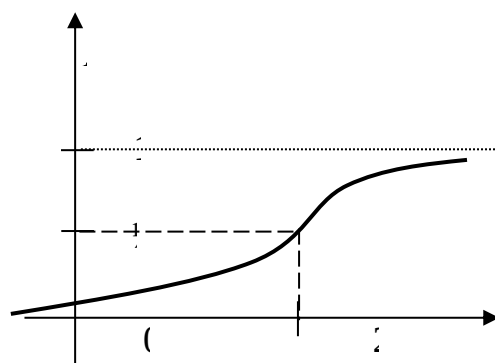
функція Лапласа, значення якої наведено у Додатку 3. У нашому випадку $a = 20$, $\sigma = 5$, тому функція розподілу і щільність розподілу відповідно мають вигляд:

$$\varphi(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-20)^2}{50}}, \quad F(x) = \frac{1}{2} (1 + \Phi(\frac{x-20}{5})).$$

Графіки $F(x)$, $\varphi(x)$ зображені нижче



55



2) Ймовірність знаходження значень нормально розподіленої випадкової величини X на заданому проміжку $[x_1; x_2]$ обчислюється за формулою:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \frac{1}{2}[\Phi(t_2) - \Phi(t_1)], \text{ де } t_1 = (x_1 - a)/\sigma, t_2 = (x_2 - a)/\sigma.$$

За умовою задачі

$$x_1 = 15, x_2 = 30, a = 20, \sigma = 5.$$

Підставляючи числові значення, отримаємо

$$t_1 = (15 - 20)/5 = -1, t_2 = (30 - 20)/5 = 2.$$

$$P(15 \leq X \leq 30) = \frac{1}{2}[\Phi(2) - \Phi(-1)] = \frac{1}{2}[\Phi(2) + \Phi(1)] = \frac{0,9545 + 0,6827}{2} = 0,8186.$$

При обчисленні була врахована непарність функції Лапласа

$$\Phi(-t) = -\Phi(t).$$

Отже, з ймовірністю 0,8186 можна стверджувати, що у деякий день музей відвідають від 1500 до 3000 туристів.

3) Ймовірність того, що абсолютна величина відхилення нормально розподіленої випадкової величини X від її математичного сподівання не перевищить додатнього числа ε , обчислюється за формулою:

$$P(|X - a| \leq \varepsilon) = \Phi(\varepsilon / \sigma).$$

Підставляючи у формулу задані числові значення, отримаємо

$$P_2 = P(|X - 20| \leq 1) = \Phi(1/5) = \Phi(0,2) = 0,1585.$$

Отже, з ймовірністю 0,1585 можна стверджувати, що у деякий день кількість відвідувачів музею відхилиться від свого математичного сподівання не більше, ніж на 100 осіб у ту чи іншу сторону.

4) З формули

$$P(|X - a| \leq \varepsilon) = \Phi(\varepsilon / \sigma) \text{ випливає, що } P_0 = \Phi(\varepsilon_0 / \sigma) = 0,9786.$$

З таблиці значень функції $\Phi(t)$ знаходимо, що $\Phi(t) = 0,9786$ для $t = 2,3$. Звідси $\varepsilon_0 / \sigma = 2,3$; $\varepsilon_0 = 2,3 \cdot 5 = 11,5$. Довірчий інтервал значень

випадкової величини X з вказаною ймовірністю P_0 має вигляд: $[a - \varepsilon_0; a + \varepsilon_0]$.

Підставляючи в цю формулу $a = 20, \varepsilon_0 = 11,5$, отримаємо $[20 - 11,5; 20 + 11,5] = [8,5; 31,5]$.

Отже, з ймовірністю 0,9786 можна стверджувати, що у деякий день музей відвідають від 850 до 3150 туристів.

5) Згідно з правилом „трьох сігм” практично вирогідно, що всі значення випадкової величини X знаходяться у проміжку $[a - 3\sigma; a + 3\sigma]$.

У нашому випадку проміжок має вигляд $[20 - 3 \cdot 5; 20 + 3 \cdot 5] = [5; 35]$

Отже, практично вирогідно можна стверджувати, що у деякий день музей відвідають від 500 до 3500 туристів.

Завдання для самостійної роботи

1. До ресторану надійшов цукор-пісок у мішках. Маса мішка цукру – нормально розподілена випадкова величина з параметрами: $a = 50$ кг, $\sigma = 0,2$ кг. Необхідно:

а) Записати диференціальну та інтегральну функції розподілу і побудувати їх графіки;

б) Знайти ймовірність того, що маса будь-якого мішка знаходиться у межах від 49,5 кг до 50,3 кг;

в) Знайти ймовірність того, що маса будь-якого мішка відхиляється від 50 кг не більше, ніж на 0,25 кг в ту чи іншу сторону;

г) Знайти абсолютну величину відхилення маси цукру від середньої маси 50 кг, яку необхідно гарантувати з ймовірністю 0,9545 та довірчий інтервал для маси цукру з ймовірністю 0,9545.

Відповідь: а) $\varphi(x) = \frac{1}{0,2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-50)^2}{0,08}}$; $F(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \Phi \left(\frac{x-50}{0,2} \right) \right)$;

б) 0,927; в) 0,7887; г) 0,4; (49,6; 50,4).

2. Результати іспиту студентів за 100-бальною шкалою оцінювання – нормально розподілена випадкова величина з

параметрами: $a=70$ балів та $\sigma=10$ балів. Необхідно: а) Записати диференціальну та інтегральну функції розподілу і побудувати їх графіки;

б) Знайти ймовірність того, що випадковим чином вибраний студент отримає менше 50 балів;

в) Знайти ймовірність того, що оцінка випадковим чином обраного студента відрізняється від середньої оцінки у 70 балів не більше, ніж на 20 балів;

г) Знайти абсолютну величину відхилення оцінки студентів від середньої оцінки у 70 балів, яку необхідно гарантувати з ймовірністю 0,7887 та довірчий інтервал для оцінки з ймовірністю 0,7887.

Відповідь: а) $\varphi(x) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-50)^2}{200}}$; $F(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \Phi\left(\frac{x-50}{10}\right) \right)$;

б) 0,0455; в) 0,9545; г) 12,5; (57,5; 82,5).

3. Маса пакетів молока, що завозяться у ресторан готелю є нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами: $a=1000$ г та $\sigma=5$ г. Необхідно: а) Записати диференціальну та інтегральну функції розподілу і побудувати їх графіки;

б) Знайти ймовірність того, що маса навмання взятого пакету складає від 988 до 1007 г;

в) Знайти ймовірність того, що маса навмання взятого пакету відрізняється від 1 кг не більше ніж на 10 г;

г) Межі, в яких, згідно з правилом „ 3σ ” знаходиться маса будь-якого пакету молока.

Відповідь: а) $\varphi(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1000)^2}{50}}$; $F(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \Phi\left(\frac{x-1000}{5}\right) \right)$;

б) 0,91105; в) 0,9545; г) (985; 1015).

4.7. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

Якщо проводиться n незалежних повторних випробувань, в кожному з яких подія A з'явиться з ймовірністю p , то справедлива

формула:

$$P(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \frac{1}{2} \cdot [\Phi(t_2) - \Phi(t_1)],$$

де m – частота появи події A в n випробуваннях і

$$t_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad t_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Окремі випадки інтегральної теореми Муавра-Лапласа:

$$P(|m - np| < \varepsilon) \approx \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right); \quad P(|m - np| < \varepsilon) \approx \Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Задача 15. На фабриці виготовляють сувеніри. П'ять робітниць розфарбовують однакові за формою і розмірами сувеніри. Дві з них розфарбовують сувеніри в червоний колір і три – в зелений. Продуктивність праці робітниць однакова. Розфарбовані сувеніри виявились перемішаними. Визначити ймовірність того, що серед 600 сувенірів, відібраних випадковим чином для продажу у крамниці, червоних виявиться від 228 до 264 шт.

Розв'язання. Позначимо: подія A – відібраний сувенір має червоний колір. За умовою задачі

$$p = P(A) = 2/5, \quad q = 3/5, \quad n = 600, \quad m_1 = 228, \quad m_2 = 264.$$

За формулою інтегральної теореми Муавра – Лапласа отримаємо:

$$\begin{aligned} P(228 \leq m \leq 264) &\approx \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{264 - 240}{12}\right) - \Phi\left(\frac{228 - 240}{12}\right) \right] = \\ &= \frac{\Phi(2) - \Phi(-1)}{2} = \frac{\Phi(2) + \Phi(1)}{2} = \frac{0,9545 + 0,6827}{2} = 0,8186. \end{aligned}$$

Задача 16. Ймовірність виходу з ладу холодильника протягом гарантійного терміну дорівнює 0,1. За рік готелями, санаторіями, будинками відпочинку та іншими туристичними закладами, що розташовані на південному узбережжі Криму, придбано 900 холодильників. Визначити ймовірність того, що число холодильників, які вийшли з ладу протягом гарантійного терміну, буде відрізнятися від найбільш імовірного числа холодильників, які зламались протягом гарантійного терміну, за абсолютною величиною не більше ніж на 18 шт.

Розв'язання. Будемо вважати найбільш імовірне число настання події A – вихід з ладу холодильника протягом гарантійного строку,

рівним математичному сподіванню числа появи цієї події, яке дорівнює np . Скористуємось частинним випадком інтегральної теореми Муавра-Лапласа

$$P(|m - np| \leq t\sqrt{npq}) \approx \Phi(t), \text{ або } P(|m - np| \leq \varepsilon) \approx \Phi(\varepsilon/\sqrt{npq}).$$

За умовою задачі $\varepsilon = 18$, $n = 900$, $p = 0,1$, $q = 0,9$.

Тоді $P(|m - 90| \leq 18) \approx \Phi(18/9) = \Phi(2) = 0,9545$.

Задача 17. На західній Україні побудовано завод, що виготовляє лижі для гірськолижного спорту. При налагодженому технологічному процесі ймовірність виготовлення бракованої пари лиж дорівнює 0,015. Визначити ймовірність того, що частка бракованих лиж серед виготовлених 1000 пар буде відрізнятися від ймовірності виготовлення такої пари не більше ніж на 0,005 в ту чи іншу сторону.

Розв'язання. Позначимо: подія A – виготовлена пара лиж бракована. За умовою задачі $p = P(A) = 0,015$; $q = 0,985$; $n = 1000$; $\varepsilon = 0,005$.

Для визначення шуканої ймовірності застосуємо частинний випадок інтегральної теореми Муавра – Лапласа

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx \Phi(t), \text{ де } t = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \text{ Отримаємо}$$

$$t = 0,005 \cdot \sqrt{\frac{1000}{0,015 \cdot 0,985}} \approx 1,31; \quad P\left(\left|\frac{m}{1000} - 0,015\right| \leq 0,005\right) \approx \Phi(1,31) = 0,8098.$$

Завдання для самостійної роботи

1. За статистичними даними у середньому 65% мешканців санаторію відвідують кімнату для спортивних занять. У санаторії мешкають 400 осіб. Знайти ймовірність того, що кімнату для занять спортом відвідають: а) від 255 до 270 осіб; б) не більше, ніж 240 осіб.

Відповідь: а) 0,5516; б) 0,179.

2. Із досвіду туристичної компанії відомо, що 3 % відпочиваючих на гірськолижному курорті отримують травми. Знайти ймовірність того, що із 100 клієнтів туристичної компанії травму отримають: а) не менше трьох осіб; б) від двох до п'яти осіб.

Відповідь: а) 0,5; б) 0,6034.

3. 100 верстатів однакової потужності працюють незалежно один від одного в однаковому режимі. Кожен верстат працює протягом 0,8 всього робочого часу. Яка ймовірність того, що в довільно взятий момент часу працюватимуть від 70 до 86 верстатів ?

Відповідь: 0,927.

4. Електростанція обслуговує мережу з 10000 ламп, ймовірність включення кожної з них 0,6. Визначити ймовірність одночасного включення від 5900 до 6100 ламп.

Відповідь: 0,9624.

5. Гральний кубик кидають 800 разів. Яка ймовірність того, що кількість очок, кратна трьом, з'явиться не менше 260 та не більше 274 разів ?

Відповідь: 0,4.

6. Для проведення благодійної акції випустили велику кількість лотерейних білетів, серед яких 25 % виграшних. Фірма придбала для своїх робітників 1000 лотерейних білетів. Знайти ймовірність того, що серед придбаних фірмою білетів відносна частота (частка) виграшних відхиляється від ймовірності випуску виграшного білета не більше, ніж на 0,03 за абсолютною величиною.

Відповідь: 0,9714.

7. Верстат-автомат виготовляє стандартний виріб з ймовірністю 0,9. Із продукції верстату складають партію виробів. Скільки виробів повинен виготовити верстат, щоб із ймовірністю 0,9973 можна було стверджувати, що відхилення відносної частоти появи нестандартного виробу від ймовірності буде менше ніж 0,03? Визначити також можливу кількість нестандартних виробів, що містить ця партія.

Відповідь: $n = 400, \quad 63 \leq m \leq 117$.

8. Відділ технічного контролю перевіряє стандартність 900 виробів. Ймовірність того, що виріб стандартний, дорівнює 0,9. Знайти з ймовірністю 0,9544 межі інтервалу, що містить число стандартних виробів серед перевірених.

Відповідь: $792 \leq m \leq 828$.

9. 50 % сувенірів, виготовлених на фабриці, першого сорту. Знайти кількість сувенірів, при якій з ймовірністю 0,7699 можливо стверджувати, що кількість першосортних серед них відхиляється від середньої кількості сувенірів першого сорту не більше, ніж на 20 в ту чи іншу сторону.

Відповідь: 1600.

4.8. Закон великих чисел

Під законом великих чисел у теорії ймовірностей розуміється декілька теорем, які встановлюють відповідність між теоретичними та дослідними характеристиками випадкових подій при великій їх кількості. До них, зокрема, належать нерівність Маркова, нерівність Чебишова, теорема Чебишова, теорема Бернуллі, теорема Пуассона, теорема Ляпунова та інші.

Закон великих чисел відіграє важливу роль у різних масових процесах: страхуванні, енергопостачанні, комунікаційних мережах тощо.

Нерівність Маркова. Якщо X – випадкова величина, що приймає лише додатні значення і має скінченне математичне сподівання, $\alpha > 0$ – стала, то

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{M(X)}{\alpha}.$$

Наслідок. Якщо X – випадкова величина, що приймає лише додатні значення і має скінченне математичне сподівання, $\alpha > 0$ – стала, то

$$P(X < \alpha) > 1 - \frac{M(X)}{\alpha}.$$

Нерівність Чебишова. Якщо X – випадкова величина, що має скінченне математичне сподівання та дисперсію, $\varepsilon > 0$ – стала, то має місце нерівність

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Наслідок. Якщо X – випадкова величина, що має скінченне математичне сподівання та дисперсію, $\varepsilon > 0$ – стала, то має місце нерівність

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) > 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Наслідки нерівності Чебишова для частоти та частки появи події A при незалежних повторних випробуваннях:

$$P(|m - np| \geq \varepsilon) \leq \frac{npq}{\varepsilon^2}; \quad P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{pq}{n\varepsilon^2};$$

$$P(|m - np| < \varepsilon) > 1 - \frac{npq}{\varepsilon^2}; \quad P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Задача 18. У гірській ущелині розташовано базу відпочинку. Середня швидкість вітру в ущелині 25 km/г . Оцінити ймовірність того, що в певний день швидкість вітру в ущелині буде меншою, ніж 50 km/г

Розв’язання. Скористаємось наслідком із нерівності Маркова, в якому примаємо $M(X) = 25, \varepsilon = 50$. Отримаємо: $P(X < 50) > 1 - \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$. Отже, з ймовірністю, більшою, ніж $0,5$ можна стверджувати, що в певний день швидкість вітру в ущелині буде меншою, ніж 50 km/г .

Задача 19. Автогосподарство обслуговує туристичні групи. Середня кількість автобусів, що потребують капітального ремонту протягом року, дорівнює 8 , а дисперсія 9 . Оцінити ймовірність того, що у деякому році капітального ремонту потребують більше 2 і менше 14 автобусів.

Розв’язання. Розглянемо випадкову величину X – кількість автобусів, що потребують капітального ремонту протягом року. За умовою задачі $M(X) = 8; D(X) = 9$. Враховуємо, що $P(2 < X < 14) = P(|X - 8| < 6)$ і скористаємось наслідком із нерівності Чебишова. Отримуємо $P(2 < X < 14) = P(|X - 8| < 6) > 1 - \frac{9}{6^2} = 0,75$. Отже, з ймовірністю, більшою, ніж $0,5$ можна стверджувати, що у деякому році капітального ремонту потребують більше 2 і менше 14 автобусів.

Задача 20. Ймовірність справної роботи електролампи протягом року дорівнює 0,8. Для готелю придбали 400 штук. Оцінити ймовірність того, що відхилення частки справних електроламп серед придбаних від ймовірності справної роботи лампи за абсолютним значенням буде меншим за 0,05.

Розв'язання. Позначимо: подія A – придбана електролампа справно працює. За умовою задачі $P(A) = p = 0,8; q = 0,2; n = 400; \varepsilon = 0,05$. Для визначення шуканої ймовірності застосуємо наслідок із нерівності

Чебишова $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$. Отримаємо

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0,8\right| < 0,05\right) > 1 - \frac{0,8 \cdot 0,2}{400 \cdot 0,05^2} = 0,84.$$

Можливо задачу розв'язати, застосувавши частинний випадок інтегральної теорема Муавра – Лапласа

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx \Phi(t), \text{ де } t = \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}. \text{ Отримаємо } t = 0,05 \sqrt{\frac{400}{0,8 \cdot 0,2}} = 2,5;$$

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0,8\right| \leq 0,05\right) > \Phi(2,5) = 0,9876.$$

У даному випадку застосування частинного випадку інтегральної теорема Муавра – Лапласа дає точніший результат.

Завдання для самостійної роботи

а. За даними метеорологічних спостережень на деякому курорті в середньому за рік 200 сонячних днів. Оцінити ймовірність того, що у наступному році на курорті буде не менше, ніж 250 сонячних днів.

Відповідь: $P \leq 0,8$.

2. Готель у зимовий період споживає для опалення щоденно в середньому 300 м^3 газу. Яку кількість газу можна сподіватися спожити за один день з ймовірністю більшою, ніж 0,99, якщо середнє квадратичне відхилення споживання газу становить 20 м^3 .

Відповідь: від 100 м^3 до 500 м^3 .

3. За даними водопостачальної організації на деякому курорті середні щоденні витрати води дорівнюють 10000 л, дисперсія витрат води складає 90000. Оцінити ймовірність того, що у певний день витрати води відхиляються від середніх витрат не менше, ніж на 500 л за абсолютною величиною.

Відповідь: $P \leq 0,36$.

4. Ймовірність випуску бракованої машини дорівнює 0,1. Оцінити ймовірність того, що з 1000 машин відхилення кількості бракованих машин від їх середньої кількості не перевищує 25 за абсолютною величиною.

Відповідь: $P > 0,856$; $P=0,9915$.

4.9. Вибірковий метод

Для розв'язання задач за цією темою необхідно згадати, що існує три типи задач. Перший – задача, яка визначає ймовірність того, що абсолютна помилка вибірки не перевищує данної межі помилки. Другий – задача, яка визначає межу помилки, та третій – задача, яка визначає обсяг вибірки. Усі задачі розв'язуються за допомогою таких формул:

для середньої (кількісна ознака) $P(|\tilde{x} - \bar{x}| \leq \Delta) = \Phi(t)$;

для частки (якісна ознака) $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \Delta\right) = \Phi(t)$,

де $\bar{x}$ – середня генеральна; $\tilde{x}$ – середня вибіркова;

p – частка ознаки, яка розглядається у генеральній сукупності;

$w = \frac{m}{n}$ – частка ознаки, яка розглядається у вибірці;

Δ – гранична похибка вибірки;

t – аргумент, який визначає шукану ймовірність;

$\Phi(t)$ – функція Лапласа, значення якої знаходяться за таблицею.

Значення Δ обчислюється за формулами для **середньої** за умови випадково-властивої повторної вибірки:

$$\Delta = t\mu, \quad \text{де} \quad \mu = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \sqrt{\frac{D(X)}{n}};$$

для **середньої**, за умови випадково-властивої безповторної вибірки:

$$\Delta = t\mu, \text{ де } \mu = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} = \sqrt{\frac{D(X)}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)};$$

для **частки**, за умови випадково-властивої повторної вибірки:

$$\Delta = t\mu, \text{ де } \mu = \sqrt{\frac{pq}{n}} \text{ або } \mu = \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}};$$

для **частки**, за умови випадково-властивої безповторної вибірки:

$$\Delta = t\mu, \text{ де } \mu = \sqrt{\frac{pq}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} \text{ або } \mu = \sqrt{\frac{w(1-w)}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)},$$

де $D(X) = \sigma^2$ – генеральна або вибіркова дисперсія;

n – обсяг вибіркової сукупності;

N – обсяг генеральної сукупності.

Задача 21. За даними статистики за сезон на гірськолижному курорті відпочили N туристів. Для оцінки середньої вартості путівки для відпочинку на гірськолижному курорті було проведене вибіркове опитування 50 туристів. Для вказаних результатів вибіркового опитування (див. нижченаведену таблицю) визначити:

1) середню вартість путівки та дисперсію вартості у вибірковій сукупності;

2) ймовірність того, що середня вартість путівки на курорті для всіх відпочиваючих відхилиться від середньої вартості путівки у вибірковій сукупності не більше ніж на Δ_0 тисяч грн;

3) границі, в яких з ймовірністю P_1 міститься середня вартість путівки усіх відпочиваючих на курорті;

4) яким повинен бути обсяг вибіркової сукупності, щоб з імовірністю, не меншою ніж P_2 , можна було стверджувати, що відхилення середньої вартості путівки при вибіркового опитуванні від середньої вартості путівки усіх відпочиваючих не перевищить Δ_1 (вважати, що дисперсія вартості путівки в наведеній вибірковій сукупності є оцінкою дисперсії вартості путівки усіх відпочиваючих).

5)

Вартість путівки у тисячах грн, X	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11
Кількість осіб, m	20	10	10	5	5

Дані для проведення розрахунків:

$$N = 1225; \Delta_0 = 0,25; \Delta_1 = 0,32; P_1 = 0,6827; P_2 = 0,9545.$$

Розв'язання. 1) Знайдемо характеристики вибіркової сукупності. Кожний інтервал ряду замінимо його середнім значенням. Одержимо дискретний варіаційний ряд:

X	2	4	6	8	10
m	20	10	10	5	5

Значення x_i рівновіддалені одне від одного. Для обчислення середнього значення та дисперсії ознаки X використаємо метод моментів. Розглянемо випадкову величину $U = (X - x_0)/h$, де $x_0 = 6$, $h = 2$.

Результати обчислень зручно записати у вигляді таблиці.

x_i	m_i	u_i	$u_i m_i$	$u_i^2 m_i$
2	20	-2	-10	80
4	10	-1	-10	10
6	10	0	0	0
8	5	1	5	5
10	5	2	10	20

Обсяг вибіркової сукупності

$$n = \sum m_i = 50.$$

				$\bar{u} = \frac{\sum u_i m_i}{n} = \frac{-35}{50} = -0,7;$ $\overline{u^2} = \frac{\sum u_i^2 m_i}{n} = \frac{115}{50} = 2,3;$ $D(U) = \overline{u^2} - (\bar{u})^2 = 2,3 - (-0,7)^2 = 1,81.$ Середня вартість путівки у вибірковій сукупності: $\tilde{x} = x_0 + h \cdot \tilde{u} = 6 + 2 \cdot (-0,7) = 4,6.$ Дисперсія вартості путівки у вибірковій сукупності: $D(X) = h^2 \cdot D(U) = 4 \cdot 1,81 = 7,24.$
Σ	50	-35	115	

2) Для досліджуваної сукупності відомо:

$$\tilde{x} = 4,6, \quad D(X) = \sigma^2 = 7,24, \quad n = 50; \quad N = 1225; \quad \Delta_0 = 0,25.$$

Треба знайти $P(|\tilde{x} - \bar{x}| \leq \Delta_0)$.

Враховуючи, що вибірка власно-випадкова безповторна, використаємо теорему Чебишова з уточненням Ляпунова:

$$P(|\tilde{x} - \bar{x}| \leq \Delta_0) \approx \Phi(t),$$

де $\Delta_0 = t \cdot \mu$, $\mu = \sqrt{\frac{D(X)}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}$, отримаємо:

$$\mu = \sqrt{\frac{7,24}{50} \left(1 - \frac{50}{1225}\right)} \approx 0,3727; \quad t = \frac{\Delta_0}{\mu} \approx \frac{0,25}{0,3727} \approx 0,67.$$

Із Додатка 1 (стр.113) знаходимо, що $\Phi(0,67) = 0,4971$. Таким чином, $P(|4,6 - \bar{x}| \leq 0,25) = 0,4971$.

З ймовірністю 0,4971 можна стверджувати, що середня вартість путівки усіх відпочиваючих на курорті $\bar{x}$ відхилиться від середньої вартості путівки у вибірковій сукупності $\tilde{x} = 4,6$ не більше ніж на 0,25 тисяч грн.

3) Знайдемо границі, в яких з ймовірністю $P_1 = 0,6827$ міститься середня вартість путівок усіх відпочиваючих на курорті:

$$|\tilde{x} - \bar{x}| \leq \Delta \Leftrightarrow \tilde{x} - \Delta \leq \bar{x} \leq \tilde{x} + \Delta \Leftrightarrow \bar{x} \in [\tilde{x} - \Delta, \tilde{x} + \Delta].$$

Оскільки $P_1 = \Phi(t) = 0,6827$, то з Додатка 3 знаходимо, що $\Phi(t) = 0,6827$, якщо $t = 1$. Тоді $\Delta = t\mu = 1 \cdot 0,3727 = 0,3727$.

Інтервал для $\bar{x}$: $4,6 - 0,3787 \leq \bar{x} \leq 4,6 + 0,3787$, $4,2273 \leq \bar{x} \leq 4,9787$.

Отже, з надійністю 0,6827 можна стверджувати, що середня вартість путівки усіх відпочиваючих на курорті буде знаходитись у проміжку від 4,2273 тисяч грн. до 4,9727 тисяч грн.

б) Обсяг вибіркової сукупності для безповторної вибірки визначається за формулою:

$$n_{БП} = (n_{П} \cdot N) / (n_{П} + N), \text{ де } n_{П} = (t^2 D(X)) / \Delta_1^2.$$

З умови задачі випливає, що

$$N = 1611; \Delta_1 = 0,41; D(X) = 2,1056; P_2 = \Phi(t) = 0,9545.$$

З додатка 3 знаходимо, що $\Phi(t) = 0,9545$, якщо $t = 2$. Враховуючи, що

$$D(X) = \sigma^2 = 7,24, \quad t = 2; \quad N = 1225; \quad \Delta_1 = 0,32,$$

за формулами для $n_{П}$ і $n_{БП}$ отримаємо $n_{БП} \approx 229,77$. Обчислене число $n_{БП}$ може бути дробовим. У цьому випадку $n_{БП}$ дорівнює найменшому цілому числу, яке задовольняє нерівності $n_{БП} \geq n_{П} \cdot N / (n_{П} + N)$.

Тому округляємо з надлишком: $n_{БП} = 230$.

Отже, для того щоб із ймовірністю, не меншою ніж 0,9545, можна було стверджувати, що відхилення середньої вартості путівки при вибіркового опитуванні від середньої вартості путівки усіх відпочиваючих не перевищить 0,32 тисяч грн, треба відібрати методом безповторної вибірки не менше 230 осіб.

Задача 22. За рік туристична агенція надала послуги 10000 клієнтам. Для перевірки якості обслуговування на різних курортах агенція провела опитування 1000 клієнтів. Серед них виявилось 10 %,

які незадоволені рівнем послуг, що надавались під час відпочинку.
Знайти:

1) ймовірність того, що частка незадоволених туристів, яким надала послуги агенція протягом року, відрізняється від вибіркової частки незадоволених туристів, не більше ніж на 0,02 (за абсолютною величиною);

2) межі, в яких з ймовірністю 0,9545 знаходиться частка незадоволених туристів, яким надала послуги агенція протягом року для безповторної вибірки;

Розв'язання.1) За умовою задачі

$$N = 10000; n = 1000; w = \frac{m}{n} = 10\% = 0,1; \quad \Delta = 0,02. \quad \text{Скористаємось}$$

формулою $\Delta = t\mu$, де

$$\mu = \sqrt{\frac{w(1-w)}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}. \text{ Отримаємо}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{0,1 \cdot 0,9}{1000} \left(1 - \frac{1000}{10000}\right)} \approx 0,009; \quad t = \frac{\Delta}{\mu} = \frac{0,02}{0,009} \approx 2,22.$$

Шукана ймовірність $P(|0,1 - p| \leq 0,02) = \Phi(2,22) = 0,9736$.

Отже, з ймовірністю 0,9736 можна стверджувати, що частка незадоволених туристів, яким надала послуги агенція протягом року, відрізняється від вибіркової частки незадоволених туристів, не більше, ніж на 0,02 (за абсолютною величиною).

2) З таблиці значень функції $\Phi(t)$ за відомою ймовірністю $P = \Phi(t) = 0,9545$ знаходимо $t = 2$. Гранична похибка вибірки $\Delta = t\mu = 2 \cdot 0,009 = 0,018$. Довірчий інтервал для генеральної частки $w - \Delta \leq p \leq w + \Delta$. У нашому випадку $0,1 - 0,018 \leq p \leq 0,1 + 0,018$; $0,082 \leq p \leq 0,118$. У відсотках $8,2\% \leq p \leq 11,8\%$.

Отже, з ймовірністю 0,9545 можна стверджувати, що частка незадоволених туристів, яким надала послуги агенція протягом року, знаходиться у межах від 8,2 % до 11,8 %.

Завдання для самостійної роботи

1. За статистичними даними на курорті за сезон відпочивають 10000 осіб. У результаті вибіркового опитування методом без повторної вибірки 100 відпочиваючих отримані наступні результати:

Тривалість відпочинку (діб, X)	6-10	10-14	14-18	18-22	22-26
Кількість відпочиваючих (осіб, m)	40	40	5	10	5

Знайти: а) середню тривалість відпочинку туриста і дисперсію тривалості відпочинку у вибірковій сукупності; б) ймовірність того, що середня тривалість відпочинку усіх туристів буде відрізнятись від середньої тривалості відпочинку у вибірці не більше, ніж на 2 дні в ту чи іншу сторону.

Відповідь: а) $\tilde{x} = 12$; $D(X) = 35,2$; б) 0,9992.

2. За рік із аеропорту здійснено 1000 рейсів. Для перевірки якості перевезень працівниками агенції з бронювання квитків шляхом безповторної вибірки перевірено 100 рейсів і отримано наступні результати:

Час затримки літака (годин, X)	0	1	2	3	4	5
Кількість рейсів (m)	50	20	15	5	5	5

Знайти: а) середній час затримки рейсу і дисперсію часу затримки у вибірковій сукупності; б) межі, в яких із ймовірністю 0,9907 знаходиться середній час затримки рейсів в аеропорту.

Відповідь: а) $\tilde{x} = 1,1$; $D(X) = 2,09$; б) $[0,74; 1,46]$.

3. За рік туристична агенція надала послуги 1000 клієнтам. За даними вибіркового опитування шляхом безповторної вибірки 100 клієнтів з'ясувалось, що 36 % респондентів основною причиною звернення до агенції назвали телерекламу. З ймовірністю 0,8904 знайти межі, в яких знаходиться відсоток клієнтів, що основною причиною звернення до агенції вважають телерекламу.

Відповідь: $[28,36\%; 43,64\%]$.

4. Протягом року Євродіснейленд відвідують 2000000 осіб. Дирекція парку шляхом безповторної вибірки провела опитування 1000 осіб. З'ясувалось, що серед опитаних 30 % бажають вдруге

відвідати Діснейленд. Знайти: а) ймовірність того, що частка бажаючих вдруге відвідати парк знаходиться у межах від 27 % до 33 %; б) межі, в яких з ймовірністю 0,9907 знаходиться частка туристів, що вдруге бажають відвідати Діснейленд.

Відповідь: а) 0,9624; б) [26,23%;33,77%].

5. Нічний клуб, розташований на курорті, відвідають за добу 500 осіб. З метою вивчення середнього віку відвідувачів клубу, адміністрація проводить опитування. Скільки осіб потрібно опитати шляхом неповторної вибірки, щоб із ймовірністю 0,9876 можливо було стверджувати, що відхилення середнього віку всіх відвідувачів від середнього віку опитуваних не перевищить 5 років ? Із попереднього опитування відомо, що дисперсія віку відвідувачів не перевищує 100.

Відповідь: 24.

6. Консервний завод постачає у готель консерви у кількості 10000 банок у рік. За даними консервного заводу частка неякісних складає 5 %. Скільки банок потрібно перевірити методом неповторної вибірки, щоб із ймовірністю 0,9545 можна було стверджувати, що частка неякісних банок знаходиться у межах від 2 % до 8 %?

Відповідь: 207.

4.10. Статистична перевірка гіпотез. Критерій узгодження Пірсона

У багатьох практичних задачах виникає потреба з'ясувати, який теоретичний закон розподілу має емпіричний розподіл, наданий варіаційним рядом. Для знаходження теоретичного закону розподілу необхідно: а) вибрати вигляд теоретичного розподілу (нормальний, показниковий, пуассонівський тощо), враховуючи їх особливості; б) знайти параметри обраного закону розподілу.

Для перевірки відповідності і ефективності обраного закону існують критерії узгодження емпіричного і теоретичного законів. Більш поширеним і відомим є критерій узгодження Пірсона. Його зміст полягає у порівнянні теоретичних і емпіричних частот:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^l \frac{(m_i^T - m_i^e)^2}{m_i^T}.$$

Якщо мале значення величини χ^2 , то теоретичний закон відповідає емпіричному.

Задача 23. У результаті перевірки 100 різноманітних місць мешкання відпочиваючих на морському узбережжі отримані наступні результати добової вартості мешкання X (грн.):

X	2–22	22– 42	42–62	62– 82	82– 02	102– 22	122– 42	142– 162
m	3	6	18	33	22	10	6	2

Необхідно: 1. Побудувати гістограму і полігон, знайти числові характеристики ознаки X – добової вартості мешкання.

2. Обґрунтувати вибір теоретичного закону розподілу, що вирівнює статистичний розподіл ознаки.

3. Знайти диференціальну та інтегральну функції розподілу, враховуючи, що середнє значення і дисперсія теоретичного розподілу, відповідно, дорівнюють середньому значенню і дисперсії емпіричного розподілу ознаки X .

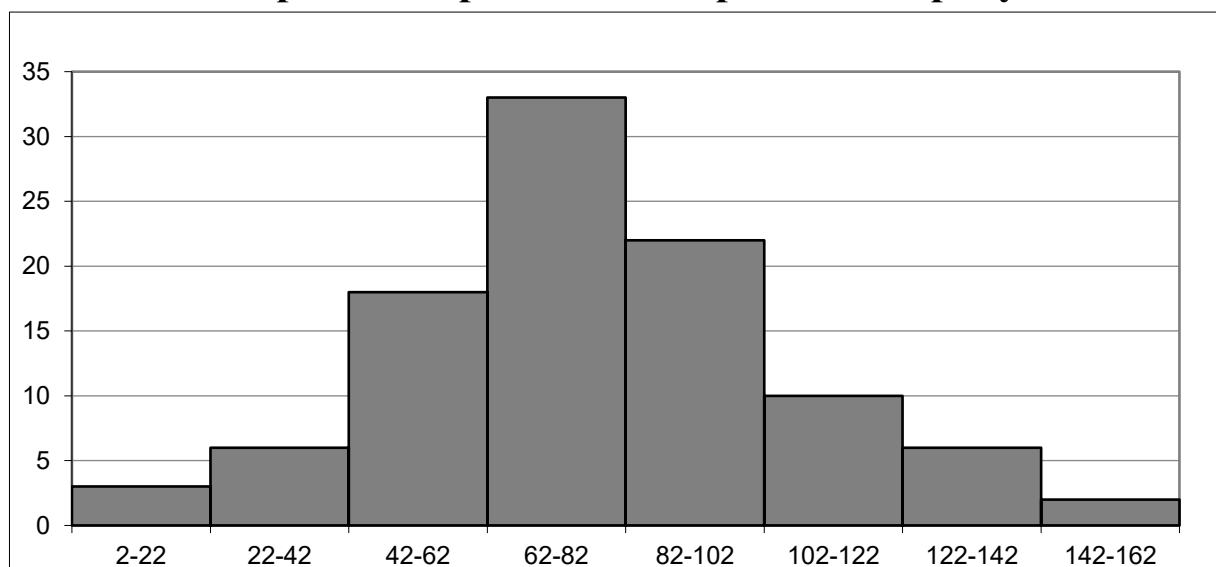
4. Перевірити за критерієм Пірсона узгодженість теоретичного розподілу з емпіричними даними, взявши за рівень значущості число $\alpha = 0,05$.

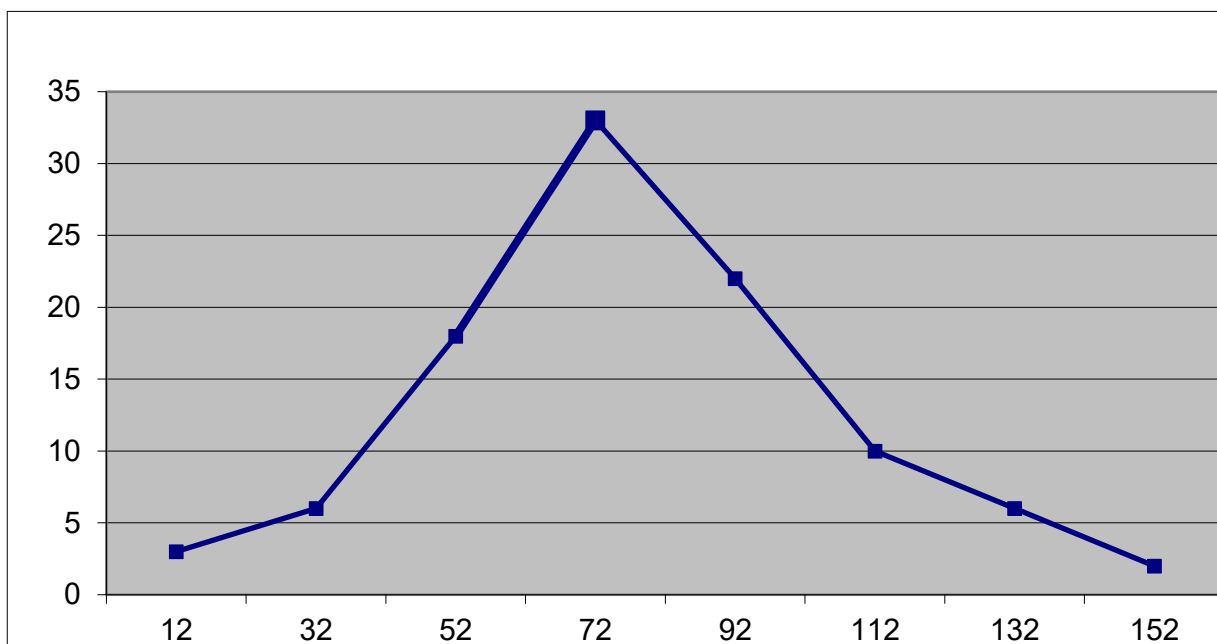
Розв’язання. 1. Кожний інтервал ряду замінимо його середнім значенням. Одержимо дискретний варіаційний ряд:

X	12	32	52	72	92	112	132	152
T	3	6	18	33	22	10	6	2

Полігон і гістограму можливо побудувати, використовуючи «Мастер діаграмм» пакету MS Excel.

Гістограма інтервального варіаційного ряду





Полігон дискретного варіаційного ряду

Для обчислення $\tilde{x}$ і σ_x^2 використаємо метод моментів.

Розглянемо випадкову величину

$$U = (X - x_0)/h, \text{ де } x_0 = 92; h = 20.$$

Результати обчислень запишемо у таблицю:

X	m	u	$u \cdot m$	$u^2 \cdot m$
12	3	- 4	- 12	48
32	6	- 3	- 18	54
52	18	- 2	- 36	72
72	33	- 1	- 33	33
92	22	0	0	0

112	10	1	10	10
132	6	2	12	24
152	2	3	6	18
Σ	100		- 71	259

З таблиці:

$$\bar{u} = \frac{-71}{100} = -0,71; \quad \overline{u^2} = \frac{259}{100} = 2,59; \quad D(u) = \overline{u^2} - (\bar{u})^2 = 2,0859.$$

Скориставшись формулами моментів

$$\tilde{x} = x_0 + h \cdot \bar{u}; \quad \sigma_x^2 = h^2 \cdot D(u),$$

$$\text{отримаємо } \tilde{x} = 92 + 20 \cdot (-0,71) = 77,8 \text{ грн.};$$

$$\sigma_x^2 = 20^2 \cdot 2,0859 = 834,36; \quad \sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} \approx 28,885.$$

2. Із графічного зображення варіаційних рядів можна зробити припущення про нормальний закон розподілу ознаки X .

Аналіз емпіричного розподілу ознаки і числових характеристик дозволяє зробити такі висновки:

1) найчастіше зустрічаються значення ознаки, близькі до середньої добової вартості мешкання $\tilde{x} = 77,8$;

2) варіанти значень ознаки рівновіддалених від середнього мають приблизно однакові частоти;

3) при подальшому віддаленні значень ознаки від середнього $\tilde{x}$ їх частота зменшується.

Виконання цих умов також дає можливість прийняття гіпотези, що *ознака є нормально розподіленою випадковою величиною*.

3. Запишемо диференціальну та інтегральну функції розподілу ознаки, покладаючи

$$a = \tilde{x} = 77,8; \sigma = \sigma_x = 28,885 :$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{28,885 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-77,8)^2}{1668,72}}; \quad F(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[1 + \Phi \left(\frac{x - 77,8}{28,885} \right) \right].$$

3. Для перевірки узгодженості теоретичного розподілу емпіричним даним використаємо критерій Пірсона. У зв'язку з цим для оцінки узгодженості теоретичного і емпіричного розподілів,

користуючись названим критерієм, знайдемо теоретичні частоти m_i^T , які для кожного проміжку $[x_{i-1}, x_i]$ обчислюються за формулою:

$$m_i^T = n \cdot P(x_{i-1} < X < x_i), \text{ де } P(x_{i-1} < X < x_i) = \frac{1}{2} \cdot [\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})],$$

$$t_{i-1} = \frac{x_{i-1} - a}{\sigma}, \quad t_i = \frac{x_i - a}{\sigma}.$$

Послідовність обчислень і їх результати для знаходження χ^2 запишемо у вигляді таблиці, в якій кожна з малочисельних груп (перші дві та останні дві) відповідно об'єднані в одну.

x_1	x_2	$t_1 = \frac{x_1 - a}{\sigma}$	$t_2 = \frac{x_2 - a}{\sigma}$	$\Phi(t_1)$	$\Phi(t_2)$	$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{2} [\Phi(t_1) - \Phi(t_2)]$	$m^T = nP$ $n = 100$	m^e	$\frac{(m^T - m^e)^2}{m^T}$
2	42	-2,62	-1,24	-0,9912	-0,785	0,1013	10,13	9	0,126
42	62	-1,24	-0,55	-0,785	-0,4177	0,1837	18,37	18	0,007
62	82	-0,55	0,15	-0,4177	0,1192	0,2685	26,85	33	1,409
82	102	0,15	0,84	0,1192	0,5991	0,24	24	22	0,167
102	122	0,84	1,53	0,5991	0,874	0,1375	13,75	10	0,939
122	162	1,53	2,92	0,874	0,9965	0,06125	6,125	8	0,574
Σ	-	-	-	-	-	0,99045	99,045	100	3,222

Якщо ознака підпорядковується нормальному закону, то число степенів вільності k обчислюється за формулою: $k = l - 3$, де l – число інтервалів варіаційного ряду після об'єднання малочисельних. Отже, $k = l - 3 = 6 - 3 = 3$. Узгодженість між емпіричним та теоретичним розподілом можна перевірити таким чином. Якщо фактично обчислене значення χ^2 більше за критичне, $\chi^2 > \chi_{\alpha;k}^2$, то гіпотеза про те, що теоретичний розподіл підпорядковується нормальному закону відхиляється, якщо $\chi^2 \leq \chi_{\alpha;k}^2$, то гіпотеза не суперечить емпіричним даним.

З Додатку 4 знаходимо $\chi_{0,05;3}^2 = 7,82$. Оскільки $3,222 = \chi^2 < \chi_{0,05;3}^2 = 7,82$, то гіпотеза про нормальний розподіл ознаки

X – добової вартості мешкання на морському узбережжі, не суперечить емпіричним даним.

Завдання для самостійної роботи

1. У результаті перевірки росту 100 туристів отримані наступні результати:

Зріст (X , см)	Кількість туристів (m)	Зріст (X , см)	Кількість туристів (m)
145-150	2	170-175	30
150-155	5	175-180	25
155-160	8	180-185	7
160-165	16	185-190	3
165-170	23	190-195	1

Необхідно: 1) Побудувати гістограму і полігон, знайти числові характеристики ознаки X – росту туриста. 2) Обґрунтувати вибір теоретичного закону розподілу, що вирівнює статистичний розподіл ознаки. 3) Знайти диференціальну та інтегральну функції розподілу, враховуючи, що середнє значення і дисперсія теоретичного розподілу, відповідно, дорівнюють середньому значенню і дисперсії емпіричного розподілу ознаки X . 4) Перевірити за критерієм Пірсона узгодженість теоретичного розподілу з емпіричними даними, взявши за рівень значущості число $\alpha = 0,05$.

Відповідь: 1) $\bar{x} = 170,125$; $D(X) = 74,568$; 2) нормальний закон;

3) $f(x) = \frac{1}{8,635\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-170,125)^2}{149,136}}$; 4) узгоджується.

Контрольні запитання до тем розділу 4

1. Які закони розподілу випадкової величини вам відомі?
2. Як визначається біноміальний розподіл?
3. Коли можливо сказати, що незалежна величина X називається рівномірно розподіленою на проміжку $[a; b]$?

4. Запишіть функцію розподілу, математичне очікування та дисперсію для рівномірного розподілу.

5. Коли можливо сказати, що випадкова величина X розподілена за показниковим (експоненційним) законом з параметром $\lambda > 0$?

6. Визначте основні числові характеристики для незалежної випадкової величини X , розподіленої за показниковим розподілом.

7. Коли можливо сказати, що випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами m і σ ($\sigma > 0$)?

8. Визначте основні числові характеристики для незалежної випадкової величини X , розподіленої за нормальним розподілом.

9. Які властивості диференціальної функції $\varphi(x)$ нормально розподіленої випадкової величини вам відомі?

10. Як визначається інтегральна функція Лапласа $\Phi(x)$ та які властивості вам відомі?

11. Визначте правило трьох сигм.

12. Які властивості нормального розподілу вам відомі?

5. Системи випадкових величин

Дуже часто результат випробувань описується не однією випадковою величиною X , а декількома випадковими величинами: $X_1, X_2, \dots, X_n$. В цьому випадку прийнято говорити, що вказані випадкові величини утворюють систему $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Математичні очікування дискретних випадкових величин X і Y , які входять до системи, будемо обчислювати за формулами:

$$m_x = M(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i \cdot p_{ij}, \quad m_y = M(Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_j \cdot p_{ij},$$

де p_{ij} – ймовірності подій, які полягають в одночасному виконанні рівностей $X = x_i$, $Y = y_j$. Математичне очікування неперервних випадкових величин обчислюємо за формулами:

$$m_x = M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x, y) dx dy,$$

$$m_y = M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f(x, y) dx dy.$$

Дисперсії дискретних випадкових величин X і Y будемо обчислювати за формулами:

$$D(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} (x_i - m_x)^2, D(Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} (y_j - m_y)^2.$$

Дисперсії неперервних випадкових величин X і Y , які входять в систему, будемо знаходити за формулами:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 \cdot f(x, y) dx dy,$$

$$D(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - m_y)^2 \cdot f(x, y) dx dy$$

Середні квадратичні відхилення випадкових величин X і Y обчислюємо за формулами:

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)}, \quad \sigma_y = \sqrt{D(Y)}.$$

Для обчислення дисперсій можуть бути застосовані формули:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2, D(Y) = M(Y^2) - (M(Y))^2.$$

Важливу роль в теорії систем випадкових величин грають кореляційні моменти (коваріація)

$$C_{xy} = M[(X - m_x)(Y - m_y)].$$

Для дискретних випадкових величин кореляційний момент будемо шукати за формулою:

$$C_{xy} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_i - m_x)(y_j - m_y) p_{ij};$$

для неперервних – за формулою:

$$C_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dx dy.$$

Кореляційний момент можливо також знайти за формулою:

$$C_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y),$$

де $M(XY) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i \cdot y_j \cdot p_{ij}$ для дискретних випадкових величин X і Y і $M(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y \cdot f(x, y) dx dy$ для неперервних величин.

Для характеристики зв'язку між величинами X і Y використовують також коефіцієнт кореляції $r_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$.

Випадкові величини X і Y будемо називати *незалежними*, якщо ймовірність того, що одна з них приймає значення, яке лежить в будь-якому заданному проміжку області її значень і не залежить від того, яке значення приймає інша випадкова величина:

$P(X \in < a, b > / Y = y)$ не залежить від y для будь-якого проміжка $< a, b >$.

Для незалежних випадкових величин X і Y :

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y), \quad C_{xy} = 0.$$

Контрольні запитання до тем розділу 5

1. *Що ми розуміємо під системою випадкових величин незалежних випробувань?*
2. *Як обчислити математичне очікування для системи випадкових величин у випадку, коли випадкові величини дискретні?*
3. *Як обчислити математичне очікування для системи випадкових величин у випадку, коли випадкові величини неперервні?*
4. *Як обчислити дисперсію та середньквадратичне відхилення для системи випадкових величин у випадку, коли випадкові величини дискретні або неперервні?*
5. *Як визначають кореляційний момент і що він характеризує для системи випадкових величин?*
6. *Які з величин (математичне очікування, дисперсія, кореляційний момент) зміняться у випадку, коли випадкові величини в системі є незалежними?*

6. Зразок виконання розрахунково-графічної роботи № 6

Задача № 1. *Підкидають два гральних кубики. Необхідно:*

- 1) Описати простір елементарних подій;
- 2) Вказати склад підмножин, які відповідають подіям:
 - а) $A = \{\text{сума очок кратна } 3\}$;
 - б) $B = \{\text{сума очок парна}\}$;
 - в) $C = \{\text{сума очок кратна } 3 \text{ або непарна}\}$;
 - г) $D = \{\text{сума очок кратна } 3 \text{ і непарна}\}$;
 - д) $A + \bar{B}, B \cdot C, \bar{D}$;
- 3) Визначити ймовірність того, що:
 - а) сума очок не перевищує 2;
 - б) добуток очок не перевищує 2;
 - в) сума очок кратна 2.

Розв'язання

1. Позначимо як $A(I, J)$ подію, яка складається з того, що при першому підкиданні випало I очок, а при другому – J очок. Тоді події

$$A(1,1), A(1,2), \dots, A(1,6), \\ A(2,1), A(2,2), \dots, A(2,6),$$

$$A(6,1), A(6,2), \dots, A(6,6)$$

можливо розглядати як елементарні результати, які утворюють повну групу подій. Простір елементарних результатів містить $n = 36$ подій.

2. а) Поява події A (сума очок кратна 3) сприяють події: $A(1,2), A(1,5), A(2,1), A(2,4), A(3,3), A(3,6),$

$A(4,2), A(4,5), A(5,1), A(5,4), A(6,3), A(6,6)$. Таким чином, події A сприяє 12 елементарних результатів.

б) Поява події B (сума очок парна) сприяють події: $A(1,1), A(1,3), A(1,5), A(2,2), A(2,4), A(2,6), A(3,1), A(3,3), A(3,5),$
 $A(4,2), A(4,4), A(4,6), A(5,1), A(5,3), A(5,5), A(6,2), A(6,4), A(6,6)$.

Таким чином, події B сприяє 18 елементарних результатів.

в) Поява події C (сума очок кратна 3 або парна) сприяють події: $A(1,1), A(1,2), A(1,3), A(1,5), A(2,1), A(2,2),$
 $A(2,4), A(2,6), A(3,1), A(3,3), A(3,5), A(3,6), A(4,2), A(4,4), A(4,5), A(4,6),$
 $A(5,1), A(5,3), A(5,4), A(5,5), A(6,2), A(6,3), A(6,4), A(6,6)$.

Таким чином, події C сприяє 24 елементарні випадки.

г) Появі події D (сума очок кратна 3 і непарна) сприяють події: $A(1,2), A(2,1), A(3,6), A(4,5), A(5,4), A(6,3)$. Таким чином, події D сприяє 6 елементарних результатів.

д) Множина елементарних результатів, які сприяють події $A + \bar{B}$, одержуємо об'єднанням множин елементарних подій, які сприяють події A , і множині елементарних результатів, які сприяють події, протилежній події B . Таким чином, події $A + \bar{B}$ сприяють події:

$A(1,1), A(1,2), A(1,4), A(1,5),$

$A(2,1), A(2,3), A(2,4), A(2,5), A(3,2), A(3,3), A(3,4), A(3,6), A(4,1), A(4,2),$

$A(4,3), A(4,5), A(5,1), A(5,2), A(5,4), A(5,6), A(6,1), A(6,3), A(6,5), A(6,6)$.

Отже, події $A + \bar{B}$ сприяє 24 елементарні результати.

Множина елементарних результата, які сприяють події $B \cdot C$ одержуємо перетинанням множини елементарних результатів, які сприяють події B , і множина елементарних результатів, які сприяють події C . Таким чином, події $B \cdot C$ сприяють події:

$A(1,1), A(1,3), A(1,5), A(2,2), A(2,4), A(2,6),$

$A(3,1), A(3,3), A(3,5), A(4,2), A(4,4), A(4,6), A(5,1), A(5,3), A(5,5), A(6,2),$

$A(6,4), A(6,6)$. Таким чином, події $B \cdot C$ сприяють 18 елементарних подій.

Елементарні події, які сприяють події $\bar{D}$, одночасно не сприяють події D . Таким чином, події $\bar{D}$ сприяють події:

$A(1,1), A(1,3), A(1,4), A(1,5), A(1,6), A(2,2),$

$A(2,3), A(2,4), A(2,5), A(2,6), A(3,1), A(3,2), A(3,3), A(3,4), A(3,5), A(4,1),$

$A(4,2), A(4,3), A(4,4), A(4,6), A(5,1), A(5,2), A(5,3), A(5,5), A(5,6), A(6,1),$

$A(6,2), A(6,4), A(6,5), A(6,6)$. Таким чином, події $\bar{D}$ сприяють 30 елементарних результатів.

3. Для того, щоб означити ймовірності випадкових подій пунктів а), б), в), необхідно скористатись формулою (4). Підрахуємо M і N для кожного з подій:

а) $M = 1, N = 36$. Шукана ймовірність $p = \frac{1}{36}$.

б) $M = 3$, так як даної події сприяє події $A(1,1), A(1,2), A(2,1)$, $N = 36$. Тоді $p = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

в) $M = 18$ (подія В), $N = 36$. Таким чином $p = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

Задача № 2.

Є вироби чотирьох сортів, причому кількість виробів першого сорту дорівнює 2, другого сорту – 6, третього – 3, четвертого – 8. Для контролю навмання беруть 8 виробів. Означити ймовірність того, що серед них: першого сорту – 2 вироби, другого сорту – 2 вироби, третього сорту – 1, четвертого сорту – 3 вироби.

Розв'язання

Ймовірність заданої випадкової події будемо шукати за класичним означенням ймовірності за формулою (4). Для цього означимо M і N за формулою (2) з урахуванням основного принципу комбінаторики

$$M = C_2^2 \cdot C_6^2 \cdot C_3^1 \cdot C_8^3, N = C_{19}^8.$$

$$\text{Тоді } p = \frac{M}{N} = \frac{C_2^2 \cdot C_6^2 \cdot C_3^1 \cdot C_8^3}{C_{19}^8} = \frac{1 \cdot \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot \frac{3!}{1! \cdot 2!} \cdot \frac{8!}{3! \cdot 5!}}{\frac{19!}{8! \cdot 11!}} = \frac{2520}{75582} \approx 0.03334.$$

Задача № 3

Серед 20 лотерейних білетів 5 виграшних. Навмання взяли 8 білетів. Знайти ймовірність того, що серед них 3 виграшних.

Розв'язання.

Будемо користуватись класичним означенням ймовірності події A , де A – подія, яка полягає в тому, що серед восьми навмання витягнутих білета три будуть виграшними. Для цього означити $N = C_{20}^8 = 125970$, $M = C_5^3 \cdot C_{15}^5 = 10 \cdot 3003 = 30030$.

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{30030}{125970} = 0.23839 \approx 0.238.$$

Задача № 4

В двох партіях 55 % і 60 % якісних виробів відповідно. Навмання виймають по одному виробу з кожної партії. Знайти ймовірність того, що серед них:

- а) хоч би один бракований;*
- б) два бракованих;*
- в) один якісний і один бракований виріб.*

Розв'язання

В першій партії якісний виріб зустрічається з ймовірністю $p_1 = 0,55$, а в другій – $p_2 = 0,6$, тоді ймовірності появи бракованих виробів $q_1 = 0,45$, $q_2 = 0,4$.

- а) Будемо користуватись формулою (9а). Знайдемо

$$p = 1 - p_1 \cdot p_2 = 1 - 0,55 \cdot 0,6 = 0,67$$

- б) Будемо користуватись формулою (9). Так як події незалежні, то

$$p = q_1 \cdot q_2 = 0,45 \cdot 0,4 = 0,18.$$

- в) Будемо користуватись формулами (5) і (9), знайдемо

$$p = p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1 = 0,55 \cdot 0,4 + 0,45 \cdot 0,6 = 0,22 + 0,27 = 0,49.$$

Задача № 5

З 1000 ламп 100 ламп належить першій партії, 300 ламп – другій партії, інші – третій. В першій партії 3 % бракованих ламп, в другій – 5 %, в третій – 4 %. Навмання вибирається одна лампа. Обчислити ймовірність того, що витягнута лампа бракована.

Розв'язання

За умовою задачі в третій партії $1000 - (100 + 300) = 600$ ламп. Нехай подія $A_i, i = 1, 2, 3$ полягає в тому, що лампа обрана з i -ої партії. Події A_1, A_2, A_3 складають повну групу. Щоб знайти шукану ймовірність, скористуємось формулою повної ймовірності (10). Знайдемо:

$$p(A_1) = \frac{100}{1000} = 0,1; p(A_2) = \frac{300}{1000} = 0,3; p(A_3) = \frac{600}{1000} = 0,6.$$

Задана подія E полягає в тому, що обрана лампа бракована. Умовні ймовірності події E :

$$p(E|A_1) = 0,03; p(E|A_2) = 0,05; p(E|A_3) = 0,04.$$

Остаточно, за формулою повної ймовірності (10):

$$P(E) = 0,1 \cdot 0,03 + 0,3 \cdot 0,05 + 0,6 \cdot 0,04 = 0,003 + 0,015 + 0,024 = 0,042.$$

Задача № 6

В першій скриньці лежать 9 білих і 7 чорних куль, в другій — 11 білих і 13 чорних куль. З першої скриньки в другу переклали три кулі, потім з другої скриньки витягли одну кулю. Обчислити ймовірність того, що витягнута з другої скриньки куля — біла.

Розв'язання

Позначимо події:

A_1 — з першої скриньки в другу переклали 3 білі кулі,

A_2 — з першої скриньки в другу переклали 2 білі і 1 чорну,

A_3 — з першої скриньки в другу переклали 2 чорні і 1 білу,

A_4 — з першої скриньки в другу переклали 3 чорні кулі.

Ці події складають повну групу.

Нехай E — шукана подія: витягнута з другої скриньки куля — біла.

Знайдемо ймовірності подій $A_i, i = 1, 2, 3, 4$.

$$P(A_1) = \frac{C_9^3}{C_{16}^3}, P(A_2) = \frac{C_9^2 \cdot C_7^1}{C_{16}^3}, P(A_3) = \frac{C_9^1 \cdot C_7^2}{C_{16}^3}, P(A_4) = \frac{C_7^3}{C_{16}^3}.$$

Тепер будемо шукати умовні ймовірності події E за умовами $A_i, i = 1, 2, 3, 4$ відповідно.

Якщо відбулася подія A_1 , то в другій скриньці стало на 3 білі кулі більше, тобто там тепер 14 білих куль і 13 чорних. Тоді умовна ймовірність витягнути з другої скриньки білу кулю дорівнює $P(E|A_1) = \frac{14}{14+13} = \frac{14}{27}$.

Якщо відбулася подія A_2 , то в другій скриньці стало більше на 2 білі кулі і на 1 чорну, таким чином там тепер 13 білих куль і 14 чорних. Тоді умовна ймовірність витягнути з другої скриньки білу кулю дорівнює

$$P(E|A_2) = \frac{13}{27}.$$

Якщо відбулася подія A_3 , то в другій скриньці стало більше на 1 білу кулю і на 2 чорні, тобто там тепер 12 білих куль і 15 чорних. Тоді умовна ймовірність витягнути з другої скриньки білу кулю дорівнює $P(E|A_3) = \frac{12}{27}$.

Якщо відбулася подія A_4 , то в другій скриньці стало на 3 чорні кулі більше, таким чином, там тепер 11 білих куль і 16 чорних. Тоді умовна ймовірність витягнути з другої скриньки білу кулю дорівнює

$$P(E|A_4) = \frac{11}{27}.$$

Тепер, якщо ми скористаємось формулою повної ймовірності, одержимо:

$$\begin{aligned} p &= \frac{C_9^3}{C_{16}^3} \cdot \frac{14}{27} + \frac{C_9^2 \cdot C_7^1}{C_{16}^3} \cdot \frac{13}{27} + \frac{C_9^1 \cdot C_7^2}{C_{16}^3} \cdot \frac{12}{27} + \frac{C_7^3}{C_{16}^3} \cdot \frac{11}{27} = \\ &= \frac{84}{560} \cdot \frac{14}{27} + \frac{36 \cdot 7}{560} \cdot \frac{13}{27} + \frac{9 \cdot 21}{560} \cdot \frac{12}{27} + \frac{35}{560} \cdot \frac{11}{27} = \\ &= \frac{1176 + 3276 + 2268 + 385}{15120} = 0,469907 \dots \approx 0,47. \end{aligned}$$

Задача № 7

В магазин надходять однакові вироби з трьох заводів, причому перший завод постачає 45 % виробів, другий – 35 %, третій – 20 %. Серед виробів першого заводу 85 % першосортних, другого – 80 %, третього – 95 %. Купили один виріб. Він виявився першосортним. Визначити ймовірність того, що куплений виріб виготовлений на третьому заводі.

Розв'язання

При розв'язанні цієї задачі скористаємося формулою Байєса (11). Нехай подія A_i , $i = 1, 2, 3$ складається в тому, що виріб виготовлений на i -тому заводі. Ймовірність цих подій за умовою рівні:

$p(A_1) = 0,45$; $p(A_2) = 0,35$; $p(A_3) = 0,2$. Ці події складають повну групу подій. Нехай подія E полягає в тому, що куплений виріб виявився першосортним, при умові, що він виготовлений i -тим заводом:

$$P(E|A_1) = 0,85; P(E|A_2) = 0,8; P(E|A_3) = 0,95.$$

Знайдемо за формулою (10):

$$p(E) = 0,45 \cdot 0,85 + 0,35 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,95 = 0,3825 + 0,28 + 0,19 = 0,8525.$$

$$\text{Тоді } p(A_3|E) = \frac{0,2 \cdot 0,95}{0,8525} \approx 0,2229.$$

Задача № 8

Ймовірність появи деякої події в кожному з $n = 400$ незалежних випробувань дорівнює $p = 0,2$. Визначити імовірність того, що кількість t появи події задовольняє наступної нерівності:

$$k_1 \leq t \leq k_2, \text{ якщо } k_1 = 70, k_2 = 100.$$

Розв'язання

За умовою, $p = 0,2$; $q = 0,8$; $n = 400$; $k_1 = 70$; $k_2 = 100$. Скористаємося інтегральною теоремою Лапласа (15):

$$P_{400}(70, 100) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Обчислимо значення x_1 и x_2 :

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = -1,25;$$
$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 2,5.$$

Таким чином

$$P_{400}(70, 100) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25).$$

За таблицею значень функції Лапласа [стр.73, додаток] одержимо:

$$\Phi(2,5) \approx 0,4938; \Phi(1,25) \approx 0,3944.$$

Шукана ймовірність

$$P_{400}(70,100) \approx 0,4938 + 0,3944 = 0,8882.$$

Задача № 9

За даними технологічного контролю в середньому 2 % виготовлених на заводі годинників потребують додаткового регулювання. Знайти ймовірність того, що з 100 годинників:

1. Потребують додаткового регулювання рівно три годинники;
2. Потребують додаткового регулювання не більш трьох годинників;
3. Потребують додаткового регулювання не менше чотирьох годинників.

Розв'язання

Оскільки $n = 100$ велике, $p = 0,02$ мале, шукані ймовірності можливо знайти за допомогою формули Пуасона, де $\lambda = np = 100 \cdot 0,02 = 2$. Тоді за формулою (13):

$$P_{100}(3) \approx e^{-2} \cdot \frac{2^3}{3!}.$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P_{100}(0) + P_{100}(1) + P_{100}(2) + P_{100}(3) \approx \\ &\approx e^{-2} \left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} \right) \approx 0,85. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B) &= 1 - (P_{100}(0) + P_{100}(1) + P_{100}(2) + P_{100}(3)) \approx 1 - 0,85 \\ &= 0,15. \end{aligned}$$

Задача № 10

Дана щільність розподілу $f(x)$ випадкової величини X , где γ —

невідомий параметр.
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \gamma(3x - x^2), & 0 \leq x \leq 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Знайти:

- 1) Параметр γ ;
- 2) Математичне очікування $M[X]$, дисперсію $D[X]$;
- 3) Функцію розподілу випадкової величини $F(X)$;

4) Побудувати графіки функцій $F(X)$ и $f(x)$;

5) Знайти ймовірність влучення випадкової величини X в інтервалі $[x_1, x_2]$, де $x_1 = 1, x_2 = 2$

Розв'язання

1) Так як всі значення випадкової величини належать відрітку $[0,3]$, то $\int_0^3 \gamma(3x - x^2)dx = 1, \gamma\left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3 = 1$, откуда $\gamma\left(\frac{27}{2} - 9\right) = 1, \gamma = \frac{2}{9}$.

2) Математичне очікування будемо шукати за формулою

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx:$$

$$M[X] = \frac{2}{9} \int_0^3 x(3x - x^2)dx = \frac{2}{9} \left(\frac{3x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^3 = \frac{2}{9} \left(27 - \frac{81}{4} \right) = \frac{3}{2}.$$

Знайдемо:

$$M[X^2] = \frac{2}{9} \int_0^3 x^2(3x - x^2)dx = \frac{2}{9} \left(\frac{3x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^3 = \frac{2}{9} \left(\frac{243}{4} - \frac{243}{5} \right) = 2,7.$$

Дисперсію будемо шукати за формулою $D[X] = M[X^2] - (M[X])^2$:

$$D[X] = 2,7 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2,7 - 2,25 = 0,45.$$

3) Знайдем функцію розподілу:

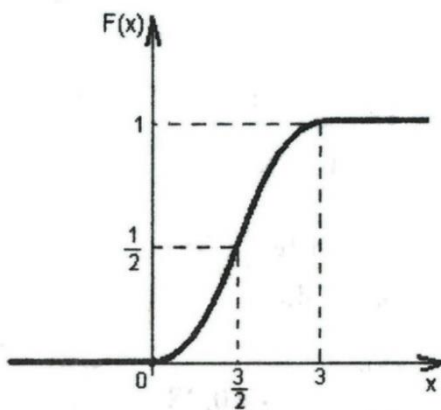
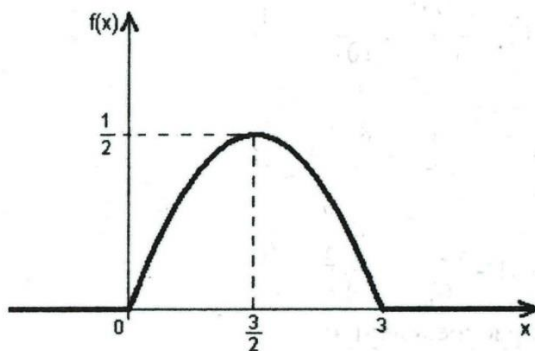
$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx =$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^x 0 dx = 0, & x < 0, \\ \int_{-\infty}^0 0 dx + \frac{2}{9} \int_0^x (3x - x^2) dx = \frac{x^2}{3} - \frac{2x^3}{27}, & 0 \leq x \leq 3, \\ \int_{-\infty}^0 0 dx + \frac{2}{9} \int_0^3 (3x - x^2) dx + \int_3^x 0 dx = 1, & x > 3. \end{cases}$$

Остаточно одержуємо, що $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{3} - \frac{2x^3}{27}, & 0 \leq x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$

4) Графіком функції $f(x)$ на відрізку $[0;3]$ є парабола

$y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2$, а поза цим відрізком графік співпадає з віссю абсцис.



5) Ймовірність влучення випадкової величини X на проміжок $[1,2]$ знайдемо з рівності $P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 \left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2 \right) dx = \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2x^3}{27} \right) \Big|_1^2 = \frac{13}{27}$.

Задача № 11

В партії з 10 деталей 8 стандартних. Навмання обрані дві деталі. Скласти закон розподілу кількості стандартних деталей серед обраних. Обчислити математичне очікування і дисперсію цієї випадкової величини. Знайти функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

Розв'язання

Випадкова величина X – кількість стандартних деталей серед обраних деталей. Її можливі значення: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$.

За формулою $P(X = k) = \frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$ (N – кількість деталей партії, n – кількість стандартних деталей в партії, m – кількість обраних деталей, k – кількість стандартних деталей серед обраних. Знаходимо:

$$P(X = 0) = \frac{C_8^0 C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{\frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2}} = \frac{1}{45};$$

$$P(X = 1) = \frac{C_8^1 C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{8 \cdot 2}{45} = \frac{16}{45};$$

$$P(X = 2) = \frac{C_8^2 C_2^0}{C_{10}^2} = \frac{8 \cdot 7}{\frac{1 \cdot 2}{45}} = \frac{28}{45}.$$

Складемо шуканий закон розподілу:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$

Математичне очікування даної випадкової величини:

$$M(X) = 0 \cdot \frac{1}{45} + 1 \cdot \frac{16}{45} + 2 \cdot \frac{28}{45} = \frac{72}{45} = 1,6.$$

Для знахоження дисперсії обчислимо спочатку математичне очікування величини X^2 .

$$M(X^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{45} + 1^2 \cdot \frac{16}{45} + 2^2 \cdot \frac{28}{45} = \frac{128}{45} = 2 \frac{38}{45}.$$

Тоді дисперсія:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \frac{128}{45} - 2,56 \approx 0,28.$$

Знайдемо функцію розподілу випадкової величини $F(x)$.

Якщо $x \leq 0$, то $F(x) = 0$, так як значень, які менші за нуль, величина X не приймає. Таким чином, $F(x) = P(X < x) = 0$.

Якщо $0 < x \leq 1$, то при умові $X < x$ випадкова величина може приймати тільки одне значення $X = 0$. Тобто, $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) = \frac{1}{45}$.

Якщо $1 < x \leq 2$, то за умовою $X < x$ випадкова величина може приймати значення $X = 0$ або $X = 1$. Отже,

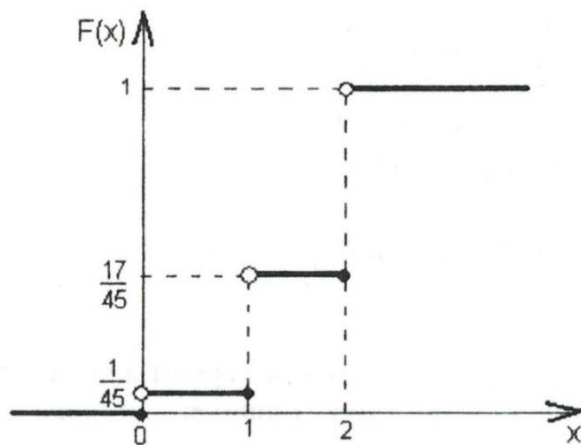
$$F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{45} + \frac{16}{45} = \frac{17}{45}.$$

Якщо $x > 2$, то $F(x) = 1$, так як всі можливі значення випадкової величини X менше x , отже, подія $X < x$ є достовірною і ймовірність його дорівнює одиниці.

Таким чином, шукана функція розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{45}, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{17}{45}, & 1 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Графік цієї функції має вигляд:



Задача № 12

Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення x_1 і x_2 , причому $x_2 > x_1$. Ймовірність того, що X приймає значення x_1 , дорівнює 0,6. Знайти закон розподілу величини X , якщо математичне очікування і дисперсія відомі: $M(X) = 1,4$; $D(X) = 0,24$.

Розв'язання

Так як можливих значень випадкової величини всього дві, то $P(X = x_1) + P(X = x_2) = 1$, отже, ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення x_2 , дорівнює $P(X = x_2) = 1 - 0,6 = 0,4$. Запишемо закон розподілу випадкової величини X :

X	x_1	x_2
P	0,6	0,4

Для пошуку x_1 і x_2 складемо два рівняння, які виражають математичне очікування і дисперсію через x_1 і x_2 .

Одержимо

$$M(X) = 0,6 \cdot x_1 + 0,4 \cdot x_2$$

$$0,6 \cdot x_1 + 0,4 \cdot x_2 = 1,4$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 0,6 \cdot x_1^2 + 0,4 \cdot x_2^2 - 1,4^2$$

Враховуючи те, що $D(X) = 0,24$, одержимо:

$$0,6 \cdot x_1^2 + 0,4 \cdot x_2^2 = 2,2.$$

Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 0,6 \cdot x_1 + 0,4 \cdot x_2 = 1,4 \\ 0,6 \cdot x_1^2 + 0,4 \cdot x_2^2 = 2,2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 = 1,8 \\ x_2 = 0,8 \end{cases}$$

За умовою $x_2 > x_1$, таким чином, $x_1 = 1, x_2 = 2$.

Шуканий закон розподілу має вигляд:

X	1	2
P	0,6	0,4

Задача № 13

В двох скриньках знаходяться по шість куль: в першій скриньці: одна куля з № 1, дві кулі з № 2, три кулі з № 3; в другій скриньці: два шара с №1, три шара с №2, один шар с №3. З кожної скриньки витягли по шару. Випадкові величини X і Y — номери шарів, які витягнутих з першої і другої скриньки, відповідно.

1. Скласти закон розподілу системи випадкових величин X і Y .
2. Знайти математичне очікування і дисперсії випадкових величин X і Y .

3. Знайти коефіцієнт кореляції цих випадкових величин.

Розв'язання

З умови слідує що випадкові величини X і Y незалежні, тому $P_{ij} = P(X = i, Y = j) = P(X = i) \cdot P(Y = j)$. Якщо користуватись класичним означенням ймовірності, одержимо:

$$P(X = 1) = \frac{1}{6}, P(X = 2) = \frac{2}{6}, P(X = 3) = \frac{3}{6};$$

$$P(Y = 1) = \frac{2}{6}, P(Y = 2) = \frac{3}{6}, P(Y = 3) = \frac{1}{6}.$$

Звідки

$$P_{11} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{18}, P_{12} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{12}, P_{13} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36},$$

$$P_{21} = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9}, P_{22} = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{6}, P_{23} = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18},$$

$$P_{31} = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}, P_{32} = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}, P_{33} = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

Побудуємо таблицю розподілу системи випадкових величин:

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

Сума всіх ймовірностей, які указані в таблиці, дорівнює одиниці.

1. Знайдемо математичне очікування випадкових величин X і Y .

$$m_x = 1 \cdot \frac{1}{18} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{12} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{1}{18} + 3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{7}{3};$$

$$m_y = 1 \cdot \frac{1}{18} + 2 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot \frac{1}{36} + 1 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{18} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{11}{6}.$$

2. Знайдемо дисперсії випадкових величин X і Y :

$$D(X) = \left(1 - \frac{7}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{18} + \left(2 - \frac{7}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{9} + \left(3 - \frac{7}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(1 - \frac{7}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} + \left(2 - \frac{7}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(3 - \frac{7}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(1 - \frac{7}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{36} + \left(2 - \frac{7}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{18} + \left(3 - \frac{7}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{5}{9};$$

$$D(Y) = \left(1 - \frac{11}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{18} + \left(1 - \frac{11}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{9} + \left(1 - \frac{11}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(2 - \frac{11}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} + \left(2 - \frac{11}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(2 - \frac{11}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(3 - \frac{11}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{36} + \left(3 - \frac{11}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{18} + \left(3 - \frac{11}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{17}{36}.$$

$$\text{Звідки } \sigma_x = \frac{\sqrt{5}}{3}, \sigma_y = \frac{\sqrt{17}}{6}.$$

3. Переконаємось в тому, що коефіцієнт кореляції незалежних випадкових величин дорівнює нулю:

$$\begin{aligned}
C_{xy} &= \left(1 - \frac{7}{3}\right) \left(1 - \frac{11}{6}\right) \cdot \frac{1}{18} + \left(2 - \frac{7}{3}\right) \left(1 - \frac{11}{6}\right) \cdot \frac{1}{9} + \\
&+ \left(3 - \frac{7}{3}\right) \left(1 - \frac{11}{6}\right) \cdot \frac{1}{6} + \left(1 - \frac{7}{3}\right) \left(2 - \frac{11}{6}\right) \cdot \frac{1}{12} + \left(2 - \frac{7}{3}\right) \left(2 - \frac{11}{6}\right) \cdot \frac{1}{6} \\
&+ \\
&+ \left(3 - \frac{7}{3}\right) \left(2 - \frac{11}{6}\right) \cdot \frac{1}{4} + \left(1 - \frac{7}{3}\right) \left(3 - \frac{11}{6}\right) \cdot \frac{1}{36} + \left(2 - \frac{7}{3}\right) \left(3 - \frac{11}{6}\right) \cdot \frac{1}{18} \\
&+ \\
&+ \left(3 - \frac{7}{3}\right) \left(3 - \frac{11}{6}\right) \cdot \frac{1}{12} = -\frac{4}{3} \left(-\frac{5}{108} + \frac{1}{72} + \frac{7}{216}\right) - \\
&- \frac{1}{3} \left(-\frac{5}{24} + \frac{1}{36} + \frac{7}{108}\right) + \frac{2}{3} \left(-\frac{5}{36} + \frac{1}{24} + \frac{7}{72}\right) = -\frac{4}{3} \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Так як $C_{xy} = 0$, то і коефіцієнт кореляції $r_{xy} = 0$.

Елементи математичної статистики

Задача № 14

Нехай в результаті випробувань випадкова величина X приймає значення з проміжка $(5(i-1), 5i)$ з частотами $n_x = 2 + (-1)^i \cdot \cos \frac{(i+5)\pi}{2}$,

$i = 1, 2, 3, \dots, 10$. Необхідно:

а) скласти таблицю статистичного розподілу; побудувати гістограму відносних частот; означити виборкове середнє, дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

б) вирівняти досвідчені дані, застосовуючи закон розподілу з рівномірною щільністю.

в) перевірити, чи узгоджується даний статистичний розподіл з теоретичним, застосовуючи критерії згоди Пірсона і Романовського.

Розв'язання

а) Складемо таблицю значень величин n_x :

б)

I	(0,5)	(5,10)	(10,15)	(15,20)	(20,25)	(25,30)	(30,35)	(35,40)	(40,45)	(45,50)
n_x	3	2	1	2	3	2	1	2	3	2

Об'єм вибірки $n = 21$.

Означив інтервальні відносні частоти за формулою $W = \frac{n_x}{n}$,

одержимо:

I	(0,5)	(5,10)	(10,15)	(15,20)	(20,25)	(25,30)	(30,35)	(35,40)	(40,45)	(45,50)
W	1/7	2/21	1/21	2/21	1/7	2/21	1/21	2/21	1/7	2/21
W/h	0,029	0,019	0,010	0,019	0,029	0,019	0,010	0,019	0,029	0,019

Вибіркове середнє знайдемо за формулою $\bar{x} = \sum_{i=1}^k w_i x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i$, де x_i – середина відповідного інтервалу.

$$\begin{aligned} \bar{x} = & 2,5 \cdot \frac{1}{7} + 7,5 \cdot \frac{2}{21} + 12,5 \cdot \frac{1}{21} + 17,5 \cdot \frac{2}{21} + 22,5 \cdot \frac{1}{7} + 27,5 \cdot \frac{2}{21} + \\ & + 32,5 \cdot \frac{1}{21} + 37,5 \cdot \frac{2}{21} + 42,5 \cdot \frac{1}{7} + 47,5 \cdot \frac{2}{21} \approx 24,88104. \end{aligned}$$

Вибіркову дисперсію знайдемо за формулою $D^*(X) =$

$$= \sum_{i=1}^k w_i (x_i - \bar{x})^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2, \quad \text{а середнє квадратичне}$$

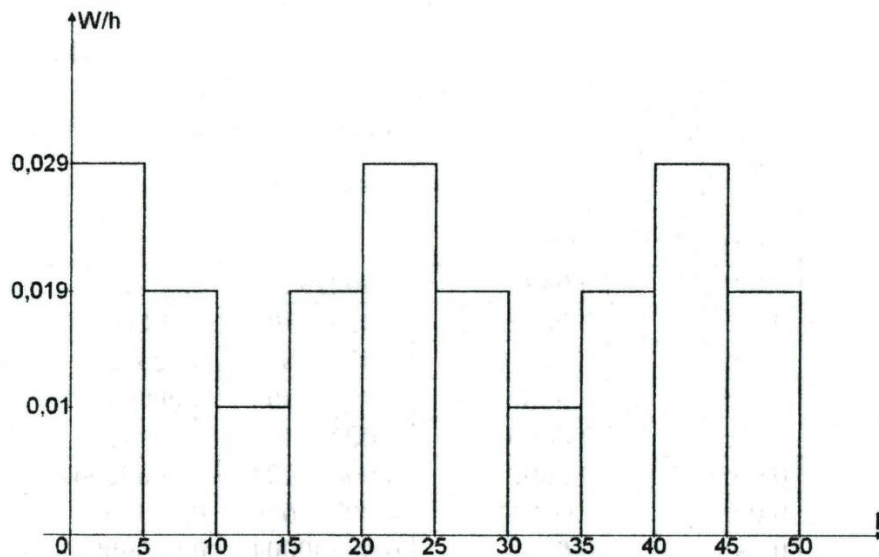
відхилення

$$\sigma^* = \sqrt{D^*(X)}.$$

Знайдемо

$$\begin{aligned} \overline{x^2} = & 2,5^2 \cdot \frac{1}{7} + 7,5^2 \cdot \frac{2}{21} + 12,5^2 \cdot \frac{1}{21} + 17,5^2 \cdot \frac{2}{21} + 22,5^2 \cdot \frac{1}{7} + 27,5^2 \cdot \frac{2}{21} + \\ & + 32,5^2 \cdot \frac{1}{21} + 37,5^2 \cdot \frac{2}{21} + 42,5^2 \cdot \frac{1}{7} + 47,5^2 \cdot \frac{2}{21} \approx 844,345. \end{aligned}$$

$$\text{Тоді } D^*(X) = 844,345 - 24,881^2 \approx 225,279, \sigma(X) \approx 15,009.$$



Гістограма відносних частот

в) З ростом об'єму вибірки n середнє значення $\bar{x} \approx M(X)$, $D^*(X) \approx D(X)$. Тому приймає $M(X) = 24,881$, $D(X) = 225,279$.
Складемо систему лінійних рівнянь для рівномірного закону

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 24,881, \\ \frac{b-a}{2\sqrt{3}} = 15,009. \end{cases}$$

Якщо розв'язати систему, знайдемо $a = 1,1153$; $b = 50,877$,
звідки $\frac{1}{b-a} = 0,019$.

Отже, теоретичний розподіл має рівномірну щільність

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1,1153, \\ 0,019, & -1,1153 \leq x \leq 50,877, \\ 0, & x > 50,877. \end{cases}$$

г) Перевіримо, чи узгоджується даний статистичний розподіл з одержаним теоретичним. Для цього знайдемо ймовірність влучення випадкової величини, яка розподілена за одержаним законом з рівномірною щільністю, в інтервалі $(-5;0)$, $(0;5)$, $\dots$, $(50;55)$:

$$\begin{aligned} P(-5; 0) &= \int_{-5}^0 f(x) dx = \int_{-5}^{-1,15} 0 dx + \int_{-1,115}^0 0,019 dx = \\ &= (0 - (-1,115)) \cdot 0,019 \approx 0,021, \end{aligned}$$

$$P(0; 5) = \int_0^5 f(x)dx = \int_0^5 0,019dx = (5 - 0) \cdot 0,019 \approx 0,095,$$

.....

$$P(45; 50) = \int_{45}^{50} f(x)dx = \int_{45}^{50} 0,019dx = (50 - 45) \cdot 0,019 \approx 0,095,$$

$$P(50; 55) = \int_{50}^{55} f(x)dx = \int_{50}^{50,877} 0,019dx + \int_{50,877}^{55} 0dx = \\ = (50,877 - 50) \cdot 0,019 \approx 0,017.$$

Складемо розрахункову таблицю для обчислення χ^2 :

W	P	$W - P$	$(W - P)^2$	$\frac{(W - P)^2}{2}$
0	0,021	-0,021	0,000441	0,021
0,1429	0,095	0,0479	0,002294	0,02415
0,0952	0,095	0,0002	0,00000004	0,00000042
0,0476	0,095	-0,0474	0,00224676	0,02365
0,0952	0,095	0,0002	0,00000004	0,00000042
0,1429	0,095	0,0479	0,002294	0,02415
0,0952	0,095	0,0002	0,00000004	0,00000042
0,0476	0,095	-0,0474	0,00224676	0,02365
0,0952	0,095	0,0002	0,00000004	0,00000042
0,1429	0,095	0,0479	0,002294	0,02415
0,0952	0,095	0,0002	0,00000004	0,00000042
0	0,017	-0,017	0,000289	0,017

Знайдемо χ^2 за формулою $\chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(w_i - p_i)^2}{p_i}$. Отже, $\chi^2 = 21 \cdot 0,15775 = 3,313$. В нашій задачі кількість розрядів статистичної таблиці $l = 12$, кількість умов, які накладаються на частоти $t = 3$, так як використовують наступні три умови:

- 1) $\sum_{i=1}^l w_i = 1$;
- 2) $\sum_{i=1}^l w_i x_i = m_x$;
- 3) $\sum_{i=1}^l (x_i - m_x)^2 w_i = D_x$,

де m_x, D_x – математичне очікування і дисперсія в теоретичному законі розподілу. Означимо кількість степенів свободи: $r = l - t = 12 - 3 = 9$. З таблиці критичних точок розподілу χ^2 знайдемо найближчі табличні значення: якщо $\chi^2 = 3$, то $p = 0,9643$; якщо $\chi^2 = 4$, то $p = 0,9114$. Для одержаного $\chi^2 = 3,313$ знайдемо значення p , користуючись лінійною інтерполяцією:

$$p = p(3) - (\chi^2 - 3) \cdot [p(4) - p(3)] = 0,9643 - 0,313 \cdot 0,0529 = 0,9477.$$

За критерієм згоди Пірсона, якщо $p > 0,1$, то можливо зробити висновок, що гіпотеза не протирічить даним випробувань. Отже, заданий статистичний розподіл узгоджується з побудованим рівномірним законом розподілу.

За критерієм В. И. Романовського, якщо величина $\frac{|\chi^2 - r|}{\sqrt{2r}} \geq 3$, то розбіжності теоретичних і досвідчених частот можливо рахувати не випадковими. В нашому випадку $\frac{|\chi^2 - r|}{\sqrt{2r}} \approx 1,34 < 3$, тобто розбіжність теоретичних і досвідчених частот можливо вважати випадковою.

Задача № 15

Випадкова величина X має нормальний розподіл з відомим середнім квадратичним ідхиленням $\sigma = 3$. Знайти довірливі інтервали для оцінки невідомого математичного очікування a за вибірковою середньою $\bar{x} = 4,1$, якщо об'єм вибірки $n = 36$ при надійності оцінки $\gamma = 0,95$.

Розв'язання

Шуканий довірливий інтервал має вигляд $(\bar{x} - \delta; \bar{x} + \delta)$. Тут

$$\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}, \text{ де } t \text{ задовольняє умові } 2\Phi(t) = \gamma.$$

Знайдемо t з умови $2\Phi(t) = 0,95$, звідки $\Phi(t) = 0,475$. За таблицею значень функції Лапласа [додаток 1, с. 120] знаходимо: $t = 1,96$. Тоді

$$\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,96 \cdot 3}{\sqrt{36}} = 0,98.$$

Отже, довірчий інтервал має наступні межі:

$$\bar{x} - 0,98 = 4,1 - 0,98 = 3,12;$$

$$\bar{x} + 0,98 = 4,1 + 0,98 = 5,08.$$

Таким чином, значення невідомого параметру a , відповідно даним вибірки, з ймовірністю $\gamma = 0,95$ задовольняє нерівності $3,12 < a < 5,08$.

7. Варіанти завдань розрахунково-графічної роботи № 6

Задача № 1

Підкидають два гральні кубики. Необхідно:

1. Описати простір елементарних подій;
2. Вказати склад підмножин, які відповідають подіям:
 - а) $A = \{\text{сума очок кратна } M\}$;
 - б) $B = \{\text{сума очок непарна}\}$;
 - в) $C = \{\text{сума очок кратна } M \text{ або непарна}\}$;
 - г) $D = \{\text{сума очок кратна } M \text{ і непарна}\}$;
 - д) $A+B, BC, \bar{D}$;
3. Визначити ймовірність того, що:
 - а) Сума кількості очок не перевершує N ;
 - б) добуток кількості очок не перевершує N ;
 - в) добуток кількості очок ділиться на N .

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
M	4	5	6	7	8	4	5	6	7	8	4	5	6	7	8
N	10	4	5	6	7	8	9	10	4	5	6	7	8	9	10

№	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
M	4	5	6	7	8	4	5	6	7	8	4	5	6	7	8
N	4	5	6	7	8	9	10	4	5	6	7	8	9	10	4

Задача № 2

Маємо вироби чотирьох сортів, причому кількість виробів i -го сорту дорівнює $n_i, i = 1, 2, 3, 4$. Для контролю навмання беруть m виробів. Визначити ймовірність того, що серед них: m_1 виробів –

першого сорту, m_2 виробів – другого сорту, m_3 виробів – третього сорту і m_4 виробів – четвертого сорту ($\sum_{i=1}^4 m_i = m$).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
n_1	1	2	2	1	4	3	5	2	4	3	2	1	2	3	2
n_2	2	2	3	4	2	2	1	5	2	3	3	3	3	2	3
n_3	3	4	3	2	3	2	2	3	4	3	4	4	3	4	2
n_4	3	2	4	3	2	3	2	3	2	3	3	3	2	5	2
m_1	1	2	1	1	2	1	1	1	1	1	2	1	1	2	1
m_2	1	1	1	1	3	2	3	1	2	2	1	1	1	1	1
m_3	1	1	2	2	1	1	1	3	1	1	2	2	2	1	2
m_4	2	1	3	1	2	3	2	3	1	1	2	2	3	2	2

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
n_1	3	4	3	2	3	3	4	2	2	3	1	1	2	3	3
n_2	2	3	3	4	4	2	4	7	1	2	3	4	3	1	2
n_3	2	4	5	4	3	5	2	2	6	2	3	2	1	2	3
n_4	4	3	4	1	2	2	2	1	2	3	2	2	3	3	1
m_1	2	1	2	1	2	2	2	1	2	1	1	0	1	0	2
m_2	2	2	2	2	2	1	2	5	1	1	3	1	2	1	2
m_3	1	1	1	2	3	3	2	2	3	1	1	2	0	1	2
m_4	1	2	2	3	2	1	1	1	1	2	1	1	1	2	0

Задача № 3

Серед n лотерейних квитків k вигащних. Навмання взяли m квитків. Визначити ймовірність того, що серед них рівно l вигащних.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
N	10	10	10	10	11	11	11	12	12	12	9	9	9	8	8
L	2	2	3	3	2	3	3	3	2	2	2	3	2	2	2
M	4	3	5	5	5	4	5	8	8	5	4	5	3	4	5
K	6	5	7	6	7	8	7	5	3	4	6	6	7	5	4

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
N	8	10	10	10	12	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9
L	3	4	5	4	6	2	2	2	3	1	2	3	2	4	3
M	4	6	7	6	8	3	3	4	5	4	3	4	6	5	5
k	5	5	7	7	6	4	5	3	4	2	5	4	3	5	4

Задача № 4

У двох партіях $m_1\%$ і $m_2\%$ якісних виробів відповідно. Навмання обирають по одному виробу з кожної партії. Яка ймовірність знайти серед них:

- а) хоч би один бракований;
- б) два бракованих;
- в) один якісний і один бракований.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
m_1	77	50	55	65	75	40	45	75	80	33	45	50	85	75	83
m_2	40	70	75	87	45	80	86	45	90	85	75	82	95	45	87

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
m_1	76	71	78	87	75	65	88	73	84	85	74	82	95	91	83
m_2	82	91	80	41	74	75	87	65	89	80	75	95	85	75	80

Задача № 5

З 1000 ламп n_i належить i -ої партії, $i=1,2,3$, $\sum_{i=1}^3 n_i = 1000$. В першій партії 7 % бракованих ламп, в другій – 5 %, в третій – 6 %. Навмання обирається одна лампа. Визначити ймовірність того, що обрана лампа – бракована.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
n_1	35	42	18	45	50	40	30	19	50	15	25	29	52	30	50
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
n_2	25	28	42	19	20	35	24	51	28	65	35	31	18	35	80
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
n_1	20	35	42	62	13	50	30	14	39	40	22	47	17	10	35
	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0	0
n_2	16	20	37	20	15	17	28	35	29	20	18	30	43	50	45
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Задача № 6

В першій скриньці n_1 білих і k_1 чорних куль, в другій – n_2 білих і k_2 чорних куль. З першої скриньки в другу переклали l куль, потім з

другої скриньки витягли одну кулю. Визначити ймовірність того, що витягнута з другої скриньки куля – чорна.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
n_1	4	7	3	8	6	3	5	13	1	3	4	2	2	2	6
k_1	1	3	5	2	4	2	5	2	9	7	6	3	2	8	4
n_2	2	5	4	3	1	4	4	4	3	5	7	7	3	3	3
k_2	5	1	1	2	7	4	10	6	3	2	8	1	1	1	3
l	3	4	2	4	2	2	4	3	4	3	3	2	3	2	4

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
n_1	5	25	20	20	50	40	25	20	25	10	20	25	40	10	20
k_1	5	3	1	4	8	8	2	1	2	3	1	3	5	5	3
n_2	4	25	40	25	2	10	20	40	25	50	20	25	50	30	40
k_2	3	2	7	5	6	2	4	5	6	3	4	7	8	6	2
l	3	2	2	3	2	2	4	3	4	2	3	2	3	4	2

Задача № 7

В магазин надходять однотипні вироби з трьох заводів, причому i -ий завод постачає $m_i\%$ виробів ($i = 1,2,3$). Серед виробів i -го заводу $n_i\%$ першосортних. Куплений один виріб. Він виявився першосортним. Визначити ймовірність того, що куплений виріб був вироблений j -им заводом.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
m_1	50	50	50	60	60	60	40	40	40	40	40	40	70	70	70
m_2	30	30	30	20	20	20	30	30	30	20	20	20	20	20	20
m_3	20	20	20	20	20	20	30	30	30	40	40	40	10	10	10
n_1	70	70	70	70	70	70	80	80	80	90	90	90	70	70	700
n_2	80	80	80	80	80	80	80	80	80	90	90	90	80	80	80
n_3	90	90	90	90	90	90	90	90	90	80	80	80	90	90	90
j	1	2	3	1	2	2	1	2	3	1	2	3	1	2	3

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
m_1	60	60	60	50	50	50	30	30	30	20	20	20	10	10	10
m_2	10	10	10	20	20	20	30	30	30	40	40	40	50	50	50
m_3	30	30	30	30	30	30	40	40	40	40	40	40	40	40	40
n_1	80	80	80	90	90	90	70	70	70	90	90	90	70	70	70

n_2	90	90	90	80	80	80	70	70	70	70	70	70	90	90	90
n_3	80	80	80	90	90	90	80	80	80	80	80	80	80	80	80
j	1	2	3	1	2	3	1	3	3	2	2	1	1	2	1

Задача № 8

Деяка подія може відбутися з ймовірністю p в кожному з n незалежних випробувань. Визначити ймовірність того, що кількість m випробувань, в яких подія сталася, задовольняє наступним нерівностям:

- варіанти 1-11: $k_1 \leq m \leq k_2$;
- варіанти 12-21: $k_1 \leq m$ (не менше, ніж k_1);
- варіанти 22-30: $m \leq k_2$ (не більше, ніж k_2).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
p	0,8	0,8	0,8	0,7	0,7	0,7	0,7	0,6	0,75	0,75	0,75
k_1	80	85	70	83	50	65	70	40	65	70	68
k_2	90	95	95	93	60	75	80	50	80	85	78

	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
n	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
p	0,7	0,7	0,7	0,6	0,6	0,6	0,8	0,8	0,8	0,8
k_1	60	70	80	65	75	50	70	80	90	95

	22	23	24	25	26	27	28	29	30
n	100	100	100	200	200	200	300	400	400
p	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,4	0,8	0,6	0,8
k_2	60	70	90	80	95	80	95	85	95

Задача № 9

За даними технологічного контролю в середньому $n\%$ виготовлених на заводі годинників мають необхідність в додатковому регулюванні. Знайти ймовірність того, що з N годинників:

- в додатковому регулюванні потребують рівно k годинників;

2. в додатковому регулюванні потребують не більш k годинників;

3. в додатковому регулюванні потребують не менш k годинників;

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
n	1	2	3	2	4	2	5	1	2	3	2	4	2	5	1
N	10	11	12	10	11	12	13	14	15	10	11	12	13	14	15
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
k	2	3	4	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
n	3	1	2	4	2	5	3	3	2	3	1	3	2	5	2
N	10	11	12	10	11	12	13	14	14	12	11	12	11	12	15
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
k	3	4	1	2	2	4	3	4	5	3	2	4	3	5	4

Задача № 10

Дана щільність розподілу $f(x)$ випадкової величини X . Знайти параметр γ , математичне очікування $M[X]$, дисперсію $D[X]$, функцію розподілу випадкової величини $F(X)$. Побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(X)$. Знайти ймовірність влучення випадкової величини X на проміжок $[x_1; x_2]$.

а) варіант 1-8: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$

б) варіант 9-16: $f(x) = \begin{cases} a, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$

в) варіант 17-24: $f(x) = \begin{cases} \gamma, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$

г) варіант 25-30: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-\gamma}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	2,5	1,5	1,2	1	-1	-2	-0,5	1	1	2	2	1	1	1	2

b	4	3	2,5	3,5	2	1	2,5	1,8	2,4	3,5	2,8	2,8	2,6	2,6	3
x_1	3	2	2	2	-0,7	-3	-1	1,3	1,5	2,5	2	-1	1,5	1,4	1
x_2	3,3	2,6	2,3	2,8	1,1	-2	0	1,6	2	3	2,5	3	3	2	3

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a	2	-4	-3	2	1	1	-1	-0,5	-0,5	0,5	0,2	0,5	0,4	1,4	0
b	4,8	-2	-1	4	3	1,5	1,5	-1	1	1	2	3	4	1	2
x_1	4,5	-1	-1	0	0	0	0	-1	-1	0	0	2	1	0	0
x_2	5	0	0	3	2	0,5	1	2	1	3	4	0,5	5	3	3

Задача № 11

1. Стрілок робить 3 постріли. Ймовірність влучення в ціль при одному пострілі дорівнює 0,8. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості влучень в ціль. Знайти математичне очікування і дисперсію випадкової величини. Знайти функцію розподілу $F(X)$ і побудувати її графік.

2. Стрілок робить 2 постріли. Ймовірність влучення в ціль при одному пострілі дорівнює 0,9. Скласти закон розподілу випадкової величини X — кількість влучень в ціль. Знайти математичне очікування і дисперсію випадкової величини. Знайти функцію розподілу $F(X)$ і побудувати її графік.

3. Гральну кістку підкидають 3 рази. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількість появи шістки. Знайти математичне очікування і дисперсію цієї випадкової величини. Знайти функцію розподілу $F(X)$ і побудувати її графік.

4. Гральну кістку підкидають 2 рази. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількість появи двійки. Знайти математичне очікування і дисперсію цієї випадкової величини. Знайти функцію розподілу $F(X)$ і побудувати її графік.

5. Гральну кістку підкидають 4 рази. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількість появи трійки. Знайти математичне

очікування і дисперсію цієї випадкової величини. Знайти функцію розподілу $F(X)$ і побудувати її графік.

6. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількість появи події A в трьох незалежних випробуваннях, якщо ймовірність появи події в кожному випробуванні дорівнює 0,6. Знайти математичне очікування і дисперсію цієї випадкової величини. Знайти функцію розподілу $F(X)$ і побудувати її графік.

7. Монету підкидають 3 рази. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількість випадення герба. Знайти математичне очікування і дисперсію цієї випадкової величини. Знайти функцію розподілу $F(X)$ і побудувати її графік.

8. Монету підкидають 2 рази. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількість випадення герба. Знайти математичне очікування і дисперсію цієї випадкової величини. Знайти функцію розподілу $F(X)$ і побудувати її графік.

9. Монету підкидають 4 рази. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількість випадення герба. Знайти математичне очікування і дисперсію цієї випадкової величини. Знайти функцію розподілу $F(X)$ і побудувати її графік.

10. Монету підкидають 5 разів. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількість випадення герба. Знайти математичне очікування і дисперсію цієї випадкової величини. Знайти функцію розподілу $F(X)$ і побудувати її графік.

11. Монету підкидають 6 разів. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількість випадення герба. Знайти математичне очікування і дисперсію цієї випадкової величини. Знайти функцію розподілу $F(X)$ і побудувати її графік.

12. Стрілок робить 4 постріли. Ймовірність влучення в ціль при одному пострілі дорівнює 0,8. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості появи шістки. Знайти математичне очікування і дисперсію цієї випадкової величини. Знайти функцію розподілу $F(X)$ і побудувати її графік.

13. По мішені ведуться постріли до першого влучення або до використання всіх патронів. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості витрачених патронів, якщо ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,8, а кількість наявних патронів 3. Знайти математичне очікування і дисперсію цієї випадкової величини. Знайти функцію розподілу $F(X)$ і побудувати її графік.

14. По мішені ведуться постріли до першого влучення або до використання всіх патронів. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості витрачених патронів, якщо ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,6, а кількість наявних патронів 4. Знайти математичне очікування і дисперсію цієї випадкової величини. Знайти функцію розподілу $F(X)$ і побудувати її графік.

15. По мішені ведуться постріли до першого влучення або до використання всіх патронів. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості витрачених патронів, якщо ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,8, а кількість наявних патронів 5. Знайти математичне очікування і дисперсію цієї випадкової величини. Знайти функцію розподілу $F(X)$ і побудувати її графік.

16. По мішені ведуться постріли до першого влучення або до використання всіх патронів. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості витрачених патронів, якщо ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,85, а кількість наявних патронів 4. Знайти математичне очікування і дисперсію цієї випадкової величини. Знайти функцію розподілу $F(X)$ і побудувати її графік.

17. Стрілок робить 5 пострілів по мішені. Вероятность попадання при кожному пострілі рівна 0,5. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості влучень в мішень. Знайти математичне очікування і дисперсію цієї випадкової величини. Знайти функцію розподілу $F(X)$ і побудувати її графік.

18. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості появи події A в двох незалежних випробуваннях, якщо ймовірність появи події в кожному випробуванні дорівнює 0,3. Знайти

математичне очікування і дисперсію цієї випадкової величини. Знайти функцію розподілу $F(X)$ і побудувати її графік.

19. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості появи події A в трьох незалежних випробуваннях, якщо ймовірність появи події в кожному випробуванні дорівнює 0,1. Знайти математичне очікування і дисперсію цієї випадкової величини. Знайти функцію розподілу $F(X)$ і побудувати її графік.

20. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості появи події A в чотирьох незалежних випробуваннях, якщо ймовірність появи події в кожному випробуванні дорівнює 0,4. Знайти математичне очікування і дисперсію цієї випадкової величини. Знайти функцію розподілу $F(X)$ і побудувати її графік.

21. В партії 10 % нестандартних деталей. Навмання обрані три деталі. Скласти закон розподілу випадкової величини X — кількості нестандартних деталей серед трьох обраних. Знайти математичне очікування і дисперсію цієї випадкової величини. Знайти функцію розподілу $F(X)$ і побудувати її графік.

22. В партії 10 % нестандартних деталей. Навмання обрані дві деталі. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості нестандартних деталей серед двох обраних. Знайти математичне очікування і дисперсію цієї випадкової величини. Знайти функцію розподілу $F(X)$ і побудувати її графік.

23. В партії з 8 деталей 6 стандартних. Навмання обрані дві деталі. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості стандартних деталей серед двох обраних. Знайти математичне очікування і дисперсію цієї випадкової величини. Знайти функцію розподілу $F(X)$ і побудувати її графік.

24. В партії з 8 деталей 6 стандартних. Навмання обрані дві деталі. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості стандартних деталей серед трьох обраних. Знайти математичне очікування і дисперсію цієї випадкової величини. Знайти функцію розподілу $F(X)$ і побудувати її графік.

25. По мішені ведуться постріли до першого влучення або до використання всіх патронів. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості витрачених патронів, якщо ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,75, а кількість наявних патронів 3. Знайти математичне очікування і дисперсію цієї випадкової величини. Знайти функцію розподілу $F(X)$ і побудувати її графік.

26. По мішені ведуться постріли до першого влучення або до використання всіх патронів. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості витрачених патронів, якщо ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,6, а кількість наявних патронів 4. Знайти математичне очікування і дисперсію цієї випадкової величини. Знайти функцію розподілу $F(X)$ і побудувати її графік.

27. В партії з 7 деталей 4 стандартні. Навмання обрані три деталі. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості стандартних деталей серед обраних. Знайти математичне очікування і дисперсію цієї випадкової величини. Знайти функцію розподілу $F(X)$ і побудувати її графік.

28. В партії з 6 деталей 3 стандартні. Навмання обрані три деталі. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості стандартних деталей серед обраних. Знайти математичне очікування і дисперсію цієї випадкової величини. Знайти функцію розподілу $F(X)$ і побудувати її графік.

29. В партії з 8 деталей 6 стандартних. Навмання обрані дві деталі. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості стандартних деталей серед двох обраних. Знайти математичне очікування і дисперсію цієї випадкової величини. Знайти функцію розподілу $F(X)$ і побудувати її графік.

30. В партії з 8 деталей 4 стандартних. Навмання обрані три деталі. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості стандартних деталей серед обраних. Знайти математичне очікування і дисперсію цієї випадкової величини. Знайти функцію розподілу $F(X)$ і побудувати її графік.

Задача № 12

Дискретна випадкова величина X приймає два можливі значення x_1 і x_2 , причому $x_2 > x_1$. Ймовірність того, що X приймає значення x_1 , дорівнює p . Знайти закон розподілу випадкової величини X , якщо математичне очікування $M(X)$ і дисперсія $D(X)$ відомі.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0,5	0,5	0,1	0,2	0,5	0,2	0,2	0,1	0,4	0,5
$M(X)$	3,5	3	1,9	2,6	5,5	1,8	2,8	2,8	2,2	2,5
$D(X)$	0,25	4	0,09	0,64	0,25	0,16	0,16	0,36	0,96	2,25

№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
p	0,9	0,9	0,9	0,9	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,6
$M(X)$	1,4	1,1	1,2	1,3	1,2	1,4	1,6	1,8	2	1,4
$D(X)$	1,44	0,09	0,36	0,81	0,16	0,64	1,44	2,56	4	0,24

№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
p	0,6	0,6	0,6	0,5	0,5	0,5	0,5	0,1	0,2	0,5
$M(X)$	1,8	2,2	2,6	1,5	2	3,5	3	1,9	2,6	5,5
$D(X)$	0,96	2,16	3,84	0,25	1	0,25	4	0,09	0,64	0,25

Задача № 13

У двох скриньках знаходяться по n куль: в першій скриньці: k_1 куль з № 1, k_2 куль з № 2, k_3 куль з № 3; в другій скриньці: m_1 куль з № 1, m_2 куль з № 2, m_3 куль з № 3. З кожної скриньки витягли по кулі. Нехай X – номер кулі, який витягнутий з першої скриньки, Y – номер кулі, яка витягнута з другої скриньки.

1. Скласти закон розподілу системи випадкових величин X і Y .
2. Знайти математичне очікування і дисперсії випадкових величин X і Y .

3. Знайти коефіцієнт кореляції цих випадкових величин.

№	n	k_1	k_2	k_3	m_1	m_2	m_3
1	6	3	1	2	2	2	2
2	5	1	2	2	2	1	2
3	7	1	3	3	2	2	3
4	6	1	3	2	1	2	1
5	5	1	2	2	1	1	2

6	5	1	1	3	3	0	2
7	8	3	3	2	2	2	4
8	7	3	3	1	2	2	3
9	6	0	3	3	2	1	3
10	6	1	1	4	2	3	1
11	5	0	1	4	2	2	1
12	6	2	2	2	3	0	3
13	7	4	2	1	2	3	2
14	8	3	3	2	3	2	3
15	4	2	1	1	3	1	0
16	5	2	2	1	1	1	3
17	6	0	3	3	1	1	4
18	7	2	4	1	2	5	0
19	8	3	4	1	2	3	3
20	5	5	0	0	2	2	1
21	6	4	1	1	2	2	2
22	7	3	3	1	2	1	4
23	8	2	2	4	4	3	1
24	5	1	1	3	2	2	1
25	6	3	3	0	2	1	3
26	7	5	1	1	2	3	2
27	8	5	2	1	4	3	1
28	6	0	3	3	2	1	3
29	7	4	2	1	2	1	4
30	8	2	2	4	3	3	2

Елементи математичної статистики

Задача № 14

Нехай в результаті випробувань випадкова величина X прийняла значення з проміжка $(5(i-1), 5i)$ з частотами $n_x = n + (-1)^i \cdot \sin \frac{i\pi}{2}$, $i = 1, 2, 3, \dots, 10$. Необхідно:

а) скласти таблицю статистичного розподілу; побудувати гістограму відносних частот; визначити вибіркове середнє, дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

б) вирівняти досвідчені дані, застосовуючи закон розподілу з рівномірною щільністю.

в) перевірити, чи узгоджується даний статистичний розподіл з теоретичним, застосовуючи критерії згоди Пірсона і Романовського.

Задача № 15

Випадкова величина X має нормальний розподіл з відомим середнім квадратичним відхиленням σ . Знайти довірчий інтервал для оцінки невідомого математичного очікування a по вибірковій середній $\bar{x}$ з надійністю оцінки γ , якщо об'єм вибірки n .

№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
σ	1,92	1,93	1,94	1,95	1,96	1,81	1,82	1,83	1,84	1,85
$\bar{x}$	5	6	7	8	9	6	7	9	10	13
n	91	40	30	25	64	25	36	64	90	96
γ	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
σ	1,82	1,83	1,84	1,85	1,86	1,87	1,88	1,89	1,90	1,91
$\bar{x}$	5	6	8	9	10	11	12	13	14	15
n	25	36	64	90	96	86	50	55	90	96
γ	0,95	0,95	0,95	0,950,95	0,95	0,95	0,95	0,99	0,99	0,99

№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
σ	1,86	1,82	1,83	1,92	1,94	1,95	1,96	1,94	1,93	1,92
$\bar{x}$	12	13	14	15	14	6	7	8	10	11
n	86	50	55	90	96	91	40	30	25	64
γ	0,99	0,99	0,95	0,95	0,95	0,95	0,95	0,95	0,95	0,95

КОНТРОЛЬНА РОБОТА З КУРСУ «ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА» ДЛЯ СТУДЕНТІВ 1 КУРСУ

Для вибору варіантів задач необхідно знайти в наведеній нижче таблиці букви, з яких починається Ваше прізвище, ім'я та по-батькові (українською мовою). В задачах завдань № 1, № 2 і № 3 літері *N* надається значення, на яке вказує перша буква Вашого прізвища, в задачах № 4, № 5 та № 6 літері *N* надається відповідне значення згідно з першою буквою Вашого імені, і в задачах № 7, № 8 літері *N* надається значення згідно з першою буквою Вашого імені по-батькові.

Початкова буква прізвища, ім'я, по-батькові (укр. м.)			Задачі завдань № 1, № 2, № 3	Задачі завдань № 4, №5, № 6	Задачі завдань № 7, № 8
А	У	Я	N = 1	N = 1	N = 1
Б	Ф	Ю	N = 2	N = 2	N = 2
В	Л	Є	N = 3	N = 3	N = 3
Г	М	Щ	N = 4	N = 4	N = 4
Д	Н	Ш	N = 5	N = 5	N = 5
Е	Т	Х	N = 6	N = 6	N = 6
Ж	С	Й	N = 7	N = 7	N = 7
З	О	Р	N = 8	N = 8	N = 8
І, Ії	П	Ц	N = 9	N = 9	N = 9
К	Ч	И	N = 10	N = 10	N = 10

Наприклад, студент Ларин Олександр Борисович надає літері *N* в задачах завдань № 1, № 2 і № 3 значення $N=3$ („Л”), в задачах № 4, № 5 та № 6 – значення $N=8$ („О”), в задачах № 7, № 8 – $N=2$ („Б”).

ЗАВДАННЯ 1

У Парижі біля Ейфелевої Вежі розташовано магазин з продажу різноманітних сувенірів. Із попереднього досвіду власника сувенірної крамниці відомо, що $(30 + 5N) \%$ громадян Італії та $(60 - 5N) \%$ громадян Австрії, що завітали у крамницю, роблять покупку. У крамницю ввійшли двоє покупців: один – італієць, другий – австрієць. Знайти ймовірність того, що: а) обидва покупці зроблять покупку; б) один покупець зробить покупку; в) жоден із них не зробить покупку; г) хоча б один покупець зробить покупку.

ЗАВДАННЯ 2

Для офісу придбали телевізори: $(2 + N)$ телевізорів фірми „SONY”, 5 – фірми „TOSHIBA” та $(13 - N)$ – фірми „LG”. Ймовірність безвідмовної роботи протягом гарантійного терміну дорівнює: 0,95 – для „SONY”, 0,9 – для „TOSHIBA”, 0,8 – для „LG”. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний телевізор буде безвідмовно працювати протягом гарантійного терміну.

ЗАВДАННЯ 3

За результатами анкетування виявилось, що $(10 + N)\%$ клієнтів банку незадоволені якістю наданих їм послуг. За день відділення банку надало послуги 121 клієнту. Знайти найімовірнішу кількість незадоволених клієнтів та ймовірність цієї найімовірнішої кількості.

ЗАВДАННЯ 4

На двох автоматичних верстатах виготовляються сталеві кільця. Закони розподілу кількості бракованих виробів, виготовлених протягом зміни на кожному з верстатів, мають вигляд:

для 1-го верстата

Кількість бракованих виробів (X)	0	1
Ймовірність (p)	0,4	0,6

для 2-го верстата

Кількість бракованих виробів (Y)	0	N
Ймовірність (p)	0,3	0,7

Знайти закон розподілу кількості бракованих кілець, які виготовляються протягом зміни обома верстатами та числові характеристики цього закону.

ЗАВДАННЯ 5

Випадкова величина X – річний прибуток фірми (тис. грн.) задано функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leq 0, \\ \frac{x^2}{(N+1)^2}, & \text{якщо } 0 < x \leq N+1, \\ 1, & N+1 < x < +\infty. \end{cases}$$

Необхідно: 1)

Побудувати графік функції $F(x)$.

2) Знайти ймовірність одержання прибутку у проміжку $(\frac{1}{3} + N; \frac{2}{3} + N)$ тис. грн.

3) Знайти щільність розподілу ймовірностей (диференціальну функцію) та побудувати її графік.

4) Знайти середній річний прибуток фірми.

ЗАВДАННЯ 6

Результати іспиту студентів за 100-бальною шкалою оцінювання – нормально розподілена випадкова величина з параметрами: $a = 60 + N$ балів та $\sigma = 10$ балів. Необхідно: а) записати диференціальну та інтегральну функції розподілу і побудувати їх графіки;

б) знайти ймовірність того, що випадковим чином вибраний студент отримає менше 50 балів;

в) знайти ймовірність того, що оцінка випадковим чином обраного студента відрізняється від середньої оцінки у $60 + N$ балів не більше, ніж на 20 балів;

г) знайти абсолютну величину відхилення оцінки студентів від середньої оцінки у $60 + N$ балів, яку необхідно гарантувати з ймовірністю 0,7887 та довірчий інтервал для оцінки з ймовірністю 0,7887.

ЗАВДАННЯ 7

Ймовірність виготовлення бракованої деталі дорівнює 0,02. За добу цех виготовляє $100 + 10N$ деталей. Визначити:

1. Ймовірність того, що протягом доби цех виготовить не менше $90 + 10N$ і не більше $100 + 10N$ якісних деталей.

2. Ймовірність того, що частка бракованих деталей, виготовлених протягом доби, відрізняється за абсолютною величиною від ймовірності виготовлення бракованих деталей не більше, ніж на 0,01.

ЗАВДАННЯ 8

Для оцінки середньої урожайності деякої культури з одного гектара на всій площі в $1600 + 10 \cdot N$ га було проведене вибіркове обстеження врожайності на частині площі. Результати вибіркового обстеження наведені в таблиці:

Урожайність, ц/га (X)	$15 + N$	$16 + N$	$17 + N$	$18 + N$	$19 + N$
Посівна площа, га (m)	20	12	18	10	15

Визначити:

1) середню урожайність та дисперсію урожайності у вибірковій сукупності (використати метод моментів);

2) ймовірність того, що середня урожайність з 1 га на всій площі відхилиться від середньої урожайності у вибірковій сукупності не більше, ніж на $0,3 + 0,01 \cdot N$ центнерів;

3) межі, в яких з ймовірністю 0,6827 знаходиться середня урожайність на всій площі.

Література

1. Барковский В. В., Барковська Н. В. Вища математика: 5-вид. Навч. посіб.. – К.: Центр учбової літератури, 2010. 448 с.
2. Валеев К. Г., Джалладова І. А. Вища математика: Навч. посіб.: У 2-х ч. – К.: КНЕУ, 2001-2002. Ч. 1. 2001. 546 с.; Ч. 2. 2002. 451 с.
3. Донченко В. С., Сидоров М. В., Шарапов М. М. Теорія ймовірності та математична статистика: навчальний посібник. К.: Академія, 2009. 288 с.
4. Єрмакова О. А. Вища математика: Навч. посіб. для дистанц. форми навчання / За ред. В. М. Назаренка. К.: Ун-т «Україна», 2004. 444 с.
5. Кармелюк Г. І. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навч. посіб.. К.: Центр учбової літератури, 2007. 576 с.
6. Керекеша П. В. Лекції і вправи з вищої математики. Одеса: Астропринт, 2003. 520 с.
7. Ковтун І. О., Денисенко М. П., Кабанов В. Г. Основи актуарних розрахунків: навч. посіб. К.: ВД «Професіонал», 2008. 480 с.
8. Конет І. М. Теорія ймовірностей та математична статистика в прикладах і задачах: навчально-методичний посібник. Кам'янець-Подільський: Абетка, 2001. 218 с.
9. Лейфура В. М., Голодницкий Г. І., Файст Й. І. Математика. – К.: Техніка, 2003. 640 с.
10. Лопотко О. В. Інформатика: навч. посіб. – Львів: «Магнолія 2006», 2015. 246 с.
11. Медведєв М. Г., Пащенко І. О. Теорія ймовірностей та математична статистика. К.: «Ліра-К», 2008. 536 с.
12. Свердан П. Л. Математичний аналіз і теорія ймовірностей. – К.: Знання, 2008. 450 с.
13. Турчин В. М. Теорія ймовірностей: Основні поняття, приклади, задачі: навчальний посібник. К.: А.С.К., 2004. 476 с.
14. Фортуна В. В., Бескровний О. І. Вища та прикладна математика: Навч. посіб. – Львів: «Магнолія 2006», 2013. 647 с.

$$\text{Значення функції } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Цілі, десяті долі x	Соті долі x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3989	0,3989	0,3989	0,3989	0,3989	0,3989	0,3989
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003

3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,5	0,000016									
5,0	0,000002									

Навчальне видання

Шарай Наталія Вікторівна
Білозерова Марія Олександрівна

**ВИЩА МАТЕМАТИКА В ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ
ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І ЕЛЕМЕНТИ
СТАТИСТИКИ**

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК
для студентів 1 курсу факультету хімії та фармації
спеціальностей 102 «Хімія», «Фармацевтична хімія»
та 226 «Фармація, промислова фармація»

В авторській редакції

Підп. до друку 21.11.2023. Формат 60x84/16.
Ум.-друк. арк. 7,09. Наклад 16 пр.
Зам. № 2703.

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.
65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12, Україна
Тел.: (048) 723 28 39, e-mail: druk@onu.edu.ua