УДК 517.944

С. А. Щеголев
Одесский национальный университет имени И.И.Мечникова

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Рекомендовано до друку науковим семінаром
кафедри вищої математики ОНУ 29.09.2000

Досліджується крайова задача для рівняння гіперболічного типу, коефіцієнти якого мають вигляд тригонометричних сум з повільно змінними за часом коефіцієнтами та частотою.

Исследуется краевая задача для уравнения гиперболического типа, коэффициенты которого имеют вид тригонометрических сумм с медленно меняющимися по времени коэффициентами и частотой.

The boundary-value problem for a hyperbolic partial differential equation with coefficients given as trigonometric sums is considered. It is assumed that coefficients of sums and frequency slowly vary at time.

В данной работе продолжаются исследования [1-3], посвященные вопросам существования у дифференциальных уравнений и их систем частных решений, представимых рядами Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотой.

Ниже используются обозначения и определения из [1].

Определение. *Будем говорить, что функция вида*

$$f(t,\varepsilon,\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t,\varepsilon)\exp(in\theta(t,\varepsilon)),$$

принадлежит классу B_m^*, *если она принадлежит классу* B_m, *и* $\exists N_0\in N:\forall n>N_0$ *выполнено* $f_n\equiv f_{-n}\equiv 0$.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a(t,\varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(t,\varepsilon)u+c(x,t,\varepsilon,\theta)+\mu f\left(x,t,\varepsilon,\theta,u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{1}$$

$$0\le x\le l,\ \ -\infty<t<+\infty,\ 0\le\varepsilon\le\varepsilon_0<+\infty,\ 0<\mu\le\mu_0<+\infty,$$

$$u(0,t,\varepsilon)=p(t,\varepsilon,\theta),\ u(l,t,\varepsilon)=q(t,\varepsilon,\theta), \tag{2}$$

где $p,q,c\in B_m^*\ \ \forall x\in[0,l]$, $a,b\in S_m$ (определения классов S_m и B_m приведены в [1]). На функцию $f(x,t,\varepsilon,\theta,u,v,w)$ налагается следующее ограничение: она имеет в некоторой области D непрерывные частные производные по u,v,w до 5-го порядка включительно, и если $u,v,w\in B_m^*$, то эти частные производные также из $B_m^*\ \forall x\in[0,l]$.

Исследуется вопрос о наличии у задачи (1), (2) решения

$$u(x,t,\varepsilon,\theta,\mu)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(x,t,\varepsilon,\mu)\exp(in\theta(t,\varepsilon))\in B_m\ \ \forall x\in[0,l].$$

В работе [2] аналогичная задача рассматривалась для уравнения параболического типа.

С помощью замены $u = p + x(q-p)/l + v$, где v – новая неизвестная функция, сведем задачу (1),(2) к задаче с однородными краевыми условиями:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a(t,\varepsilon)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b(t,\varepsilon)v + c^*(x,t,\varepsilon,\theta) + \mu f^*\left(x,t,\varepsilon,\theta,v,\frac{\partial v}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial x}\right), \tag{3}$$

$$v(0,t,\varepsilon) = v(l,t,\varepsilon) = 0, \tag{4}$$

$c^* \in B_m^*$ $\forall x \in [0,l]$, свойства функции f^* аналогичны свойствам функции f.

Введя функции $w_1(x,t,\varepsilon,\theta) = v$, $w_2(x,t,\varepsilon,\theta) = \partial v/\partial t$, запишем задачу (3),(4) в виде системы:

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = w_2,\ \frac{\partial w_2}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + bw_1 + c^* + \mu f^*\left(x,t,\varepsilon,\theta,w_1,w_2,\frac{\partial w_1}{\partial x}\right), \tag{5}$$

$$w_1(0,t,\varepsilon,\theta) = w_1(l,t,\varepsilon,\theta) = 0. \tag{6}$$

Будем предполагать выполнение следующих условий:
$\forall N_1 \in N$ $\exists \gamma(N_1) > 0$ такое, что $\forall n \le N_1$, $\forall k,s \in N$:

$$\inf_G \left|\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 a(t,\varepsilon) - b(t,\varepsilon) - n^2\varphi^2(t,\varepsilon)\right| \ge \gamma, \tag{7}$$

$$\inf_G \left|\sqrt{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 a(t,\varepsilon) - b(t,\varepsilon)} \pm \sqrt{\left(\frac{s\pi}{l}\right)^2 a(t,\varepsilon) - b(t,\varepsilon)} - n\varphi(t,\varepsilon)\right| \ge \gamma, \tag{8}$$

где $\varphi = d\theta/dt$. Введем функции

$$c_k^*(t,\varepsilon,\theta) = \frac{2}{l}\int_0^l c^*(x,t,\varepsilon,\theta)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\ c_{kn}^*(t,\varepsilon) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_k^*(t,\varepsilon,\theta)\exp(-in\theta)d\theta,$$

$$w_{1k0}(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_{kn}^*(t,\varepsilon)\exp(in\theta(t,\varepsilon))}{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 a(t,\varepsilon) - b(t,\varepsilon) - n^2\varphi^2(t,\varepsilon)},$$

$$w_{2k0}(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{in\varphi(t,\varepsilon)c_{kn}^*(t,\varepsilon)\exp(in\theta(t,\varepsilon))}{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 a(t,\varepsilon) - b(t,\varepsilon) - n^2\varphi^2(t,\varepsilon)},$$

$$w_{10}(x,t,\varepsilon,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} w_{1k0}(t,\varepsilon,\theta)\sin\frac{k\pi x}{l},\ w_{20}(x,t,\varepsilon,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} w_{2k0}(t,\varepsilon,\theta)\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

В системе (5),(6) произведем замену

$$w_1 = w_{10} + w_{11},\ w_2 = w_{20} + w_{21}, \tag{9}$$

где w_{11}, w_{21} – новые неизвестные функции, относительно которых получим систему:

$$\frac{\partial w_{11}}{\partial t} = w_{21} + \varepsilon g_1(x,t,\varepsilon,\theta),$$

$$\frac{\partial w_{21}}{\partial t} = a(t,\varepsilon)\frac{\partial^2 w_{11}}{\partial x^2} + b(t,\varepsilon)w_{11} + \varepsilon g_2(x,t,\varepsilon,\theta) + \mu f_0(x,t,\varepsilon,\theta) + \mu(f_1(x,t,\varepsilon,\theta)w_{11} +$$
$$+ f_2(x,t,\varepsilon,\theta)w_{21} + f_3(x,t,\varepsilon,\theta)(w_{11})'_x + F(x,t,\varepsilon,\theta,w_{11},w_{21},(w_{11})'_x)), \tag{10}$$

функция w_{11} обращается в нуль при $x = 0$, $x = l$,

$$f_0 = f^*(x,t,\varepsilon,\theta,w_{10},w_{20},(w_{10})'_x),\ f_1 = \frac{\partial f^*(\ldots)}{\partial w_1},\ f_2 = \frac{\partial f^*(\ldots)}{\partial w_2},\ f_3 = \frac{\partial f^*(\ldots)}{\partial((w_1)'_x)},$$

$g_j = \sum_{k=1}^{\infty} g_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\sin\frac{k\pi x}{l}, \quad g_{jk} \in B_m^*$. $g_j = \sum_{k=1}^{\infty} g_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\sin\frac{k\pi x}{l}, \quad g_{jk} \in B_m^*$.

Повторяя аналогичный прием, приведем с помощью преобразования

$$w_{11} = w_{110} + w_{12}, \quad w_{21} = w_{210} + w_{22}, \tag{11}$$

где $w_{110}, w_{210} \in B_{m-1}^* \quad \forall x \in [0,l]$, систему (10) к виду:

$$\frac{\partial w_{12}}{\partial t} = w_{22} + g_1^*(x,t,\varepsilon,\theta,\mu),$$

$$\frac{\partial w_{22}}{\partial t} = a(t,\varepsilon)\frac{\partial^2 w_{12}}{\partial x^2} + b(t,\varepsilon)w_{12} + g_2^*(x,t,\varepsilon,\theta,\mu) + \mu(f_1(x,t,\varepsilon,\theta)w_{12} + f_2(x,t,\varepsilon,\theta)w_{22} +$$
$$+ f_3(x,t,\varepsilon,\theta)(w_{12})_x') + r_1(x,t,\varepsilon,\theta,\mu)w_{12} + r_2(x,t,\varepsilon,\theta,\mu)w_{22} + r_3(x,t,\varepsilon,\theta,\mu)(w_{12})_x' +$$
$$+ \mu F(x,t,\varepsilon,\theta,w_{12},w_{22},(w_{12})_x',\mu), \tag{12}$$

w_{12} обращается в нуль при $x=0,\ x=l, \quad g_j^* \in B_{m-2}^*, \left\|g_j^*\right\|_{B_{m-2}} \le \sigma_1(\mu,\varepsilon_0)$,

$r_j \in B_{m-1}^*, \left\|r_j\right\|_{B_{m-1}} \le \sigma_2(\mu,\varepsilon_0), \ \sigma_j = O(\mu^2 + \varepsilon_0^2)$.

Функция F_1 содержит слагаемые не ниже второго порядка относительно $w_{12}, w_{22}, (w_{12})_x'$.

Решение задачи (12) ищем, согласно [4], в виде:

$$w_{j2} = \sum_{k=1}^{\infty} w_{j2k}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\sin\frac{k\pi x}{l}, \quad j = 1,2,$$

предполагая при этом, что функция F_1 допускает представление:

$$F_1 = \sum_{k=1}^{\infty} F_{1k}(t,\varepsilon,\theta,\{w_{12}\},\{w_{22}\},\mu)\sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{13}$$

где $\{w_{j2}\} = \mathrm{colon}\{w_{j2k}\}_{k\in N}$ $(j=1,2)$. В результате получим счетную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно w_{j2k}:

$$\frac{dw_{12k}}{dt} = w_{22k} + g_{1k}^*(t,\varepsilon,\theta,\mu),$$

$$\frac{dw_{22k}}{dt} = \left(b - \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 a\right)w_{12k} + g_{2k}^*(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \mu\sum_{s=1}^{\infty}\left(R_{1s}^k(t,\varepsilon,\theta)w_{12s} + R_{2s}^k(t,\varepsilon,\theta)w_{22s}\right) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{\infty}\left(\rho_{1s}^k(t,\varepsilon,\theta,\mu)w_{12s} + \rho_{2s}^k(t,\varepsilon,\theta,\mu)w_{22s}\right) + \mu F_{1k}\left(t,\varepsilon,\theta,\{w_{12}\},\{w_{22}\},\mu\right), \ k = 1,2,\ldots, \tag{14}$$

в которой

$$g_{jk}^* = \frac{2}{l}\int_0^l g_j^*(x,t,\varepsilon,\theta,\mu)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,$$

$$R_{js}^k = \left(1 + \frac{s\pi}{l}\delta_j^1\right)\left(\frac{1-\cos k\pi}{k\pi}f_{js}^* + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_{\nu k}\left(f_{j,s+\nu}^* + f_{j,s-\nu}^*\right)\right),$$

$$\beta_{\nu k} = \frac{2}{l}\int_0^l \cos\frac{\nu\pi x}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}dx, \quad f_{jk}^* = \frac{2}{l}\int_0^l f_j^*(x,t,\varepsilon,\theta)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,$$

$$\rho_{js}^k \in B_{m-1}^*, \ \left\|\rho_{js}^k\right\|_{B_{m-1}} = O\left(\mu^2 + \varepsilon_0^2\right)$$

Введем следующие обозначения:

$$\omega_k(t,\varepsilon)=\sqrt{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 a(t,\varepsilon)-b(t,\varepsilon)},\ \ \omega_{k1}(t,\varepsilon)=\varepsilon^{-1}\frac{d\omega_k}{dt},\ \ \xi_k(t,\varepsilon)=\frac{i\omega_{k1}}{4\omega_k^2},$$

$$A_{ks}(t,\varepsilon,\theta)=\frac{\omega_s}{2\omega_k}R_{2s}^k+\frac{i}{2\omega_k}R_{1s}^k,\ \ B_{ks}(t,\varepsilon,\theta)=-\frac{\omega_s}{2\omega_k}R_{2s}^k+\frac{i}{2\omega_k}R_{1s}^k,$$

$$A_{ksn}(t,\varepsilon)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}A_{ks}(t,\varepsilon,\theta)\exp(-in\theta)d\theta,\ \ B_{ksn}(t,\varepsilon)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}B_{ks}(t,\varepsilon,\theta)\exp(-in\theta)d\theta,$$

$$U_{ks}(t,\varepsilon,\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{A_{ksn}\exp(in\theta)}{i(\omega_k-\omega_s+n\varphi)},\ \ V_{ks}^*(t,\varepsilon,\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{B_{ksn}\exp(in\theta)}{-i(\omega_k-\omega_s-n\varphi)}\ \ (k\neq s),$$

$$V_{ks}(t,\varepsilon,\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{B_{ksn}\exp(in\theta)}{i(\omega_k+\omega_s+n\varphi)},\ \ U_{ks}^*(t,\varepsilon,\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{A_{ksn}\exp(in\theta)}{-i(\omega_k+\omega_s-n\varphi)},$$

$$U_{kk}(t,\varepsilon,\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{A_{kkn}\exp(in\theta)}{in\varphi},\ \ V_{kk}^*(t,\varepsilon,\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{B_{kkn}\exp(in\theta)}{in\varphi}.$$

В соответствии с методикой работы [1] произведем в системе (14) подстановку, приводящую ее к почти диагональному виду:

$$w_{12k}=(1+\varepsilon\xi_k)w_{13k}+(1-\varepsilon\xi_k)w_{23k}+\mu\sum_{s=1}^{\infty}[((1+\varepsilon\xi_k)U_{ks}+(1-\varepsilon\xi_k)U_{ks}^*)w_{13s}+$$
$$+((1+\varepsilon\xi_k V_{ks}+(1-\varepsilon\xi_k)V_{ks}^*)w_{23s}],$$
$$w_{22k}=-i\omega_k[(1-\varepsilon\xi_k)w_{13k}-(1+\varepsilon\xi_k)w_{23k}+\mu\sum_{s=1}^{\infty}(((1-\varepsilon\xi_k)U_{ks}-(1+\varepsilon\xi_k)U_{ks}^*)w_{13s}+$$
$$+((1-\varepsilon\xi_k)V_{ks}-(1+\varepsilon\xi_k)V_{ks}^*)w_{23s})],\tag{15}$$

предполагая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\left(\|A_{ks}\|_{B_m}+\|B_{ks}\|_{B_m}\right)<+\infty.\tag{16}$$

В полученной в результате этого системе произведем еще одну подстановку:

$$w_{13k}=w_{14k}-\mu\frac{iB_{kk0}}{2\omega_k}w_{24k},\quad w_{23k}=-\mu\frac{iA_{kk0}}{2\omega_k}w_{14k}+w_{24k}.\tag{17}$$

Нетрудно убедиться, что при достаточно малых μ и ε преобразования (15),(17) невырождены, и в результате их применения придем к системе:

$$\frac{dw_{j4k}}{dt}=\left((-1)^j i\omega_k-\frac{\varepsilon\omega_{k1}}{2\omega_k}+\mu(-1)^{j+1}(\delta_j^1A_{kk0}+\delta_j^2B_{kk0})\right)w_{j4k}+h_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)+$$
$$+\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{\infty}\eta_{jkrs}(t,\varepsilon,\theta,\mu)w_{r4s}+\mu G_{jk}\left(t,\varepsilon,\theta,\{w_{14}\},\{w_{24}\},\mu\right),\ \ j=1,2;\ k=1,2,\ldots;\tag{18}$$

где $h_{jk},\eta_{jkrs}\in B_{m-2}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\|h_{jk}\|_{B_{m-2}}+\sum_{s=1}^{\infty}\|\eta_{jkrs}\|_{B_{m-2}}\right)=O\left(\mu^2+\varepsilon_0^2\right)$,

нелинейности G_{jk} содержат слагаемые не ниже 2-го порядка относительно w_{24s}.

Используя теперь результаты [3], полученные для счетных квазилинейных почти треугольных систем с коэффициентами из классов B_k $(0\le k\le m)$, получим следующее утверждение:

Теорема. *Пусть краевая задача* (1),(2) *такова что:*

1) $\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \inf_G |a(t,\varepsilon)| - \sup_G |b(t,\varepsilon)| > 0,$
2) *выполнены условия* (7),(8),
3) *для функции* F_1 *в системе* (12) *справедливо представление* (13),
4) *выполнены условия* (16),
5) $\inf_G |\mathrm{Re}(A_{kk0}(t,\varepsilon))| \geq \gamma_0 > 0, \ \inf_G |\mathrm{Re}(B_{kk0}(t,\varepsilon)| \geq \gamma_0 > 0.$

Тогда $\exists \mu^* \in R^+$, $\varepsilon_0^*(\mu) \in [0, \varepsilon_0]$ *такие, что* $\forall \mu \in \left]0, \mu^*\right[$, $\forall \varepsilon \in \left[0, \varepsilon_0^*(\mu)\right[$ *задача* (1),(2) *обладает решением вида*

$$u(x,t,\varepsilon,\theta,\mu) = p(t,\varepsilon,\theta) + \frac{x}{l}\big(q(t,\varepsilon,\theta) - p(t,\varepsilon,\theta)\big) + v(x,t,\varepsilon,\theta,\mu),$$

где

$$v(x,t,\varepsilon,\theta,\mu) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t,\varepsilon,\theta,\mu) \sin\frac{k\pi x}{l},$$

а функции v_k $(k = 1,2,\ldots)$ *принадлежат классу* B_{m-2}.

1. **Костин А. В., Щеголев С. А.** О решениях квазилинейной дифференциальной системы второго порядка, представимых рядами Фурье, содержащими медленно меняющиеся параметры // Укр. матем. журнал. – 1998. – Т. 50, № 5. – С. 654–664.
2. **Щеголев С. А.** Построение решения квазилинейного дифференциального уравнения в частных производных параболического типа с осциллирующими и медленно меняющимися коэффициентами // Укр. матем. журнал. – 1995. – Т. 47, № 8. – С. 1129–1135.
3. **Щеголев С. А.** Об одном классе решений счетной квазилинейной системы дифференциальных уравнений, содержащей медленно меняющиеся параметры // Укр. матем. журнал. – 1998. – Т. 50, № 8. – С. 1121–1128.
4. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.