Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2011. – Т. 16, вип. 16. – С. 9 19

МАТЕМАТИКА

УДК 519.713.2

А. С. Антоненко
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ПОЛУГРУППА, ПОРОЖДЕННАЯ ВСЕМИ МАЛОПОДВИЖНЫМИ АВТОМАТНЫМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ КОНЕЧНОГО ТИПА НАД ДВУХСИМВОЛЬНЫМ АЛФАВИТОМ

Антоненко О. С. Напівгрупа, породжена усіма малорухомими автоматними перетвореннями скінченного типу над двохсимвольним алфавітом. Доведено відсутність мінімальної породжуючої множини напівгрупи,породженої усіма малорухомими автоматними перетвореннями скінченного типу.
Ключові слова: скінченні автомати, автоматні перетворення, самоподібні напівгрупи.

Антоненко А. С. Полугруппа, порожденная всеми малоподвижными автоматными преобразованиями конечного типа над двухсимвольным алфавитом. Доказано отсутствие минимального порождающего множества полугруппы, порожденной всеми малоподвижными автоматными преобразованиями конечного типа.
Ключевые слова: конечные автоматы, автоматные преобразования, самоподобные полугруппы.

Antonenko A. S. Semigroup generated by all slowmoving automaton transformations of finite type over two-symbol alphabet. It is proved that there is no minimal generating set of semigroup generated by all slowmoving automata transformations of finite type.
Key words: finite automata, automaton transformations, selfsimilar semigroups.

Введение. Теория групп и полугрупп автоматных преобразований исследуется начиная с середины прошлого столетия. Одним из первых результатов стало отсутствие конечного множества порождающих элементов для группы (и полугруппы) конечно-автоматных преобразований [1, 2]. Обзор современных результатов в области групп и полугрупп автоматных преобразований представлен в работах [3, 4]. Одним из наиболее интересных результатов в теории полугрупп автоматных преобразований является теорема об отсутствии минимальных порождающих множеств в полугруппе $FTA(X)$, порожденной всеми конечно-автоматными преобразованиями над произвольным алфавитом X, где $|X| \geqslant 2$ [5]. Для группы, порожденной всеми обратимыми конечно-автоматными преобразованиями, пока неизвестно, существует или нет минимальное порождающее множество.

В статье [6] автором найдено порождающее множество для полугруппы SSl_2, порожденной малоподвижными автоматными преобразованиями над двухсимольным алфавитом, которое, впрочем, не является минимальным (неприводимым).

Целью данной статьи было дополнительное исследование порождающих множеств полугруппы SSl_2 и нахождения минимального порождающего множества либо доказательства, что его не существует. В данной статье улучшено порождающее множество из [6], рассмотрены свойства порождающих элементов и некоторые соотношения между ними. Основным результатом является доказательство того, что в SSl_2 не существует неприводимых порождающих множеств.

Мы будем рассматривать только конечные автоматы Мили с совпадающими входными и выходными алфавитами и будем обозначать их четверками $A = (X, Q, \pi, \lambda)$, где X – конечный алфавит, Q — конечное множество состояний, $\pi : X \times Q \to Q$ — функция перехода, $\lambda : X \times Q \to X$ — функция выхода. Автомат, начиная работать из некоторого состояния $q \in Q$, определяет преобразование конечных или бесконечных слов, называемое автоматным преобразованием. Если множество состояний автомата конечно, то автомат называется конечным, и, соответственно, преобразования, определяемые им, называются конечно-автоматными. Множество всех автоматных преобразований образует полугруппу относительно операции композиции, а множество всех конечно-автоматных преобразований — ее подполугруппу. Аналогично, множество всех обратимых автоматных преобразований образует группу. Группа (полугруппа), порождаемая преобразованиями, определяемыми автоматом во всех его состояниях, называется группой (полугруппой), порожденной автоматом. Обозначим через X^* – множество всех конечных слов над алфавитом X, а через X^ω – множество всех бесконечных слов над алфавитом X. Через T_Y обозначим полугруппу всех преобразований множества Y (симметрическую полугруппу).

Определение 1. [3] *Пусть $f : X^* \to X^*$ ($f : X^\omega \to X^\omega$) — автоматное преобразование и $u = a_1 a_2 \ldots a_m \in X^*$ — некоторое конечное слово. Ограничением (или проекцией) преобразования f на слове u называется преобразование $f|_u$, действующее на X^* (соответственно, X^ω) по формуле $f|_u(x_1 x_2 \ldots) = \Pi_m f(a_1 a_2 \ldots a_m x_1 x_2 \ldots)$, где Π_m – оператор вычеркивания первых m букв слова (или ω-слова).*

Для ограничений выполнены следующие свойства: $f(uw) = f(u)\, f|_u(w)$, $(f \circ g)|_u = f|_{g(u)} \circ g|_u$, где $f : X^* \to X^*$, $g : X^* \to X^*$ (или $f : X^\omega \to X^\omega$, $g : X^\omega \to X^\omega$), $u \in X^*$, $w \in X^*$ (соответственно, $w \in X^\omega$). Группа или полугруппа G автоматных преобразований называется самоподобной, если для любого элемента $g \in G$ и любого символа $x \in X$ выполнено $g|_x \in G$. Группа или полугруппа автоматных преобразований является самоподобной, тогда и только тогда, когда она порождена некоторым автоматом (возможно, бесконечным).

Основные результаты.

1. Классификация состояний.

Рассмотрим два типа состояний из классификации состояний автоматов [6].

Определение 2. *Пусть $\pi : X \times Q \to Q$ – функция перехода автомата Мили. Назовем состояние $q \in Q$*

1. *состоянием покоя, если для каждого $x \in X$ выполнено $\pi(x, q) = q$ (т. е. автомат остается в этом состоянии под воздействием любого входного символа);*

2. *состоянием ожидания символа x, если $\pi(x,q) \neq q$, а для любого символа $x' \in X\backslash\{x\}$ выполнено $\pi(x',q) = q$ (т. е. автомат остается в состоянии q, пока на вход не поступит символ x).*

Определение 3. *Назовем автомат A малоподвижным, если все его состояния являются состояниями покоя или ожидания.*

Другими словами, для каждого состояния q существует не более одного символа x такого, что $\pi(x,q) \neq q$.

Определение 4. *Назовем преобразование $f : X^{\omega} \to X^{\omega}$ малоподвижным, если оно может быть определено малоподвижным автоматом.*

Так как класс малоподвижных автоматов слишком обширен, то в данной работе исследуются только преобразования, порождаемые малоподвижными автоматами конечного типа.

Определение 5. *[6] Назовем конечный автомат A автоматом конечного типа, если при любой последовательности входных символов и при любом начальном состоянии последовательность состояний, в которых находится автомат, стабилизируется.*

Определение 6. *[6] Преобразование бесконечных слов $f : X^{\omega} \to X^{\omega}$ назовем конечноавтоматным преобразованием конечного типа, если существует автомат конечного типа, определяющий преобразование f в некотором начальном состоянии.*

Теорема 1. *[6] Конечный автомат является автоматом конечного типа тогда и только тогда, когда его диаграмма Мура представляет собой ориентированный граф, не содержащий ориентированных циклов, кроме петель.*

2. Малоподвижные автоматы конечного типа над двухсимвольным алфавитом и преобразования, ими определяемые.

Рассмотрим малоподвижные автоматы конечного типа (не обязательно обратимые) над двухсимвольным алфавитом $X = \{0,1\}$. Для того, чтобы описать преобразования, определяемые такими автоматами, определим операторы, действующие над функциями из $T_{X^{\omega}}$.

Пусть p это некоторое преобразование из множества

$$T_X = T_2 = \left\{ id = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, inv = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Распространим действие преобразования p на множества X^*, X^{ω} посимвольно, т. е. для произвольных слов $u_1u_2\dots u_k \in X^*$, $v_1v_2\dots \in X^{\omega}$ определим $p(u_1u_2\dots u_k) = p(u_1)p(u_2)\dots p(u_k)$ и $p(v_1v_2\dots) = p(v_1)p(v_2)\dots$.

Определим операторы $px]$, где $p \in T_X$, $x \in X$, следующим образом:

$$px] : T_{X^{\omega}} \to T_{X^{\omega}}, \quad px]f = g,$$

где g действует по правилу

$$g(\bar{x}^n x w) = p(\bar{x}^n x)\, f(w), \forall w \in X^{\omega}, n \geq 0, \quad g(\bar{x}^*) = p(\bar{x}^*)$$

и $\bar{x} = 1 - x$.

Таким образом, пока не встретился символ x, преобразование $px]f$ действует как преобразование p, первый символ x тоже преобразуется при помощи p, а все символы после него преобразовываются при помощи f.

Обозначим

$$W_S = \{px]|p \in T_2, x \in X\} = \{p0], p1]|p \in T_2\},$$

$$W_G = \{px]|p \in \{id, inv\}, x \in X\} = \{id0], id1], inv0], inv1]\}.$$

Теорема 2. *[6] Пусть A малоподвижный автомат конечного типа, тогда любое преобразование f, определяемое им, представимо в виде*

$$f = h_1 h_2 \ldots h_k p, \text{ где } h_i \in W_S, p \in T_2, k \geq 0, \tag{1}$$

При этом если f обратимо, то все $h_i \in W_G$.

Верно также обратное утверждение, что если преобразование f представимо в виде (1), то оно может быть задано малоподвижным автоматом конечного типа. Причем если все $h_i \in W_G$, то f обратимо.

Введем еще одно обозначение для операторов из W_S:

$$px] = \begin{pmatrix} a \\ p(x) \\ x \end{pmatrix}, a = \begin{cases} 1, & p \in \{\alpha, \beta\} \\ 0, & p \in \{id, inv\}. \end{cases}$$

Будем считать, что $p^0 = id$, а $p^1 = p$, $p \in T_2$. Обозначим $\overline{x} = 1 - x$, $x \in X = \{0, 1\}$.

Теорема 3. *[6] Для операторов из W_S выполнены следующие свойства:*

1. *Конечноавтоматное преобразование под действием оператора вида $p0]$ или $p1]$ переходит в конечноавтоматное.*
2. *$px_1]px_2] \ldots px_k]p = p$, for all $p \in T_2, x_i \in X, i = \overline{1, k}$.*
3. *для всех $g \in T_{X^\omega}$, $a, b \in X$, $x \in X^\omega$, $n \geq 0$*

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} g\right)\left(\overline{b}^n bx\right) = \overline{a}^n ag(x), \quad \left(\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} g\right)\left(\overline{b}^*\right) = \overline{a}^*,$$

4. *для всех $g \in T_{X^\omega}$, $a, b \in X$, $x \in X^\omega$, $n \geq 0$*

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} g\right)\left(\overline{b}^n bx\right) = a^{n+1} g(x), \quad \left(\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} g\right)\left(\overline{b}^*\right) = a^*$$

5. $$\begin{pmatrix} d \\ a \\ b \end{pmatrix} f \circ \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} d \\ a \\ c \end{pmatrix} (f \circ g), \quad \forall f, g \in T_{X^\omega}, a, b, c \in X.$$

6. $inv^x \circ \begin{pmatrix} d \\ a \\ b \end{pmatrix} f \circ inv^y = \begin{pmatrix} d \\ a+x \\ b+y \end{pmatrix} (inv^x \circ f \circ inv^y), \quad \forall f \in T_{X^\omega},\ a,b,x,y \in X,$ *сложение здесь и далее производится по модулю 2.*

Введем следующие обозначения,

$$\alpha_0 = inv, \quad \alpha_1 = id0]inv, \quad \alpha_2 = id0]id0]inv, \quad \dots, \quad \alpha_n = id0]^n inv, \quad \dots$$
$$\beta_0 = \alpha 0]id, \beta_1 = id0]\alpha 0]id, \beta_2 = id0]id0]\alpha 0]id, \dots, \beta_n = id0]^n \alpha 0]id, \dots$$
$$\gamma_0 = \alpha 0]inv, \gamma_1 = id0]\alpha 0]inv, \gamma_3 = id0]id0]\alpha 0]inv, \dots, \gamma_n = id0]^n \alpha 0]inv, \dots$$
$$\delta_0 = \alpha, \quad \delta_1 = id0]\alpha, \quad \delta_2 = id0]id0]\alpha, \quad \dots, \quad \delta_n = id0]^n \alpha, \quad \dots$$
$$\lambda_{1,i} = \alpha_i, \lambda_{2,i} = \beta_i, \lambda_{3,i} = \gamma_i, \lambda_{4,i} = \delta_i, i \geq 0$$

Эти обозначения аналогичны соответствующим обозначениям [6], но с измененной нумерацией для β_i и γ_i.

Очевидно, имеем $\lambda_{j,i+1} = id0]\lambda_{j,i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda_{j,i}, i \geq 0, 1 \leq j \leq 4.$

Все α_i являются инволюциями, т. е. $\alpha_i^2 = id$, все β_i, δ_i – идемпотентами, т. е. $\beta_i^2 = \beta_i, \delta_i^2 = \delta_i$ (см. [6]). γ_i, очевидно, не являются идемпотентами.

Докажем $\gamma_i = \beta_i \alpha_{i+1}$. Действительно,

$$\beta_0 \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} id \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} inv = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} inv = \gamma_0,$$

откуда $\gamma_i = id0]^i \gamma_0 = id0]^i (\beta_0 \alpha_1) = id0]^i \beta_0 \circ id0]^i \alpha_1 = \beta_i \alpha_{i+1}$.

Преобразования α_i, β_i, δ_i имеют следующий развернутый вид:

$$\begin{array}{ll} \alpha_0 = (\alpha_0, \alpha_0) inv, & \alpha_i = (\alpha_{i-1}, \alpha_i),\ i > 0 \\ \beta_0 = (id, \beta_0)\alpha, & \beta_i = (\beta_{i-1}, \beta_i),\ i > 0 \\ \delta_0 = (\delta_0, \delta_0)\alpha, & \delta_i = (\delta_{i-1}, \delta_i),\ i > 0 \end{array}$$

Все малоподвижные преобразования конечного типа над двухсимвольным алфавитом могут быть представлены в виде композиции $\alpha_i, \beta_i, \delta_i$.

Теорема 4. *Любое малоподвижное преобразование конечного типа* $f = h_1 h_2 \dots h_k p$, *где* $h_i \in W_S$, $p \in T_2$, $k \geq 0$, *представимо в виде*

$$f = f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_r,\ r > 0,\ f_j \in \left\{ \alpha_i, \beta_i, \delta_i \middle| i = \overline{0, \infty} \right\},\ j = \overline{1, r} \tag{2}$$

Точнее, если $h_i = \begin{pmatrix} c_{i-1} \\ b_{i-1} \\ a_{i-1} \end{pmatrix}$, $a_{i-1}, b_{i-1}, c_{i-1} \in X$, $i = \overline{1,k}$, *тогда*

$$\begin{gathered} f = L_0 (c_0, a_0, b_0) \circ L_1 (c_1, a_1, b_1) \circ \dots \circ L_{k-1} (c_{k-1}, a_{k-1}, b_{k-1}) \circ \\ \circ\, C_k (p) \circ R_{k-1} (b_{k-1}) \circ \dots \circ R_1 (b_1) \circ R_0 (b_0) \end{gathered} \tag{3}$$

где

$$L_i(c,a,b) = \begin{cases} \alpha_i^a \circ \alpha_{i+1}^a, & \textit{если } c = 0 \\ \alpha_i^a \circ \beta_i \circ \alpha_{i+1}^a, & \textit{если } c = 1, \end{cases}$$

$$R_i(b) = \alpha_{i+1}^b \circ \alpha_i^b$$

$$C_i(p) = \begin{cases} id, & \textit{if } p = id \\ \alpha_i, & \textit{if } p = inv \\ \delta_i, & \textit{if } p = \alpha \\ \alpha_i \circ \delta_i, & \textit{if } p = \beta \end{cases}$$

Вид функции (3) превращается в вид функции (2) отбрасыванием id из композиции (3), кроме случая $f = id = \alpha_0\alpha_0$.

Доказательство. Будем вести доказательство индукцией по числу k.

База индукции. Пусть $k = 0$. Тогда $f = p \in \{id, inv, \alpha, \beta\}$, и

$$id = C_0(id) = \alpha_0 \circ \alpha_0, \quad inv = \alpha_0 = C_0(inv), \quad \alpha = \delta_0 = C_0(\alpha), \\ \beta = inv \circ \alpha = \alpha_0 \circ \delta_0 = C_0(\beta),$$

т. е. f представимо в видах (2) и (3).

Предположим, что утверждение теоремы выполняется и докажем теорему для $k = l + 1$. Обозначим $g = h_2 h_3 \dots h_k p$, тогда $f = h_1 g$ и по предположению g представимо в виде $g = L_0(c_1, a_1, b_1) \circ L_1(c_2, a_2, b_2) \circ \dots \circ L_{k-2}(c_{k-1}, a_{k-1}, b_{k-1}) \circ \circ C_{k-1}(p) \circ R_{k-2}(b_{k-1}) \circ \dots \circ R_0(b_1)$. Заметим, что $id0]L_i(c,a,b) = L_{i+1}(c,a,b)$, $id0]R_i(b) = R_{i+1}(b)$, $id0]C_i(p) = C_{i+1}(p)$, следовательно

$$id0]g = L_1(c_1, a_1, b_1) \circ L_2(c_2, a_2, b_2) \circ \dots \circ L_{k-1}(c_{k-1}, a_{k-1}, b_{k-1}) \circ C_k(p) \circ \\ \circ R_{k-1}(b_{k-1}) \circ \dots \circ R_1(b_1)$$

Рассмотрим два случая:

Пусть $h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$. Тогда

$$\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} g = inv^a \circ \left(inv^a \circ \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} g \circ inv^b \right) \circ inv^b = \\ = inv^a \circ \left(\begin{pmatrix} 0 \\ a+a \\ b+b \end{pmatrix} \left(inv^a \circ g \circ inv^b \right) \right) \circ inv^b = \\ = \alpha_0^a \circ \left(id0] \left(\alpha_0^a \circ g \circ \alpha_0^b \right) \right) \circ inv^b = \\ = \alpha_0^a \circ \alpha_1^a \circ id0]g \circ \alpha_1^b \circ \alpha_0^b = L_0(0,a,b) \circ id0]g \circ R_0(b)$$

откуда следует (3).

Пусть $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$. Тогда

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} id \circ \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ b \end{pmatrix} g =$$

$$= inv^a \circ \left(inv^a \circ \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} id \circ inv^b \right) \circ inv^b \circ inv^b \circ \left(inv^b \circ \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ b \end{pmatrix} g \circ inv^b \right) \circ inv^b =$$

$$= inv^a \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left(inv^a \circ id \circ inv^b \right) \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left(inv^b \circ g \circ inv^b \right) \circ inv^b =$$

$$= \alpha_0^a \circ \alpha 0] inv^{a+b} \circ \alpha_1^b \circ id0] g \circ \alpha_1^b \circ \alpha_0^b = L_0\left(1, a, b\right) \circ id0] g \circ R_0\left(b\right),$$

откуда следует (3). Действительно, если $a = b$, то $a + b = 0$, $\alpha_0^a \circ \alpha 0] inv^{a+b} \circ \alpha_1^b = \alpha_0^a \circ \alpha 0] id \circ \alpha_1^b = \alpha_0^a \circ \beta_0 \circ \alpha_1^a = L(1, a, b)$, иначе если $a+b = 1$, то $\alpha_0^a \circ \alpha 0] inv^{a+b} \circ \alpha_1^b = \alpha_0^a \circ \alpha 0] inv \circ \alpha_1^b = \alpha_0^a \circ \gamma_0 \circ \alpha_1^b = \alpha_0^a \circ \beta_0 \circ \alpha_1 \circ \alpha_1^b = \alpha_0^a \circ \beta_0 \circ \alpha_1^{a+b} \circ \alpha_1^b = \alpha_0^a \circ \beta_0 \circ \alpha_1^a = L(1, a, b)$. □

Разложение (3) не обязательно минимально. Для уменьшения количества элементов в (3) можно удалить фрагменты вида $\alpha_i \circ \alpha_i$, равные id.

3. Полугруппа, порожденная всеми малоподвижными автоматными преобразованиями конечного типа над двухсимвольным алфавитом.

Рассмотрим полугруппу, порожденную всеми малоподвижными автоматными преобразованиями конечного типа над двухсимвольным алфавитом. Обозначим ее через SSl_2. По Теореме 4

$$SSl_2 = \left\langle \alpha_i, \beta_i, \delta_i : i = \overline{0, \infty} \right\rangle$$

Лемма 1. *Для произвольных целых i, j таких, что $0 \leq i < j$, выполнено соотношение*

$$\delta_i = \beta_i \beta_{i+1} \cdots \beta_{j-1} \delta_j$$

Доказательство. Докажем вначале, что $\delta_0 = \beta_0 \delta_1$. Действительно $\beta_0 \delta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} id \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha = \alpha 0] \alpha = \alpha = \delta_0$.

Тогда для любого $i \geq 0$ выполнено $\delta_i = id0]^i \delta_0 = id0]^i (\beta_0 \delta_1) = id0]^i \beta_0 \circ id0]^i \delta_1 = \beta_i \delta_{i+1}$, откуда следует утверждение леммы. □

Таким образом, δ с меньшими индексами можно выразить через δ с большими индексами, но (как мы увидим далее) не наоборот. Значит, множество $\left\{\alpha_i, \beta_i, \delta_i : i = \overline{0, \infty}\right\}$ не является неприводимым порождающим множеством (так как из порождающего множества можно выбросить любое конечное количество элементов δ_i). Мы докажем, что полугруппа SSl_2 не содержит неприводимых порождающих множеств. Для этого более глубоко изучим свойства порождающих элементов α_i, β_i, δ_i.

Рассмотрим три серии подмножеств SSl_2:

$$B_i = \{g \in SSl_2 \mid g : X^i \to X^i \text{ — биективно}\} =$$
$$= \{g \in SSl_2 \mid \forall w_1, w_2 \in X^i [g(w_1) = g(w_2) \Leftrightarrow w_1 = w_2]\}$$

$$C_i = \{g \in SSl_2 \mid \exists x \in X^i : g|_x \text{ — константно}\} =$$
$$= \{g \in SSl_2 \mid \exists x \in X^i, \forall w_1, w_2 \in X^* [g(xw_1) = g(xw_2)]\}$$

$$D_i = B_i \cap C_i, \quad i = \overline{0, \infty}$$

Очевидно, выполнены следующие включения

$$B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \cdots$$
$$C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset \cdots$$

Также выполнено $B_0 = SSl_2$ — совпадает со всей полугруппой (все элементы SSl_2 биективны на пустом слове), C_0 состоит из всех константных отображений из SSl_2 (будем считать проекцией элемента $g \in SSlt$ на пустое слово сам элемент g), $\bigcap_{i=\overline{0,\infty}} B_i = GSlC_2$ — совпадает с группой обратимых элементов SSl_2. Обозначим

$$C = \bigcup_{i=\overline{0,\infty}} C_i = \{g \in SSl_2 \mid \exists x \in X^* : g|_x \text{ — константно}\}$$

— множество элементов, имеющих константную проекцию. Непосредственно проверяется, что для порождающих элементов выполнены следующие включения:

1. $\alpha_i \in GSlC_2$, $\alpha_i \notin C$ для любого $i \geq 0$;
2. $\beta_i \in B_i$, $\beta_i \notin B_{i+1}$, $\beta_i \notin C$, для любого $i \geq 0$;
3. $\delta_i \in D_i$, $\delta_i \notin B_{i+1}$ для любого $i \geq 0$ и $\delta_i \notin C_{i-1}$ для любого $i \geq 1$.

Таким образом, множества D_i, а значит, и B_i, C_i непусты. Легко видеть, что B_i, C_i, D_i — подполугруппы SSl_2. Действительно, если преобразования слов g и h биективны на словах длины i, то и их композиция gh биективна на словах длины i. Далее, если $g|_x$ константно для $x \in X^i$, то $(hg)|_x$ тоже константно для любого преобразования слов h, т. е. C_i является левым идеалом в SSl_2. Также очевидно, что $SSl_2 \setminus B_i$ является двусторонним идеалом в SSl_2, так как если $g \in SSl_2 \setminus B_i$, т. е. $g : X^i \to X^i$ — не биективно, то для любого $h \in SSl_2$ не могут быть биективными отображения $gh : X^i \to X^i$ и $hg : X^i \to X^i$.

Лемма 2. *Для любых элементов $g, h \in SSl_2$ и неотрицательного целого i выполнено $g\delta_i h \in C$ (т. е. композиции, включающие в себя δ_i, имеют константные проекции).*

Доказательство. Если $i = 0$, то δ_0 левый ноль и $g\delta_0 h = g\delta_0$ и для любого $x \in X$ выполнено $(g\delta_0 h)(x) = (g\delta_0)(x) = g(0^*)$, т. е. $g\delta_0 h$ — константно.

Предположим теперь, что $i > 0$. Запишем h через в виде композиции образующих SSl_2. Без ограничения общности можно считать, в этой композиции нет элементов δ_j (иначе возьмем последний δ_j из композиции в качестве нового δ_i). Предположим сначала, что в разложении h нет элементов вида β_j, т. е. он обратим. Тогда по некоторому символу x (нулю или единице) проекция $g\delta_i h$ имеет вид $(g\delta_i h)|_x = g|_0 \circ \delta_i|_0 \circ h_x = g|_0 \circ \delta_{i-1} \circ h_x$, т. е. на месте δ_i стоит δ_{i-1} (мы будем говорить, что δ_i опустился), причем h' опять обратимо. Продолжая проектировать, так чтобы выбранный элемент δ опускался, получим константную проекцию вида $(g\delta_i h)|_w = g'\delta_0 h'$, т. е. получено $g\delta_i h \in C$. Если же в разложении h были элементы вида β_j, то будем проектировать элемент $g\delta_i h$ так, чтобы опускалось сначала последнее β_j до β_0 (это сделать можно, так как далее стоит обратимый элемент), а в следующей проекции β_0 исчезнет. При этом некоторые из остальных элементов $\beta_{j'}$ в h, возможно, опустятся или даже исчезнут, а δ_i превратится в $\delta_{i'}$, где $i' \le i$. Таким образом, некоторая проекция $(g\delta_i h)|_{w'} = g'\delta_{i'}h'$, где в разложении h' количество элементов вида β_j строго меньше, чем в изначальном разложении элемента h. Если $i' > 0$, будем продолжать проектировать элемент $g'\delta_{i'}h'$, поочередно опуская элементы β_j из h, пока они все не исчезнут, после чего опустим $\delta_{i'}$ и получим $(g\delta_i h)|_{w''} = g''\delta_0 h''$, т.е. $g\delta_i h \in C$. □

Лемма 3. *Элемент $s \in SSl_2$ представим в виде композиции α_i и β_i тогда и только тогда, когда он не имеет константных проекций, т. е.*

$$\langle \alpha_i, \beta_i : i = \overline{0,\infty} \rangle = SSl_2 \setminus C.$$

Более того, любой элемент полугруппы $\langle \alpha_i, \beta_i : i = \overline{0,\infty} \rangle$ имеет либо тождественную проекцию, либо проекцию, равную α_0. Множество C является двусторонним самоподобным идеалом SSl_2 и элементы из C не имеют обратимых проекций.

Доказательство. Пусть $s \in SSl_2 \setminus \langle \alpha_i, \beta_i : i = \overline{0,\infty} \rangle$. Тогда s имеет в представлении через порождающие элементы SSl_2 элемент δ_i, т. е. представим в виде $s = g\delta_i h$, откуда $s \in C$.

Предположим теперь, что $s \in \langle \alpha_i, \beta_i : i = \overline{0,\infty} \rangle$. Учитывая, что $\langle \alpha_i, \beta_i : i = \overline{0,\infty} \rangle$ самоподобная группа, любая проекция элемента s тоже принадлежит $\langle \alpha_i, \beta_i : i = \overline{0,\infty} \rangle$. Более того, последовательно опуская элементы β_i, мы получим обратимую проекцию, а затем, опуская элементы α_i до α_0 и учитывая, что $\alpha_0^2 = id$, мы получим либо тождественную проекцию, либо проекцию α_0. Так как произвольная проекция $s|_w$ принадлежит $\langle \alpha_i, \beta_i : i = \overline{0,\infty} \rangle$, то она имеет проекцию $(s|_w)|_v \in \{id, \alpha_0\}$, и следовательно, не может быть константной, т. е. $s \in SSl_2 \setminus C$.

Так как δ_i в любой проекции всегда дает δ_j, где $j \le i$, то любая проекция элемента из C снова принадлежит C, откуда C – двусторонний самоподобный идеал SSl_2. Соответственно, проекция элемента из C не может быть обратимой, так как C не содержит обратимых элементов. □

Теорема 5. *Полугруппа SSl_2 не содержит неприводимых порождающих множеств.*

Доказательство. Пусть X — некоторое произвольное порождающее множество полугруппы SSl_2. Очевидно, что в X есть элемент из C, иначе $\langle X \rangle \subset SSl_2 \setminus C$ (так как $SSl_2 \setminus C$ — подполугруппа SSl_2). Пусть $x \in X \cap C$, и, например, проекция $x|_w$ константна. Тогда $x \in C_i$ для некоторого i, равного длине слова w, и $x \notin B_{i+1}$, так как $x(w0) = x|_w(0) = x|_w(1) = x(w1)$. Очевидно, что для произвольных целых $j \leq 0$ и $k \leq i+1$ элементы $\alpha_j, \beta_j, \delta_k \in \langle X \rangle$, т. е. выражаются в виде композиций элементов из X. Но так как $\alpha_j, \beta_j, \delta_k \in B_{i+1}$, $x \in SSl_2 \setminus B_{i+1}$, а $SSl_2 \setminus B_{i+1}$ — двусторонний идеал SSl_2, то элементы $\alpha_j, \beta_j, \delta_k$ не могут выражаться через x, а следовательно, являются композицией элементов $X \setminus \{x\}$. Но множество $\{\alpha_j, \beta_j, \delta_k | j = \overline{0,\infty}, k = \overline{i+1,\infty}\}$ является порождающим для SSl_2, откуда и $X \setminus \{x\}$ — порождающее множество полугруппы SSl_2. Значит, произвольное порождающее множество X полугруппы SSl_2 не является неприводимым, что и требовалось доказать. □

С другой стороны, $\{\alpha_i | i = \overline{0,\infty}\}$ — неприводимая система образующих группы $GSlC_2$ (см., например, [7], [8]). Очевидно, что α_i не могут выражаться через композицию элементов из $\{\alpha_i, \beta_i, \delta_i : i = \overline{0,\infty}\}$, содержащую хотя бы один элемент β_j или δ_j. Элементы β_i не могут выражаться через композицию, включающую в себя δ_j. Элемент β_i не может выражаться через композицию, включающую β_j, где $j < i$, так $\beta_i \in B_i$, а $\beta_j \notin B_i$. С другой стороны, элемент β_i не может быть выражен через композицию только элементов α_k и β_l, где $l > i$ и $k \geq 0$, так как $\alpha_k, \beta_l \in B_{i+1}$, а $\beta_i \notin B_{i+1}$. Таким образом, множество $\{\alpha_i, \beta_i | i = \overline{0,\infty}\}$ является неприводимым порождающим множеством полугруппы $\langle \alpha_i, \beta_i : i = \overline{0,\infty} \rangle$. Также для любого фиксированного k элемент δ_k не принадлежит $\langle \alpha_i, \beta_i : i = \overline{0,\infty} \rangle$, с другой стороны, α_i, β_i не могут выражаться через композицию, включающую δ_k, поэтому для любого фиксированного k множество $\{\alpha_i, \beta_i, \delta_k | i = \overline{0,\infty}\}$ является неприводимым порождающим множеством полугруппы $S_k = \langle \alpha_i, \beta_i, \delta_k : i = \overline{0,\infty} \rangle$, причем $S_k \subset S_{k+1}$ для любого неотрицательного целого k и $\bigcup_{k=0}^{\infty} S_k = SSl_2$.

Заключение. В данной статье установлено, что полугруппа, порожденная всеми малоподвижными автоматными преобразовании конечного типа, не имеет неприводимого порождающего множества. Таким образом, порождающее множество указанное в статье, в некотором смысле "оптимально". В то же время группа, порожденная малоподвижными обратимыми автоматами конечного типа, имеет неприводимое порождающее множество.

Дальнейшими направлениями развития могут быть рассмотрение соотношений между элементами и порождающими элементами и обобщение результатов на случай произвольного конечного алфавита.

1. **Гечег Ф.** О группе взаимно однозначных преобразований, определенных конечными автоматами [текст] / Ф. Гечег // Кибернетика. – 1965. – № 1. – С. 37–39.
2. **Заровный В. П.** Автоматные подстановки и сплетения групп [текст] / В. П. Заровный // Кибернетика. – 1965. – № 1. – С. 29–36.
3. **Григорчук Р. И.** Автоматы, динамические системы и группы [текст] / Р. И. Григорчук, В. В. Некрашевич, В. И. Сущанский // Тр. Математ. ин-та им. В. А. Стеклова. – 2000. – 231. – С. 134–214.
4. **Олийнык А. С.** Полугруппы преобразований, задаваемых автоматами Мили над конечным алфавитом [текст] / А. С. Олийнык, И. И. Резников, В. И. Сущанский

// Алгебраїчні структури та їх застосування: Праці Українського математичного конгресу-2001. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – С. 80–99.

5. **Dassow J.** Completness problems in the structural theory of automata [text] / J. Dassow // Berlin:Academia-Verlag, 1981.

6. **Antonenko A. S.** Groups and Semigroups Defined by some Classes of Mealy Automata [text] / A. S. Antonenko, Eu. L. Berkovich // Acta Cybernetica. – 2007. – V. 18. – P. 23–46.

7. **Беркович Е. Л.** Группа, порожденная малоподвижными автоматами конечного типа над двухсимвольным алфавитом [текст] / Е. Л. Беркович, А. С. Антоненко // Доклады одесского семинара по дискретной математике. – № 7 (Ноябрь 2008). – С. 4–13.

8. **Antonenko A.** Groups generated by slowmoving automata transformations [text] / A. Antonenko, E. Berkovich // 7th International Algebraic Conference in Ukraine. – Kharkov, 2009. — P. 14.