Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Асимптотичні зображення розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку, що є близькими до лінійних»

«Asymptotic representations of solutions to second-order differential equations close to linear»

Виконала: здобувачка денної форми навчання
спеціальності 111 Математика
Освітня програма «Математика»
Савьолова Анастасія Олексіївна

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Білозерова М.О. ______________
Рецензент: доктор фіз.-мат. наук, проф. Євтухов В.М.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від ______________ 2025 р.

Завідувач кафедри

__________ ____________________

Захищено на засіданні ЕК № __________________

Протокол № ____ від ____________________ 2025 р.

Оцінка ___________ / ___________ / ___________

Голова ЕК

__________ _________________________

Одеса — 2025 р.

Зміст

ВСТУП

Актуальність теми. Дослідження суттєво нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку є важливим напрямом у розвитку якісної теорії диференціальних рівнянь. Подібні рівняння виникають у різноманітних прикладних задачах природничих наук. Так, у другій половині XIX століття в межах астрофізичних досліджень J. Lein та R. Emden було вперше сформульовано рівняння, яке згодом отримало назву рівняння Емдена–Фаулера.

Це рівняння відіграло ключову роль у подальшому розвитку теорії нелінійних неавтономних звичайних диференціальних рівнянь. Вивчення різних типів розв'язків рівняння Емдена–Фаулера стало поштовхом до вивченню асимптотичних властивостей узагальнених рівнянь такого типу другого порядку. Надалі це призвело до вивченню асимптотичних властивостей узагальнених двочленних рівнянь типу Емдена–Фаулера n-го порядку та неавтономних рівнянь п-го порядку загального виду.

З утвердженням теорії правильно змінних функцій, розробленої І. Карамата у 1930 році, зросла актуальність задачі дослідження асимптотичної поведінки розв'язків двочленних диференціальних рівнянь другого порядку з правильно змінною нелінійністю.

Отже, тема роботи є актуальною.

Мою роботу присвячено дослідженню асимптотичної поведінки розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з правильною змінною нейлінійністю порядку 1, тому вони є близькими до лінійних рівнянь.

Розділ 1 присвячений дослідженню асимптотичної поведінки правильно та повільно змінних розв'язків лінійних диференціальних рівнянь 2-го порядку.

У розділі 2 проведено дослідження повільно змінних розв'язків лінійних диференціальних рівнянь 2-го порядку, в яких права частина є правильно змінною функцією порядку 1.

1 РОЗДІЛ

1.1 Означення, властивості, приклади правильно та повільно змінних функцій в околі скінченної точки.

Означення 1. *Додатна вимірна функція ρ, визначена на деякому околі $[a, \infty)$ нескінченності, називається* ***правильно змінною на нескінченності з порядком*** *α, якщо для кожного $\lambda > 0$ і деякого $\alpha \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\rho(\lambda x)}{\rho(x)} = \lambda^{\alpha}. \tag{1.1}$$

Дійсне число α називається ***порядком правильної змінни.***

Означення 2. *Додатна вимірна функція L, визначена на деякому околі $[a, \infty)$ нескінченності, називається* ***повільно змінною на нескінченності****, якщо для кожного $\lambda > 0$,*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1. \tag{1.2}$$

Розглянемо приклад повільно змінної на нескінченності функції.

Приклад 1.
Розглянемо функцію $L(x) = \ln x$, визначену на інтервалі $x \in (0; +\infty)$. Необхідно перевірити, чи задовольняє ця функція визначенню повільно змінної на нескінченності, тобто чи виконується наступна гранична рівність (1.2) для довільного фіксованого $\lambda > 0$:

Розв'язок. Розглянемо функцію $L(x) = \ln x$, $x \in (0; +\infty)$ і дослідимо границю:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(\lambda x)}{\ln x}.$$

Скористаємося властивістю логарифма:

$$\ln(\lambda x) = \ln \lambda + \ln x,$$

тоді маємо:

$$\frac{\ln(\lambda x)}{\ln x} = \frac{\ln \lambda + \ln x}{\ln x} = \frac{\ln x}{\ln x} + \frac{\ln \lambda}{\ln x} = 1 + \frac{\ln \lambda}{\ln x}.$$

Тепер знайдемо границю. Оскільки $\ln x \to \infty$, а $\ln \lambda$ — константа, то:

$$\frac{\ln \lambda}{\ln x} \to 0 \quad \text{при } x \to \infty$$

Отже:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\lambda x)}{\ln x} = 1 + 0 = 1$$

Висновок:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1,$$

Отже $ln(x)$ є повільно змінною на ∞ для кожного $\lambda > 0$.

З попередніх двох означень випливає, що якщо функція ρ є правильно змінною на нескінченності з порядком α, то її можна подати у вигляді

$$\rho(x) = x^{\alpha} L(x),$$

де L(x) — повільно змінна функція на нескінченності.

Тому функції виду $x^{\alpha} ln(x)$ будуть правильно змінними на ∞ порядку α.

З означення випливає, що повільно змінна функція L(x) є окремим випадком правильно змінної функції з нульовим порядком, тобто $\alpha = 0$. Отже, множина повільно змінних на нескінченності функцій є підмножиною множини правильно змінних функцій.

Слід зауважити, що подібне твердження може спричинити певну неоднозначність, оскільки клас повільно змінних функцій характеризується широким спектром нетривіальних властивостей.

У подальшому викладі термін «правильно змінна функція» вживатиметься як із включенням повільно змінних функцій, так і без них, залежно від контексту. У кожному конкретному випадку зміст терміна буде однозначно визначатися контекстом і не викликатиме неоднозначності.

Надалі розглядаються дві фундаментальні властивості, що становлять основу більшості похідних характеристик і слугують відправною точкою для їх подальшого виведення.

Теорема 1.[8] Теорема про рівномірну збіжність. *Якщо ρ правильно змінюється з порядком $\alpha \in \mathbb{R}$ на нескінченності, то співвідношення (1.1) (а також (1.2)) виконується рівномірно для $\lambda \in [\alpha, \beta]$, де $0 < \alpha < \beta < \infty$.*

Теорема 2.[8] Теорема про представлення. *Функція L повільно змінюється на нескінченності тоді й тільки тоді, коли її можна представити у вигляді*

$$L(x) = c(x) \exp\left\{\int_a^x \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt\right\}, \quad x \geq a, \tag{1.3}$$

для $\alpha > 0$, де c та ε вимірні, і при $x \to \infty$, $\varepsilon(x) \to 0$ і $c(x) \to c$, де $c \in (0, \infty)$.

Зауважимо, що L, c і ε можуть бути змінені довільно на скінченних інтервалах так, що значення α не має значення, і якщо $\alpha = 0$, можна взяти $\varepsilon(x) \equiv 0$ в околі нуля, з метою уникнення розбіжності інтегралу в околі початкової точки.

Зазначимо, що при дослідженні шкал зростання асимптотичний аналіз функцій може бути здійснений і без вимоги строгої еквівалентності, що підкреслює гнучкість відповідного підходу. У цьому контексті достатньо, щоб у співвідношенні (1.3) функція $c(x)$ була сталою додатною величиною c. У зв'язку з цим доцільно ввести наступне означення.

Означення 3.[9] *Повільно змінна функція*

$$L(x) = c \exp\left\{\int_a^x \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt\right\}, \tag{1.4}$$

де c є додатною константою, називається ***нормалізованою.***

Зазначений клас функцій відіграватиме важливу роль у подальшому викладі. Нижче наведено кілька типових прикладів повільно змінних функцій:

$$L(x) = \prod_{\nu=1}^{n} (\log_\nu x)^{\xi_\nu},$$

де ξ_ν — дійсні числа, а $\log_\nu$ позначає ν-ту ітерацію логарифма;

$$L(x) = \exp\left\{\prod_{\nu=1}^{n} (\log_\nu x)^{\eta_\nu}\right\},$$

де $0 < \eta_\nu < 1$;

$$L(x) = \frac{1}{x}\int_a^x \frac{dt}{\ln t}.$$

Для кожного з наведених прикладів нижче подано детальний аналіз, який дозволяє переконатися в належності функції до класу повільно змінних. Зокрема, буде показано виконання основної граничної умови, що визначає цей клас функцій.

Приклад 2. Повільно змінна функція з ітеративними логарифмами.

Розглянемо функцію

$$L(x) = \prod_{\nu=1}^{n} (\log_\nu x)^{\xi_\nu},$$

де $\xi_\nu \in \mathbb{R}$, а $\log_\nu x$ позначає ν-ту ітерацію логарифма: $\log_1 x = \log x, \quad \log_2 x = \log(\log x), \quad \log_3 x = \log(\log(\log x)),$
тощо.

Мета з'ясувати, чи належить функція до класу повільно змінних функцій на нескінченності.

Розв'язання. Нагадаємо, що функція $L(x)$ є повільно змінною на нескінченності, якщо для кожного $\lambda > 0$ справджується гранична рівність:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1.$$

Підставимо визначення $L(x)$ у відношення:

$$\frac{L(\lambda x)}{L(x)} = \prod_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\log_\nu(\lambda x)}{\log_\nu x} \right)^{\xi_\nu}.$$

Дослідимо поведінку кожного множника при $x \to \infty$:
Для $\nu = 1$:

$$\frac{\log(\lambda x)}{\log x} = 1 + \frac{\log \lambda}{\log x} \to 1.$$

Для $\nu = 2$:

$$\frac{\log(\log(\lambda x))}{\log(\log x)} = \frac{\log(\log x + \log \lambda)}{\log(\log x)} \to 1.$$

Аналогічно, для кожного $\nu \geq 1$ маємо:

$$\frac{\log_\nu(\lambda x)}{\log_\nu(x)} \to 1 \quad \text{при } x \to \infty.$$

Оскільки степенева функція є неперервною, то

$$\left(\frac{\log_\nu(\lambda x)}{\log_\nu(x)} \right)^{\xi_\nu} \to 1.$$

Добуток таких множників також прямує до одиниці:

$$\prod_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\log_\nu(\lambda x)}{\log_\nu x}\right)^{\xi_\nu}\to 1.$$

Висновок. Функція

$$L(x)=\prod_{\nu=1}^{n}(\log_\nu x)^{\xi_\nu}$$

є повільно змінною на нескінченності. Незважаючи на свою складну ітеративну структуру, вона задовольняє ключову властивість:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{L(\lambda x)}{L(x)}=1\quad \text{для всіх } \lambda>0.$$

Приклад 3. Повільно змінна експоненціальна функція з ітеративними логарифмами.

Розглянемо функцію

$$L(x)=\exp\left\{\prod_{\nu=1}^{n}(\log_\nu x)^{\eta_\nu}\right\},$$

де $0<\eta_\nu<1$ для всіх $\nu=1,2,\ldots,n$, а $\log_\nu x$ позначає ν-ту ітерацію логарифма:

$$\log_1 x=\log x,\quad \log_2 x=\log(\log x),\quad \log_3 x=\log(\log(\log x)),\quad \text{тощо.}$$

Метою є перевірити, чи належить ця функція до класу повільно змінних на нескінченності.

Розв'язання. Перевіримо виконання умови повільної змінності:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{L(\lambda x)}{L(x)}=1\quad \text{для кожного } \lambda>0.$$

Обчислимо відношення:

$$\frac{L(\lambda x)}{L(x)}=\frac{\exp\left\{\prod_{\nu=1}^{n}(\log_\nu(\lambda x))^{\eta_\nu}\right\}}{\exp\left\{\prod_{\nu=1}^{n}(\log_\nu x)^{\eta_\nu}\right\}}=\exp\left\{\prod_{\nu=1}^{n}(\log_\nu(\lambda x))^{\eta_\nu}-\prod_{\nu=1}^{n}(\log_\nu x)^{\eta_\nu}\right\}.$$

Позначимо:

$$A(x):=\prod_{\nu=1}^{n}(\log_\nu x)^{\eta_\nu},\quad A(\lambda x):=\prod_{\nu=1}^{n}(\log_\nu(\lambda x))^{\eta_\nu}.$$

Тоді:

$$\frac{L(\lambda x)}{L(x)} = \exp\{A(\lambda x) - A(x)\}.$$

Для кожного $\nu \geq 1$ маємо:

$$\log_\nu(\lambda x) = \log_\nu x + o(1) \quad \text{при } x \to \infty,$$

оскільки логарифм росте повільно, а додаток на зразок $\log \lambda$ дає нульовий внесок у межі.

Отже:

$$(\log_\nu(\lambda x))^{\eta_\nu} = (\log_\nu x + o(1))^{\eta_\nu} = (\log_\nu x)^{\eta_\nu} + o(1),$$

і тому:

$$A(\lambda x) = A(x) + o(1), \quad \text{тобто} \quad A(\lambda x) - A(x) \to 0.$$

Маємо:

$$\frac{L(\lambda x)}{L(x)} = \exp\{A(\lambda x) - A(x)\} \to \exp(0) = 1.$$

Висновок. Функція

$$L(x) = \exp\left\{\prod_{\nu=1}^{n} (\log_\nu x)^{\eta_\nu}\right\}, \quad \text{де } 0 < \eta_\nu < 1,$$

є повільно змінною на нескінченності, оскільки виконується гранична умова:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1 \quad \text{для всіх } \lambda > 0.$$

Приклад 4. Інтегральна функція як повільно змінна

Розглянемо функцію

$$L(x) = \frac{1}{x}\int_a^x \frac{dt}{\ln t}, \quad \text{де } a > 1.$$

Ця функція є класичним прикладом повільно змінної функції, яка виникає, зокрема, у теорії чисел та асимптотичному аналізі. Дослідимо, чи належить вона до класу повільно змінних функцій на нескінченності.

Розв'язання. Для перевірки повільної змінності розглянемо відношення:

$$\frac{L(\lambda x)}{L(x)} = \frac{\dfrac{1}{\lambda x}\displaystyle\int_a^{\lambda x}\frac{dt}{\ln t}}{\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_a^{x}\frac{dt}{\ln t}} = \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\displaystyle\int_a^{\lambda x}\frac{dt}{\ln t}}{\displaystyle\int_a^{x}\frac{dt}{\ln t}}.$$

Позначимо:

$$I(x) := \int_a^x \frac{dt}{\ln t}.$$

Тоді:

$$\frac{L(\lambda x)}{L(x)} = \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{I(\lambda x)}{I(x)}.$$

Відомо, що при $x \to \infty$ справджується асимптотична рівність:

$$I(x) \sim \frac{x}{\ln x}.$$

Скористаємося нею для дослідження граничної поведінки. Це класичний результат, який можна довести за допомогою інтегрування частинами або теореми Лопіталя:

$$\frac{I(\lambda x)}{I(x)} \sim \frac{\dfrac{\lambda x}{\ln(\lambda x)}}{\dfrac{x}{\ln x}} = \lambda\cdot\frac{\ln x}{\ln(\lambda x)}.$$

Зауважимо, що:

$$\ln(\lambda x) = \ln\lambda + \ln x, \quad \text{тому} \quad \frac{\ln x}{\ln(\lambda x)} = \frac{\ln x}{\ln x + \ln\lambda} = \frac{1}{1 + \dfrac{\ln\lambda}{\ln x}} \to 1 \quad \text{при } x \to \infty.$$

Отже:

$$\frac{I(\lambda x)}{I(x)} \to \lambda \quad \text{і тому} \quad \frac{L(\lambda x)}{L(x)} \to \frac{1}{\lambda}\cdot\lambda = 1.$$

Висновок. Функція

$$L(x) = \frac{1}{x}\int_a^x \frac{dt}{\ln t}$$

є повільно змінною на нескінченності, оскільки задовольняє граничну умову:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1 \quad \text{для всіх } \lambda > 0.$$

Хоча наведені вище приклади повільно змінних функцій можуть наводити на думку про їхню монотонність при великих значеннях x, наступний приклад показує, що така властивість не є загальною.

$$L(x) = \exp\left\{(\ln x)^{1/3}\cos\left((\ln x)^{1/3}\right)\right\}, \tag{1.5}$$

де

$$\liminf_{x\to\infty} L(x) = 0, \quad \limsup_{x\to\infty} L(x) = \infty,$$

так що $L(x)$ осцилює нескінченно.

Приклад 5

Функція, задана виразом

$$L(x) = \exp\left\{(\ln x)^{1/3}\cos\left((\ln x)^{1/3}\right)\right\}$$

є прикладом повільно змінної функції з осцилюючою поведінкою.

Внутрішній вираз у показнику експоненти є добутком двох функцій: повільно зростаючої $(\ln x)^{1/3}$ та тригонометричної осцилюючої функції $\cos\left((\ln x)^{1/3}\right)$.
Проаналізуємо поведінку цієї функції при $x\to\infty$:
$(\ln x)^{1/3} \to \infty$ — повільно зростає;
$\cos\left((\ln x)^{1/3}\right)$ осцилює в межах від -1 до 1, нескінченно часто змінюючи знак;
отже, добуток $(\ln x)^{1/3}\cos\left((\ln x)^{1/3}\right)$ також осцилює, з амплітудою, що повільно зростає.

Унаслідок цього поведінка функції $L(x)$ визначається як:
якщо $\cos\left((\ln x)^{1/3}\right) \approx 1$, то

$$L(x) \approx \exp\left\{(\ln x)^{1/3}\right\} \to \infty;$$

якщо $\cos\left((\ln x)^{1/3}\right) \approx -1$, то

$$L(x) \approx \exp\left\{-(\ln x)^{1/3}\right\} \to 0.$$

Оскільки значення косинуса періодично змінюються нескінченно часто, то функція $L(x)$ не монотонна і осцилює при $x\to\infty$, досягаючи як довільно малих, так і довільно великих значень. Тобто:

$$\liminf_{x\to\infty} L(x) = 0, \quad \limsup_{x\to\infty} L(x) = \infty.$$

Цей приклад демонструє, що повільна змінність не передбачає ні монотонності, ні гладкої поведінки. Єдиною вимогою для повільно змінної функції є виконання умови:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1, \quad \text{для кожного } \lambda > 0.$$

Таким чином, приклад (1.5) ілюструє, що осциляція не суперечить повільній змінності функції.

Означення 4. *Додатна вимірна функція g, визначена на деякому околі $[\alpha, \infty)$ нескінченності, називається* ***швидко змінною на нескінченності з порядком*** ∞ *, якщо для $x \to \infty$,*

$$\frac{g(\lambda x)}{g(x)} \to \begin{cases} \infty, & \text{для } \lambda > 1, \\ 0, & \text{для } 0 < \lambda < 1, \end{cases} \tag{1.6(a)}$$

і називається ***швидко змінною на нескінченності з порядком*** $-\infty$*, якщо для $x \to \infty$,*

$$\frac{g(\lambda x)}{g(x)} \to \begin{cases} 0, & \text{для } \lambda > 1, \\ \infty, & \text{для } 0 < \lambda < 1. \end{cases} \tag{1.6(б)}$$

Разом вони називаються ***швидко змінними на нескінченності.***

Наприклад, $g(x) = e^x$ є швидко змінною на нескінченності з порядком ∞, а $g(x) = e^{-x}$ є швидко змінною на нескінченності з порядком $-\infty$.

У низці випадків доцільним є перехід від аналізу поведінки при $x \to \infty$ до розгляду околу нуля. У зв'язку з цим подаємо наступне твердження:

Означення 5. *Додатна вимірна функція ρ, визначена на деякому околі $(0, a)$, $a > 0$, називається* ***правильно змінною при нулі з порядком*** α*, якщо для кожного $\lambda > 0$ та деякого $\alpha \in \mathbb{R}$:]*

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\rho(\lambda x)}{\rho(x)} = \lambda^{\alpha}. \tag{1.7}$$

Зауважимо, що це еквівалентно твердженню, що $f(1/x)$ правильно змінною на нескінченності з порядком $-\alpha$. Отже, асимптотичні властивості функцій при $x \to \infty$ можуть бути відповідним чином адаптовані до випадку $x \to 0^+$.

Функції, введені в означеннях 1–4, надалі будемо називати *класом функцій Карамати.*

Деякі прості осцилюючі функції (наприклад, $g(x) = 2 + \sin x$) не є правильно змінними.

Означення 6. *Додатна вимірна функція g, визначена на деякому околі $[a, \infty)$ нескінченності, називається* ***правильно обмеженою на нескінченності****, якщо для кожного $1 \leq \lambda \leq \lambda_0$:*

$$m \leq \frac{g(\lambda x)}{g(x)} \leq M,$$

де λ_0, m, M — це будь-які сталі, що задовольняють $1 < \lambda_0 < \infty$, $0 < m < 1$, $1 < M < \infty$.

Має місце той факт, що кожна правильно змінна функція належить до розглядуваного класу. Аналогічне твердження справедливе і для всіх додатних вимірних функцій, визначених на $[a, \infty)$, які є обмеженими та віддаленими від 0 і ∞.

У межах теорії правильно обмежених функцій виникає необхідність у введенні наступного означення:

Означення 7. *Функція $g(x)$ називається* ***майже зростаючою****, якщо існує стала $A > 1$, така що для $x_2 < x_1$ виконується нерівність*

$$g(x_2) \leq Ag(x_1).$$

Майже спадні функції визначаються аналогічно.

Властивість 1(а).[10] *Якщо g є правильно змінною функцією з порядком $\alpha \leq 0$ і*

$$g(x) = \int_x^\infty h(t)dt$$

при монотонному $h(t)$, то виконується

$$\frac{xh(x)}{g(x)} \to -\alpha \quad \textit{при } x \to \infty.$$

Властивість 1(б).[10] *Якщо $g(x)$ є правильно змінною функцією з порядком $\alpha \geq 0$ і $g(x) = g(x_0) + \int_{x_0}^x h(t)dt$ для $x \geq x_0$ при монотонному $h(t)$, тоді $\frac{xh(x)}{g(x)} \to \alpha$, при $x \to \infty$.*

Властивість 1(в).[10] *Якщо похідна повільно змінної функції L є монотонною, то*

$$\frac{xL'(x)}{L(x)} \to 0 \quad \textit{при } x \to \infty.$$

Властивість 2.[2] *Для кожного $\varepsilon > 0$ та $x \to \infty$:*

$$x^{\varepsilon} L(x) \to \infty, \quad x^{-\varepsilon} L(x) \to \infty.$$

Властивість 3.[2] *Якщо L повільно змінюється на ∞, тоді для $x \to \infty$:*
1) якщо $\alpha > -1$, то

$$\int_a^x t^{\alpha} L(t) dt \sim (\alpha+1)^{-1} x^{\alpha+1} L(x),$$

2) якщо $\alpha < -1$, то

$$\int_a^x t^{\alpha} L(t) dt \sim (-\alpha-1)^{-1} x^{\alpha+1} L(x),$$

3) якщо $\alpha = -1$, то

$$l(x) = \int_a^x t^{-1} L(t) dt$$

є новою повільно змінною функцією і такою, що $\frac{L(x)}{l(x)} \to 0$.

Властивість 4. *Якщо при $x \to \infty$ функція $g(x)$ поводиться як правильно змінна функція з порядком α, тобто $g(x) \sim x^{\alpha} L(x)$, при $x \to \infty$, тоді $g(x)$ є правильно змінною функцією з порядком α, тобто $g(x) = x^{\alpha} L^{*}(x)$, де загалом $L^{*}(x) \neq L(x)$, але $L^{*}(x) \sim L(x)$. Це випливає з того, що $g(x) x^{-\alpha} \sim L(x)$ та означення 1.*

Властивість 5.[4] *Для будь-якої спадної швидко змінної функції g, такої що g' зростає, виконується при $x \to \infty$:*

$$\frac{-x g'(x)}{g(x)} \to \infty.$$

1.2 Асимптотичні властивості розвязків лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння другого порядку:

$$y'' + f(x) y = 0, \tag{2.1}$$

але отримані результати можна легко узагальнити на більш загальний випадок:

$$y'' + g(x) y' + h(x) y = 0. \tag{2.2}$$

Для коефіцієнта f у рівнянні (2.1) припускається, що він є неперервним на півосі $[a_0, \infty)$ для деякого $a_0 > 0$, а для $h(t)$, $g(t)$ у (2.2) вимагається неперервність і, відповідно, неперервна диференційованість.

Загалом функція f може змінювати знак довільним чином. Однак низка результатів стосується окремого випадку, коли $f(x) < 0$, за якого всі додатні розв'язки є опуклими. Така ситуація дозволяє встановити додаткові властивості, недоступні в загальному випадку. Зокрема, завдяки опуклості розв'язків, можливо застосовувати більш ефективні методи доведення, що значно спрощують аналіз задачі.

Усі розв'язки y досліджуються для $x > x_0 \geq a_0$.

$$y_2(x) = y_1(x) \int_a^x y_1^{-2}(t)\, dt \quad \text{або} \quad y_2(x) = y_1(x) \int_x^\infty y_1^{-2}(t)\, dt, \tag{2.3}$$

Для нижньої межі в усіх наступних інтегралах можна взяти будь-яке дійсне число a, таке що $a \geq x_0$. Звісно, функція y_1 зберігає сталий знак на розглядуваних інтервалах.

Аналіз наведених результатів та їх доведень демонструє ключову роль спадних розв'язків. З огляду на це, доцільно подати в цьому розділі наступне:

Лема 1. *Нехай для деякого $a > 0$, $p \in C^1[a, \infty)$, $q \in C[a, \infty)$, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, при цьому $q(x)$ не прямує до 0 при $x \to +\infty$. Тоді рівняння*

$$(p(x)y'(x))' = q(x)y(x)$$

має додатний спадний розв'язок на (x_0, ∞) для деякого $x_0 > a$.

Доведення. Насамперед зауважимо, що для кожного нетривіального розв'язку v розглянутого рівняння існує таке a $x_0 > a$, що $v(t)$ є монотонною на (x_0, ∞). Це випливає з того, що для функції $M(x) = p(x)v(x)v'(x)$ через додатність $p(x)$ та $q(x)$ один має для $x \geq x_0$, $M'(x) = p(x)v'^2(x) + q(x)v^2(x) \geq 0$. Це означає, що $v'(x)$ може мати не більше ніж один нуль більшого за x_0.

Далі поділимо множину всіх релевантних розв'язків на два класи:

$$A = \{y = y(x) - \text{розв'язок} : \exists x_0 : y(x_0)y'(x_0) \geq 0\},$$

$$B = \{y = y(x) - \text{розв'язок} : \forall x \geq x_0,\ y(x)y'(x) < 0\}.$$

Не втрачаючи загальності, можна припустити, що розв'язки класу A є додатними неспадними або від'ємними незростаючими. Аналогічне припущення справедливе і для розв'язків класу B.

Клас A є непорожнім, оскільки включає розв'язки з додатними початковими умовами. Більше того, згідно з класичною теорією, якщо деякий нетривіальний розв'язок із класу A є обмеженим, то всі розв'язки цього класу також є обмеженими.

Щоб завершити доведення, покажемо, що існує розв'язок з класу B.

Нехай v — будь-який розв'язок розглянутого рівняння з додатними початковими умовами, тобто належить до класу A. Тоді функція

$$u(x) = v(x) \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{p(s)v^2(s)}$$

є лінійно незалежним розв'язком.

Нехай спочатку $v(x)$ не є обмеженим (тобто $v(x) \to \infty$, зростаючи), і розглянемо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to\infty} \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{p(s)v^2(s)} = K.$$

Оскільки підінтегральна функція додатна, то або $K < \infty$, або $K = +\infty$.

Якщо існує другий випадок, розглянемо відповідний розв'язок $w(x)$, заданий для деякого $x_1 \geq x_0$ як

$$w(x) = u(x) \int_{x_1}^{x} \frac{ds}{p(s)u^2(s)},$$

для якого обов'язково

$$\lim_{x\to\infty} \frac{w(x)}{u(x)} = K_1 < \infty.$$

Випадок $K_1 = \infty$ є неможливим, оскільки в цьому разі функція w не може бути подана як лінійна комбінація функцій u та v відповідно до граничних співвідношень. Отже, існують два розв'язки, зокрема u та v, для яких виконується нерівність $K < \infty$.

З таким K розглянемо наступний розв'язок розглядуваного рівняння:

$$z(x) = v(x) \left\{ K - \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{p(s)v^2(s)} \right\}.$$

Оскільки перший множник прямує до нескінченності, а другий — до нуля при $x \to \infty$, при застосуванні правила Лопіталя випливає наступне:

$$\lim_{x\to\infty} z(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{p(x)v'(x)},$$

за умови, що правостороння границя існує. Але це так, оскільки $p(x)v'(x)$ не спадає і прямує до скінченної межі. Тому $z(x)$ прямує до скінченного значення і належить до класу B. Інакше $v(x)$ також була б обмеженою, що суперечить припущенню.

Якщо, з іншого боку, один розв'язок, що належить до класу A, є обмеженим, тоді всі інші також будуть такими. Розглянемо будь-які два u та v, знову з додатними початковими умовами. Тоді монотонність дає, що при $x \to \infty$,

$$v(x) \to a, \quad u(x) \to b.$$

Тоді розв'язок

$$z(x) = au(x) - bv(x)$$

такий, що при $x \to \infty$,

$$z(x) \to 0.$$

Оскільки $z(x)$ монотонна на (x_0, ∞), вона належить до класу B. Якщо зокрема $z(x_0) > 0$, тоді $z(x)$ є спадною.

Розглянемо випадок $f(x) < 0$.

Зазначимо, що хоча твердження теорем стосуються правильної змінної, жодна з гіпотез теорем не вимагає цього поняття. Це суперечить багатьом (можливо, більшості) результатам стосовно застосувань правильної змінної, де це поняття зазвичай використовується у формулюванні умов теорем.[4]

Крім того, згадані умови є необхідними і достатніми, а отже, їх можна використовувати для характеристики підкласу правильно змінних функцій.

Було встановлено, що існування

$$\lim_{x \to \infty} x^2 f(x)$$

, яке є більш обмежувальною умовою для f, ніж інтегральні умови, які з'являються в наступних теоремах, є достатньою умовою для того, щоб розв'язки y рівняння (2.4) належали до класу Карамати.

З метою доведення наступних трьох теорем доцільно переписати рівняння (2.1) у вигляді:

$$y'' - f(x)y = 0, \tag{2.4}$$

де $f(x)$ є додатною. Оскільки рівняння є однорідним, без обмеження загальності можна обмежитися розглядом лише додатніх розв'язків; це припущення використовуватиметься надалі.

Теорема 3. *Нехай y_1 є будь-яким спадним розв'язком рівняння (2.4). Тоді y_1 є повільно змінною на нескінченності, а відповідний лінійно незалежний розв'язок y_2 є зростаючим і правильно змінними з порядку 1 на нескінченності; тобто існують повільно змінні функції L_1, L_2, такі що:*

$$y_1(x) = L_1(x), \quad y_2(x) = xL_2(x), \tag{2.5}$$

тоді та тільки тоді, коли $x \to \infty$:

$$x \int_x^\infty f(t)dt \to 0. \tag{2.6}$$

Крім того, L_i, $i = 1, 2$, є нормалізованими і такими, що $L_2(x) \sim L_1^{-1}(x)$ при $x \to \infty$.

Доведення. *Необхідність.* Додатний спадний розв'язок завжди існує відповідно до леми 1. Припустимо, що він повільно змінюється, тобто $y_1(x) = L_1(x)$. Тоді, оскільки $y_1(x)$ також є опуклою функцією, то за властивостями повільно та правильно змінних функцій при $\alpha = 0$ і $h(t) = -y_1'(t)$, яка спадає, тому що $y_1'(x)$ зростає через опуклість y_1, отримуємо, що при $x \to \infty$:

$$\frac{xy_1'(x)}{y_1(x)} \to 0. \tag{2.7}$$

Тож, згідно з теоремою 2, $L_1(x)$ є нормалізованою повільно змінною функцією.

Також, завдяки тотожності

$$\frac{y_1''}{y_1} = \left(\frac{y_1'}{y_1}\right)' + \left(\frac{y_1'}{y_1}\right)^2, \tag{2.8}$$

рівняння (2.4) стає

$$\left(\frac{L_1'}{L_1}\right)' + \left(\frac{L_1'}{L_1}\right)^2 = f(x),$$

або інтегруючи обидві частини рівняння по інтервалу (x, ∞), використовуючи (2.7) та множачи на x:

$$-x\frac{L_1'}{L_1} + x\int_x^\infty \left(\frac{tL_1'}{L_1}\right)^2 t^{-2}dt = x\int_x^\infty f(t)dt.$$

З урахуванням (2.7) ліва частина інтегралу та відповідно права частина інтегралу збігаються. Більш того, обидві сторони прямують до $x \to \infty$.

Достатність. Інтегруючи обидві частини рівняння (2.4) по (x, ∞) і використовуючи, що $y_1(x)$ спадає, а також через опуклість $y_1'(x) \to 0$ при $x \to \infty$, отримуємо:

$$-\frac{xy_1'}{y_1} = x\int_x^\xi f(t)dt = \varepsilon(x).$$

Звернемо увагу, що $y_1(x) \to c > 0$ при $x \to \infty$ є неможливим. Це призвело б до $y_1(x) \sim cx$, що суперечить факту, що y_1 спадає.

Враховуючи (2.6), $\varepsilon(x) \to 0$ при $x \to \infty$, а отже, інтегруючи обидві частини отриманої рівності, отримаємо:

$$y_1(x) = y_1(a) \exp\left(-\int_a^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt\right),$$

що є нормалізованою повільно змінною функцією згідно з теоремою 2.

Зауважимо, що повільно змінні розв'язки не можуть бути зростаючими, оскільки в такому випадку, з урахуванням опуклості, зрештою виконувалася б $y_1'(x) \geq k$ для деякого $k > 0$ або інтегруючи $y_1(x) \geq kx + l$, що суперечить властивості правильно змінних функцій. Таким чином, усі повільно змінні розв'язки рівняння (2.4) охоплено в рамках проведеного аналізу.

Наступним кроком є доведення того, що другий лінійно незалежний розв'язок $y_2(x)$ є правильно змінним функціонального порядку 1 і задовольняє необхідній формі. Це випливає з (2.3), яке з урахуванням (2.5) записується як:

$$y_2(x) = L_1(x) \int_a^x L_1^{-2}(t) dt,$$

використовуючи властивості повільно змінних функцій для відповідного інтегралу.

Це призводить до $y_2(x) = xL_2(x)$, де $L_2(x) \sim 1/L_1(x)$ і тому $L_2(x)$ змінюється повільно через властивість правильно змінних функцій.

Функція $y_2(x)$ також зростає завдяки властивостям правильно змінних функцій і опуклості. Те, що L_2 також нормалізоване, випливає з рівняння:

$$\frac{xy_2'}{y_2} = 1 + x\frac{L_2'}{L_2}.$$

Оскільки за властивостями правильно змінних функцій, $x\frac{y_2'}{y_2} \to 1, \quad$ при $x \to \infty$, то $y_2(x)$ зростає і правильно змінюється з порядком 1.

Таким чином, $\frac{xL_2'}{L_2} \to 0, \quad$ при $x \to \infty$ і $L_2(x)$ нормально змінюється. Це доводить достатність умови (2.6). Її необхідність також випливає з підстановки y_2''/y_2 із (2.8) у рівняння (2.3), що після інтегрування по (x, ∞) і множення на x дає:

$$-\frac{xy_2'}{y_2} + x\int_x^\infty \left(\frac{ty_2'}{y_2}\right)^2 t^{-2} dt = x\int_x^\infty f(t) dt. \tag{2.9}$$

Таким чином, умова (2.6) виконується, оскільки при $x \to \infty$, $\frac{xy_2'}{y_2} \to 1$, як показано вище.

Для задоволення умови (2.6) необхідно, щоб функція $f(x)$ при $x \to \infty$ спадала до нуля швидше, ніж cx^{-2} для деякого $c > 0$, що, у свою чергу, виключає розв'язок Ейлера з допустимої множини функцій.

Теорема 4. *Нехай α_i, $i = 1, 2$, $\alpha_1 < \alpha_2$ — два корені рівняння*

$$\alpha^2 - \alpha - c = 0, \quad c > 0. \tag{2.10}$$

Нехай також y_1 є будь-яким спадним розв'язком рівняння (2.4). Тоді y_1 є правильно змінним при ∞ з порядком α_1 та відповідний лінійно незалежний розв'язок y_2 зростає, і правильно змінюється при ∞ з порядком α_2, тобто для деяких повільно змінних L_1, L_2:

$$y_i(x) = x^{\alpha_i} L_i(x), \quad i = 1, 2. \tag{2.11}$$

тоді й тільки тоді, коли для $x \to \infty$:

$$x \int_x^\infty f(t)dt \to c. \tag{2.12}$$

Більше того, L_i є нормалізованими та $L_2(x) \sim \{(1 - 2\alpha_1)L_1(x)\}^{-1}$, при $x \to \infty$.

Суттєвою особливістю цього результату є те, що показники α_i у (2.11) залежать лише від c, а не від функції f, яка задовольняє (2.12); тобто, якщо $c = 2$, тоді $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$ для всіх функцій f, які задовольняють (2.12). Варто зауважити, що, звісно, величини L_i залежать від вибору функції f.

Доведення. *Необхідність.* Спочатку розглянемо спадний розв'язок y_1, який існує за лемою 1 і припустимо, що він має вигляд $y_1(x) = x^{\alpha_1} L_1(x)$. Зазначимо, що $\alpha_1 < 0$, як менший корінь рівняння (2.10).
Також

$$xy_1'/y_1 = \alpha_1 + xL_1'/L_1, \tag{2.13}$$

тому, використовуючи властивості правильно змінних функцій, як і в попередньому випадку, маємо, що для $x \to \infty$, $xy_1'/y_1 \to \alpha_1$ і також $xL_1'/L_1 \to 0$, звідки випливає, що L_1 нормалізоване.

Далі підставляємо xy_1'/y_1 із (2.13) у (2.9) (з y_1 замість y_2), щоб отримати

$$-\alpha_1 + \alpha_1^2 + o(1) = x \int_x^\infty f(t)dt,$$

і умова (2.12) виконується завдяки (2.10). Зауважимо, що інтеграл у лівій частині рівняння (2.9) є збіжним, що, своєю чергою, також веде до збіжності виразу у (2.13).

Достатність. Покажемо, що за виконання умови (2.12) існує розв'язок вигляду $y_1(x) = x^{\alpha_1} L_1(x)$, який, будучи опуклим, згідно з властивостями правильно змінних функцій, є спадним, оскільки показник α_1 є від'ємним.
Отже,

$$y(x) = \exp\left(-\int_a^x (\eta(t) - \alpha_1)\, t^{-1} dt\right). \tag{2.14}$$

Потрібно задати функцію $\eta(t)$ таким чином, щоб $y(x)$ задовольняло рівняння (2.4) і, крім того, виконувалась умова $\eta(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Тоді, згідно з теоремою 2, функція $y(x)$ набуде бажаної форми.

З (2.14) і (2.4) випливає, що $y(x)$ буде розв'язком рівняння (2.4), якщо функція $\eta(x) = -xy'(x)/y(x) + \alpha_1$ задовольняє рівняння

$$(\eta - \alpha_1)^2/x^2 - ((\eta - \alpha_1)/x)' = f(x). \tag{2.15}$$

Більше того, з (2.4) випливає:

$$0 < -xy'/y \le x \int_x^\infty f(t)dt$$

так що, через (2.12), $\eta(x)$ є обмеженою зверху, і, крім того,

$$\eta(x) - \alpha_1 > 0. \tag{2.16}$$

Інтегруючи обидві частини рівняння (2.15) на (x, ∞), множачи на x і використовуючи умову (2.12), яка записана як $x \int_x^\infty f(t)dt = c + \varepsilon(x)$, де $\varepsilon(x) \to 0$ при $x \to \infty$ та рівняння (2.10), отримуємо:

$$x \int_x^\infty (\eta - 2\alpha_1)\eta t^{-2} dt + \eta(x) = \varepsilon(x). \tag{2.17}$$

Отриманий інтеграл збігається через обмеженість $\eta(t)$. Теорема середнього значення для (2.17) імплікує:

$$\eta(\xi)(\eta(\xi) - 2\alpha_1) + \eta(x) = \varepsilon(x), \quad \text{де } \xi \ge x. \tag{2.18}$$

Зауважимо, що завдяки (2.17) і тому, що α_1 — від'ємне, множник $\eta(\xi) - 2\alpha_1$ зрештою є додатним, отже, знак лівої частини (2.18) залежить лише від знака η. Таким чином, якщо функція $\eta(x)$ зрештою зберігає сталий знак, то при $x \to \infty$ вона прямує до нуля, оскільки аналогічна асимптотична поведінка спостерігається і для функції $\varepsilon(x)$.

Якщо ж, навпаки, $\eta(x)$ має нескінченну кількість нулів, позначимо через x_i^0, $i \ge 1$ підпослідовність цих нулів, таку, що $\eta(x) > 0$ для $x \in (x_{i-1}^0, x_i^0)$, $i \ge 2$. Також позначимо через x_i будь-яку з точок, у яких $\eta(x)$ досягає свого максимуму на інтервалі (x_{i-1}^0, x_i^0), $i \ge 2$.

Розглянемо інтегрування обох частин рівняння (2.15) на відрізку (x_i, x_i^0) з подальшим множенням результату на x_i. Після цього праву частину можна переписати у вигляді:

$$x_i \int_{x_i}^{x_i^0} f(t)dt = c\left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_i^0}\right) x_i - \varepsilon(x_i^0)\frac{x_i}{x_i^0} + \varepsilon(x_i),$$

що це є прямим наслідком умови (2.12), записаної аналогічно до наведеного вище виразу для x_i, але з x, що його замінює.

Унаслідок цього отримуємо

$$\alpha_1^2\left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_i^0}\right) x_i \int_{x_i}^{x_i^0} (\eta - 2\alpha_1)\eta t^{-2} + \eta(x_i) + \alpha_1\left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_i^0}\right) x_i = c\left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_i^0}\right) x_i -$$

$$-\varepsilon(x_i^0)\frac{x_i}{x_i^0} + \varepsilon(x_i).$$

Далі, за аналогією з попередніми міркуваннями, застосуємо теорему середнього значення до наведеного інтегралу та скористаємося рівнянням (2.10), що дозволяє отримати:

$$(\eta(\xi) - 2\alpha_1)\eta(\xi)(1 - x_i'/x_i^0) + \eta(x_i) = \varepsilon(x_i) - \varepsilon(x_i^0)x_i/x_i^0, \quad x_i \leq \xi \leq x_i^0.$$

Оскільки права частина наведеної рівності прагне до нуля, коли $x_i \to \infty$, те саме справедливо для лівої частини. Але обидва її доданки є додатними, так що послідовність максимумів $\eta(x)$ прагне до нуля (і так само її мінімуми). Таким чином, $\eta(x) \to 0$, як $x \to \infty$.

Отже, (2.14) є формою (2.11) для $i = 1$ із $L_1(x) = \exp\left(-\int_a^x \eta(t)t^{-1}dt\right)$, яка є нормалізованою повільно змінною функцією. Таким чином, доведення для спадного розв'язку $y_1(x)$ завершено.

Формулювання теореми для другого, лінійно незалежного розв'язку $y_2(x)$ випливає безпосередньо як простий наслідок попередніх міркувань. Бо за (2.3) маємо

$$y_2(x) = x^{\alpha_1} L_1(x) \int_a^x t^{-2\alpha_1} L_1^{-2}(t)dt, \tag{2.19}$$

і інтеграл розбігається завдяки властивостям правильно змінних функцій, і оскільки $\alpha_1 < 0$. Таким чином, за властивостями повільно і правильно змінних функцій маємо

$$y_2(x) = x^{\alpha_2} L_2(x) \quad \text{із} \quad L_2(x) \sim \frac{1}{(1 - 2\alpha_1)L_1(x)}, \tag{2.20}$$

і L_2 є повільно змінною функцією. y_2 зростає за тим самим аргументом, що і в теоремі 3. L_2 також є нормалізованою, оскільки

$$xy_2'/y_2 = \alpha_2 + xL_2'/L_2.$$

За властивостями правильно змінних функцій, $xy_2'/y_2 \to \alpha_2$, як $x \to \infty$. Таким чином, $xL_2'/L_2 \to 0$, як $x \to \infty$. Це доводить достатність умови (2.12). Необхідність цього твердження, як і у випадку розв'язку y_1, обґрунтовується через застосування властивостей правильно змінних функцій.

Теорема 5. *Нехай y_1 є будь-яким спадним розв'язком рівняння (2.4), а y_2 є відповідним лінійно незалежним розв'язком. Тоді $y_i, i = 1, 2$, є швидко змінними, тоді й тільки тоді, коли для кожної $\lambda > 1$ та $x \to \infty$,*

$$x \int_x^{\lambda x} f(t)dt \to \infty. \tag{2.21}$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай y_1 є спадним і швидко змінним. Спочатку зауважимо, що немає послідовності $\{x_i\}$, x_i, яка прямує до нескінченності при i і така, що для кожного $\lambda > 1$, $x = x_i$ і $i \to \infty$,

$$y_1'(x) \sim y_1'(\lambda x).$$

У протилежному випадку, враховуючи неперервність та монотонність похідної y_1', наведене асимптотичне співвідношення, яке виконується для довільного фіксованого λ, справджувалося б також для будь-якого $\xi_i \in (x_i, \lambda x_i)$. У такому разі функцію y_1' можна продовжити до монотонної функції на ширшій області $\bar{y_1}$, визначеної для достатньо великих значень x, такої, що для $x \to \infty$ виконується $\bar{y_1}'(x) \sim \bar{y_1}'(\lambda x)$. Отже, за означенням 2, функція $\bar{y_1}'$ є повільно змінною на нескінченності і за конструкцією збігається з y_1' на інтервалах $(x_i, \lambda x_i)$. Але оскільки y_1 і $-y_1'$ спадають, маємо для $x = x_i$:

$$-\int_x^{\lambda x} y_1'(t)dt = -(\lambda - 1)xy_1'(\xi) \geq -y_1'(\lambda x)\lambda x\frac{(\lambda - 1)}{\lambda},$$

або

$$0 < -\lambda xy_1'(\lambda x) \leq y(x) - y(\lambda x) = o(1).$$

Таким чином, $-\lambda xy_1'(\lambda x) \to 0$ при $x \to \infty$, що є неможливим, оскільки y_1' збігається на $(x_i, \lambda x_i)$ з повільно змінною функцією $\bar{y_1}'(x)$, для якої, через властивість правильно змінних функцій, маємо $x\bar{y_1}'(x) \to \infty$, як $x \to \infty$.

Далі, з уразуванням (2.4) і оскільки y_1 спадає,

$$-y_1'(x)\left\{1 - \frac{y_1'(\lambda x)}{y_1'(x)}\right\} \leq y_1(x)\int_x^{\lambda x} f(t)dt.$$

Таким чином, з огляду на те, що вираз у дужках, згідно з наведеними міркуваннями, не може прямувати до одиниці, існує деяка стала $k > 0$, для якої справджується наступне:

$$-\frac{kxy_1'(x)}{y_1(x)} \le x \int_x^{\lambda x} f(t)dt. \tag{2.22}$$

Отже, з властивості швидко змінної функції та співвідношенню (2.22) випливає справдження умови (2.21).

Достатність. Розглянемо знову спадний розв'язок $y_1(x)$. Шляхом дворазового інтегрування обох сторін рівняння (2.4) на інтервалі $(x, \sqrt{\lambda}x)$, отримуємо:

$$\frac{y(\lambda x)}{\sqrt{\lambda}} - \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + 1\right) y(\sqrt{\lambda}x) + y(x) = \int_x^{\sqrt{\lambda}x} \left(\int_t^{\sqrt{\lambda}t} f(s)y(s)\, ds\right) dt. \tag{2.23}$$

Через виконання умови (2.21) існує довільно велика константа $m > 0$, така що для $x \ge x_0(m)$,

$$\int_x^{\sqrt{\lambda}x} f(t)dt \ge \frac{m}{x}. \tag{2.24}$$

З (2.23), (2.24) і факту спадання $y(x)$ отримуємо:

$$\frac{y(\lambda x)}{\sqrt{\lambda}} + y(x) \ge y(\lambda x) m \int_x^{\sqrt{\lambda}x} \frac{dt}{t},$$

або

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \frac{y(x)}{y(\lambda x)} \ge m \ln \sqrt{\lambda}. \tag{2.25}$$

Нерівність (2.25) означає, що при $x \to \infty$, $y(x)/y(\lambda x) \to \infty$, звідки, відповідно до означення 4, y є швидкозмінною на нескінченності, що завершує доказ.

Другий, лінійно незалежний розв'язок слід розглядати аналогічним чином з відповідною, очевидною модифікацією, враховуючи, що він є зростаючим. Зрозуміло, що остаточно зростаючі розв'язки завжди існують, оскільки їх можна побудувати шляхом вибору відповідних початкових умов у деякій точці x_0. Слід зауважити, що формула (2.3) не дає достатньої інформації щодо поведінки інтеграла на нескінченності. До того ж, добуток двох швидко змінних функцій із протилежною асимптотикою — одна до нуля, інша до нескінченності — не обов'язково залишається швидко змінним при $x \to \infty$.

2 РОЗДІЛ

2.1 Диференціальні рівняння другого порядку, що є близькими до лінійних

У цьому розділі розглядається диференціальне рівняння другого порядку наступного вигляду:

$$y'' = f(x)\,y\,L(y), \tag{3.1}$$

де функція f та L додатні, а функція $L(y)$ також задовольняє умови:

$$\lim_{y\to 0} L(y) = +\infty, \quad \lim_{y\to 0} \frac{yL'(y)}{L(y)} = 0. \tag{3.2}$$

Рівняння (3.1) є нелінійним аналогом лінійного рівняння $y'' = f(x)\,y$.
У ході дослідження отримано теорему, що характеризує поведінку повільно змінних розв'язків рівняння (3.1).

Теорема 1. *Нехай y_1 – додатний спадний розв'язок диференціального рівняння (3.1). Тоді y_1 є повільно змінною функцією на ∞ тоді й тільки тоді, коли*

$$x\int_x^{+\infty} f(t)dt \to 0 \quad \textit{при} \quad x \to +\infty$$

Доведення. *Необхідність.* Припустимо, що $y_1(x)$ повільно змінюється, тобто $y_1(x) = L_1(x)$. Тоді оскільки $y_1(x)$ є опуклою вниз функцією, то за властивостями повільно та правильно змінних функцій при $\alpha = 0$ і $h(t) = -y_1'(t)$, яка спадає, тому що $y_1'(x)$ зростає через опуклість y_1, отримуємо, що при $x \to \infty$:

$$\frac{xy_1'(x)}{y_1(x)} \to 0. \tag{2.7}$$

Тож, згідно з теоремою 2, $L_1(x)$ є нормалізованою повільно змінною функцією.

Розглянемо вираз

$$\left(\frac{y_1'}{y_1L(y_1)}\right)'.$$

Тепер обчислимо похідну:

$$\left(\frac{y_1'}{y_1L(y_1)}\right)' = \frac{y_1''}{y_1L(y_1)} + y_1\left(\frac{1}{y_1L(y_1)}\right)' = \frac{y_1''}{y_1L(y_1)} - y_1' \cdot \frac{1}{y_1^2L^2(y_1)} \cdot (y_1'L(y_1) + y_1L'(y_1) \cdot y_1')$$

$$= \frac{y_1''}{y_1 L(y_1)} - \frac{(y_1')^2}{y_1^2 L(y_1)} \left(1 + \frac{y_1 L'(y_1)}{L(y_1)}\right)$$

Отже, отримаємо тотожність:

$$\frac{y_1''}{y_1 L(y_1)} = \left(\frac{y_1'}{y_1 L(y_1)}\right)' + \frac{(y_1')^2}{y_1^2 L(y_1)} \left(1 + \frac{y_1 L'(y_1)}{L(y_1)}\right) \tag{3.3}$$

або інтегруючи обидві частини рівняння по інтервалу (x, ∞), використовуючи (2.7) та множачи на x:
Вихідне рівняння має вигляд:

$$\frac{y_1''}{y_1 L(y_1)} = f(x).$$

З урахуванням тотожності (3.3) можемо переписати рівняння у вигляді:

$$\left(\frac{y_1'}{y_1 L(y_1)}\right)' + \frac{(y_1')^2}{y_1^2 L(y_1)} \left(1 + \frac{y_1 L'(y_1)}{L(y_1)}\right) = f(x) \tag{3.4}$$

Проінтегруємо рівність

$$\left(\frac{L_1'}{L_1(t)\, L(L_1)}\right)' + \frac{(L_1')^2}{L_1(t)^2\, L(L_1)} \left(1 + \frac{L_1(t)\, L'(L_1)}{L(L_1)}\right) = f(t)$$

на проміжку (x, ∞). Припускаючи, що

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L_1'(t)}{L_1(t)\, L(L_1(t))} = 0,$$

отримуємо:

$$-\frac{L_1'(x)}{L_1(x)\, L(L_1(x))} + \int_x^\infty \frac{(L_1'(t))^2}{L_1(t)^2\, L(L_1(t))} \left(1 + \frac{L_1(t)\, L'(L_1(t))}{L(L_1(t))}\right) dt = \int_x^\infty f(t)\, dt.$$

Звідси маємо:

$$-\frac{x L_1'(x)}{L_1(x)\, L(L_1(x))} + \int_x^\infty \frac{t^2 (L_1'(t))^2 t^{-2}}{L_1(t)^2\, L(L_1(t))} \left(1 + \frac{L_1(t)\, L'(L_1(t))}{L(L_1(t))}\right) dt = x \int_x^\infty f(t)\, dt. \tag{3.5}$$

З урахуванням (2.7) ліва частина інтегралу та відповідно права частина інтегралу збігаються. Більш того, обидві сторони прямують до 0.
Отже

$$\lim_{x\to\infty} x \int_x^\infty f(t) dt = 0 \tag{3.6}$$

Необхідність доведена.

Достатність. Нехай $y_1(x)$ — спадний додатний розв'язок рівняння (3.1), для якого виконується умова:

$$\lim_{t\to\infty} x \int_x^{+\infty} f(t)dt = 0.$$

Оскільки $y_1(x)$ є розв'язком (3.1), маємо:

$$\frac{y_1''(t)}{y_1(t)L(y_1(t))} = f(t).$$

Розглянемо похідну від виразу $\dfrac{y_1'}{y_1 L(y_1)}$. Застосовуючи правило похідної частки та ланцюгове правило, отримаємо:

$$\left(\frac{y_1'}{y_1 L(y_1)}\right)' = \frac{y_1''}{y_1 L(y_1)} - \frac{(y_1')^2}{y_1^2 L(y_1)}\left(1 + \frac{y_1 L'(y_1)}{L(y_1)}\right)$$

Звідси

$$\left(\frac{y_1'(t)}{y_1(t)L(y_1(t))}\right)' - \frac{(y_1'(t))^2}{(y_1(t))^2 L(y_1(t))}\left(1 + \frac{y_1(t)L'(y_1(t))}{L(y_1(t))}\right) = f(t).$$

Інтегруючи обидві частини по $t \in [x, +\infty)$, маємо:

$$\int_x^{\infty}\left(\frac{y_1'(t)}{y_1(t)L(y_1(t))}\right)' dt - \int_x^{\infty} \frac{(y_1'(t))^2}{(y_1(t))^2 L(y_1(t))}\left(1 + \frac{y_1(t)L'(y_1(t))}{L(y_1(t))}\right) dt = \int_x^{\infty} f(t)dt.$$

Обчислимо перший інтеграл за допомогою формули Ньютона–Лейбніца. Оскільки $y_1(t)$ є спадною додатною функцією, для якої виконується умова (3.6), то перший доданок у правій частині прямує до нуля при $t \to +\infty$. Таким чином,

$$\int_x^{+\infty}\left(\frac{y_1'(t)}{y_1(t)L(y_1(t))}\right)' dt = \frac{y_1'(t)}{y_1(t)L(y_1(t))}\Big|_x^{+\infty} = 0 - \frac{y_1'(x)}{y_1(x)L(y_1(x))}.$$

З огляду на знак та додатність усіх компонент, маємо:

$$-\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} = \varepsilon(x),$$

де $\varepsilon(x) \to 0$, $x \to \infty$.

Таким чином, функція $y_1(x)$ змінюється повільно при $x \to \infty$, звідси y_1 – повільна змінна функція. Що й треба було довести. $\square$

2.2 Ілюстрація отриманних результатів

Розглядається диференціальне рівняння на проміжку $[2; +\infty]$ виду:

$$y'' = y \cdot ln|\frac{1}{y}| \cdot \frac{\sqrt{\ln x} + 2\ln x + 1}{4x^2(\ln x)^2} \tag{4.1}$$

Це рівняння є рівнянням (3.1), в якому:

$$\begin{aligned} L(y) &= \ln\frac{1}{y} \\ f(x) &= \frac{\sqrt{\ln x} + 2\ln x + 1}{4x^2(\ln x)^2} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Виявляється, що дане рівняння має додатний повільно змінний розв'язок. Перевіримо, що

$$y(x) = e^{-\sqrt{lnx}} \tag{4.3}$$

є розв'язком рівняння (4.1).
Для початку розглянемо першу похідну функції $y(x)$.

$$\left(e^{-\sqrt{\ln x}}\right)' = e^{-\sqrt{\ln x}} \cdot \left(-\sqrt{\ln x}\right)' = e^{-\sqrt{\ln x}} \cdot \left(-1 \cdot \left(\sqrt{\ln x}\right)'\right)$$

$$= -e^{-\sqrt{\ln x}} \cdot \left((\ln x)^{1/2}\right)' = -e^{-\sqrt{\ln x}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot (\ln x)'\right)$$

$$= -e^{-\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{e^{-\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}$$

Отже,

$$y'(x) = -\frac{e^{-\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}} \tag{4.4}$$

Диференціюючи (4.4), отримаємо вираз для $y''(x)$.

$$y'(x) = -\left(\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} \cdot e^{-\sqrt{\ln x}}\right)$$

$$y''(x) = -\left[\left(\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}\right)' \cdot e^{-\sqrt{\ln x}} + \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} \cdot \left(e^{-\sqrt{\ln x}}\right)'\right]$$

$$\left(\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}\right)' = -\frac{1}{2x^2\sqrt{\ln x}} - \frac{1}{4x^2(\ln x)^{3/2}}$$

$$\left(e^{-\sqrt{\ln x}}\right)' = -\frac{e^{-\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= -\left[\left(-\frac{1}{2x^2\sqrt{\ln x}} - \frac{1}{4x^2(\ln x)^{3/2}}\right) \cdot e^{-\sqrt{\ln x}} + \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} \cdot \left(-\frac{e^{-\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}\right)\right] \\ &= \left(\frac{1}{2x^2\sqrt{\ln x}} + \frac{1}{4x^2(\ln x)^{3/2}}\right) e^{-\sqrt{\ln x}} + \frac{1}{4x^2(\ln x)} \cdot e^{-\sqrt{\ln x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= e^{-\sqrt{\ln x}} \cdot \left(\frac{1}{2x^2\sqrt{\ln x}} + \frac{1}{4x^2(\ln x)^{3/2}} + \frac{1}{4x^2 \ln x}\right) \\ &= \frac{\sqrt{\ln x} + 2\ln x + 1}{4x^2\sqrt{\ln x}\ln x} \cdot e^{-\sqrt{\ln x}} \end{aligned}$$

Звідси

$$y''(x) = \frac{\sqrt{\ln x} + 2\ln x + 1}{4x^2\sqrt{\ln x}\ln x \cdot e^{\sqrt{\ln x}}} \tag{4.5}$$

Обчислимо для рівняння (4.1) $ln|1/y|$. Підставляємо замість y (4.3).

$$ln|\frac{1}{y}| \to ln|\frac{1}{e^{-\sqrt{lnx}}}|$$

$$\ln\left|\frac{1}{e^{-\sqrt{\ln x}}}\right| = \ln\left(e^{\sqrt{\ln x}}\right) = \sqrt{\ln x}$$

$$ln|\frac{1}{y}| = \sqrt{\ln x} \tag{4.6}$$

Тепер розглянемо, звідки взялося значення $f(x)$ для (4.1).

$$\frac{\sqrt{\ln x}+2\ln x+1}{4x^2\sqrt{\ln x}\ln x\cdot e^{\sqrt{\ln x}}} = e^{-\sqrt{\ln x}}\cdot\sqrt{\ln x}\cdot f(x)$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{\ln x}+2\ln x+1}{4x^2\sqrt{\ln x}\ln x\cdot e^{\sqrt{\ln x}}\cdot\sqrt{\ln x}\cdot e^{-\sqrt{\ln x}}}$$

$$= \frac{\sqrt{\ln x}+2\ln x+1}{4x^2(\ln x)^2}$$

Перевіримо, чи задовільняє $f(x)$ умову теореми 1. Застосуємо правило Лопіталя.

$$\lim_{x\to\infty} x\int_x^\infty f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty} x\int_x^\infty \frac{2\ln t+1+\sqrt{\ln t}}{4t^2(\ln t)^2}\,dt$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\int_x^\infty \frac{2\ln x+1+\sqrt{\ln x}}{4t^2(\ln x)^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-2\ln x+1}{4x^2}}{-\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x+1+\sqrt{\ln x}}{4(\ln x)^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x(1+\frac{1}{\ln x}+\frac{\sqrt{\ln x}}{\ln x})}{4\ln^2 x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1+0+0}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} x\int_x^\infty f(t)\,dt = 0.$$

Очевидно, що $y(x) > 0\ \forall x \geq 2$.
Бачимо, що $f(x)$ задовільняє умови теореми А.С. і відповідний розв'язок $y(x)$ є повільно змінним.

Перевіримо, що функція

$$y(x) = e^{-\sqrt{\ln x}}$$

є повільно змінною. Для цього розглянемо відношення:

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{xy'(x)}{y(x)}\right| = \lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(-\frac{e^{-\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}\right)}{e^{-\sqrt{\ln x}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{\ln x}} = 0$$

Отже, $y(x) = e^{-\sqrt{\ln x}}$ — повільно змінна функція.

Можна зробити висновок, що рівняння (4.3) є розв'язком рівняння (4.1).

ВИСНОВКИ

У роботі досліджено умови існування повільно змінних розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку, що є близькими до лінійних.

Отримано необхідні та достатні умови існування спадних додатних повільно змінних розв'язків таких рівнянь. Результати проілюстровано на прикладі конкретного диференціального рівняння 2-го порядку з нелінійністю відповідного типу. Виявилося, що дане рівняння має точний спадний повільно змінний на нескінченності розв'язок.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. V.G. Avakumović. *Sur une extension de la condition de convergence des théoremes inverses de sommabilité*, C.R. Acad. Sci., Paris 200 (1935), 1515–1517.

2. N.H. Bingham, C.M. Goldie, J.L. Teugels. *Regular Variation*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 27, Cambridge Univ. Press, 1987.

3. V. Marić, M. Tomić. *Asymptotics of solutions of a generalized Thomas–Fermi equation*, J. Differential Equations 35(1980), 36–44.

4. V. Marić, M. Tomić. *A classification of solutions of second order linear differential equations by means of regularly varying functions*, Publ. Inst. Math. (Beograd) 48(62) (1990), 199–207.

5. V. Marić, M. Tomić. *Slowly varying solutions of second order linear differential equations*, Publ. Inst. Math. (Beograd) 58(72) (1995), 129–136.

6. V. Marić, Z. Radašin. *On asymptotic behaviour of solutions of the equations $y'' = f(x)\varphi\{\psi(y)\}$*, Glasnik Mat. Fiz. Astr. 23(43) (1988), 27–34.

7. E. Seneta. *Regularly varying functions*, Lecture Notes in Mathematics 508, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.

8. J. Karamata, *Sur une mode de croissance réguliere de fonctions*, Math. (Cluj) 4 (1930), 38–53.

9. E.E. Kohlbecker, *Weak asymptotic properties of partitions*, TAMS 88 (1958), 346–65.

10. J.L. Geluk, L. de Haan, *Regular variation, extensions and Tauberian theorems*, VWI Tract 40, Amsterdam, 1987.