

Ю. И. Бойко, Н. Х. Копыт*Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова***О подобии диспергирования жидкости под действием инерционных и гравитационных сил**

Обозначенная возможность подобия проанализирована как аналогия (расширенное подобие) на основании принципа минимума укороченного действия и по обычной схеме — с привлечением представлений о солитоне.

Типичным примером диспергирования жидкости под действием инерционных сил и сил поверхностного натяжения есть распад цилиндрической струи жидкости плотности ρ с коэффициентом поверхностного натяжения σ , истекающей из отверстия характерного размера d со скоростью V [1]. Сходная начальная и конечная стадии геометрии областей среды имеет место и при диспергировании жидкости под действием гравитационных сил и сил поверхностного натяжения в варианте капельного отрыва жидкости, истекающей из канала (капилляра).

Сопоставление процессов, описываемых различными уравнениями, представляет собой исследование их расширенного подобия или аналогии [2]. Основанием ему, помимо отмеченного кинематического подобия, есть принцип эквивалентности инерционных и гравитационных сил. Таким образом, методологической основой сведения указанных процессов к единой схеме описания будет использование критерия подобия Фруда $Fr_f = f_i / f_g$, как масштаба подобия в ней инерционных f_i и гравитационных f_g сил.

Статическое условие предотрывного равновесия массы жидкости, удерживаемой силами поверхностного натяжения f_σ на теле характерного размера d в поле силы тяжести, нормальном к направлению определения этого размера (диаметра канала), может быть записано через критерий подобия Бонда $Bo = f_g / f_\sigma = g\rho d^2 / \sigma$ в виде [3]

$$L_g / d = \sqrt[3]{6 / Bo} \quad (1)$$

где L_g — протяженность области реализации такого состояния в направлении силы тяжести.

С другой стороны, известно [4], что интегральная кинематическая характеристика такого же рода для инерционного дробления — длина L_i нерас-

павшегося участка струи жидкости, истекающей из отверстия, представима через критерий Вебера $W = f_i / f_\sigma = \rho V^2 d / \sigma$

$$L_i / d = c \sqrt{W} \quad (2)$$

где величина c , при определенных ограничениях, может считаться численным коэффициентом [5,6].

Одинаковость учета сил поверхностного натяжения в обоих процессах определяется критериальным соотношением

$$Fr_f = W / Bo = Fr_e \cdot L / d \quad (3)$$

Правая часть дает переход от него к произведению характеристического комплекса (числа подобия) $Fr_e = V^2 / Lg$ (g — ускорение силы тяжести) на характеристический симплекс L / d . Последний представляет масштаб, на котором реализуется одинаковость учета сил поверхностного натяжения, как одно из условий однозначности ($L / d = L_g / d = L_i / d$), позволяющее рассматривать подобие сопоставляемых процессов. Соответственно (3) целесообразно переписать в виде соотношения, дающего, как и (1), (2), эту интегральную характеристику

$$L / d = 1 / Fr_e \cdot Fr_f$$

Поскольку (1) выражает статическое условие, очевидно также, что общность этой характеристики сопоставляемых процессов прямо связана с возможностью квазистатического подхода к описанию инерционного дробления. Квазистатические процессы являются обратимыми и в них выполняется закон сохранения механической энергии. Поэтому предполагаемая аналогия далее исследуется с помощью адекватного для таких условий механического интегрального вариационного принципа — принципа Мопертюи (минимума укороченного действия). При определении формы траектории протяженностью l одной материальной точки массой m , с полной механической энергией E и потенциальной — U , между двумя заданными точками пространства, он может быть представлен, по Якоби [7],

$$\delta \int \sqrt{2m(E-U)} dl = 0 \quad (4)$$

Для такого укороченного действия прохождение через конечную точку относится к произвольному моменту времени, что, из соображений симметрии (по отношению к направлению движения струи — для инерционного диспергирования, по отношению к направлению силы тяжести — для гравитационного), позволяет отобразить область развития дробления движением точки, изображающей такую систему, по прямой, на расстояние H .

Кинематическое условие движения по прямой — $\delta \int dl = 0$, обеспечивается из (4) при $E - U = \text{const}$. Вариант $U \rightarrow 0$, $E = \text{const} \cong T = mV^2/2$ (T — кинетическая энергия системы) удовлетворяет инерционному дроблению, вариант $E \cong U = mgH$, $\text{const} \rightarrow 0$ — гравитационному (при соблюдении указанного выше одинаковости вклада сил поверхностного натяжения в обоих процессах). Их совмещение ведет, наряду с сохранением гамильтониана, к сохранению лагранжиана системы

$$T - U = \text{const} \rightarrow 0 \text{ или } T \cong U \quad (5)$$

и дает

$$V^2 / gH \cong 2 \text{ или } Fr_e \cong H/L/2$$

Отметим, что содержание соотношения (5) соответствует результату применения вириальной теоремы [7] для малых колебаний точки, изображающей развитие области дробления жидкости.

Минимальное значение $Fr_e = 1$ достигается при $H = L/2$ и соответствует наличию оси симметрии области развития дробления и в направлении, перпендикулярном направлению движения жидкости. Максимальное значение $Fr_e \cong 2$ связано с максимальным приближением центра масс области дробления, как изображающей точки, к крайней точке области дробления — $H \rightarrow L$. Поскольку совместное использование (1),(2),(3) дает для исследования подобия соотношение

$$L/d = \sqrt[4]{6c^2 Fr_e} \quad (6)$$

то использование любого Fr_e из указанного диапазона его значений изменяет левую часть не более чем на 20%. Это позволяет применять (6) для оценок в виде $L/d \approx 1,6\sqrt{c}$.

Т.к. нас интересует возможность квазистатического подхода к инерционному дроблению, то в качестве опорного экспериментального результата воспользуемся данными [8], где для предотрывного состояния водяной капли на подвесе получено $L/d \approx 4,0$. Чтобы получить результат такой величины в правой части (6), нужно взять близкое к максимальному, с учетом реальных ограничений, значение c . Из [4] известно, что оно растет при улучшении ламинарности истечения струи, как за счет организации течения в канале (сопле), так и за счет уменьшения скорости истечения (числа Вебера). Таким образом через характеристику c получаем количественное подтверждение качественно тривиального вывода — квазистатический подход к схеме описания все более оправдан при все меньших скоростях движения

жидкости. Проводимое же рассмотрение дает способ оценки значений параметра c , выше которых уже допустимо такое, существенно более простое описание процесса диспергирования. Численный результат для $c \approx 3,75$, взятый из [4] для ламинарного истечения, и $Fr_e = 2$ дают $L/d \approx 3,6$ — расхождение с экспериментом, не превышающее 10%. При этом экспериментальные данные по отношению к расчетной схеме для (1) следует считать завышенными, поскольку обволакивание жидкостью шарика-подвеса ведет к увеличению удерживаемой им массы жидкости.

Расширенное подобие можно исследовать и методами, обычными для теории подобия, если объединить дифференциальные уравнения сопоставляемых процессов, как варианты системы уравнений движения среды Эйлера, за счет повышения их порядка. С этой точки зрения полезен переход от характеристик, связанных с выражением уравнения переноса импульса в области движения среды как дифференциального уравнения 1-го порядка, к характеристикам, связанным со схемой описания, использующей волновые уравнения, более высокого порядка. Предпосылка такого подхода содержится уже в полученном выше при обобщении инерционного и гравитационного дробления сохранении лагранжиана в виде частного случая вириальной теоремы как реализации малых колебаний системы. Существенно то, что применение вириальной теоремы, связывающей средние значения двух видов механической энергии, как и реальный процесс диспергирования, обусловлено изменением волновых характеристик в ограниченной области. К волновым движениям такого рода, которые называют также квазичастицами, относятся волновые пакеты и солитоны. Понятие волнового пакета не адекватно описанию дробления, поскольку в общем случае развитие его идет как “расплывание” квазичастицы — усиление признаков волны, тогда как в ходе диспергирования сплошной среды в состоянии квазичастицы должны усиливаться признаки частицы. Усиление (нарастание) признаков частицы возможно для солитона, за счет изменения его скорости и амплитуды. Для рассматриваемых обратимых (недиссипативных) процессов его, как решение, можно получить из усложненной формы волнового уравнения, учитывающей малые нелинейность и дисперсию — уравнения Кортевега-де Фриса. Его линейное приближение первоначально использовалось в теории волн на поверхности мелкой воды, однако применимо для описания и других возвышений свободной поверхности над ее невозмущенным уровнем [9]. Приближение же обратимости позволяет смотреть на гравитационное дробление и как на втекание некоторого возвышения жидкости в канал (капилляр) — бегущую волну противоположного направления, чем то, развитие процесса в котором ведет к образованию капли.

К квазичастичности (солитонности) решения волнового уравнения Кортевега-де Фриса ведет уравнивание нелинейности процесса проявлением дисперсии, обусловленной конечностью области его развития. Для каче-

ственной оценки этой ограниченности в плане сопоставления рассматриваемых процессов и в связи с достаточной условностью упомянутого приближения уравнения Кортевега-де Фриса возьмем простейшее дисперсионное уравнение для волновых возмущений поверхности жидкости [10]

$$\omega = \sqrt{gk + \sigma k^3 / \rho} \quad (7)$$

Здесь $k = 2\pi / \lambda$ — волновой вектор, λ — длина волны, ω — ее частота.

Хотя (7) справедливо лишь для волн, амплитуда которых гораздо меньше и длины волны и характеристического размера L области реализации процессов, в пользу предлагаемого подхода говорит то обстоятельство, что, например, уточнение (7) по влиянию L сводится к появлению общего множителя к его слагаемым, т.е. не влияет на их соотношение.

Первое слагаемое в (7) определяет развитие волнового возмущения поверхности под действием гравитации, второе — как капиллярный процесс (определяемый конкуренцией сил поверхностного натяжения и инерционных сил). Одинаковость вклада обоих процессов в дисперсию, как выражение их подобия в волновых представлениях, определится условием

$$gk_e = \sigma k_e^3 / \rho$$

являющимся также условием экстремума фазовой скорости V_ω такого волнового возмущения поверхности и равенства ее при этом групповой скорости V_k [10]. В характеристиках развития капиллярного процесса следовательно

$$\omega_e^2 = \left(2\pi / T_e\right)^2 = 2\sigma / \rho \left(2\pi / \lambda_e\right)^3$$

Условие реализации процесса диспергирования в капиллярном аспекте можно сформулировать как окончание за время $T_i = \alpha T_e$ развития рэлеевского возмущения с периодом T_e на нераспавшемся участке струи, при условии $V_\omega = V_k = V$ (т.е. $T_i = L / V$, и величина $1/\alpha = T_e / T_i = VT_e / L = Sr$ приобретает смысл числа Струхала сопоставляемых процессов). Используя соотношение $\lambda_e = 4,508d$ для длины волны рэлеевского возмущения [1] и соотношение (2), получаем, что обеспечение ими подобия капиллярного и гравитационного аспектов диспергирования как развития волнового возмущения возможно при $\alpha = 0,37c$. Таким образом, для $c = 2,70$, что менее чем на 10% отличается от расчетной оценки постоянного значения $c = 2,99$ в [5], имеем

$$1/\alpha = Sr = 1$$

т.е. при сделанных допущениях можно говорить о подобии упомянутых аспектов диспергирования как о реализации его в локальном волновом возмущении ($T_i = T_e$) — солитоне. В соответствии с [11], на отражении солитоном единства физического механизма сопоставляемых процессов и основывается, в таком рассмотрении, их расширенное подобие (аналогия). Следует отметить, что аналогия инерционных и гравитационных сил используется и в предельном случае развития поверхностных возмущений, полностью определяемых силой тяжести [12], когда вводится аналог числа Вебера $W = \rho g h^2 / \sigma$, где в качестве характеристической скорости для области h применяется групповая скорость $v = \sqrt{gh}$. Возвращаясь к подходу, базирующемуся на принципе Мопертюи, заметим, что эта скорость совпадает со скоростью материальной точки при падении ее в поле силы тяжести с высоты $h/2$ при нулевом начальном значении. Следовательно, такая аналогия соответствует симметрии возмущения относительно оси, перпендикулярной направлению его распространения.

Использование представлений о солитоне в описании диспергирования сплошной среды видимо выходит за рамки исследованной аналогии. В частности, для него излишне примененное здесь предположение квазистатичности, что открывает, например, возможность приложения к задаче о соударении капель типа [13]. С другой стороны, отнесение к процессам с автомодельностью второго рода существенно для солитона [9], а это, в силу значимости начальных условий для них, проясняет роль определяемых в решении линейной задачи диспергирования параметров на стадии ее нелинейности [1].

Литература

1. Асланов С.К. Решение задачи Рэлея о неустойчивости тонких струй для стадии их распада // Физика аэродисперсных систем. — 2001. — Вып. 38. — С. 220-227.
2. Гухман А.А. Введение в теорию подобия. — М.: Высшая школа, 1973. — 296 с.
3. Тепло- и массообмен. Теплотехнический эксперимент / Под ред. В.А. Григорьева и В.М. Зорина. — М.: Энергоиздат, 1982. — 512 с.
4. Дитякин Ю.Ф., Клячко Л.А., Новиков Б.В., Ягодкин В.И. Распыливание жидкостей. М.: Машиностроение, 1977. — 208 с.
5. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. — М.: Физматгиз, 1959. — 700 с.
6. Гунбин В.Ф., Тимохин А.Д. Капиллярная неустойчивость осесимметричных струй жидкости // Труды Моск. энерг. ин-та. — 1983. — №615. — С. 15-43.

7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. — М.: Наука, 1988. — 216 с.
8. Бойко Ю.И. Массоперенос в упорядоченных дисперсных системах при переходных числах Рейнольдса: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Одесса, 1991.
9. Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. — Л.: Гидрометеиздат, 1982. — 255 с.
10. Физическая энциклопедия, т.1 / Под ред. А.М. Прохорова. — М.: Советская энциклопедия, 1988. — 704 с.
11. Гухман А.А. Применение теории подобия к исследованию процессов тепло-массообмена. — М.: Высшая школа, 1974. — 328 с.
12. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1972. — 392 с.
13. Асланов С.К., Колпаков А.В., Малярова Л.В. Струя растяжения при частичном слиянии капель // Дисперсные системы, XX конф. стран СНГ, 23-27 сент. 2002. — С. 19-20.

Ю. І. Бойко, М. Х. Копит

Про подібність диспергування рідини під дією інерційних і гравітаційних сил

АНОТАЦІЯ

Можливість означеної подібності проаналізовано як аналогію (розширену подібність) на основі принципу мінімуму вкороченої дії та по звичайній схемі — з застосуванням понять про солітон.

Yu. I. Boiko, N. Kh. Kopyt

On the similarity of dispersing a liquid under inertial and gravitational forces

SUMMARY

Mentioned similarity has been analyzed as the analogy (the extended similarity) on the basis of both principle of shorted least action and by standard scheme using the notion of soliton.