

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова  
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій  
Кафедра методів математичної фізики

## Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

«Вісісиметрична задача кручення пружнього циліндру  
з круговою тріщиною»

«Axisymmetric problem of torsion of an elastic cylinder  
with a circular crack»

Виконав(ла): здобувач(ка) денної форми навчання  
спеціальності 113 Прикладна математика  
Освітня програма «Прикладна математика»  
Іванов Віктор Ігорович

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Процеров Ю. С. \_\_\_\_\_

Рецензент: доктор фіз.-мат. наук, проф. Вайсфельд Н.Д.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ \_\_\_\_ від \_\_\_\_\_ 2023

р.

Завідувач кафедри

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Захищено на засіданні ЕК № \_\_\_\_\_

Протокол № \_\_\_\_ від \_\_\_\_\_ 2023 р.

Оцінка \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_

Голова ЕК

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Одеса — 2023 р.

# ЗМІСТ

Вступ	3
1 Основна частина	4
1.1 Постановка задачі . . . . .	4
1.2 Зведення задачі до одновимірної крайової задачі . .	6
1.3 Розв’язок одновимірної крайової задачі . . . . .	7
2 Розв’язок інтегрально-диференційного рівняння	13
2.1 Отримання інтегрального рівняння та аналіз його ядра . . . . .	13
2.2 Розв’язок інтегрально-диференційного рівняння методом ортогональних поліномів . . . . .	14
3 Коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН)	19
3.1 Знаходження КІН . . . . .	19
4 Чисельні результати	21
Висновки	25
Список літератури	26
ДОДАТКИ	27

## ВСТУП

В багатьох конструкціях машинобудування та будівництва використовуються елементи циліндричної форми, що підлягають крученню. Наявність у цих елементах дефектів у вигляді тріщин знижує їх механічну стійкість та може спричинити руйнування. Теорія пружності має справу з деформацією та переміщенням пружних тіл під впливом зовнішніх навантажень. Тому задачі теорії пружності для тіл циліндричної форми з дефектами є актуальними.

Магістерська дипломна робота присвячена розгляданню вісісиметричної задачі кручення пружного циліндру з круговою тріщиною. За допомогою методу інтегральних перетворень розв'язок цієї задачі зведено до інтегрального рівняння відносно невідомого стрибка переміщень на тріщині. Отримане інтегральне рівняння, після виділення сингулярної частини ядра, було представлено у такому вигляді, який допускає його розв'язання за допомогою метода ортогональних поліномів.

# РОЗДІЛ 1

## ОСНОВНА ЧАСТИНА

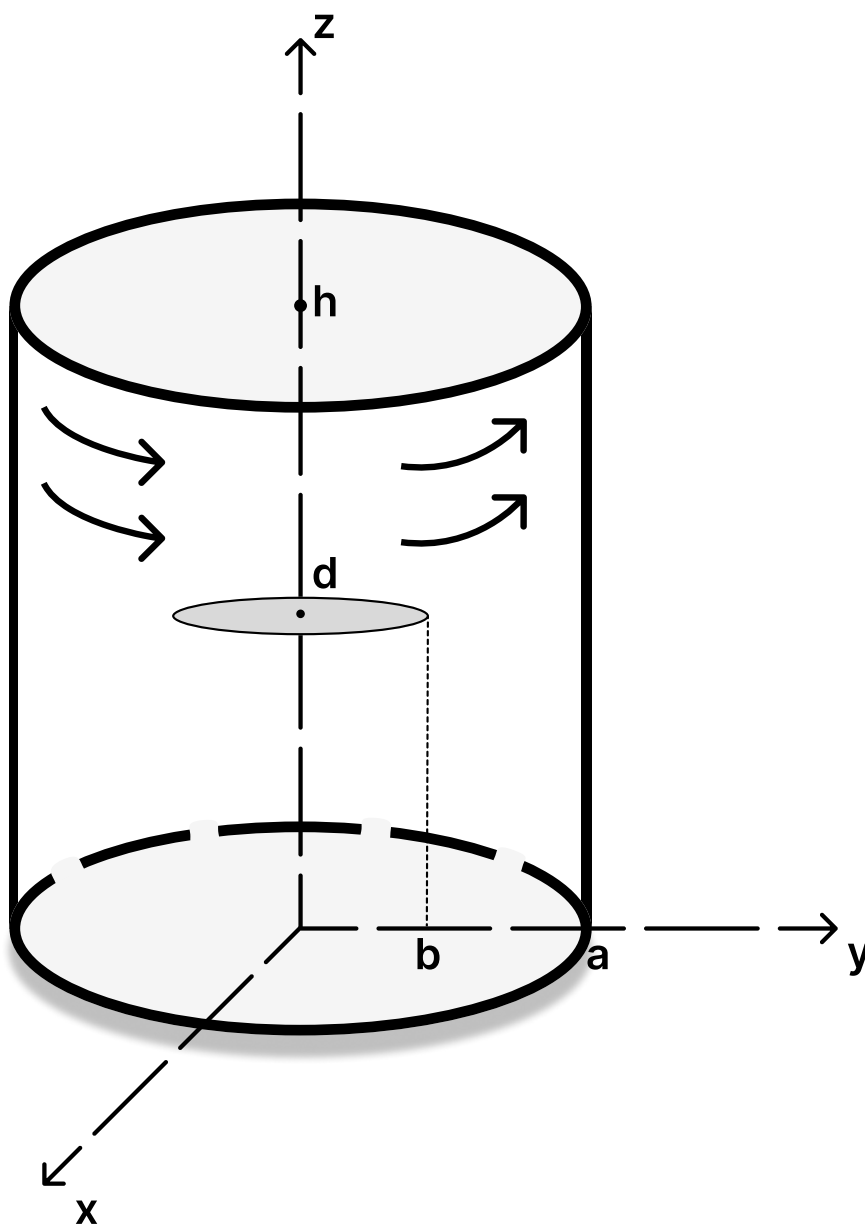
### Постановка задачі

Розглянемо прямий круговий циліндр, який займає у циліндричній системі координат

$$(r, \varphi, z)$$

область

$$0 \leq r \leq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq h.$$



Нижня основа циліндра  $z = 0$  нерухомо закріплена, верхня основа  $z = h$  вільна від напружень. До бічної поверхні прикладено вісісиметричне дотичне навантаження, що викликає кручення циліндра. У цьому випадку всі величини не будуть залежати від кутової координати  $\varphi$ .

Відмінні від нуля будуть:

кутове переміщення

$$u(r, z) = u_\varphi(r, z)$$

та дотичні напруження

$$\tau_{r\varphi} = G\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}u\right)$$

та

$$\tau_{z\varphi} = G\frac{\partial u}{\partial z},$$

де  $G$  модуль зсуву матеріала циліндра. Переміщення  $u(r, \varphi)$  повинне задовольняти рівнянню Ламе:

$$r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}u + r\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$0 \leq r \leq a$$

$$0 \leq z \leq h$$

та крайовим умовам:

$$u|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=h} = 0$$

$$\tau_{r\varphi} = G\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}u\right)|_{r=a} = p(z)$$

$$u(r, z) \text{ обмежена при } r \rightarrow 0.$$

У середині циліндра в області

$$0 \leq r \leq b, z = d$$

є кругова тріщина, береги якої вільні від напружень. При переході через тріщину переміщення зазнає невідомий стрибок.

$$\langle u \rangle = u(r, d - 0) - u(r, d + 0) = \chi(r), \quad 0 \leq r \leq b$$

$$\chi(r) = 0, \quad b \leq r \leq a$$

$$\chi(b) = 0$$

Береги тріщини вільні від напружень:

$$\tau_{z\varphi}|_{z=d\pm 0} = G \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=d\pm 0} = 0$$

$$\text{звідки } \langle \frac{\partial u}{\partial z} \rangle = 0.$$

### Зведення задачі до одновимірної крайової задачі

Для зведення задачі до одновимірної застосуємо перетворення Фур'є за змінною  $z$  за узагальненою схемою до рівняння та крайової умови, коли  $r = a$ :

$$u_k(r) = \int_0^h u(r, z) \sin \lambda_n z dz$$

де

$$\lambda_k = \frac{\pi}{2h}(2k - 1), \quad k \in \mathbb{N}.$$

З формулою обернення:

$$u(r, z) = \frac{2}{h} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(r) \sin \lambda_k z$$

У результаті ми отримали неоднорідну одновимірну крайову задачу від змінної  $r$  відносно трансформанти Фур'є  $u_k(r)$ :

$$r u_k''(r) + u_k'(r) - \frac{1}{z} u_k(r) - r \lambda_k^2 u_k(r) = \lambda_k \chi(r) \cos \lambda_k d.$$

та крайову умову:

$$u'_k(a) - \frac{1}{a}u_k(a) = \frac{1}{G}p_k,$$

де

$$p_k = \int_0^h p(z) \sin \lambda_k z dz.$$

Права частина отриманого рівняння містить невідому функцію  $\chi(\rho)$ . Отримане рівняння є рівнянням Бесселя для модифікованих функцій Бесселя  $I_1(\lambda_k r)$  та  $K_1(\lambda_k r)$ .

### Розв'язок одновимірної крайової задачі

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$ru_k''(r) + u_k'(r) - \frac{1}{z}u_k(r) - r\lambda_k^2 u_k(r) = 0$$

має вигляд:

$$u_k(r) = A_k I_1(\lambda_k r) + B_k K_1(\lambda_k r),$$

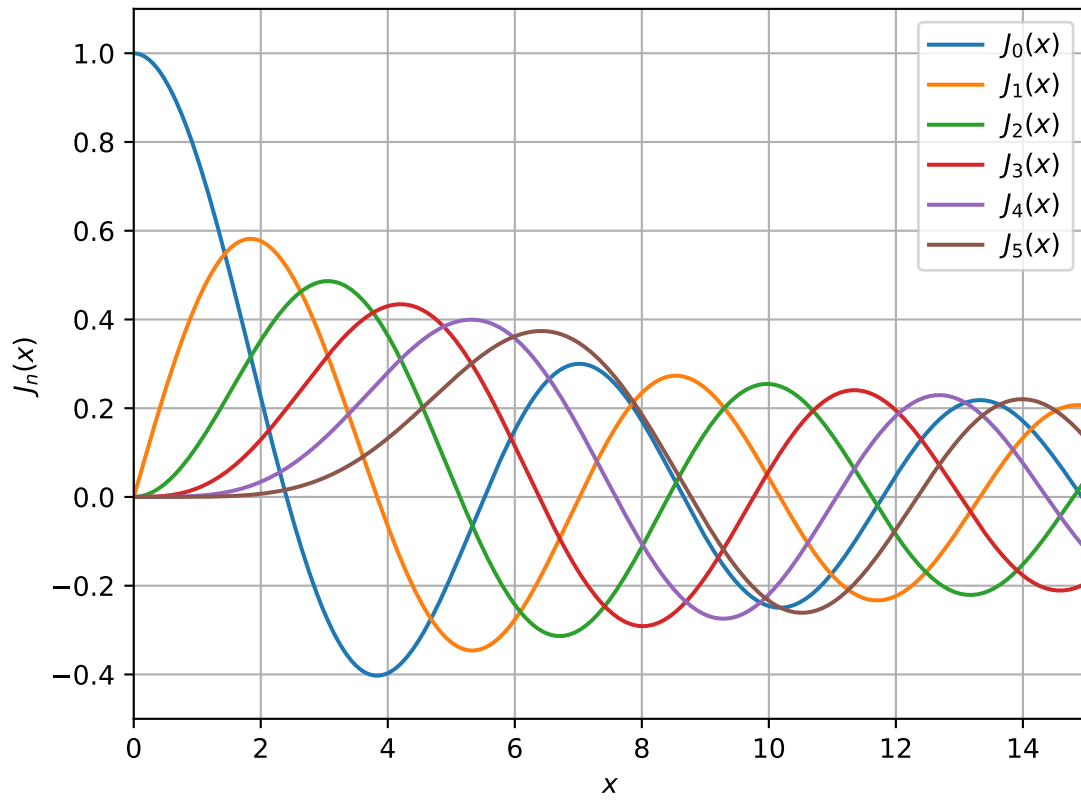
де  $A_k$  та  $B_k$  – невідомі сталі.

Беручи до уваги, що функція Бесселя  $I_1(\lambda_k r)$  обмежена коли  $r \rightarrow 0$ , а функція  $K_1(\lambda_k r)$  необмежена при  $r \rightarrow 0$ . За умови обмеженості переміщення при  $r = 0$  покладемо  $B_k = 0$ . Таким чином розв'язок однорідного рівняння:

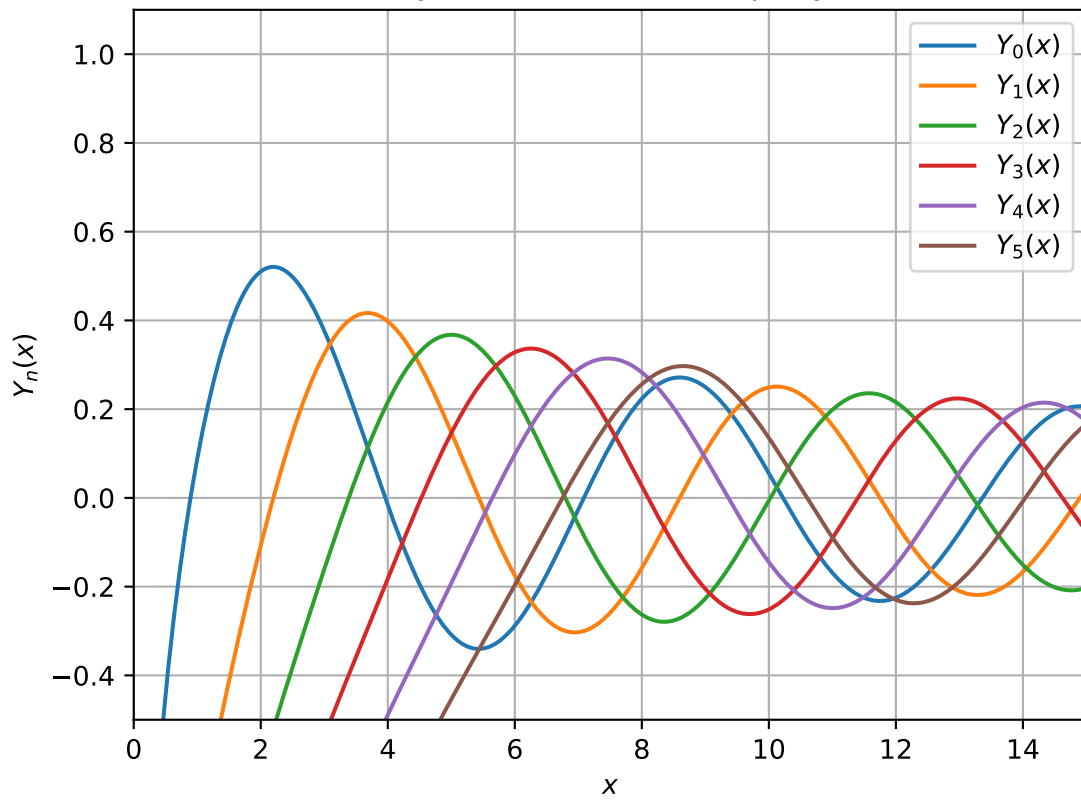
$$u_k(r) = A_k I_1(\lambda_k r)$$

Графіки функцій Бесселя 1-го та 2-го роду (Неймана) має вигляд:

Функції Бесселя 1-го роду



Функції Бесселя 2-го роду



Щоб отримати частинний розв'язок неоднорідного рівняння, можна скористатися фундаментальною функцією  $\Phi_k(r, \rho)$ :

$$\Phi_k(r, \rho) = - \begin{cases} I_1(\lambda_k \rho) K_1(\lambda_k r), & 0 \leq \rho < r \leq a; \\ I_1(\lambda_k r) K_1(\lambda_k \rho), & 0 \leq r < \rho \leq a. \end{cases}$$

Яку також можна записати у вигляді:

$$\Phi_k(r, \rho) = - \int_0^\infty J_1(\rho x) J_1(r x) \frac{x dx}{x^2 + \lambda_k^2}$$

У результаті, загальний розв'язок неоднорідного рівняння, обмеженого при  $r = 0$ , має вигляд:

$$u_k(r) = A_k I_1(\lambda_k r) + \lambda_k \cos \lambda_k d \int_0^b \chi(\rho) \Phi_k(r, \rho) \rho d\rho.$$

Знайдемо  $A_k$  із крайової умови:

$$a u_k'(a) - u_k(a) = \frac{a}{G} p_n.$$

У ході розв'язку, скористаємося формулами диференціювання модифікованих функцій Бесселя:

$$\left[ \begin{array}{l} a \lambda_k I_2(\lambda_k a) = a \lambda_k I_1'(\lambda_k a) - I_1(\lambda_k a) \\ -a \lambda_k K_2(\lambda_k a) = a \lambda_k K_1'(\lambda_k a) - K_1(\lambda_k a) \end{array} \right]$$

Тоді:

$$\begin{aligned} & a A_k I_1'(\lambda_k a) \lambda_k - A_k I_1(\lambda_k a) - \\ & - \lambda_k \cos \lambda_k d a \int_0^b \chi(\rho) I_1(\lambda_k \rho) K_1'(\lambda_k a) \lambda_k d\rho + \\ & + \lambda_k \cos \lambda_k d \int_0^b \chi(\rho) I_1(\lambda_k \rho) K_1(\lambda_k a) d\rho = \frac{a}{G} p_k \end{aligned}$$

Отримали:

$$A_k = \frac{p_k}{G\lambda_k I_2(\lambda_k a)} - \frac{\lambda_k \cos \lambda_k d}{I_2(\lambda_k a)} \int_0^b \chi(\rho) I_1(\lambda_k \rho) K_2(\lambda_k a) d\rho$$

Підставимо  $A_k$  у вираз для  $u_k(r)$ :

$$u_k(r) = \frac{p_k I_1(\lambda_k r)}{G\lambda_k I_2(\lambda_k a)} - \frac{\lambda_k I_1(\lambda_k r) \cos \lambda_k d}{I_2(\lambda_k a)} K_2(\lambda_k a) \int_0^b \chi(\rho) I_1(\lambda_k \rho) d\rho + \\ + \lambda_k \cos \lambda_k d \int_0^b \chi(\rho) \Phi_k(r, \rho) \rho d\rho.$$

Далі, застосуємо формулу звернення

$$u(r, z) = \frac{2}{h} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(r) \sin \lambda_k z$$

та отримуємо:

$$u_k(r) = \frac{2}{Gh} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k I_1(\lambda_k r)}{\lambda_k I_2(\lambda_k a)} \sin \lambda_k r - \\ - \frac{2}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k I_1(\lambda_k r) \cos \lambda_k d \sin \lambda_k z}{I_2(\lambda_k a)} K_2(\lambda_k a) \int_0^b \chi(\rho) I_1(\lambda_k \rho) \rho d\rho + \\ + \frac{2}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cos \lambda_k d \sin \lambda_k z \int_0^b \chi(\rho) \Phi_k(r, \rho) \rho d\rho$$

Розглянемо останній доданок та запишемо його у вигляді:

$$\frac{2}{h} \int_0^b \chi(\rho) \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \cos \lambda_k d \sin \lambda_k z \Phi(k(r, \rho)) \right] \rho d\rho$$

Підставимо вираз:

$$\Phi_k(r, \rho) = - \int_0^{\infty} J_1(rx) J_1(\rho x) \frac{x dx}{x^2 + \lambda_k^2}$$

та використаємо тотожність

$$J_1(rx)J_1(\rho x) = \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \rho} J_0(rx)J_0(\rho x)$$

і застосуємо формулу

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1) \sin(2k-1)x}{(2k-1)^2 + a^2} = \frac{\pi \cosh\left(\frac{\pi}{2} - x\right)a}{4 \cosh \frac{\pi a}{2}}$$

Отримаємо:

$$\begin{aligned} u(r, z) = & -\frac{1}{2} \int_0^b \chi(\rho) \rho d\rho \frac{\partial^2}{\partial r \partial \rho} \int_0^{\infty} J_0(rx) J_0(\rho x) [\cosh(h - (z + d))x + \\ & + \operatorname{sign}(z - d) \cosh(h - |z - d|)] x \frac{dx}{x \cosh hx} + \\ & + \frac{2}{h} \int_0^b \chi(\rho) \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k \cos \lambda_k d \sin \lambda_k z}{I_2(\lambda_k)} I_1(\lambda_k r) I_1(\lambda_k \rho) K_2(\lambda_k a) \right] \rho d\rho + \\ & + \frac{2}{Gh} \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{I_1(\lambda_k r)}{\lambda_k I_2(\lambda_k a)} \sin \lambda_k z. \end{aligned}$$

Для того щоб знайти  $\chi(\rho)$ , скористаємося умовою на тріщині:

$$\tau_{z\varphi}|_{z=d\pm 0} = G \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=d\pm 0} = 0, \quad \implies \quad \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=d\pm 0} = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \int_0^b \chi(\rho) \rho d\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \int_0^{\infty} J_0(rx) J_0(\rho x) dx + \\ & + \int_0^b \chi(\rho) \rho d\rho \int_0^{\infty} J_1(rx) J_1(\rho x) \left[ \frac{\sinh(h - 2d)x}{\cosh hx} + \tanh hx - 1 \right] x^2 dx \end{aligned}$$

$$\frac{4}{h} \int_0^b \chi(\rho) \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2 \cos \lambda_k d^2}{I_2(\lambda_k a)} I_1(\lambda_k r) I_1(\lambda_k \rho) K_2(\lambda_k a) \right] \rho d\rho =$$

$$- = \frac{4}{Gh} \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{I_1(\lambda_k r)}{I_2(\lambda_k a)} \cos \lambda_k d$$

Перейдемо від проміжку  $(0, b)$  до проміжку  $(0, 1)$ .

Зробимо заміну:

$$r = b\eta, \quad \rho = b\xi, \quad \eta, \xi \in (0, 1), \quad x = \frac{t}{b}.$$

Отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^1 \chi(b\xi) \xi d\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^{\infty} J_0(\eta t) J_0(\xi t) dt +$$

$$+ b \int_0^1 \chi(b\xi) \xi d\xi \int_0^{\infty} J_1(\eta t) J_1(\xi t) \left[ \frac{\sin(\frac{h-2d}{b}t)}{\cosh tbh} + \tanh \frac{h}{b}t - 1 \right] t^2 dt +$$

$$+ \frac{4b^3}{h} \int_0^1 \chi(b\xi) \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2 \cos \lambda_k d^2}{I_2(\lambda_k a)} I_1(\lambda_k b\eta) I_1(\lambda_k b\xi) K_2(\lambda_k a) \right] \xi d\xi =$$

$$= - \frac{4b}{Gh} \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{I_1(\lambda_k b\eta)}{I_2(\lambda_k a)} \cos \lambda_k d.$$

## РОЗДІЛ 2

# РОЗВ'ЯЗОК ІНТЕГРАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІЙНОГО РІВНЯННЯ

Отримання інтегрального рівняння та аналіз його ядра

Позначимо:  $\Psi(\xi) = \chi(b\xi)$

$$K_1(r, \xi) = b \int_0^\infty J_1(t\eta) J_1(t\xi) \left[ \frac{\sinh \frac{h-2d}{b} t}{\cosh \frac{h}{b} t} + \tanh \frac{h}{b} t - 1 \right] t^2 dt$$

$$K_2(\eta, \xi) = \frac{4b^3}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2 \cos \lambda_k^2 d}{I_2(\lambda_k a)} \cdot I_1(\lambda_k b \eta) \cdot I_1(\lambda_k b \xi) \cdot K_2(\lambda_k a)$$

$$S(\eta, \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} W_{oo}(\eta, \xi)$$

де

$$W_{oo}(\eta, \xi) = \int_0^\infty J_0(t\eta) J_0(t\xi) dt$$

- інтеграл Вебера-Шафхейтліна, який має розрив при  $\eta = \xi$ .

Ядра  $K_1(r, \xi)$  та  $K_2(\eta, \xi)$  - регулярні, містять інтеграли та ряди, які збігаються.

Ядро  $S(\eta, \xi)$  - сингулярне, має особливість при  $\eta = \xi$ .

Отримаємо інтегрально-диференціальне рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^1 \Psi(\xi) S(\eta, \xi) \xi d\xi + \int_0^1 [K_1(\eta, \xi) + K_2(\eta, \xi)] \Psi(\xi) \xi d\xi = f(\eta),$$

де

$$f(\eta) = -\frac{4b}{Gh} \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{I_1(\lambda_k b \eta)}{I_2(\lambda_k a)} \cos \lambda_k d.$$

Для розв'язання цього інтегрально-диференційного рівняння можна застосувати метод ортогональних поліномів. [3]

## Розв'язок інтегрально-диференційного рівняння методом ортогональних поліномів

Шукаємо розв'язок інтегрально-диференційного рівняння у вигляді розвинення за поліномами Якобі:

$$\Psi(\xi) = \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \cdot P_j^{1, \frac{1}{2}}(1 - 2\xi^2)$$

де  $P_j^{1, \frac{1}{2}}(1 - 2\xi^2)$  - поліноми Якобі,  $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{2}$ ,

$\xi \sqrt{1 - \xi^2}$  - вагова функція. Скористуємося та підставимо його в інтегральне рівняння. Отримаємо:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^1 \xi^2 \sqrt{1 - \xi^2} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j P_j^{1, \frac{1}{2}}(1 - 2\xi^2) S(\eta, \xi) d\xi \\ & + \int_0^1 [K_1(\eta, \xi) + K_2(\eta, \xi)] \xi^2 \sqrt{1 - \xi^2} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j P_j^{1, \frac{1}{2}}(1 - 2\xi^2) d\xi = f(\eta) \end{aligned}$$

Спектральне співвідношення має вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^1 \xi^2 \sqrt{1 - \xi^2} P_j^{1, \frac{1}{2}}(1 - 2\xi^2) S(\eta, \xi) d\xi = \frac{\Gamma(j + \frac{5}{2})\Gamma(j + \frac{3}{2})}{j!(j+1)!} \cdot \eta \cdot P_j^{1, \frac{1}{2}}(1 - 2\eta^2)$$

Використаємо спектральне співвідношення.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \cdot \frac{\Gamma(j + \frac{5}{2})\Gamma(j + \frac{3}{2})}{j!(j+1)!} \cdot \eta \cdot P_j^{1, \frac{1}{2}}(1 - 2\xi^2) + \\ & + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \cdot \xi^2 \sqrt{1 - \xi^2} \cdot P_j^{1, \frac{1}{2}}(1 - 2\xi^2) \cdot [K_1(\eta, \xi) + K_2(\eta, \xi)] d\xi = f(\eta) \end{aligned}$$

Домножимо отриману рівність на

$$\eta^2 \cdot \sqrt{1 - \eta^2} \cdot P_m^{1, \frac{1}{2}}(1 - 2\eta^2)$$

та проінтегруємо отримане рівняння за змінною  $\eta$  на проміжку  $(0, 1)$ .

Маємо:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \cdot \frac{\Gamma(j + \frac{5}{2})\Gamma(j + \frac{3}{2})}{j!(j+1)!} \cdot \int_0^1 \eta^3 \sqrt{1-\eta^2} P_j^{1, \frac{1}{2}}(1-2\xi^2) P_m^{1, \frac{1}{2}}(1-2\xi^2) d\eta + \\ & \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \cdot \int_0^1 \eta^2 \sqrt{1-\eta^2} P_m^{1, \frac{1}{2}} d\eta \cdot \int_0^1 \xi^2 \sqrt{1-\xi^2} P_j^{1, \frac{1}{2}} d\xi \cdot \\ & \cdot [K_1(\eta, \xi) + K_2(\eta, \xi)] d\xi = \int_0^1 \eta^2 \sqrt{1-\eta^2} P_m^{1, \frac{1}{2}} f(\eta) d\eta \end{aligned}$$

Властивість ортогональних поліномів Якобі

$$\int_0^1 \eta^3 \sqrt{1-\eta^2} \cdot P_j^{1, \frac{1}{2}}(1-2\eta^2) P_m^{1, \frac{1}{2}}(1-2\eta^2) d\eta = \frac{(m+1)\Gamma(m + \frac{3}{2})}{(4m+5)\Gamma(m + \frac{5}{2})} \cdot \delta_{mj}$$

$$\delta_{mj} = \begin{cases} 1, m = j \\ 0, m \neq j \end{cases}$$

Отримаємо:

$$\begin{aligned} & \psi_m \frac{\Gamma^2(m + \frac{3}{2})}{(4m+5) \cdot m! \cdot m!} + \sum_{m=0}^{\infty} \psi_i \cdot \int_0^1 \eta^2 \cdot \sqrt{1-\eta^2} \cdot P_m^{1, \frac{1}{2}}(1-2\eta^2) d\eta \cdot \\ & \cdot \int_0^1 \xi^2 \cdot \sqrt{1-\xi^2} \cdot P_j^{1, \frac{1}{2}}(1-\xi^2) \cdot [K_1(\eta, \xi) + K_2(\eta, \xi)] d\xi \\ & = \int_0^1 \eta^2 \cdot \sqrt{1-\eta^2} \cdot P_m^{1, \frac{1}{2}} \cdot f(\eta) d\eta \end{aligned}$$

Як ми можемо побачити, на цьому етапі ми пришли до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

$$\frac{\beta_m^2}{4m+5} \psi_m + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j [A_{mj} + B_{mj}] = C_m, m \geq 0.$$

$$\text{де } \beta_m = \frac{\Gamma(m+\frac{3}{2})}{m!},$$

$$A_{mj} = \int_0^1 \eta^2 \cdot \sqrt{1-\eta^2} \cdot P_m^{1,\frac{1}{2}}(1-2\eta^2) d\eta \cdot \int_0^1 \xi^2 \cdot \sqrt{1-\xi^2} \cdot P_j^{1,\frac{1}{2}}(1-2\xi^2) \cdot K_1(\eta, \xi) d\xi$$

$$B_{mj} = \int_0^1 \eta^2 \cdot \sqrt{1-\eta^2} \cdot P_m^{1,\frac{1}{2}}(1-2\eta^2) d\eta \cdot \int_0^1 \xi^2 \cdot \sqrt{1-\xi^2} \cdot P_j^{1,\frac{1}{2}}(1-2\xi^2) \cdot K_2(\eta, \xi) d\xi$$

$$C_m = \int_0^1 \eta^2 \cdot \sqrt{1-\eta^2} \cdot P_m^{1,\frac{1}{2}}(1-2\eta^2) f(\eta) d\eta$$

Використовуючи значення наступних інтегралів:

$$\int_0^1 \xi^2 \cdot \sqrt{1-\xi^2} \cdot P_j^{1,\frac{1}{2}}(1-2\xi^2) J_1(y\xi) d\xi = -\sqrt{2} \cdot \beta_j \cdot y^{-\frac{3}{2}} \cdot J_{2j+\frac{5}{2}}(y)$$

$$\int_0^1 \xi^2 \cdot \sqrt{1-\xi^2} \cdot P_j^{1,\frac{1}{2}}(1-2\xi^2) I_1(y\xi) d\xi = -\sqrt{2} \cdot (-1)^j \cdot \beta_j \cdot y^{-\frac{3}{2}} \cdot I_{2j+\frac{5}{2}}(y)$$

обчислюємо вирази:

$$\begin{aligned} A_{mj} &= b \int_0^1 \eta^2 \sqrt{1-\eta^2} P_m^{1,\frac{1}{2}}(1-2\eta^2) d\eta \int_0^1 \xi^2 \sqrt{1-\xi^2} P_j^{1,\frac{1}{2}}(1-2\xi^2) d\xi \\ &= \int_0^\infty J_1(t\eta) J_1(t\xi) \left[ \frac{\sin(\frac{h-2dt}{b})}{\cosh tbh} + \tanh \frac{h}{b} t - 1 \right] t^2 dt = \\ &= b \int_0^\infty \left[ \frac{\sin(\frac{h-2dt}{b})}{\cosh tbh} + \tanh \frac{h}{b} t - 1 \right] t^2 dt \cdot \int_0^1 \eta^2 \sqrt{1-\eta^2} P_m^{1,\frac{1}{2}}(1-2\eta^2) d\eta \cdot \\ &\cdot \int_0^1 \xi^2 \sqrt{1-\xi^2} P_j^{1,\frac{1}{2}}(1-2\xi^2) J_1(t\xi) d\xi = \\ &= b \int_0^\infty \left[ \frac{\sin(\frac{h-2dt}{b})}{\cosh tbh} + \tanh \frac{h}{b} t - 1 \right] t^2 \cdot (-\sqrt{2})^2 \beta_m \beta_j (t)^{\frac{3}{2}} J_{2m+\frac{5}{2}}(t) \cdot \\ &\cdot J_{2j+\frac{5}{2}}(t) dy = 2b\beta_m\beta_j \int_0^\infty \left[ \frac{\sin(\frac{h-2dt}{b})}{\cosh tbh} + \tanh \frac{h}{b} t - 1 \right] J_{2j+\frac{5}{2}}(t) J_{2m+\frac{5}{2}}(t) \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{mj} &= \frac{4b^3}{h} \int_0^1 \eta^2 \sqrt{1-\eta^2} P_m^{1,\frac{1}{2}}(1-2\eta^2) d\eta \int_0^1 \xi^2 \sqrt{1-\xi^2} P_j^{1,\frac{1}{2}}(1-2\xi^2) \cdot \\
&\cdot \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2 \cos \lambda_k d^2}{I_2(\lambda_k a)} I_1(\lambda_k b \eta) I_1(\lambda_k b \xi) K_2(\lambda_k a) \right] d\xi = \\
&= \frac{4b^3}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2 \cos \lambda_k d^2}{I_2(\lambda_k a)} K_2(\lambda_k a) \cdot (-\sqrt{2})^2 (-1)^m (-1)^j \beta_m \beta_j (\lambda_k b)^{-3} \cdot \\
&\cdot I_{2m+\frac{5}{2}}(\lambda_k b) I_{2m+\frac{5}{2}}(\lambda_k b) = \frac{8}{h} (-1)^{m+j} \beta_m \beta_j \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2 \cos \lambda_k d^2}{\lambda_k I_2(\lambda_k a)} \cdot \\
&\cdot I_{2m+\frac{5}{2}}(\lambda_k b) I_{2m+\frac{5}{2}}(\lambda_k b) K_2(\lambda_k a).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_m &= -\frac{4b}{Gh} \int_0^1 \eta^2 \sqrt{1-\eta^2} P_m^{1,\frac{1}{2}}(1-2\eta^2) \left[ \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{I_1(\lambda_k b \eta)}{I_2(\lambda_k a)} \cos \lambda_k d \right] d\eta = \\
&= -\frac{4b}{Gh} \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{\cos \lambda_k d}{I_2(\lambda_k a)} \cdot \int_0^1 \eta^2 \sqrt{1-\eta^2} P_m^{1,\frac{1}{2}}(1-2\eta^2) I_1(\lambda_k b \eta) d\eta = \\
&= \frac{4}{Gh\sqrt{b}} \sqrt{2} \cdot (-1)^m \beta_m \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{\cos \lambda_k d}{\lambda_k^{\frac{3}{2}} I_2(\lambda_k a)} I_{2m+\frac{5}{2}}(\lambda_k b)
\end{aligned}$$

Отже, отриману систему лінійних алгебраїчних рівнянь можемо записати у наступному вигляді:

$$\begin{aligned}
&\frac{\beta_m}{4m+5} \psi_m + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j (2b\beta_j \int_0^{\infty} \left[ \frac{\sin(\frac{h-2dt}{b})}{\cosh tbh} + \tanh \frac{h}{b} t - 1 \right] J_{2j+\frac{5}{2}}(t) \cdot \\
&\cdot J_{2m+\frac{5}{2}}(t) \frac{dt}{t} + \frac{2}{h} (-1)^{m+j} \beta_j \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_k d^2}{\lambda_k I_2(\lambda_k a)} K_2(\lambda_k a) I_{2m+\frac{5}{2}}(\lambda_k b) I_{2j+\frac{5}{2}}(\lambda_k b)) = \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{Gh\sqrt{b}} (-1)^m \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{\cos \lambda_k d}{\lambda_k \sqrt{\lambda_k} I_2(\lambda_k a)} I_{2m+\frac{5}{2}}(\lambda_k b), \quad m \geq 0.
\end{aligned}$$

Далі нормалізуємо отриману систему. Для цього помножимо її на  $\sqrt{4m+5}$

та позначимо її як:

$$\Psi_m^* = \frac{\beta_m}{\sqrt{4m+5}} \psi_m.$$

$$A_{mj}^* = 2b \cdot \sqrt{(4m+5)(4j+5)} \cdot \int_0^\infty \left[ \frac{\sinh \frac{h-2d}{b} t}{\cosh bht} + \tanh \frac{h}{b} t - 1 \right] \cdot J_{2m+\frac{5}{2}}(t) \cdot J_{2j+\frac{5}{2}}(t) \frac{dt}{t}.$$

$$B_{mj}^* = \frac{8}{h} \sqrt{(4m+5)(4j+5)} \cdot (-1)^{m+j} \cdot \sum_{k=1}^\infty \frac{\cos^2 \lambda_k d}{\lambda_k I_2(\lambda_k a)} \cdot K_2(\lambda_k a) \cdot I_{2m+\frac{5}{2}}(\lambda_k b) \cdot I_{2j+\frac{5}{2}}(\lambda_k b).$$

$$C_m^* = \frac{4\sqrt{2}}{Gh\sqrt{b}} \cdot \sqrt{4m+5} \cdot (-1)^m \cdot \sum_{k=1}^\infty p_k \cdot \frac{\cos \lambda_k d}{\lambda_k \sqrt{\lambda_k} I_2(\lambda_k b)} \cdot I_{2m+\frac{5}{2}}(\lambda_k b)$$

Тоді система приймає вигляд:

$$\Psi_m^* + \sum_{j=0}^\infty \Psi_j^* [A_{mj}^* + B_{mj}^*] = C_m^*, m \geq 0.$$

## РОЗДІЛ 3

### КОЕФІЦІЄНТ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ (КІН)

#### Знаходження КІН

При розгляді завдань з дефектом у вигляді тріщин великий інтерес представляє коефіцієнт інтенсивності напруги, оскільки він визначає можливість подальшого зростання тріщини. Для задач кручення пружних тіл він має вигляд:

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow b+0} \sqrt{2\pi(r-b)} \tau_{z\phi}(r, d) = G \lim_{r \rightarrow b+0} \sqrt{2\pi(r-b)} \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=d}$$

Відкидаючи в отриманому вище виразі для  $\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=d}$ , складових, що мають скінчені границі при  $r \rightarrow b+0$ , і враховуючи виконану заміну змінних, отримаємо

$$\begin{aligned} K_{III} &= G \sqrt{\frac{\pi}{2b}} \lim_{\eta \rightarrow 1+0} \sqrt{\eta-1} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^1 \psi(\xi) S(\eta, \xi) \xi d\xi = \\ &= G \sqrt{\frac{\pi}{2b}} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \left[ \lim_{\eta \rightarrow 1+0} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^1 \xi^2 \sqrt{1-\xi^2} P_j^{1, \frac{1}{2}}(1-2\xi^2) S(\eta, \xi) d\xi \right] \end{aligned}$$

Враховуючи асимптотику виразу:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^1 \xi^2 \sqrt{1-\xi^2} P_j^{1, \frac{1}{2}}(1-2\xi^2) S(\eta, \xi) d\xi = (-1)^j \frac{2\Gamma(\frac{3}{2} + j)}{\sqrt{\pi \cdot j! \cdot \sqrt{\eta^2 - 1}}} + O(1)$$

$$\eta \rightarrow 1+0$$

отримаємо:

$$K_{III} = G \sqrt{\frac{\pi}{2b}} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \lim_{\eta \rightarrow 1+0} \sqrt{\eta - 1} \cdot (-1)^j \frac{2\Gamma(\frac{3}{2} + j)}{\sqrt{\pi} \cdot j! \cdot \sqrt{\eta^2 - 1}} =$$

$$\frac{G}{\sqrt{b}} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \frac{\Gamma(\frac{3}{2} + j)}{j!} (-1)^j$$

Також, якщо врахувати, що

$$\psi_j = \sqrt{4j + 5} \cdot \frac{j!}{\Gamma(j + \frac{3}{2})} \cdot \psi_j^*$$

остаточно отримаємо

$$K_{III} = \frac{G}{\sqrt{b}} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \cdot \sqrt{4j + 5} \cdot \psi_j^*$$

Побудуємо графіки  $K_{III}$  в залежності від різних геометричних параметрів  $d, b, c$ .

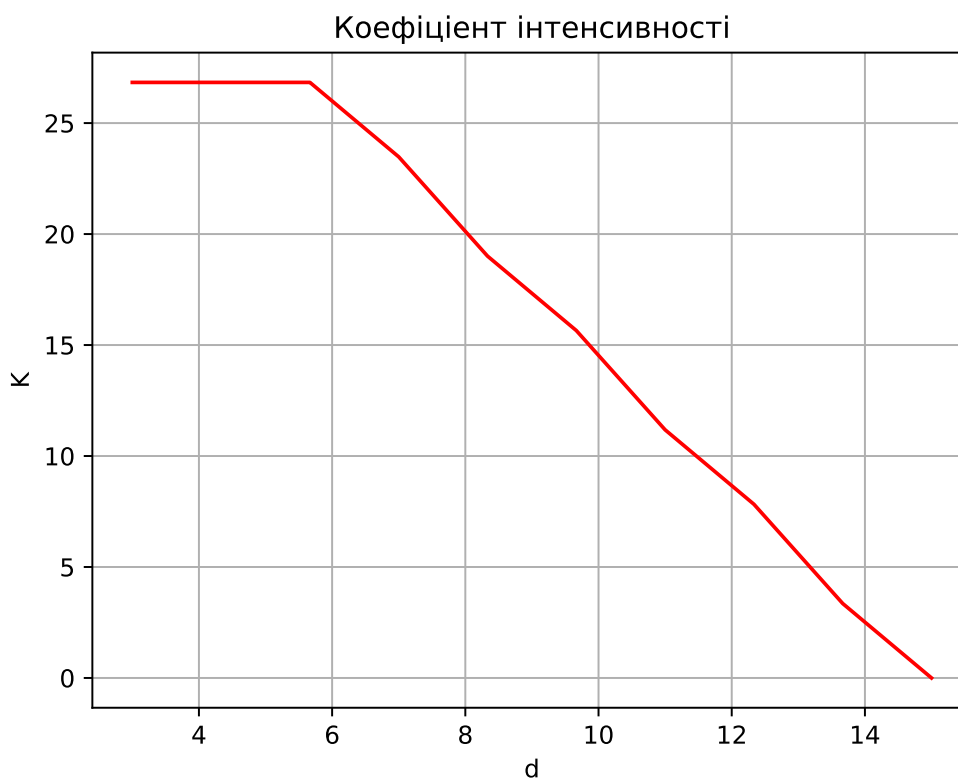
## РОЗДІЛ 4

## ЧИСЕЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ

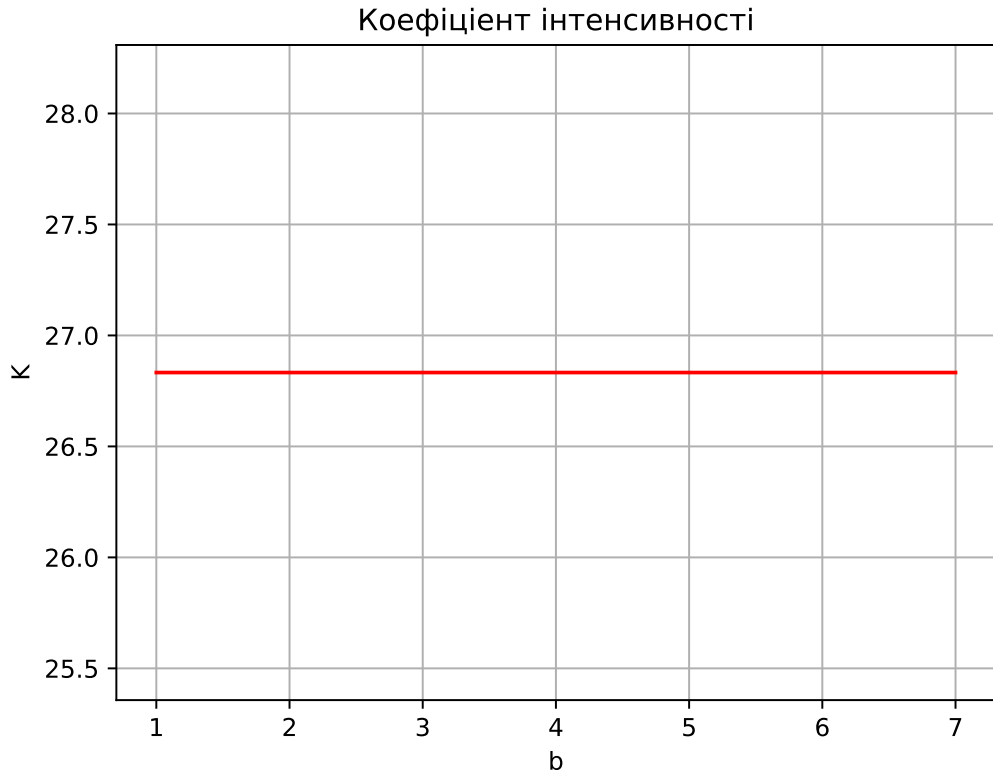
При розгляді завдань з дефектом у вигляді тріщин великий інтерес представляє коефіцієнт інтенсивності напруги, оскільки він визначає можливість подальшого зростання тріщини.

Побудуємо графіки  $K_{III}$  в залежності від різних геометричних параметрів  $d, b, c$ . Для цього скористуємось кодом із додатка, що написаний на мові програмування Python.

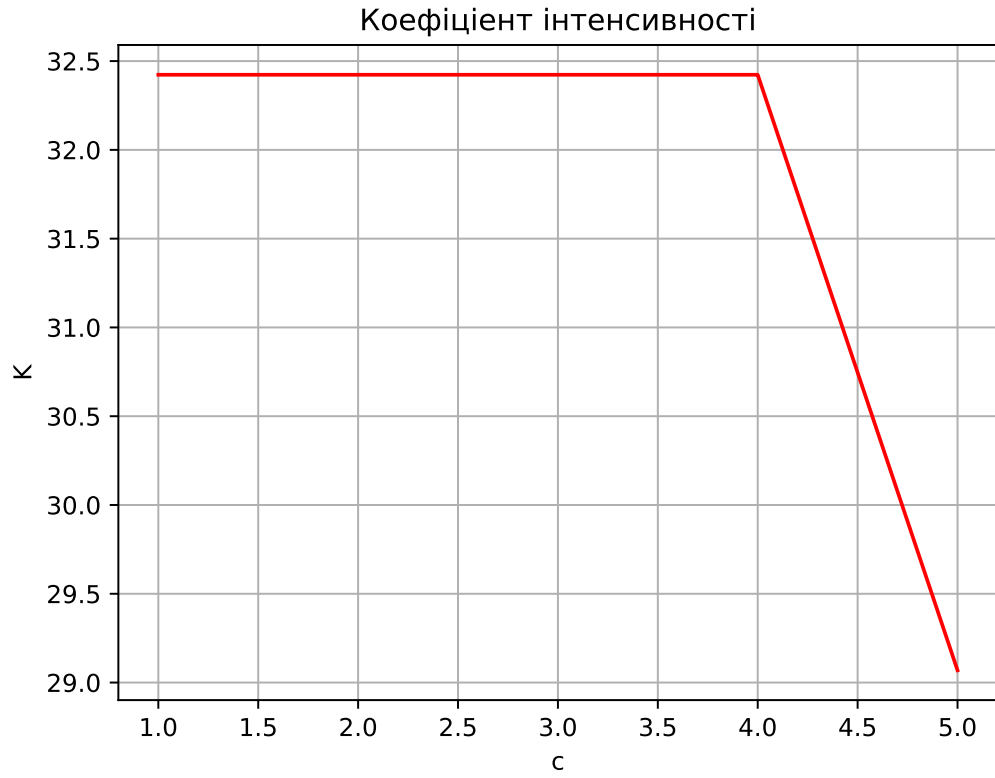
$$a = 7, b = 4, h = 15, c = 6, d = [3, 15]$$



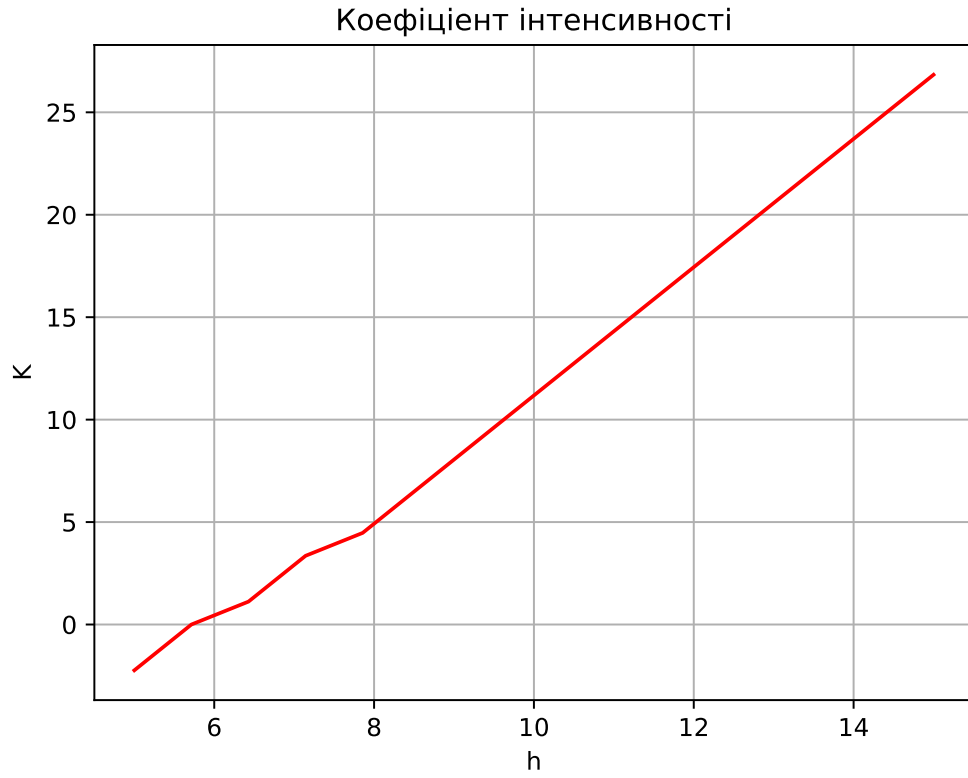
$$a = 7, h = 15, c = 6, d = 4, b = [1, 7]$$



$$a = 7, b = 4, h = 15, d = 4, c = [1, 7]$$



$$a = 7, b = 4, c = 6, d = 4, h = [5, 15]$$



## ВИСНОВКИ

В дипломній роботі була розглянута вісісиметрична задача кручення пружнього циліндру з круговою тріщиною. Розв'язок цієї задачі зведено до інтегрально-диференційного рівняння. Проаналізовано ядра цього рівняння та виділено його сингулярну частину у вигляді похідної від інтеграла Вебера-Шафхейтліна. Після цього розв'язок отриманого рівняння побудовано методом ортогональних поліномів та розшукан у вигляді розвинення за поліномами Якобі  $P_n^{\alpha,\beta}$ . Знайдено спектральне співвідношення та отримано систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

Після того, як було знайдено розв'язок системи методом редукції, пораховано коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН). Він представляє великий інтерес, оскільки можна визначити подальше зростання тріщини. Побудовано графіки коефіцієнту в залежності від різних геометричних параметрів.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Процеров Ю.С. Методичні вказівки до курсу «Математичне моделювання деяких задач механіки і техніки» для студентів 3 курсу спеціальності «Прикладна математика» / Ю.С. Процеров, О.П. Мойсеєнок. – Одеса, 2015. – 61 с.
2. Попов Г.Я., Реут В.В., Вайсфельд Н.Д. Навчальний посібник з курсу «Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень», Одеса, 2005, 184 с.
3. Попов Г.Я., Реут В.В., Моїсєєв Н.Г., Вайсфельд Н.Д. Навчальний посібник з курсу «Рівняння математичної фізики. Метод ортогональних многочленів», Одеса, 2010, 120 с.
4. Yu. Protserov, N. Vaysfeld. The torsion problem for an elastic multilayered finite cylinder with a circular crack. Applied Mathematics and Mechanics (English Edition). Vol. 38, No 3, Mar. 2017, p. 423 – 438.

## ДОДАТКИ

Даний код написан на мові програмування Python 3.

```
import math
import scipy.special as special
import scipy.integrate as integrate
import numpy as np
import sympy as sy
import matplotlib.pyplot as plt

a = 7
b = 4
c = 6
d = 4
G = 1
h = 15

def solve_equation():
    m_count = 6
    j_count = 6

    m_list = np.arange(m_count)
    j_list = np.arange(j_count)

    a_mj = np.ones((m_count, j_count))
    b_mj = np.ones((m_count, j_count))
    c_m = np.ones(m_count)

    for m in m_list:
        c_m[m] = C(m)
        for j in j_list:
            a_mj[m][j] = A(m, j)
            b_mj[m][j] = B(m, j)
```

```
d_mj = a_mj + b_mj
```

```
for m in m_list:
    for j in j_list:
        if m == j:
            d_mj[m][j] += 1
```

```
result = np.linalg.solve(d_mj, c_m)
```

```
res = []
```

```
print("Result")
```

```
for number in result:
```

```
    res.append(int(number))
```

```
return res
```

```
def A(m, j):
```

```
    first = 2 * b
```

```
    second = math.sqrt((4 * m + 5) * (4 * j + 5))
```

```
    v1 = 2 * m + 2.5
```

```
    v2 = 2 * j + 2.5
```

```
    low = 0
```

```
    top = np.inf
```

```
    third = integrate.quad(lambda t:
```

```
under_integrate_function_A(t, v1, v2), low, top)
```

```
    return first * second * third[0]
```

```
def B(m, j):
```

```
    first = 8 / h
```

```
    second = math.sqrt((4 * m + 5) * (4 * j + 5))
```

```

third = math.pow(-1, m + j)

k_list = np.arange(1, 100).tolist()
v1 = 2 * m + 2.5
v2 = 2 * j + 2.5

sum_element = 0

for k in k_list:
    sum_element = math.pow(math.cos(lambda_k(k) * d), 2)
    * special.iv(v1, lambda_k(k) * b)
    * special.iv(v2, lambda_k(k) * b)
    * special.kv(2, lambda_k(k) * a)
    / ( lambda_k(k) * special.iv(2, lambda_k(k) * a) )

result = first * second * third * sum_element
return result

```

```

def C(m):
    first = 4 * math.sqrt(2) / (G * h * math.sqrt(b))
    second = math.sqrt(4 * m + 5) * math.pow(-1, m)
    third = 0

    v1 = 2 * m + 2.5

    k_list = np.arange(1, 100).tolist()
    for k in k_list:
        third += P_k(k) * special.iv(v1, lambda_k(k) * b)
        * math.cos( lambda_k(k) * d) / (lambda_k(k)
        * math.sqrt(lambda_k(k))
        * special.iv(2, lambda_k(k) * b))

    return first * second * third

```

```

def under_integrate_function_A(t, v1, v2):
    return ( ( sy.sinh(((h - 2 * d) / b) * t)
              / sy.cosh(b * h * t)
              + math.tanh(t * h / b) - 1 )
            * special.jv(v1, t) * special.jv(v1, t) ) / t

def P_k(k):
    low = c
    top = h

    return integrate.quad(lambda z: math.sin(lambda_k(k) * z),
                           low, top)[0]

def lambda_k(k):
    return math.pi / (2 * h) * (2 * k - 1)

def koeficient(psi):
    sum = 0
    for j in range(0, len(psi)):
        temp = math.pow(-1, j) * math.sqrt(4 * j + 5) * psi[j]
        sum += temp

    return G * sum / math.sqrt(b)

def draw_graph(x_list, y_list):
    fig, ax = plt.subplots()

    ax.set_title(' ')
    ax.set_xlabel("h")
    ax.set_ylabel("K")

```

```

ax.plot(x_list , y_list , color = 'r')

plt.grid()
plt.show()

if __name__ == '__main__':
    # d_list = np.linspace(3, h, 10)
    # b_list = np.linspace(1, 7, 10)
    # c_list = np.linspace(1, 5, 5)
    h_list = np.linspace(5, 15, 15)
    psi_list = []
    for value in h_list:
        # d = value
        # b = value
        # c = value
        h = value
        psi_list.append(solve_equation())

    res = []
    for psi in psi_list:
        res.append(koefficient(psi))

    # draw_graph(d_list, res)
    # draw_graph(b_list, res)
    # draw_graph(c_list, res)
    draw_graph(h_list, res)

```