МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ОДЕССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ И. И. МЕЧНИКОВА

Институт математики, экономики и механики
Кафедра компьютерной алгебры и дискретной математики

Н.Н.БАЛАНДИНА

И.Г.СИМОНОВА

С.В.ФЕДОРОВСКИЙ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ.

Методические указания для студентов 1 курса направлений подготовки
040301 «Прикладная математика» и 050102 «Компьютерная инженерия»

ОДЕССА – 2014

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ.
Методические указания для студентов 1 курса направлений подготовки 040301 «Прикладная математика» и 050102 «Компьютерная инженерия».-69с.

Составители: **Баландина Н.Н.**, ст. преподаватель кафедры компьютерной алгебры и дискретной математики ИМЭМ;

Симонова И.Г., к.ф.-м.н., доцент кафедры компьютерной алгебры и дискретной математики ИМЭМ;

Федоровский С.В., к.ф.-м.н., доцент кафедры компьютерной алгебры и дискретной математики ИМЭМ.

Рецензенты: **Евтухов В.М.** д.ф.-м.н., профессор кафедры диффференциальных уравнений ИМЭМ

Кореновский А.А., д.ф.-м.н., профессор кафедры математического анализа ИМЭМ

Рекомендовано к печати
Ученым советом ИМЭМ Одесского национального университета имени И. И. Мечникова
протокол № 4 от 19 марта 2014 г.

Содержание

Введение

Настоящие методические указания предназначены для студентов первого курса ИМЭМ направлений подготовки 040301 «Прикладная математика» и 050102 «Компьютерная инженерия». Количество отводимых на курс дискретной математики учебных часов явно недостаточно для подробного и обстоятельного изучения тем этого курса. Этот факт и новизна материала (нет необходимой базы из курса математики средней школы) вызывают у студентов трудности в процессе изучения дискретной математики. Для устранения этого пробела и для облегчения процесса обучения студентам предлагается подробное изложение темы «Элементы теории множеств» с доказательством большинства необходимых теорем, подробным решением иллюстрирующих примеров. В конце даются задачи для самостоятельного решения с указанием ответов этих задач и приводится список рекомендуемой литературы.

Тема «Элементы теории множеств» в соответствии с учебным планом изучается после тем «Элементы алгебры высказываний» и «Элементы логики предикатов». Поэтому изложение материала темы «Элементы теории множеств» в настоящих методических указаниях предполагает знакомство студентов с отмеченными выше вопросами (см., например, [7]).

Предлагаемые методические указания несомненно будут полезны и студентам направлений подготовки 040201 «Математика», изучающих дискретную математику на первом курсе в ИМЭМ.

1. Множества. Способы задания множеств.

В современной математике существуют различные построения теории множеств. В нашем случае, в курсе дискретной математики, достаточно ограничиться «наивным» подходом, при котором понятие множества является ***базовым, неопределяемым понятием***. Основоположник теории множеств Георг Кантор определял ***множество*** как ***«объединение в одно целое объектов, хорошо различимых нашей интуицией или мыслью».*** Подобное определение не является строгим математическим определением. Расплывчатость, недостаточность этого определения стала понятной, когда в 1879 году итальянский логик Бурали-Форти и немного позже философ и логик Бертран Рассел открыли парадоксы, указывающие на внутреннюю противоречивость канторовой теории множеств. Для устранения таких противоречий и парадоксов в теории множеств были разработаны аксиоматические теории, наиболее популярной из которых является аксиоматика Цермелло-Френкеля. Аксиоматические теории в данном курсе рассматриваться не будут.

В дальнейшем множества будем обозначать прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, ...; объекты, составляющие множество, будем называть ***элементами множества*** и обозначать строчными буквами латинского алфавита: $a,b,c,\ldots$ (элементы множества при этом должны быть различными). Тот факт, что объект a является элементом множества A будем обозначать $a \in A$ (a принадлежит множеству A), а если a не является элементом множества A, то пишут $a \notin A$ (a не принадлежит множеству A). Множество обозначается фигурными скобками $\{\ldots\}$, внутри которых либо просто перечисляются элементы (в этом случае говорят, что множество задано ***перечислением***), либо описываются их свойства (тогда множество задано ***описанием***). Например, множество натуральных чисел $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ n\}$ задано перечислением, а множество $\mathbb{P} = \{x \mid P(x)\}$ (читается «множество таких элементов $\boldsymbol{x}$, которые обладают свойством $P(x)$») – задано описанием.

Если все элементы множества $\boldsymbol{A}$ являются также элементами множества $\boldsymbol{B}$, то говорят, что множество $\boldsymbol{A}$ является ***подмножеством*** множества $\boldsymbol{B}$ и этот факт обозначается $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$ (читается «$\boldsymbol{A}$ подмножество $\boldsymbol{B}$», «$\boldsymbol{A}$ входит в $\boldsymbol{B}$»).

Множества, состоящие из одних и тех же элементов, называется ***равными***. Равенство множеств обозначается обычным знаком равенства: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$. Очевидно, что $(\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}) \wedge (\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A})$.

Если $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$, то $\boldsymbol{A}$ называется ***собственным подмножеством*** множества $\boldsymbol{B}$ и этот факт обозначается $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым***. Пустое множество обозначается $\boldsymbol{\emptyset}$. По соглашению, пустое множество $\boldsymbol{\emptyset}$ является подмножеством любого множества $\boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{\emptyset} \subseteq \boldsymbol{A}$).

При изучении множеств в интуитивной («наивной») теории множеств удобно считать, что все мыслимые множества являются подмножествами некоторого всеобъемлющего множества, называемого ***универсальным множеством***. Универсальное множество обозначается $\boldsymbol{U}$. Например, при изучении числовых множеств роль универсального множества может играть поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ (или некоторые его подмножества). В теории чисел универсальное множество совпадает или с множеством всех целых чисел $\mathbb{Z}$, или с множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$; в математическом анализе универсальное множество – множество действительных чисел $\mathbb{R}$.

Множество всех без исключения подмножеств данного множества $\boldsymbol{A}$ называется ***булеаном множества A*** и обозначается $\mathcal{P}(A)$ или 2^A.

Введение в рассмотрение универсального множества позволяет нам ***любое*** множество задавать с помощью описания, т.е. в виде $A = \{x \mid P(x)\}$. Свойство $P(\boldsymbol{x})$, которым должны обладать элементы множества A - это некоторый предикат I_A, определенный на универсальном множестве, область истинности которого и задает множество А как подмножество универсального множества. Этот предикат называется ***характеристическим предикатом*** множества ***A***. Тем самым,

$$I_A = I_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in A; \\ 0, \text{ если } x \notin A. \end{cases}$$

Таким образом, ОИ(I_A) = $\boldsymbol{A = \{x \in U \mid x \in A\}}$.

Тот факт, что $\boldsymbol{x \in U}$ часто подразумевается из контекста и при описании множества не используется, т.е. пишут $\boldsymbol{A = \{x \mid P(x)\}}$ или $\boldsymbol{\{x \mid x \in A\}}$.

Метод задания множества «описанием» является универсальным. При этом, в качестве характеристического предиката данного множества ***A*** может выступать условие принадлежности элементов этому множеству, т.е. $\boldsymbol{I_A} := (\boldsymbol{x \in A})$. Если $\boldsymbol{A = \{x \mid P(x)\}}$ и $\boldsymbol{B = \{x \mid Q(x)\}}$, то, очевидно,

$$\boldsymbol{A = B \;\Leftrightarrow\; P(x) = Q(x)} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{A = B \;\Leftrightarrow\; I_A = I_B}.$$

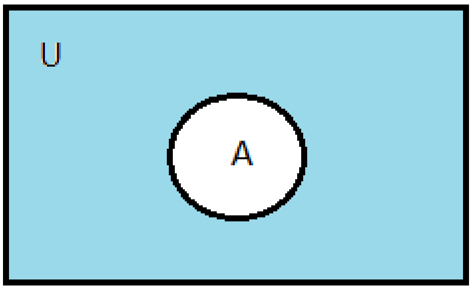
2. Основные операции над множествами.

Диаграммы Эйлера – Венна - очень удобный инструмент, позволяющий изображать множества и иллюстрировать операции над ними. В таких диаграммах прямоугольник изображает универсальное множество, а круги или овалы внутри прямоугольника – множества, рассматриваемые как подмножества универсального множества.

Определение 2.1. Дополнением $\overline{A}$ *множества* ***A*** *называется множество всех тех элементов универсального множества, которые не принадлежат множеству* ***A****. Таким образом,*

$$\overline{A} \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in \mathrm{U} \wedge x \notin \mathrm{A}\} = \{x \mid x \notin \mathrm{A}\}.$$

На диаграмме Эйлера-Венна дополнение множества ***A*** выделено более темным цветом.



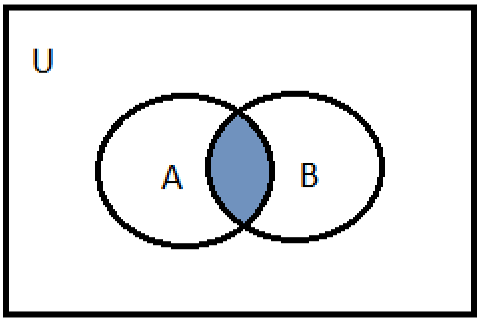
Заметим, что характеристический предикат дополнения множества $\boldsymbol{A}$ представляет собой отрицание характеристического предиката исходного множества, т.е. $I_{\overline{A}} = \overline{I_A}$, ибо

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\} = \{x \mid \overline{x \in A}\}.$$

Определение 2.2. ***Пересечением*** *двух множеств* $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$ *называют множество их общих элементов т.е. множество, состоящее из элементов, которые принадлежат одновременно и множеству* $\boldsymbol{A}$ *и множеству* $\boldsymbol{B}$*. Таким образом,*

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \overset{def}{=} \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}\}.$$

На диаграмме Эйлера-Венна пересечение множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ выделено более темным цветом.

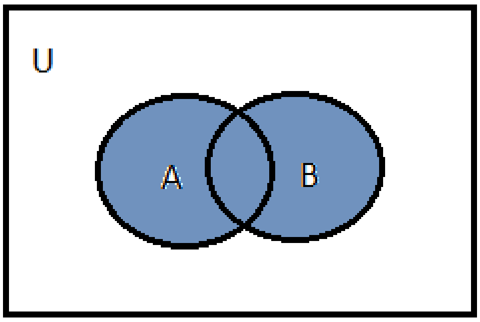


Характеристический предикат пересечения множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ представляет собой конъюнкцию характеристических предикатов исходных множеств, т.е. $I_{A \cap B} = I_A \wedge I_B$.

Определение 2.3. ***Объединением*** двух множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называют множество, состоящее из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Таким образом,

$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \overset{def}{=} \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}\}.$$

На диаграмме Эйлера-Венна объединение множеств ***A*** и ***B*** выделено более темным цветом.



Характеристический предикат объединения множеств ***A*** и ***B*** представляет собой дизъюнкцию характеристических предикатов исходных множеств, т.е. $I_{A\cup B} = I_A \vee I_B$.

3. Алгебра множеств.

Введенные выше основные операции над множествами позволяют ввести в рассмотрение ***универсальную алгебру*** множеств.

Определение 3.1. ***Универсальной алгеброй*** *(УА) называется упорядоченная пара (кортеж, набор) двух объектов* $\tilde{A} = \langle A; \Sigma_0 \rangle$, *где* ***A*** *– произвольное непустое множество (**основа УА**) и* Σ_0 *- множество* ***алгебраических*** *операций на множестве* ***A*** *(**сигнатура УА**).*

Понятие универсальной алгебры, может быть, и не употреблялось ранее, но не является по сути своей новым, поскольку изучавшиеся, например, в курсе алгебры ***группоиды, полугруппы, моноиды, группы, кольца, поля*** являются примерами универсальных алгебр. При этом группоид, полугруппа, моноид, группа $\tilde{G} = \langle G; * \rangle$ - УА, сигнатуры которых содержат одну бинарную (двухместную) алгебраическую операцию; кольцо, поле $\tilde{R} = \langle R; \{+, \bullet\} \rangle$ - УА, сигнатуры которых содержат две бинарные алгебраические операции; алгебра логики $\tilde{B} = \left\langle B = \{0,1\}; \left\{ \bar{\ }, \wedge, \vee \right\} \right\rangle$ – УА, сигнатура которой содержит одну унарную (одноместную) алгебраическую операцию «отрицание» и две бинарные алгебраические операции –«конъюнкцию» и «дизъюнкцию». Алгебру $\widetilde{B}=\langle B;\{\bar{\ },\wedge,\vee\}\rangle$ в дальнейшем будем называть алгеброй логики (АЛ), а алгебру $\widetilde{B}=\langle B;\{\bar{\ },\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow\}\rangle$ с расширенной сигнатурой - алгеброй высказываний (АВ).

Таким образом, мультипликативная группа (по умножению) $\mathbb{C}_n$ корней ***n***-ой степени из единицы, аддитивная группа (по сложению) $\mathbb{Z}_m$ классов вычетов по ***mod m***, кольцо квадратных матриц над некоторым полем, кольцо многочленов над заданным полем, поля $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ - все это примеры универсальных алгебр.

Поскольку основные операции над множествами являются алгебраическими, то мы можем рассмотреть алгебру множеств. Всякое введение некоторой формальной теории начинается с задания алфавита этой теории.

Определение 3.2. *Под* ***алфавитом*** *понимается произвольное непустое множество, элементы которого называются* ***буквами*** *или* ***символами.*** *Произвольная конечная последовательность букв данного алфавита называется* ***словом*** *или* ***выражением*** *в этом (или над этим) алфавитом.*

Определим алфавит алгебры множеств (АМ) – множество тех символов, которые допустимы при записи слов (выражений) АМ.

Определение 3.3. *Пусть*

$A_1 = \{X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots\}$ *– счетное множество символов (букв) теоретико-множественных переменных;*

$A_2 = \{\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_n, \ldots\}$ *– счетное множество символов (букв) теоретико-множественных параметров;*

$A_3 = \{\ \bar{\ },\ \cap, \cup\}$ *– множество символов теоретико-множественных операций;*

$A_4 = \{$ « **)** », « **(** », « **,** »$\}$ *– множество «технических» символов (две скобки – закрывающая и открывающая, и* *запятая).*

Тогда объединение указанных множеств и составляет алфавит алгебры множеств, т.е. $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$.

Множество всех слов в алфавите $\boldsymbol{A}$ обозначается $\boldsymbol{A^*}$. Из множества всевозможных слов в данном алфавите правилами построения выделяются ***формулы***. Укажем эти правила для алгебры множеств.

Определение 3.4. Если $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$*- алфавит АМ, то множество формул АМ выделяется из множества слов в этом алфавите следующими правилами построения (здесь ФАМ означает множество всех без исключения формул АМ):*

1) $(\boldsymbol{\alpha} \in A_1 \cup A_2) \Longrightarrow \boldsymbol{\alpha} \in ФАМ$ *(отдельно взятый символ первых двух подалфавитов АМ является простейшей (атомарной) формулой АМ);*

2) $\boldsymbol{\omega} \in ФАМ \Longrightarrow (\boldsymbol{\varpi}) \in ФАМ$ *(если на некоторую формулу навесить символ операции дополнения и результат окаймить скобками, то полученное слово также является формулой);*

3) $\boldsymbol{\omega} \in ФАМ \wedge \boldsymbol{\varphi} \in ФАМ \Longrightarrow (\boldsymbol{\omega} \circledast \boldsymbol{\varphi}) \in ФАМ$, $\circledast \in \{\cap, \cup\}$ *(если некоторые две формулы соединить символом бинарной (двухместной) теоретико-множественной операции и результат окаймить скобками, то полученное слово также является формулой);*

4) других формул нет (иными словами, формулы можно строить исключительно по правилам 1 – 3).

Определение 3.5. *Часть (подслово) H заданной формулы F, которая в свою очередь является формулой, называется* ***подформулой*** *исходной формулы (обозначение* $H \subsetneq F$*).*

При записи формул мы будем придерживаться следующих правил «экономии» скобок:

- внешние скобки не использовать (т.е. вместо (F) писать F);

- черта операции дополнения одновременно заменяет скобки (т.е. вместо $(\overline{F})$ писать $\overline{F}$);

- если формула не содержит скобок, то в ней операции выполняются в следующем порядке (слева направо в порядке убывания «старшинства» операций) $\bar{}$, $\cap$, $\cup$.

<u>Определение 3.6.</u> Алгеброй множеств *называется универсальная алгебра, основа которой – булеан универсального множества, а сигнатура содержит операции дополнения, пересечения и объединения множеств. Таким образом,* $AM = \langle 2^U; \{ \bar{}\,, \cap, \cup \} \rangle$.

В литературе по теории множеств подчеркивается очень тесная связь между алгеброй логики (алгеброй высказываний) и алгеброй теории множеств.

В силу своего определения формулы АМ являются абсолютно формальными структурами, не имеющими никакого содержательного смысла. Подобный смысл в них появляется в результате их интерпретации. Это понятие для формул АМ практически полностью совпадает с аналогичным понятием для формул алгебры высказываний (АВ).

Под интерпретацией формулы $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ АМ будем понимать пару I = $\langle$D, $\varphi\rangle$, где D$\neq\emptyset$ - произвольное непустое множество, рассматриваемое как универсальное, а φ – интерпретирующая функция, наполняющая конкретным содержанием каждый символ формулы. Под действием φ теоретико-множественные переменные принимают конкретные значения (превращаются в конкретные множества - подмножества D), символы операций приобретают свой естественный смысл (дополнения, пересечения и объединения множеств), технические символы также воспринимаются в естественном смысле (открывающая и закрывающая скобки, запятая).

Таким образом, в результате интерпретации формула АМ задает некоторое множество (как подмножество универсального множества D), выраженное с помощью операций над множествами.

Пусть, например, $F(X_1, X_2, X_3) = ((\overline{X_1} \cap X_2) \cup \overline{X_3}) \cap (X_1 \cup X_3)$ - некоторая формула АМ. Задавая некоторое универсальное множество D, выбирая в нем подмножества $A_1 \subseteq D$, $A_2 \subseteq D$, $A_3 \subseteq D$, полагая

$\forall i \in \{1, 2, 3\}$: $X_i = A_i$ и воспринимая символы операций в их естественном смысле, получим некоторое подмножество $F(A_1, A_2, A_3)$ множества D

$$\varphi(F(X_1, X_2, X_3)) = F(A_1, A_2, A_3) = ((\overline{A_1} \cap A_2) \cup \overline{A_3}) \cap (A_1 \cup A_3) \subseteq D.$$

Введем на множестве формул АМ отношение равенства (равносильности) формул.

Определение 3.8. *Две формулы АМ называются равными (равносильными), если в любой интерпретации они задают одно и то же множество, т.е.*

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) = G(X_1, X_2, \dots, X_n) \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall I = \langle D; \varphi\rangle: \varphi(F) = \varphi(G).$$

Вспоминая критерий равенства множеств, использующий характеристические предикаты ($\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{I}_A = \boldsymbol{I}_B$), можем следующим образом установить равенство формул АМ. Две формулы АМ равны тогда и только тогда, когда в любой интерпретации они порождают множества, характеристические предикаты которых равны, т.е.:

$$F = G \Leftrightarrow \forall I = \langle D; \varphi\rangle: I_{\varphi(F)} = I_{\varphi(G)}.$$

В дальнейшем, при обсуждении результатов интерпретации формул АМ символ интерпретирующей функции φ будем опускать и саму исходную формулу F и результат ее интерпретации $\varphi(F)$ будем обозначать F. Например, равенство формул АМ тогда можно передать следующим образом:

$$F = G \Leftrightarrow \forall I = \langle D; \varphi\rangle: I_F = I_G.$$

Покажем на примерах, как можно установить связь между формулами АМ и АЛ.

<u>Пример 3.1.</u> Пусть нам задана произвольная формула АМ, например,

$$F(X_1, X_2, X_3) = ((\overline{X_1} \cap X_2) \cup \overline{X_3}) \cap (X_1 \cup X_3).$$

Рассмотрим характеристический предикат этой формулы в некоторой произвольной интерпретации и преобразуем его в логическую формулу от характеристических предикатов подмножеств универсального множества (результатов интерпретации теоретико-множественных переменных исходной формулы). Используем при этом ранее установленную связь характеристических предикатов дополнения, пересечения и объединения множеств с характеристическими предикатами исходных множеств. Имеем:

$$I_F = I_{((\overline{A_1} \cap A_2) \cup \overline{A_3}) \cap (A_1 \cup A_3))} = I_{(\overline{A_1} \cap A_2) \cup \overline{A_3})} \wedge I_{(A_1 \cup A_3)} = (I_{\overline{A_1} \cap A_2} \vee I_{\overline{A_3}}) \wedge (I_{A_1} \vee I_{A_3}) =$$

$$= ((I_{\overline{A_1}} \wedge I_{A_2}) \vee I_{\overline{A_3}}) \wedge (I_{A_1} \vee I_{A_3}) = ((I_{\overline{A_1}} \wedge I_{A_2}) \vee I_{\overline{A_3}}) \wedge (I_{A_1} \vee I_{A_3}) =$$

$$= (((\overline{x_1 \in A_1} \wedge (x_2 \in A_2)) \vee \overline{x_3 \in A_3}) \wedge ((x_1 \in A_1) \vee (x_3 \in A_3)).$$

Далее, заменяя характеристические предикаты в последней логической формуле на пропозициональные (булевы) переменные (совпадающие по обозначению с переменными характеристических предикатов), получим формулу АЛ:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1}\, x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee x_3).$$

Из примера 3.1. ясно, что переход от формулы АМ к соответствующей формуле АЛ может быть осуществлен для ***любой*** формулы АМ (и наоборот).

Таким образом, если в некоторой формуле АМ теоретико-множественные переменные заменить на булевы переменные (с теми же индексами), знаки дополнения множеств – на знаки отрицания, пересечения – на конъюнкции и объединения на дизъюнкции, то получим соответствующую формулу АЛ (и наоборот).

Если каждой формуле АМ сопоставить соответствующую формулу АЛ, то, в чем легко убедиться, получим биективное отображение на множествах формул АМ и АЛ. Указанная биекция «сохраняет» отношение равенства (равносильности) формул АМ и АЛ, т.е.

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) = G(X_1, X_2, \dots, X_n) \Leftrightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

4. Основные законы (тождества) АМ.

Определение 4.1. *Законами в алгебре множеств называются тождества (равносильности) АМ.*

Приведем сводку основных законов (тождеств) АМ. При этом учтем, что константе ***1*** АЛ в АМ отвечает универсальное множество U, а константе ***0*** АЛ в АМ отвечает пустое множество $\varnothing$ (характеристический предикат универсального множества I_U - тождественно истинный на U, т.е. $I_U=1$, а характеристический предикат пустого множества $I_\varnothing$ – тождественно ложный на U, т.е. $I_\varnothing = 0$).

Для лучшего запоминания, основные законы АМ перечислим в том же порядке и по тем же группам, что и в АЛ. Кроме того, сохраним, в основном, их названия.

4.1. Аналоги законов традиционной логики:

$X = X$ (закон тождества);

$\overline{\overline{X}} = X$ (двойного дополнения);

(исключенного третьего) $\overline{X} \cup X = U$ | $X \cap \overline{X} = \varnothing$ (противоречия).

4.2. Законы объединения и пересечения :

(ассоциативные) $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$ | $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$;

(коммутативные) $X \cup Y = Y \cup X$ | $X \cap Y = Y \cap X$;

(дистрибутивные) I. $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ | II. $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$;

(поглощения) $X \cap (X \cup Y) = X$ | $X \cup (X \cap Y) = X$;

(склеивания) $(X \cap \overline{Y}) \cup (X \cap Y) = X$ | $(X \cup \overline{Y}) \cap (X \cup Y) = X$;

(идемпотентности) $X \cup X = X$ | $X \cap X = X$;

(de Morgan'a) $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$ | $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$;

4.3. Законы «постоянных»:

$\varnothing \cup X = X$ | $U \cap X = X$;

$U \cup X = U$ | $\varnothing \cap X = \varnothing$;

Любой из перечисленных выше законов имеет место в силу отмеченной выше связи формул АЛ и АМ и сохранения их равносильностей, но может быть доказан средствами теории множеств, например с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

Пример 4.1. Доказать в алгебре множеств второй дистрибутивный закон:

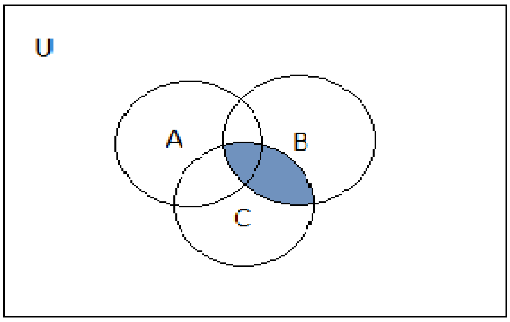
$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную интерпретацию *I=⟨D; φ⟩:* формул левой и правой части проверяемого тождества. В этой интерпретации тождество принимает следующий вид:

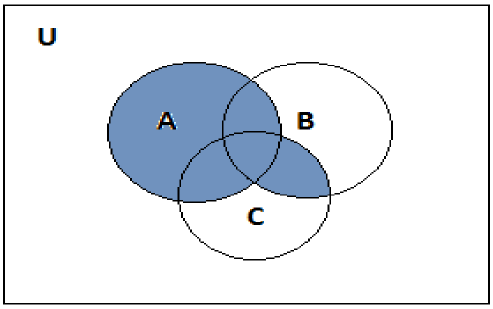
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Построим последовательно диаграммы Эйлера-Венна для правой и левой части исследуемого тождества. Рассмотрим на диаграммах наиболее общее взаимное расположение множеств.

Имеем для левой части:

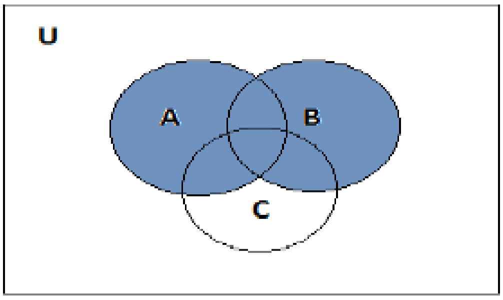


$B \cap C$

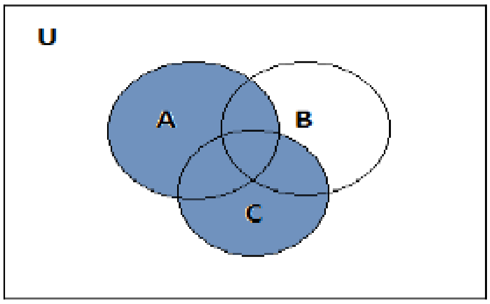


$A \cup (B \cap C)$

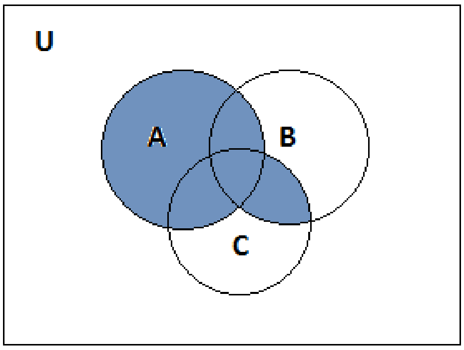
Для правой части



$A \cup B$



$A \cup C$



$(A \cup B) \cap (A \cup C)$

Изображения правой и левой части проверяемого тождества на диаграммах Эйлера-Венна (более темная область) одинаковы. Аналогично рассматриваются и другие взаимные расположения исходных множеств. Тождество доказано.

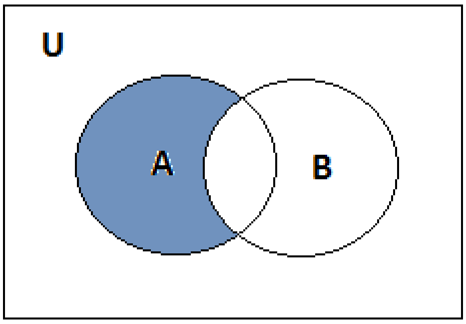
5. Дополнительные операции в теории множеств.

Кроме рассмотренных ранее операций алгебры множеств в теории множеств используются и другие операции. Рассмотрим эти операции и их связь с операциями алгебры высказываний.

Определение 5.1. *Разностью $A \setminus B$ множеств A и B называется множество, элементы которого принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B. Таким образом,*

$$A \setminus B \overset{def}{=} \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

На диаграмме Эйлера-Венна разность множеств изображается следующей более темной областью:

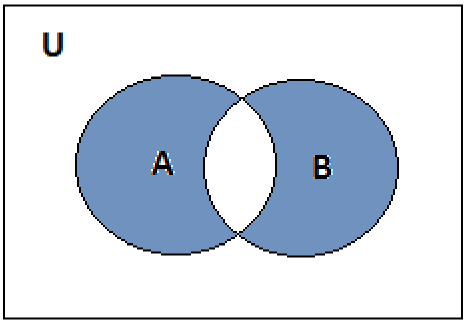


Из определения (по характеристическому предикату) или диаграммы видно, что разность $A \setminus B$ множеств может быть выражена через основные операции следующим образом: $A \setminus B = A \cap \overline{B}$. В алгебре высказываний формула $x\,\overline{y}$ выражает отрицание импликации $\overline{x \to y}$ через операции булевской тройки операций ($\overline{x \to y} = x\,\overline{y}$). Поэтому в алгебре высказываний операции разности множеств отвечает операция отрицания импликации и $I_{A \setminus B} = I_A \wedge \overline{I_B} = I_A \overline{I_B} = \overline{I_A \to I_B}$.

Определение 5.2. *Симметрической разностью $A \oplus B$ множеств A и B называется множество, элементы которого либо принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B, либо принадлежат множеству B и не принадлежат множеству A.. Таким образом,*

$$A \oplus B \overset{def}{=} \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A\}.$$

На диаграмме Эйлера-Венна симметрическая разность множеств изображается следующей более темной областью:



Из определения (по характеристическому предикату) или диаграммы видно, что симметрическая разность $A \oplus B$ множеств может быть выражена через основные операции следующим образом:

$$A \oplus B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

В алгебре высказываний формула $x\bar{y} \vee \bar{x}y$ выражает операцию $\boldsymbol{x + y}$ сложения по модулю два (исключающее «или») через операции булевской тройки операций ($x+y = x\bar{y} \vee \bar{x}y$). Поэтому в алгебре высказываний операции «симметрическая разность» множеств отвечает операция сложения по модулю два или отрицание эквиваленции ($x + y = \overline{x \leftrightarrow y} = \bar{x}\, y \vee x\, \bar{y}$). Ясно, что $I_{A\oplus B} = I_A + I_B$.

Упрощения формул теории множеств и доказательство тождеств этой теории можно осуществлять либо с помощью диаграмм Эйлера-Венна (в ограниченном числе случаев), либо тождественными преобразованиями на основании приведенных выше законов АМ, либо используя связь формул теории множеств с формулами алгебры высказываний. Последний метод нам представляется наиболее предпочтительным, поскольку формулы АВ выглядят более компактно и есть навыки преобразования формул алгебры высказываний.

Пример 5.1. Доказать тождество теории множеств

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

Доказательство. Рассмотрим аналог этого тождества в алгебре логики

$$x(\overline{y\bar{z}}) = x\bar{y} \vee xz\,.$$

Докажем его. Имеем:

$$x(\overline{y\bar{z}}) = x(\bar{y} \vee \bar{\bar{z}}) = x(\bar{y} \vee z) = x\bar{y} \vee xz$$

В алгебре высказываний тождество доказано и, следовательно, это тождество имеет место и в теории множеств.

Пример 5.2. Упростить формулу теории множеств

$$(X\backslash(Y\oplus Z))\cap(\overline{X \cap Z} \cup (\bar{Y} \setminus Z)).$$

Решение. Рассмотрим аналог этой формулы в алгебре высказываний, используя связь операций АВ и АМ и упростим ее. Имеем

$$x(\overline{y+z})(\overline{xz} \vee \bar{y}\,\bar{z}) \;=\; x(y \leftrightarrow z)(\bar{x} \vee \bar{z} \vee \bar{y}\,\bar{z}) \;=\; x(\bar{y}\,\bar{z} \vee yz)(\bar{x} \vee \bar{z}) \;=$$

$$(\bar{y}\,\bar{z} \vee yz)(x\bar{x} \vee x\bar{z}) \;=\; (\bar{y}\,\bar{z} \vee yz)(0 \vee x\bar{z}) \;=\; (\bar{y}\,\bar{z} \vee yz)x\bar{z} \;=\; x\bar{y}\,\bar{z} \vee 0 \;=\; x\bar{y}\,\bar{z}\,.$$

Вернемся к формуле АМ. Имеем:

$$(X\backslash(Y\oplus Z))\cap(\overline{X \cap Z} \cup (\bar{Y} \setminus Z)) = X\cap\bar{Y}\cap\bar{Z}\,.$$

Введение дополнительных операций над множествами позволяет рассмотреть алгебру множеств с расширенной сигнатурой:

$$AM = \langle 2^{U}; \{\,\bar{}\;, \cap, \cup, \setminus, \oplus\,\}\rangle$$

6. Отношения на множествах.

Напомним определение декартового произведения множеств, играющее большую роль в теории множеств.

Определение 6.1. ***Декартовым произведением*** *$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в указанном порядке называется множество всевозможных n-местных наборов, i-тые компоненты которых берутся из соответствующих множеств A_i ($i \in \{1, 2, \ldots, n\}$), т.е.*

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \overset{def}{=} \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid (\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}) : \alpha_i \in A_i\}.$$

Если все множества A_i декартового произведения $A_1\times A_2\times \ldots \times A_n$ равны между собой, то декартово произведение называется ***n-ой декартовой степенью*** *множества A:*

$$A^n = A\times A\times \ldots \times A \overset{def}{=} \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \,|\, (\forall i\in\{1, 2, \ldots, n\}) : \alpha_i\in A\}.$$

Определение 6.2. ***n-арным (n-местным) отношением*** *на множествах $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (в указанном порядке) называется* ***любое*** *непустое подмножество R декартового произведения $A_1\times A_2\times \ldots \times A_n$ этих множеств ($R\subseteq A_1\times A_2\times \ldots \times A_n$). Если $n=2$, то отношение называется* ***бинарным***. *Если отношение задано на основе n-ой декартовой степени множества A ($R\subseteq A^n$), то говорят, что оно задано на множестве A.*

В дальнейшем мы будем рассматривать исключительно бинарные отношения (как правило, на одном множестве). Поскольку всякое отношение – это некоторое непустое подмножество соответствующего декартового произведения множеств, то для его задания используются все приемы задания множеств – перечислением или описанием. Однако для бинарных отношений, заданных на некотором конечном множестве, можно предложить и матричный способ задания отношений. Для этого достаточно заметить, что всякое такое отношение задает некоторый ориентированный граф (орграф), вершинами которого служат элементы множества, а пары, входящие в отношение, определяют ребра орграфа. Тем самым, конечное отношение может задаваться с помощью методов задания графов (см. [8]). Одним же из методов задания графов является их задание с помощью матрицы смежности. Тогда в матрице $A_R=||a_{ij}||$ конечного бинарного отношения:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & если \quad (x_i, x_j)\in R, \\ 0, & если \quad (x_i, x_j)\notin R. \end{cases}$$

Определение 6.3. ***Областью определения*** *отношения $R\subseteq A\times B$ называется множество D(R) всех первых компонент всех пар из R, т.е.*

$$D(R) \overset{def}{=} \{x\in A \mid (x,y) \in R\};$$

Областью значений *отношения $R \subseteq A \times B$ называется множество $E(R)$ всех вторых компонент всех пар из R, т.е.*

$$E(R) \overset{def}{=} \{ y \in B \mid (x,y) \in R \}.$$

Пример 6.1. Пусть $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$. Тогда $D(R) = \mathbb{R}$, а $E(R) = \mathbb{R}^+$, где $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty)$.

Определение 6.4. *Отношением,* ***обратным*** *для отношения $R \subseteq A \times B$, называется отношение $R^{-1} \subseteq B \times A$ такое, что $(x,y) \in R^{-1}$ тогда и только тогда, когда $(y,x) \in R$, т.е.*

$$R^{-1} \overset{def}{=} \{(x,y) \mid (y,x) \in R\}.$$

Для конечных бинарных отношений, заданных с помощью матрицы, матрица обратного отношения получается из исходной матрицы транспонированием последней, т.е. $A_{R^{-1}} = (A_R)^T$ (это легко следует из определения обратного отношения и его матрицы).

Пример 6.2. Для отношения $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ предыдущего примера имеем: $R^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2\}$. Для отношения $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$ обратное отношение совпадает с исходным, т.е. $R^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + x^2 = 4\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\} = R$.

Определение 6.5. *Отношение $I \subseteq A \times A$ такое, что $I \overset{def}{=} \{(x,x) \mid x \in A\}$, называется* ***тождественным отношением*** *на множестве A или* ***диагональю*** *множества A. Тождественное отношение на множестве A обозначается I, или I_A, или id_A. Отношение $U = A \times A$ называется* ***универсальным.***

Для конечных бинарных отношений матрица тождественного отношения – это обычная единичная матрица (диагональные элементы равны единице, а все остальные – нули).

Матрица конечного универсального бинарного отношения – матрица, в которой все элементы равны единице.

Определение 6.6. *Пусть заданы отношения $R \subseteq A \times B$ и $Q \subseteq B \times C$. Тогда их* ***композиция*** *$P \subseteq A \times C$ в указанном порядке (обозначается $P = R \circ Q$) определяется следующим образом:*

$$P = R \circ Q \stackrel{def}{=} \{(x,y) \mid \exists z \in B : (x,z) \in R \land (z,y) \in Q\}.$$

Из определения тождественного отношения и композиции отношений следует, что тождественное отношение играет роль «единицы» при композиции отношений, т.е. если $R \subseteq A \times B$, то

$$I_A \circ R = R \circ I_B = R.$$

Для конечных бинарных отношений на некотором множестве матрица композиции отношений может быть получена из матриц исходных отношений их «произведением» по обычным правилам произведения матриц, но вместо обычного сложения элементов используется их дизъюнкция, а вместо умножения элементов – их конъюнкция.

Пример 6.3. Пусть $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$, а $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x+1\}$. Тогда

$$R \circ Q = \{(x,y) \mid \exists z \in \mathbb{R} : z = x^2 \land y = 2z+1\} = \{(x,y) \mid y = 2x^2+1\},$$

$$Q \circ R = \{(x,y) \mid \exists z \in \mathbb{R} : z = 2x+1 \land y = z^2\} = \{(x,y) \mid y = (2x+1)^2\}.$$

Из примера 6.3 следует, что композиция отношений в общем случае не является коммутативной.

Определение 6.7. *Пусть $R \subseteq A \times A$ – бинарное отношение на множестве A. Тогда:*

R – рефлексивное $\stackrel{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x \in A: (x,x) \in R$;

R – иррефлексивное $\stackrel{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x \in A: (x,x) \notin R$;

R – симметричное $\stackrel{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x,y \in A: (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$;

R – антисимметричное $\stackrel{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x,y \in A: (x,y) \in R \land (y,x) \in R \Rightarrow x = y$;

R – транзитивное $\stackrel{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x,y,z \in A [(x,y) \in R \land (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R]$;

R – линейное или полное $\stackrel{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x,y \in A: (x,y) \in R \lor (y,x) \in R$;

Теорема 6.1. *Пусть $R \subseteq A\times A$ – бинарное отношение на множестве A. Тогда:*

1. *R – рефлексивное $\Leftrightarrow I \subseteq R$;*
2. *R – иррефлексивное $\Leftrightarrow R \cap I = \emptyset$;*
3. *R – симметричное $\Leftrightarrow R = R^{-1}$;*
4. *R – антисимметричное $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I$;*
5. *R – транзитивное $\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$;*
6. *R – полное $\Leftrightarrow R \cup I \cup R^{-1} = U$;*

Доказательство. Все утверждения теоремы почти очевидны (легко следуют из определений). Докажем, например, пятое утверждение.

Необходимость ($\Rightarrow$). Дано: R – транзитивное. Доказать: $R \circ R \subseteq R$. Имеем:

$$[\,(x,z) \in R \circ R \overset{def\ R\circ R}{\Rightarrow} \exists y \in A: (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \overset{R-\text{транз.}}{\Rightarrow} (x,z) \in R\,] \Rightarrow R \circ R \subseteq R.$$

Необходимость доказана.

Достаточность ($\Leftarrow$). Дано: $R \circ R \subseteq R$. Доказать: R – транзитивное. Имеем:

$$R \circ R \subseteq R \overset{def\ R\circ R}{\Rightarrow} \forall x,z: [(x,z) \in R \circ R \Leftrightarrow \exists y: [(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R] \overset{R\circ R\subseteq R}{\Rightarrow}$$

$$\forall x,y,z: [(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R] \Rightarrow R \text{ – транзитивное.}$$

Утверждение доказано. Доказать остальные утверждения теоремы самостоятельно.

Пример 6.4. Пусть $R \subseteq \mathbb{Z}^2$, где $R = \{(x,y) \mid x \vdots y\}$ ($x \vdots y$ означает, что ***x*** делится на ***y***). Найти область определения и множество значений отношения R; построить R^{-1}, $R \circ R$, $R \circ R^{-1}$, $R^{-1} \circ R$; определить тип отношения R.

Решение. Поскольку для любого целого числа ***x*** можно подыскать такое целое ***y*** на которое ***x*** делится (например, ***y = 1***), то $D(R) = \mathbb{Z}$. Все целые числа кроме нуля могут служить делителями других целых чисел, а потому $E(R) = \mathbb{Z} \backslash \{0\}$. Далее,

$$R^{-1} = \{(x,y) \mid (y,x) \in R\} = \{(x,y) \mid y \vdots x\};$$

Поскольку для любой пары целых чисел (x,y), таких, что $x \vdots y$ можно указать такое z, что $x \vdots z$ и $z \vdots y$ (например, $z=y$), то

$$R\circ R = \{(x,y) \mid \exists z\in\mathbb{Z} : x \vdots z \wedge z \vdots y\} = \{(x,y) \mid x \vdots y\} = R;$$

Поскольку у любых двух целых чисел существует их общий делитель единица, то

$$R\circ R^{-1} = \{(x,y) \mid \exists z\in\mathbb{Z} : x \vdots z \wedge y \vdots z\} = U = \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z};$$

Поскольку у любых двух отличных от нуля целых чисел существует их общее кратное, то

$$R^{-1}\circ R = \{(x,y) \mid \exists z\in\mathbb{Z} : z \vdots x \wedge z \vdots y\} = \{(x,y) \mid x\neq 0 \wedge y\neq 0\};$$

Ответы на остальные поставленные вопросы дадим на основании теоремы 6.1. Заметим, что диагональ $I_{\mathbb{Z}}$ множества $\mathbb{Z}$ не входит в R (пара $(0,0)\notin R$). Поэтому отношение R ***не является рефлексивным***. Пересечение R и $I_{\mathbb{Z}}$ не является пустым (например, пара $(2,2) \in I$ и $(2,2) \in R$). Поэтому отношение R ***не является иррефлексивным***. Отношение R ***не является симметричным***, поскольку $R \neq R^{-1}$ (например, пара $(2,1)\in R$, а пара с переставленными компонентами (1,2) принадлежит R^{-1} и не принадлежит R). Отношение R ***не является антисимметрическим***, поскольку, например, пары $(x,-x)$ и $(-x,x)$ $(x\neq 0)$ принадлежат R, но $x \neq -x$. Отношение R ***является транзитивным***, т.к. $R\circ R = R$ (достаточно $R\circ R \subseteq R$). Отношение R ***не является полным***, т.к. пара, например, $(2,3) \notin R$ и $(2,3) \notin R^{-1}$, и $(2,3) \notin I$ (тем самым не выполняется условие $R\cup I\cup R^{-1} = U$ пункта 6 теоремы 6.1).

Замечание 6.1. *Для бинарных отношений R очень часто вместо $(x,y)\in R$ пишут xRy, т.е. символ отношения ставится между аргументами. Например, $x = y$, $x\leq y$, $x \vdots y$ и др. Поэтому, в дальнейшем, и мы часто будем использовать такую запись.*

7. Отношение эквивалентности.

Определение 7.1. *Бинарное отношение R на некотором множестве A называется* ***отношением эквивалентности****, если оно рефлексивное, симметричное и транзитивное. Эквивалентность, как правило,* *обозначается символом «~», т.е. если $(x,y)\in R$ и R – отношение эквивалентности, то пишут $x \sim y$.*

Пример 7.1. Является ли отношение сравнимости целых чисел отношением эквивалентности?

Решение. $R\subseteq\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $R = \{(x,y) \mid x \equiv y \ (mod\ m)\}$.

Напомним определение сравнимости целых чисел по некоторому модулю. Если m – некоторое целое положительное число, то

$$x \equiv y \ (mod\ m) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (x - y) \ \vdots\ m.$$

1. Поскольку $\forall x\in\mathbb{Z}$: $x \equiv x \ (mod\ m)$, то исследуемое отношение – ***рефлексивно*** $(x \equiv x \ (mod\ m) \Leftrightarrow (x - x) \vdots m \Leftrightarrow 0 \vdots m)$.

2. Имеем:

$$x \equiv y \ (mod\ m) \Leftrightarrow (x - y) \vdots m \Leftrightarrow -(y - x) \vdots m \Leftrightarrow (y - x) \vdots m \Leftrightarrow y \equiv x \ (mod\ m)$$

Таким образом, исследуемое отношение – ***симметрично***.

3. Далее:

$$x \equiv y \ (mod\ m) \wedge y \equiv z \ (mod\ m) \Leftrightarrow (x - y) \vdots m \wedge (y - z) \vdots m \Rightarrow (x - y + y - z) \vdots m$$

$$\Rightarrow (x - z) \vdots m \Rightarrow x \equiv z \ (mod\ m).$$

Таким образом, исследуемое отношение – ***транзитивно***.

Следовательно, сравнимость целых чисел по некоторому модулю является отношением эквивалентности.

Определение 7.2. *Пусть нам задано множество $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ непустых подмножеств некоторого множества A $(\forall i\colon A_i\neq\emptyset \wedge A_i\subseteq A)$ таких, что они попарно не пересекаются, а их объединение равно множеству A. Тогда $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ называется **разбиением** множества A.*

Определение 7.3. *Множество R_a всех тех элементов множества A, которые эквивалентны элементу «a», называется **классом эквивалентности элемента «a»**. Таким образом, $R_a = \{x \mid x \sim a\}$.*

Докажем следующую теорему об отношении эквивалентности.

Теорема 7.1. *Если на некотором множестве задано отношение эквивалентности, то оно приводит к разбиению этого множества на классы эквивалентных между собой элементов.*

Доказательство. Пусть нам задано множество A и отношение эквивалентности на этом множестве. Пусть $R_a = \{ x \mid x \sim a\}$.

Покажем, что каждый класс эквивалентности однозначно определяется любым своим элементом. В самом деле, если $b \in R_a$, то $b \sim a$. Но отношение эквивалентности симметрично и, следовательно, $b \sim a$ тогда и только тогда, когда $a \sim b$. Тогда все элементы x, такие, что $x \sim a$ в силу транзитивности отношения эквивалентности, обладают свойством $x \sim b$. Значит, $R_a = \{ x \mid x \sim a\} = \{ x \mid x \sim b\} = R_b$.

Покажем, далее, что классы эквивалентности или не пересекаются, или совпадают. Рассмотрим два произвольные класса эквивалентности R_a и R_b. Если их пересечение не пусто, то в этом пересечении содержится по крайней мере один элемент. Пусть $c \in R_a \cap R_b$. Тогда $c \in R_a$ (и, следовательно, $R_c = R_a$) и $c \in R_b$ (тогда $R_c = R_b$). В итоге $R_b = R_a$. Итак, различные классы эквивалентности не пересекаются.

Всякий элемент исходного множества принадлежит хотя бы одному классу эквивалентности (принадлежит объединению этих классов). В самом деле, поскольку в силу рефлексивности отношения эквивалентности всякий элемент множества A эквивалентен самому себе (т.е. $\forall a \in A\colon a \sim a$), то $a \in R_a$.

Таким образом, классы эквивалентности исчерпывают все исходное множество и различные классы попарно не пересекаются. Следовательно, их множество образует разбиение исходного множества. Теорема доказана.

Определение 7.4. *Разбиение множества A по заданному на нем отношению эквивалентности «~» называется* ***фактор-множеством*** *и обозначается A/~.*

Пример 7.2. В примере 7.1 было доказано, что отношение сравнимости целых чисел $\mathbb{Z}$ по некоторому модулю ***m*** является отношением эквивалентности. Следовательно, в силу предыдущей теоремы, оно приводит к разбиению множества $\mathbb{Z}$ на классы сравнимых между собой элементов. Обозначим $\bar{a}$ класс эквивалентности элемента a. Тогда $\mathbb{Z}/_{\equiv} = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots \overline{m-2}, \overline{m-1}\}$ – фактор-множество $\mathbb{Z}$ по отношению эквивалентности « $\equiv$ » сравнимости целых чисел.

Теорема 7.2 *(обратная теореме 7.1). Если задано некоторое разбиение $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ множества A, то оно порождает отношение эквивалентности, для которого разбиение является фактор-множеством по этому отношению эквивалентности.*

Доказательство. Введем на множестве A отношение R следующим образом. $R \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y) \mid \exists i: x \in A_i \wedge y \in A_i\}$, т.е. пара (x,y) принадлежит нашему отношению тогда и только тогда, когда существует подмножество в нашем разбиении, которому принадлежат элементы ***x*** и ***y***.

Введенное отношение является рефлексивным, поскольку для любого элемента $x \in A$ существует подмножество исходного разбиения, которому принадлежит ***x*** и, значит, $(x,x) \in R$.

Отношение R является симметричным, ибо условие $x,y \in A_i$ $((x,y) \in R)$ равносильно условию $y,x \in A_i$ $((y,x) \in R)$.

Кроме того, если $x,y \in A_i$ и $y,z \in A_i$, то и $x,z \in A_i$ и, значит, $[(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R] \Rightarrow (x,z) \in R$. Следовательно, введенное отношение является транзитивным. Таким образом, R – отношение эквивалентности. Классами эквивалентности при этом являются элементы исходного разбиения. Значит, исходное разбиение – это фактор-множество множества A по построенному отношению эквивалентности. Теорема доказана.

8. Мощность множеств.

Определение 8.1. *Множества А и В называются* ***эквивалентными****, если между ними существует биективное отображение.*

Определение корректно, ибо отношение R на булеане 2^U универсального множества, где R $\overset{def}{=}$ {(A,B) | ∃φ: A→B, φ – *биекция* }, ***является отношением эквивалентности*** (убедитесь в этом самостоятельно).

Определение 8.2. ***Мощностью |А|*** *множества А называется объект, сопоставляемый классу эквивалентности этого множества (множеству всех множеств, эквивалентных множеству А).*

Множество А называется ***конечным****, если существует такое натуральное число* ***n****, что А ~ {1, 2, … , n} (тогда* ***|А|*** $\overset{def}{=}$ ***n****), в противном случае оно называется* ***бесконечным.***

Для бесконечных множеств понятие мощности обобщает понятие «количество элементов множества». Мощности множеств называются их ***кардинальными числами****.*

Множества, эквивалентные множеству натуральных чисел, называются ***счетными*** *и их кардинальное число равно* $\aleph_0$ *(алеф нулевое). Пустое множество счетное по определению.*

Множества, эквивалентные множеству действительных чисел, называются ***континуальными*** *и их кардинальное число равно* ***c*** *(«це», континуум).*

Кардинальные числа конечных множеств называются конечными, а бесконечных – бесконечными.

Итак, |A| = |B| тогда и только тогда, когда A~B. Таким образом можно говорить о равенстве мощностей. Однако мощности разных множеств можно в определенном смысле сравнивать, говоря о большей или меньшей мощности.

Считают, что мощность множества A не превышает мощности множества B ($|A| \le |B|$), если A равномощно некоторому подмножеству множества B. Мощность множества A считается строго меньшей мощности множества B ($|A| < |B|$), если множества A и B неравномощны и существует собственное подмножество C множества B, равномощное множеству A, т.е.

$$(A \nsim B) \wedge (\exists C \subset A)[A \sim C] \Leftrightarrow (|A| < |B|).$$

Для мощностей можно доказать и другие соотношения. А именно:

а) $(|A| \le |B|) \wedge (|B| \le |A|) \Rightarrow (|A| = |B|)$;

б) $(|A| \le |B|) \wedge (|B| \le |C|) \Rightarrow (|A| \le |C|)$;

в) Для любых двух множеств A и B имеет место в точности одно из следующих трех условий: либо ($|A|<|B|$), либо ($|B| < |A|$), либо ($|A| = |B|$) (теорема Кантора-Бернштейна);

г) $|A| < |2^A|$.

д) $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Теорема 8.1 *(признак бесконечного множества).*

Множество бесконечно, если оно эквивалентно некоторому своему собственному подмножеству.

Доказательство.

A – конечное, в силу определения, тогда и только тогда, когда $\exists\, n \in \mathbb{N}$: $A \sim \{1, 2, \dots, n\}$. Поскольку множества эквивалентны тогда и только тогда, когда существует биективное отображение между этими множествами, то, как следствие определения конечного множества, имеем:

$$A - \textit{конечное} \Rightarrow \overline{(\exists B \subset A)[A \sim B]}.$$

Теперь, используя равносильность прямой теоремы ($F \to G$) и ее контрапозиции ($\overline{F} \to \overline{G}$), получим:

$$(\exists B \subset A)[A \sim B] \Rightarrow A - \textit{не является конечным (бесконечное)}$$

и, тем самым, теорема доказана.

Пример 8.1. Докажем, например, что множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ - бесконечное множество.

Рассмотрим соответствие φ: $\mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ такое, что $\varphi(n)=2n$. Нетрудно убедиться в том, что это соответствие является биективным отображением (всюду определенное, однозначное, инъективное и сюръективное соответствие). Тогда $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$. Но $2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$. Следовательно, в силу теоремы 8.1, множество натуральных чисел – бесконечно.

9. Отношение частичного порядка.

Определение 9.1. *Бинарное отношение R на некотором множестве A называется* ***отношением частичного порядка****, если оно рефлексивное, антисимметричное и транзитивное. Отношение частичного порядка, как правило, обозначается символом «≤», т.е. если $(x,y) \in R$ и R – отношение частичного порядка, то пишут $x \leq y$ («x не больше y» или «x меньше или равно y»). Если $\forall x,y \in A$: $(x,y) \in R \vee (y,x) \in R$, то частичный порядок R называется* ***линейным порядком***.

Пример 9.1. Является ли отношение делимости на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ отношением частичного порядка?

Решение. $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $R = \{(x,y) \mid x \vdots y\}$.

1. Поскольку $\forall x \in \mathbb{N}$: $x \vdots x$, то $I \subseteq R$ и отношение ***является рефлексивным***.
2. Поскольку для натуральных чисел из $x \vdots y$ и $y \vdots x$ следует, что $x = y$, то отношение ***является антисимметричным***.
3. Поскольку для натуральных чисел из $x \vdots y$ и $y \vdots z$ следует, что $x \vdots z$, то отношение ***является транзитивным***.

Таким образом, отношение делимости на множестве натуральных чисел ***является отношением частичного порядка***.

Определение 9.2. *Бинарное отношение R на некотором множестве A называется* ***отношением строгого порядка****, если оно иррефлексивное,* *антисимметричное и транзитивное. Отношение строгого порядка, как правило, обозначается символом «<», т.е. если (x,y)∈R и R – отношение строгого порядка, то пишут $x < y$ («x меньше y»).*

Отношение строгого порядка получается из отношения частичного порядка удалением из него всех элементов диагонали I_A, т.е.

$$x < y \overset{def}{\Leftrightarrow} x \le y \wedge x \ne y.$$

Отношение строгого порядка « < » на множестве А называют ассоциированным с отношением частичного порядка « ≤ » на этом множестве.

Определение 9.3. *Бинарное отношение « ≥ » на некотором множестве А, обратное для отношения частичного порядка « ≤ » на этом множестве называется **отношением, двойственным к отношению частичного порядка** ($x \ge y$ читается «x не меньше y» или «x больше или равно y»).*

Нетрудно убедиться в том, что отношение, двойственное отношению частичного порядка на некотором множестве, само является отношением частичного порядка на этом множестве.

Определение 9.4. *Множество А, на котором задано отношение частичного порядка «≤», называется **частично упорядоченным множеством** (ЧУМ). Если все элементы множества А попарно сравнимы по отношению порядка «≤» (отношение «≤» - полное), то А называется **линейно упорядоченным** (**вполне упорядоченным** или **цепью**), а соответствующее отношение – **отношением линейного порядка.***

Определение 9.5. *Пусть ⟨А; ≤⟩ - ЧУМ. Тогда подмножество $\{x_1, x_2,\dots,x_n\}$ в А образует **возрастающую цепь**, если $x_1<x_2<\dots<x_n$. При этом x_1 называется **началом** цепи, x_n – **концом** цепи, а число (n-1) – **длиной** цепи.*

Пример 9.1. Рассмотрим n – мерный булев куб B^n (B = {0, 1}) и отношение «предшествования» двоичных наборов « ≼ ». Покажем, что $\langle B^n; \preccurlyeq\rangle$ - ЧУМ. Пусть

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in B^n \text{ и } \tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in B^n.$$

Тогда $\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta} \overset{\text{def}}{<=>} \overset{n}{\underset{i=1}{\forall}} i : \alpha_i \le \beta_i$. Очевидно, что отношение «$\preccurlyeq$» обладает свойствами рефлексивности, антисимметричности и транзитивности (проверить!). Поэтому $\langle B^n, \preccurlyeq \rangle$ - ЧУМ. Заметим, что отношение частичного порядка «$\preccurlyeq$» на B^n не является отношением линейного порядка поскольку, например, наборы $(0,\ 1,\ \alpha_3,\ \ldots\ ,\ \alpha_n)$ и $(1,\ 0,\ \alpha_3,\ \ldots\ ,\ \alpha_n)$ несравнимы между собой по отношению порядка «$\preccurlyeq$».

Определение 9.6. *Бинарное отношение « $\prec$ » (или « $\lhd$ ») на некотором множестве А называется* ***отношением доминирования*** *(или* ***покрываемости****), ассоциированным с отношением частичного порядка «≤», если оно иррефлексивно, антисимметрично и не транзитивно.*

$$x \lhd y \overset{\text{def}}{<=>} (x<y) \wedge (\forall z\, [x \le z \le y \Rightarrow (x=z \vee y=z)]).$$

Если $\mathbf{x} \lhd \mathbf{y}$, *то говорят, что элемент* **y** ***доминирует*** *над элементом* ***x*** *(или элемент* **y** ***покрывает*** *элемент* ***x****).*

Для изображения конечных ЧУМ имеется графический аппарат, называемый ***диаграммами Хассе***. Для заданного ЧУМ ***A*** диаграмма Хассе состоит из совокупности точек и линий их соединяющих, в которой точки изображают элементы множества ***A*** и, если $\mathbf{x} \lhd \mathbf{y}$, то **x** и **y** соединены линией, причем **x** в диаграмме располагается ниже **y.** Таким образом, диаграмма ЧУМ, по сути, представляет собой ориентированный граф в котором опущены петли и в котором направление ребер, отражающих доминирование элементов, выбрано от вершин более нижнего яруса к вершинам более высокого яруса.

Теорема 9.1 *(о покрываемости).*

Если $\langle M; \le \rangle$ - конечное ЧУМ, то $\forall a,b \in M$: $a \le b$ тогда и только тогда, когда $a=b$ или существует конечная последовательность $x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_n$ элементов множества М такая, что $x_1 = a$, $x_n = b$ и $\forall i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$: $x_i \lhd x_{i+1}$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть $a \le b$. Если $a = b$, то все доказано. Если $a \ne b$, то рассмотрим все возрастающие цепи с началом в a и концом в b. Такие цепи существуют, например $\{a, b\}$. Выберем из таких цепей ту, которая имеет наибольшую длину. Пусть H: $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b$ - такая цепь. Тогда в этой цепи $\forall\ i \in \{1,2,\ldots,m\text{-}1\}$: $x_i \lhd x_{i+1}$. Если это не так, то для некоторой пары элементов x_k , x_{k+1} цепи в M найдется элемент $\boldsymbol{y}$ такой, что $x_k < y < x_{k+1}$. Тогда цепь H$\cup\{y\}$ имеет длину, большую чем цепь H, что противоречит выбору H. Следовательно, в цепи H: $a = x_1 \lhd x_2 \lhd \ldots \lhd x_m = b$ и необходимость доказана.

Достаточность. Если a=b, то $a \leq b$ и все доказано. Если существует цепь H: $a = x_1 \lhd x_2 \lhd \ldots \lhd x_m = b$, то H: $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b$ – возрастающая цепь и тогда, в силу транзитивности отношения эквивалентности, $a \leq b$ и снова все доказано.

На основании теоремы 9.1 при изображении конечного ЧУМ с помощью ориентированного графа достаточно ограничиться изображением ребер, передающих отношение покрываемости элементов ЧУМ, т.е. использовать диаграммы Хассе.

Пример 9.2. Рассмотрим булеан 2^A для трехэлементного множества

A=$\{a,b,c\}$. $2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$.

Отношение «⊆» обычного теоретико-множественного включения (A⊆B означает, что A – подмножество множества B) на булеане 2^A является отношением частичного порядка, ибо обладает свойствами рефлексивности (A⊆A), антисимметричности (A⊆B ∧B⊆A ⇒ A=B) и транзитивности (A⊆B ∧ B⊆C ⇒ A⊆C). Тогда диаграмма Хассе для 2^A по отношению «⊆» следующая:

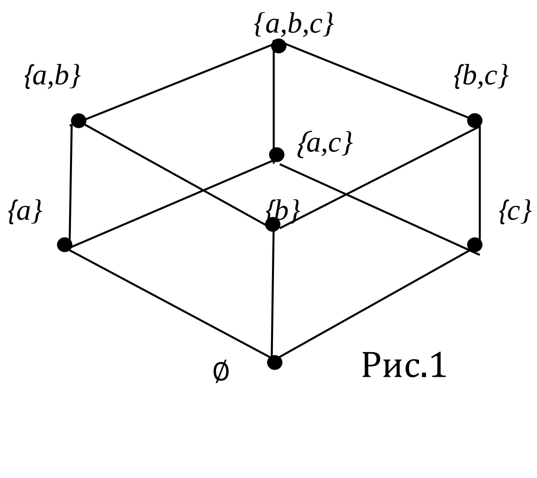


Рис.1

Из диаграммы видно, например, что подмножества $\{\emptyset, \{b\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$; $\{\{a\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$; $\{\{\emptyset, \{c\}, \{a,c\}\}$ рассматриваемого булеана трехэлементного множества образуют ***цепи***.

Определение 9.7. *Пусть нам задано ЧУМ А. Элемент* ***a*** *множества А называется* ***наименьшим*** *в А по отношению частичного порядка, если все элементы А сравнимы с ним и в А не существует элементов меньших, чем* ***a***, т.е. (***a*** *- наименьший* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall b \in A: a \leq b$).

Элемент ***a*** *множества А называется* ***минимальным*** *в А, если он наименьший среди всех тех элементов А, которые сравнимы с ним, т.е.* (***a*** *- min* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall b \in A: b \leq a \Rightarrow b = a$).

Элемент ***a*** *множества А называется* ***наибольшим*** *в А, если все элементы А сравнимы с ним и в А не существует элементов больших, чем* ***a***, т.е. (***a*** *- наибольший* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall b \in A: b \leq a$).

Элемент ***a*** *множества А называется* ***максимальным*** *в А, если он наибольший среди всех тех элементов А, которые сравнимы с ним, т.е.* (***a*** *- max* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall b \in A: a \leq b \Rightarrow b = a$).

Можно строго доказать, что если в ЧУМ имеется наименьший элемент, то он единственный (доказать!), если в ЧУМ имеется наибольший элемент, то он единственный (доказать!).

Из рис.1 примера 9.2 видно, что $2^{\{a,b,c\}}$ имеет единственный наименьший элемент - $\emptyset$ (он же единственный минимальный элемент) и имеет единственный наибольший элемент – $\{a,b,c\}$ (он же единственный максимальный элемент).

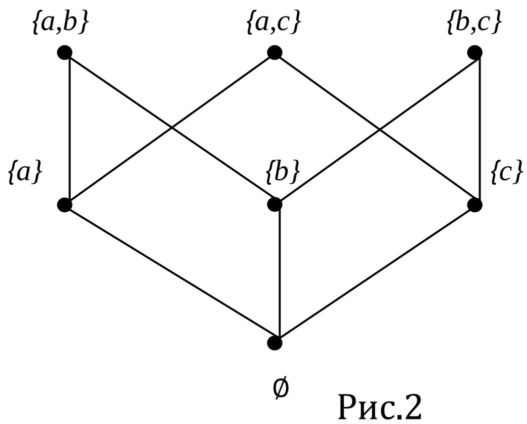


Рис.2

Из Рис.2 видно, что множество $2^{\{a,b,c\}} \setminus \{a,b,c\}$ имеет единственный наименьший элемент - ∅ (он же единственный минимальный элемент); не имеет наибольшего элемента и имеет три максимальных элемента - $\{a,b\}$, $\{a,c\}$,$\{b,c\}$.

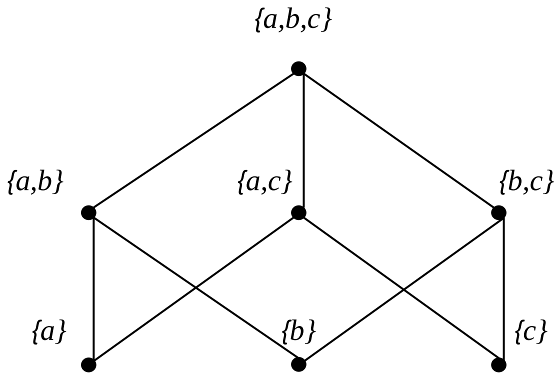


Рис.3

Из рис.3 видно, что множество $2^{\{a,b,c\}} \setminus \emptyset$ имеет три минимальных элемента - $\{a\}$, $\{c\}$, $\{b\}$; имеет наибольший элемент $\{a,b,c\}$ (он же единственный максимальный элемент).

Определение 9.8. *Пусть ⟨A; ≤⟩ - ЧУМ. Тогда* ***конусом с вершиной в точке «y»*** *(y∈A) называется множество* ***всех*** *элементов множества A не превосходящих* ***y****, т.е.* $y^{\Delta} \overset{def}{=} \{x \mid x \leq y\}$.

Например, для $A = 2^{\{a,b,c\}}$ (см. Рис.1):

1. $\{a,b,c\}^{\Delta} = 2^{\{a,b,c\}}$;
2. $\{a,b\}^{\Delta} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$;
3. $\{c\}^{\Delta} = \{\emptyset, \{c\}\}$.

Определение 9.9. *ЧУМ (A; ≤) называют* ***индуктивным****, если в нем каждая возрастающая цепь элементов с концом в заданной точке имеет конечную длину.*

Пример 9.3.

1. Пусть A – конечное множество. Тогда 2^A – конечное и, следовательно, $\langle 2^A; \subseteq\rangle$ - индуктивное (в нем каждая возрастающая цепь с концом в заданной точке ограничена снизу наименьшим элементом ∅).

2. $\langle \mathbb{N};\ \leq \rangle$ - индуктивное, поскольку всякая возрастающая цепь натуральных чисел с концом в заданной точке ***n*** имеет конечную длину и обрывается слева наименьшим элементом 1;

3. $\langle 2^{\{a,b,c\}} \setminus \emptyset;\ \subseteq \rangle$ - индуктивное, поскольку $2^{\{a,b,c\}}$ - конечное и в нем каждая возрастающая цепь с концом в заданной точке ограничена снизу минимальными элементами (см. Рис.3).

4. $\langle \mathbb{Z};\ \leq \rangle$ - не является индуктивным, поскольку $\forall a \in \mathbb{Z}$ возрастающая цепь с концом в точке ***a*** не является конечной (в $\mathbb{Z}$ нет наименьшего и минимальных элементов, поэтому цепь $\ldots < z_n < z_{n-1} < \ldots < z_2 < z_1 < \boldsymbol{a}$ - бесконечная).

Определение 9.10. *Частично упорядоченные множества $\langle M_1;\ \leq_1 \rangle$ и $\langle M_2;\ \leq_2 \rangle$ называются* ***изоморфными****, если существует биективное отображение φ между M_1 и M_2 «сохраняющее» отношение частичного порядка, т.е.*

$$M_1 \cong M_2 \overset{def}{<=>} (\exists\, \varphi: M_1 \to M_2 \wedge \varphi - \text{биекция}))(\forall a,b \in M_1)[a \leq_1 b \Leftrightarrow \varphi(a) \leq_2 \varphi(b)].$$

Нетрудно убедиться в том, что отношение изоморфизма на множестве всех частично упорядоченных множеств является отношением эквивалентности, поскольку рефлексивно, симметрично и транзитивно (убедиться в этом самостоятельно!).

Теорема 9.1. *(о нормальной форме ЧУМ).*

Пусть $\langle M;\ \leq \rangle$ - произвольное ЧУМ. Тогда существует подмножество H в булеане 2^M исходного множества M такое, что $\langle M; \leq \rangle \cong \langle H; \subseteq \rangle$.

Доказательство. Рассмотрим подмножество H, элементами которого являются конусы, вершинами которых служат элементы множества M, т.е. $H \overset{def}{=} \{x^{\Delta} \mid x \in M\}$. Всякий конус в M однозначно определяется своей вершиной и является подмножеством в M. В силу этого, H является подмножеством булеана 2^M множества M. $\langle 2^M; \subseteq \rangle$ - ЧУМ. Следовательно, и $\langle H; \subseteq \rangle$ - ЧУМ. Зададим соответствие $\varphi: M \to H$ так, что $\varphi(x) = x^{\Delta}$. Это соответствие является отображением, поскольку всюду определено и однозначно. Так как разным элементам из M отвечают разные конусы (их вершины – разные), то соответствие – инъективное. Всякий конус в М имеет некоторую вершину – элемент множества М. Следовательно, соответствие – сюрьективное. Таким образом, установленное соответствие – биективное отображение. Покажем, что оно «сохраняет» отношение частичного порядка. Пусть $x_1 \leq x_2$. $\varphi(x_1) = x_1^{\Delta}$ и $\varphi(x_2) = x_2^{\Delta}$. Поскольку $x_1 \leq x_2$, то $\forall\ x:\ x \leq x_1 \Rightarrow\ x \leq x_2$. Значит $x_1^{\Delta} \subseteq x_2^{\Delta}$, т.е. $\varphi(x_1) \subseteq \varphi(x_2)$. Верно и обратное, если $\varphi(x_1) \subseteq \varphi(x_2)$, т.е. $x_1^{\Delta} \subseteq x_2^{\Delta}$, то $x_1 \in x_2^{\Delta}$ и, следовательно $x_1 \leq x_2$. Итак, установленная биекция «сохраняет» отношение частичного порядка. Теорема доказана.

10. Метод математической индукции.

Метод математической индукции часто используется в математике, *применим в любом индуктивном множестве* М и описывается следующей логической формулой:

$$\underset{x\in A}{\forall x}\ P(x) \wedge \underset{y\in M}{\forall y}\ [\ (\underset{x\in y^{\Delta}\setminus\{y\}}{\forall x}\ P(x)) \rightarrow P(y)] \rightarrow \underset{x\in M}{\forall x}\ P(x).$$

Здесь $P(x)$ - предикат (свойство), заданный на множестве М, А – множество минимальных элементов в М (А ⊆ М), y^{Δ} - конус в М с вершиной в точке ***y***.

Суть метода. Если некоторое утверждение $P(x)$ имеет место ***для всех минимальных*** элементов множества М и из того, что оно имеет место ***для всех элементов любого конуса за исключением его вершины*** следует его истинность и ***в вершине конуса***, то это утверждение справедливо ***для всех элементов*** множества М.

Правильность дедуктивной схемы вывода, соответствующей методу математической индукции, т.е.

$$\frac{\underset{x\in A}{\forall x}\ P(x),\quad \underset{y\in M}{\forall y}\ (\ \underset{x\in y^{\Delta}\setminus\{y\}}{\forall x}\ P(x) \rightarrow P(y))}{\underset{x\in M}{\forall x}\ P(x)},$$

может быть установлена средствами математической логики, но может быть доказана следующим образом.

Предположим, что посылки нашего рассуждения верны, а заключение – неверное. Т.е. пусть $P(x)$ выполняется для всех минимальных элементов множества М (т.е. для элементов подмножества А) и пусть известно, что из того, что оно имеет место для всех элементов любого конуса за исключением его вершины следует его истинность и в вершине конуса.

Пусть еще при указанных предположениях утверждение $\underset{x\in M}{\forall x}\ P(x)$ неверно, т.е. $\exists y_1 \in$М: $P(y_1)=0$ (y_1 не обладает свойством Р). Тогда, очевидно, $y_1 \notin$ А, ибо по предположению все минимальные элементы обладают свойством Р. Рассмотрим $y_1^{\Delta} \setminus y_1$ в качестве исходного множества и повторим предыдущее рассуждение. Тогда в $y_1^{\Delta} \setminus y_1$ найдется такой элемент y_2 такой, что $y_2 < y_1$, для которого $P(y_2)=0$ (y_2 не обладает свойством Р). Затем рассмотрим $y_2^{\Delta} \setminus y_2$ и найдем y_3, для которого $P(y_3)=0$ и т.д. Получим возрастающую цепь $\ldots y_3 < y_2 < y_1$ с концом в точке y_1.

Поскольку исходное множество М индуктивное, то через конечное число шагов процесс построения отмеченной цепи элементов, для которых предикат $P(x)$ не выполняется, обрывается минимальным элементом множества М. Получим цепь $y_n < y_{n-1} < \ldots y_3 < y_2 < y_1$, где $y_n \in$А и $P(y_n)=0$. По предположению, для всех минимальных элементов множества М предикат $P(x)$ выполняется. Тогда $P(y_n)=1$. Получили противоречие ($P(y_n)=0$ и $P(y_n)=1$).

Следовательно, наше предположение о том, что $\underset{x\in M}{\forall x}\ P(x)$ не имеет места неверное и, тем самым, все доказано (метод математической индукции для индуктивных множеств обоснован).

Доказательство утверждения $\forall x P(x)$ в силу формулы

$$\text{(10.1)} \qquad \underset{x\in A}{\forall x}\ P(x) \wedge \underset{y\in M}{\forall y}\ (\underset{x\in y^{\Delta}\setminus\{y\}}{\forall x}\ P(x) \to P(y)) \to \underset{x\in M}{\forall x}\ P(x)$$

состоит в четком прохождении четырех этапов доказательства – ***базы, предположения, шага и вывода*** (заключения) ***индукции***.

База индукции состоит в непосредственной проверке того, что утверждение выполняется для всех минимальных элементов множества (т.е. проверке $\underset{x\in A}{\forall x}\ P(x)=1$).

Предположение индукции состоит в допущении того, что утверждение выполняется для всех элементов произвольного конуса за исключением его вершины т.е. предположения, что $\underset{x\in y^{\Delta}\setminus\{y\}}{\forall x}\ P(x)=1$.

Шаг индукции состоит в ***доказательстве*** того, что утверждение остается верным в вершине конуса (т.е. в доказательстве истинности импликации $(\forall_{x \in y^{\Delta} \setminus \{y\}} x \quad P(x)) \to P(y)$ при любом $\boldsymbol{y}$).

Если пройдены первые три этапа, то делается ***вывод*** индукции: «утверждение верно для всех элементов исходного индуктивного множества», т.е. $\forall_{x \in M} x \; P(x) = 1$.

Если частичный порядок на множестве М является линейным (М – линейно упорядоченное множество или цепь), то в нем существует единственный минимальный (он же – наименьший) элемент $\boldsymbol{y_0}$, всякий конус с вершиной в заданной точке $\boldsymbol{y}$ – это возрастающая цепь, начало которой совпадает с $\boldsymbol{y_0}$, а конец – с $\boldsymbol{y}$, т.е. $\boldsymbol{y^{\Delta} = \{ y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y \}}$, где $\boldsymbol{y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} < y}$. В частности, все исходное множество – цепь $\boldsymbol{y_0 < y_1 <}\ldots$ (в общем случае бесконечная). Поэтому формула, определяющая метод математической индукции, принимает вид:

$$P(y_0) \wedge (\forall k \ge 0)[(\forall i \le k)P(y_i) \to P(y_{k+1})] \to \forall x P(x) \tag{10.2}$$

или:

$$P(y_0) \wedge (\forall i \ge 0)[P(y_i) \to P(y_{i+1})] \to \forall x P(x). \tag{10.3}$$

Наконец, множество натуральных чисел ℕ (и все его подмножества) - индуктивное с наименьшим элементом «1» (или, в случае подмножества, некоторым натуральным числом n_0) и формула, определяющая метод математической индукции принимает вид:

$$P(1) \wedge (\forall k \ge 1)[(\forall i \le k)P(i) \to P(k+1)] \to \forall x P(x) \tag{10.4}$$

$$P(1) \wedge (\forall k \in \mathbb{N})[P(k) \to P(k+1)] \to (\forall n \in \mathbb{N})\, P(n). \tag{10.5}$$

Пример 10.1. Доказать, что при любом натуральном n:

$$1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

Доказательство. Применим метод математической индукции. Пройдем последовательно все отмеченные ранее шаги метода математической индукции, используя вариант (10.5) математической индукции.

1. ***База.*** Положим $n = 1$ и, подставив 1 в проверяемое тождество, убедимся в правильности утверждения. Имеем:

$$1 = \frac{1(3\cdot 1-1)}{2} = \frac{1\cdot 2}{2} = 1.$$

Итак, при $n = 1$ утверждение верное. База индукции проверена.

2. ***Предположение индукции.*** Предположим, что утверждение остается верным при некотором $n = k$, т.е. имеет место:

$$1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + (3k - 2) = \frac{k\,(3k-1)}{2}.$$

3. ***Шаг индукции.*** Докажем, что утверждение остается верным при $n = k+1$. Имеем:

$$1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + (3k - 2) + (3(k+1) - 2) =$$

Сгруппировав первые k членов и применив предположение индукции к выделенной группе слагаемых, получим:

$$= \frac{k\,(3k-1)}{2} + (3(k+1) - 2) = \frac{k\,(3k-1)}{2} + (3k+1) = \frac{k\,(3k-1)+6k+2}{2} =$$

$$= \frac{3k^2 - k + 6k + 2}{2} = \frac{3k^2 + 5k + 2}{2} = \frac{3(k+\frac{2}{3})(k+1)}{2} = \frac{(3k+2)(k+1)}{2} =$$

$$= \frac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2}.$$

Таким образом, утверждение остается верным при $n = k+1$. Шаг доказан.

4. ***Вывод.*** Утверждение

$$1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n\,(3n-1)}{2}$$

имеет место при всех натуральных n. Все доказано.

<u>Пример 10.2.</u> Доказать общий ассоциативной закон для бинарной ассоциативной алгебраической операции «∗» (назовем ее «произведением»), заданной на некотором множестве A: - сложные «произведения» $a_1 * a_2 * \ldots * a_n$ $(n \geq 3)$ не зависят от порядка расстановки скобок в этих «произведениях».

Доказательство.

Воспользуемся вариантом (10.4) метода математической индукции.

1*. **База.*** Положим $n = 3$ в $a_1 * a_2 * \ldots * a_n$. Получим:

$$a_1 * a_2 * a_3 = (a_1 * a_2) * a_3 = a_1 * (a_2 * a_3),$$

что верно в силу определения ассоциативной алгебраической операции. База проверена.

2. ***Предположение индукции.*** Пусть наше утверждение остается верным для всех натуральных $n \leq m$, т.е. всякое «произведение» $a_1 * a_2 * \ldots * a_n$ $(n \leq m)$ не зависит от расстановки скобок в нем, или:

$$(\forall i,k,n \in \mathbb{N})[1 \leq i < k < n]: (a_1 * a_2 * \ldots * a_i) * (a_{i+1} * \ldots * a_n) =$$

$$= (a_1 * a_2 * \ldots * a_k) * (a_{k+1} * \ldots * a_n) = a_1 * a_2 * \ldots * a_i * a_{i+1} * \ldots a_k * a_{k+1} * \ldots * a_n .$$

3. ***Шаг индукции.*** Докажем, что утверждение остается верным при $n = m+1$. Достаточно показать, что «произведение» не зависит от двух различных произвольных расстановок скобок. Пусть

$$(a_1 * a_2 * \ldots * a_i) * (a_{i+1} * \ldots * a_{m+1}) \quad \text{и} \quad (a_1 * a_2 * \ldots * a_k) * (a_{k+1} * \ldots * a_{m+1})$$

две таких расстановки скобок $(1 \leq i < k < m+1)$. Имеем:

$$(a_1 * a_2 * \ldots * a_k) * (a_{k+1} * \ldots * a_{m+1}) =$$

Первая скобка содержит $\leq m$ «множителей», а потому, в силу предположения индукции, «произведение» $(a_1 * a_2 * \ldots * a_k)$ не зависит от расстановки скобок в нем. Объединим первые i $(i < k)$ «множителей» этого «произведения» в одну группу, а оставшиеся «множители» - в другую. Получим:

$$= ((a_1 * a_2 * \ldots * a_i) * (a_{i+1} * \ldots a_k)) * (a_{k+1} * \ldots * a_{m+1}) =$$

Каждая скобка последнего «произведения» определяет в силу алгебраичности операции «$*$» некоторый элемент множества А. Обозначим эти элементы b, c, d соответственно. Получим:

$$= (b * c) * d =$$

В силу базы индукции в последнем «произведении» можно изменить расстановку скобок. Тогда расставляя скобки иначе и вспоминая определение элементов b, c, d, получим:

$$= b * (c * d) = (a_1 * a_2 * \dots * a_i) * ((a_{i+1} * \dots\ a_k) * (a_{k+1} * \dots * a_{m+1})) =$$

Поскольку «произведение» $(a_{i+1} * \dots\ a_k) * (a_{k+1} * \dots * a_{m+1})$ содержит $\leq m$ «множителей», то, в силу предположения индукции, оно не зависит от расстановки скобок. Следовательно, скобки в нем можно убрать. Получим:

$$= (a_1 * a_2 * \dots * a_i) * (a_{i+1} * \dots\ a_k * a_{k+1} * \dots * a_{m+1}) = (a_1 * a_2 * \dots * a_i) * (a_{i+1} * \dots * a_{m+1}).$$

Таким образом,

$$(a_1 * a_2 * \dots * a_k) * (a_{k+1} * \dots * a_{m+1}) = (a_1 * a_2 * \dots * a_i) * (a_{i+1} * \dots * a_{m+1}).$$

Шаг индукции доказан.

4. ***Вывод.*** Для бинарной ассоциативной алгебраической операции «$*$», заданной на некотором множестве А, справедлив общий ассоциативной закон: сложные «произведения» $a_1 * a_2 * \dots * a_n$ $(n \geq 3)$ не зависят от порядка расстановки скобок в этих «произведениях».

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1. Какие из следующих утверждений верны?

1) $\{\{1, 2\}, 3\} = \{3, \{2, 1\}\}$;
2) $1 \in \{\{1,2\}, \{3,4\}\}$;
3) $\{1,2\} \subseteq \{\{1,2\}, \{3,4\}\}$;
4) $\{1,2,3,4\} = \{\{1,2\}, \{3,4\}\}$;
5) $\{3\} \in \{\{1,2\}, 3\}$;
6) $\emptyset = \{\emptyset\}$;

Задание 2. Какие из следующих утверждений верны для любых множеств A, B, C?

1) $A \in B \wedge B \in C \Rightarrow A \in C$;
2) $A \subseteq B \wedge B \in C \Rightarrow A \in C$;
3) $A \cap B \subseteq \overline{C} \wedge A \cup C \subseteq B \Rightarrow A \cap C = \emptyset$;
4) $A \neq B \wedge B \neq C \Rightarrow A \neq C$;
5) $A \subseteq \overline{B \cup C} \wedge B \subseteq \overline{A \cup C} \Rightarrow B = \emptyset$;
6) $A \in B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \in C$.

Задание 3. Пусть U - множество всех десятичных цифр. $A, B \subseteq U$.
$A = \{1,3,4,5,7,8,9\}$, $B = \{2,3,4,6,8\}$. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, $\overline{A}, \overline{B}$, $A \oplus B$, $B \oplus A$.

Задание 4. Пусть: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, y \geq 0, x+y < 3\}$;

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 > 0\};$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x \geq 1\}.$$

Построить в прямоугольной декартовой системе координат: A, B, C, $A \oplus B$, $A \cap C$, $A \backslash (A \backslash B)$, $C \oplus (C \cap B)$.

Задание 5. Пусть $U = \mathbb{N}$, $A = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \vdots 2\}$, $B = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \vdots 3\}$, $C = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \vdots 5\}$. Найти:

$\overline{A}$, $\overline{C}$, $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cap B \cap C$, $A \cap \overline{B} \cap C$, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.

Задание 6. Построить диаграммы Эйлера, изображающие непустые множества A и B, для которых выполняются следующие условия:

1) $\overline{A} \cap B = \emptyset \wedge A \cap \overline{B} \neq \emptyset$;
2) $\overline{A} \cap B = \emptyset \wedge A \cap \overline{B} = \emptyset$;
3) $\overline{A} \cap B = B \wedge A \cap \overline{B} = A$;
4) $A \cup B = B \wedge A \cap B = A \wedge A \cap \overline{B} = \emptyset \wedge \overline{A} \cup B = U$.

Задание 7. Используя диаграммы Эйлера доказать следующие тождества в теории множеств:

1) $(X \backslash Y) \backslash Z = X \backslash (Y \cup Z)$;
2) $X \cup (Y \backslash Z) = (X \cup Y) \backslash (Z \backslash X)$;

3) $X \cap (Y \setminus Z) = (X \cap Y) \setminus (X \cap Z)$;

4) $X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$;

5) $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$;

6) $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup (X \cap Z)$;

7) $(X \setminus Y) \setminus Z = X \setminus (Y \cup Z)$;

8) $X \cap (Y \setminus Z) = (X \cap Y) \setminus (X \cap Z) = (X \cap Y) \setminus Z$;

9) $(X \cup Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$;

10) $X \cap (Y \oplus Z) = (X \cap Y) \oplus (X \cap Z)$;

11) $X \oplus (X \oplus Y) = Y$.

Задание 8. Доказать тождества теории множеств, используя связь формул АВ и АМ:

1) $(X \setminus Y) \setminus Z = X \setminus (Y \cup Z)$;

2) $X \cup (Y \setminus Z) = (X \cup Y) \setminus (Z \setminus X)$;

3) $X \cap (Y \setminus Z) = (X \cap Y) \setminus (X \cap Z)$;

4) $X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$;

5) $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$;

6) $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup (X \cap Z)$;

7) $(X \setminus Y) \setminus Z = X \setminus (Y \cup Z)$;

8) $X \cap (Y \setminus Z) = (X \cap Y) \setminus (X \cap Z) = (X \cap Y) \setminus Z$;

9) $(X \cup Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$;

10) $X \cap (Y \oplus Z) = (X \cap Y) \oplus (X \cap Z)$;

11) $X \oplus (X \oplus Y) = Y$.

Задание 9. Доказать, что:

2) $A \subseteq B \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap C)$;

3) $A \subseteq B \Rightarrow (A \setminus C) \subseteq (B \setminus C)$;

4) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$;

5) $A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Rightarrow (A \cup B) \subseteq (C \cup D)$;

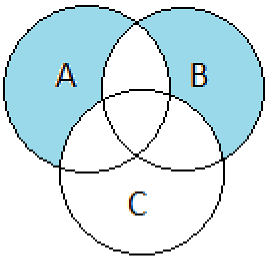
6) $A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Rightarrow (A \cap B) \subseteq (C \cap D)$;

7) $A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Rightarrow (A \setminus B) \subseteq (C \setminus D)$;

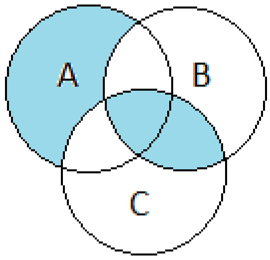
8) $A \subseteq C \wedge B \subseteq D \;\Rightarrow\; (A \oplus B) \subseteq (C \oplus D)$;

9) $A \subseteq B \;\Rightarrow\; 2^A \subseteq 2^B$;

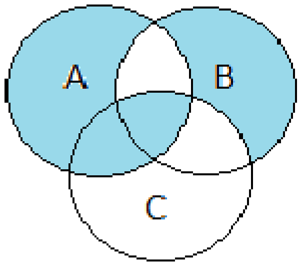
Задание 10. Для каждой диаграммы Эйлера построить формулу алгебры множеств, задающую заштрихованную (более темную) область.



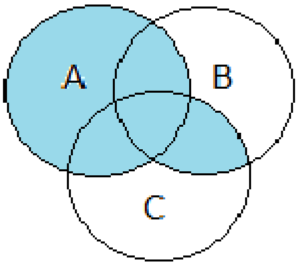
1)



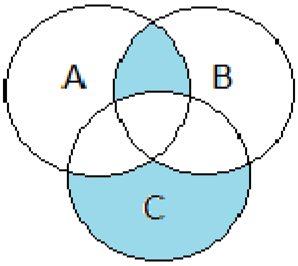
2)



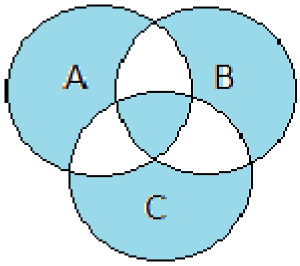
3)



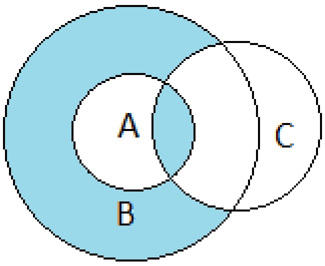
4)



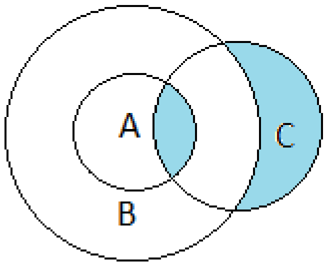
5)



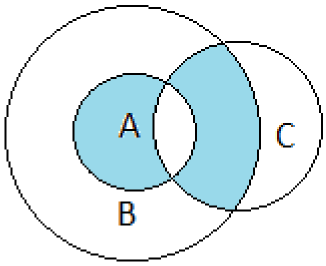
6)



7)



8)



9)

Задание 11. Упростить следующие формулы АМ:

1) $B \cup (A \cap B \cap C)$;

2) $B \cap (\overline{A} \cup B \cup C) \cap D \cap (D \cup \overline{E})$;

3) $(A \cap \overline{A}) \cup B \cup (C \cap \overline{C}) \cup D$;

4) $A \cup \overline{B \cap \overline{C}} \cup \overline{\overline{A} \cap B \cap C}$;

5) $((A \cup \overline{A}) \cap B) \cup ((C \cap \overline{C}) \cup D)$;

6) $((A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})) \cap (\overline{A} \cup (\overline{A} \cap C))$;

7) $(A\cap(A\cup B\cup C))\cup((\bar{A}\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B))$.

Задание 12. Пусть $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{0, 1\}$. Найти:

1) $A\times B$;
2) $A\times B^2$;
3) $B\times A\times B$;
4) B^3.

Задание 13. Доказать, что для непустых множеств A, B, C, D имеют место следующие утверждения:

1) $A\subseteq B \wedge C\subseteq D \Leftrightarrow A\times C \subseteq B\times D$;
2) $A=B \wedge C=D \Leftrightarrow A\times C = B\times D$;

Задание 14. Доказать, что для любых множеств A, B, C, D имеют место следующие утверждения:

1) $(A\cap B)\times(C\cap D) = (A\times C)\cap(B\times D)$;
2) $(A\cup B)\times C = (A\times C)\cup(B\times C)$;
3) $(A\cup B)\times(C\cup D) = (A\times C)\cup(B\times C)\cup(A\times D)\cup(B\times D)$;
4) $(A\setminus B)\times C = (A\times C)\setminus(B\times C)$.

Задание 15. Изобразить с помощью диаграмм Эйлера отношения между множествами:

1) A - квадраты;
2) B - четырехугольники;
3) C - ромбы;
4) D - параллелограммы;
5) E - прямоугольники;
6) F - трапеции.

Задание 16. Пусть R = {(0,2), (1,2), (2,2)}, S = {(0,1), (0,2), (1,1), ((2,3), (2,1), (3,2)}. Найти:

1) $R\circ S$;
2) $S\circ R$;

Задание 17. Найти: *a)* область определения D(R); *b)* множество значений E(R); *c)* R^{-1}; *d)* R∘R; *e)* R^{-1}∘R; *f)* R∘R^{-1} для отношений:

1) $R = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid\ y = 2^x - 1\}$;

2) $R = \{(x,y)\in\mathbb{N}^2 \mid\ x$ делит $y\}$;

3) $R = \{(x,y)\in\mathbb{N}^2 \mid\ y$ делит $x\}$;

4) $R = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid\ x + y \leq 0\}$;

5) $R = \{(x,y)\in\mathbb{N}^2 \mid\ 2x \geq 3y\}$.

Задание 18. Доказать, что для отношений R_1, R_2, Q, заданных на множестве A, если $R_1 \subseteq R_2$, то:

1) $Q \circ R_1 \subseteq Q \circ R_2$;

2) $R_1 \circ Q \subseteq R_2 \circ Q$;

3) $R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$.

Задание 19. Пусть A = {1, 2, 3}. На множестве A задано отношение R = {(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,3)}. Является ли отношение R рефлексивным, иррефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным?

Задание 20. Заполнить таблицу следующим образом: если отношение, записанное в верхней строке, является рефлексивным (Р), иррефлексивным (ИР), симметричным (С), антисимметричным (АС) или транзитивным (Т), то на пересечении соответствующих строк и столбцов ставится «+», в противном случае – « - ».

	Отношение R = {(*x*,*y*)} задано на множестве ℕ натуральных чисел						Отношение R= {(l_1,l_2)} задано на множестве прямых плоскости	
	$x=y$	$x<y$	$x\leq y$	$x \vdots y$	$\lvert x-y\rvert<2$	$x+y=8$	$l_1 \parallel l_2$	$l_1 \perp l_2$
Р								
ИР								

C								
AC								
T								

Задание 21. Доказать, что если отношения R_1 и R_2 рефлексивны, то рефлексивны и отношения:

1. $R_1 \cup R_2$;
2. $R_1 \cap R_2$;
3. R_1^{-1};
4. $R_1 \circ R_2$.

Задание 22. Доказать, что если отношения R_1 и R_2 иррефлексивны, то иррефлексивны и отношения:

1. $R_1 \cup R_2$;
2. $R_1 \cap R_2$;
3. $R_1 \circ R_1^{-1}$.

Задание 23. Доказать, что если отношения R_1 и R_2 симметричны, то

1. $R_1 \cup R_2$;
2. $R_1 \cap R_2$;
3. R_1^{-1};
4. $R_1 \circ R_1^{-1}$.

Задание 24. Доказать, что если отношения R_1 и R_2 антисимметричны, то:

1. $R_1 \cap R_2$ - антисимметрично;
2. $R_1 \cup R_2$ – антисимметрично $\Leftrightarrow$ $(R_1 \cap R_2^{-1}) \subseteq I_A$;
3. R_1^{-1} - антисимметрично;

Задание 25. Доказать, что композиция $R_1 \circ R_2$ симметричных отношений R_1 и R_2 симметрична тогда и только тогда, когда
$R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

Задание 26. Построить бинарное отношение R со следующими свойствами:

1. R – рефлексивное, симметричное и не транзитивное;

2. R – рефлексивное, антисимметричное и не транзитивное;

3. R – рефлексивное, транзитивное и не симметричное;

4. R – антисимметричное, транзитивное и не рефлексивное;

5. R – симметричное, транзитивное и не рефлексивное.

Задание 27. Доказать, что любое отношение R, симметричное и антисимметричное одновременно, является транзитивным.

Задание 28. Пусть R – бинарное отношение на A и $R_0^n = \underbrace{R \circ R \circ \ldots \circ R}_{n}$.

Доказать, что отношение S = $\bigcup_{n=1}^{\infty} R_0^n$ - транзитивно.

Задание 29. Доказать, что если отношение R на множестве A – симметричное и транзитивное и D(R)∪E(R) = A, то отношение R – отношение эквивалентности на A.

Задание 30. Доказать, что отношение R является отношением эквивалентности:

1. R определено на $\mathbb{N}^2$ и R = $\{\langle (a, b),(c, d)\rangle \mid a + d = b + c\}$;
2. R определено на $\mathbb{N}^2$ и R = $\{\langle (a, b),(c, d)\rangle \mid a \cdot d = b \cdot c\}$;

Задание 31. Доказать, что если отношение R является отношением эквивалентности, то R^{-1} также является отношением эквивалентности.

Задание 32. Доказать, что если R_1 и R_2 - отношения эквивалентности, то:

1. $R_1 \cap R_2$ - отношение эквивалентности;
2. $R_1 \cup R_2$ - отношение эквивалентности $\Leftrightarrow R_1 \cup R_2 = R_1 \circ R_2$;
3. $R_1 \circ R_2$ - отношение эквивалентности $\Leftrightarrow R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

Задание 33. Доказать, что бинарное отношение *R* является отношением эквивалентности. Построить фактор-множество по этому отношению эквивалентности:

а) *R* – отношение подобия на множестве всевозможных треугольников;

b) R – отношение изоморфизма вещественных линейных пространств размерности $\leq n$ над полем $\mathbb{R}$.

Задание 34. Доказать, что множество действительных чисел $\mathbb{R}$ бесконечно.

Задание 35. Пусть бинарное отношение R задано на множестве $A=\{a,b,c\}$. $R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,c), (a,c)\}$. Доказать, что R – отношение частичного порядка.

Задание 36. Доказать, что если R – отношение частичного порядка, то R^{-1} – отношение частичного порядка.

Задание 37. Доказать, что для любого множества A: $\langle 2^A; \subseteq\rangle$ - частично упорядоченное множество (ЧУМ).

Задание 38. Доказать, что если $\langle A; R_1\rangle$ - ЧУМ и $\langle A; R_2\rangle$ - ЧУМ, то $\langle A; R_1 \cap R_2\rangle$ - ЧУМ.

Задание 39. Пусть $\langle A; R_1\rangle$ - ЧУМ и $\langle B; R_2\rangle$ - ЧУМ. На множестве $A\times B$ зададим отношение R следующим образом:

$$\forall (a,b),(c,d) \in A\times B: [((a,b),(c,d)) \in R \Leftrightarrow (a,c) \in R_1 \wedge (b,d) \in R_2].$$

Доказать, что $\langle A\times B; R\rangle$ - ЧУМ.

Задание 40. Построить диаграммы Хассе следующих ЧУМ:

1. $\langle B^3; \preccurlyeq\rangle$, $B = \{0, 1\}$;
2. $\langle B^4; \preccurlyeq\rangle$, $B = \{0, 1\}$;
3. $\langle 2^{\{a,b,c\}}; \subseteq\rangle$;
4. $\langle \{2,3,4,5,8,12,18,24,30,32,36,40\};\ x \leq y \Leftrightarrow x \vdots y\ \rangle$.

Задание 41. Построить диаграммы Хассе всех попарно неизоморфных ЧУМ:

1. На множестве из трех элементов;
2. На множестве из четырех элементов.

Задание 42. Построить пример ЧУМ, в котором имеется точно один минимальный элемент и нет наименьшего элемента.

Задание 43. Доказать, что отношение R на множестве A является одновременно отношением эквивалентности и отношением частичного порядка тогда и только тогда, когда $R = I_A$.

Задание 44. Пусть $A = B^2$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Введем отношение «$\leq_1$» на B:

$$(a,b) \leq_1 (c,d) \overset{def}{\Leftrightarrow} (a < c) \wedge [(a = c) \Rightarrow (b \leq d)].$$

Доказать, что «$\leq_1$» - отношение частичного порядка. Найти, если они существуют, минимальные, наименьшие, максимальные, наибольшие элементы в A относительно этого частичного порядка. Является ли указанный частичный порядок линейным? Построить диаграмму Хассе частично упорядоченного множества A.

Задание 45. Используя метод математической индукции доказать, что:

$$a)\ \forall n \in \mathbb{N}:\quad 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$b)\ \forall n \in \mathbb{N}:\quad 1 + 4 + 7 + 10 + \ldots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2};$$

$$c)\ \forall n \in \mathbb{N}:\quad 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1) = n^2.$$

Ответы и решения.

Задание 1. Утверждение 1) верное (почему?) и неверны все остальные утверждения (почему?).

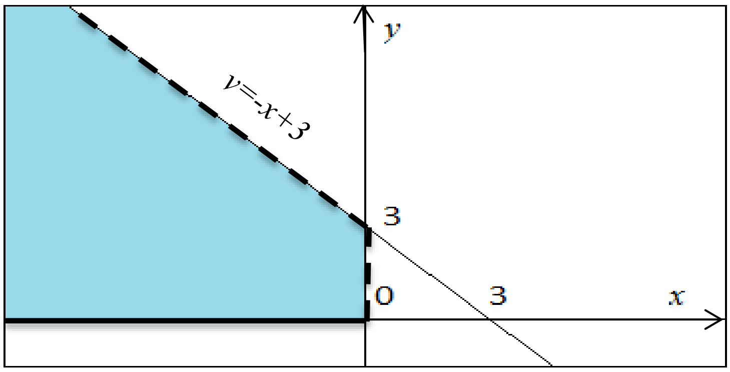
Задание 2. Верными являются утверждения 3) и 6). Неверными – остальные утверждения (приведите контрпримеры). Например, для утверждения 2): $A = \{a\}$, $B = \{a,b\}$, $C = \{\{a,b\},c\}$. Тогда $A \subseteq B$, $B \in C$, но $A \notin C$.

Задание 3. Имеем:

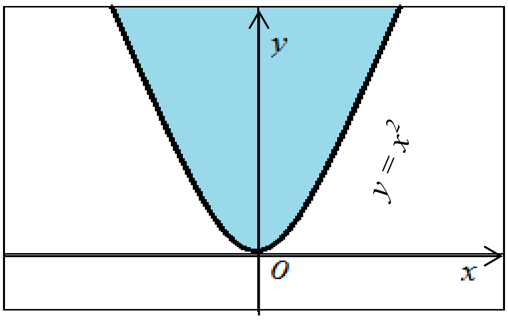
$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A \cap B = \{3,4,8\}$, $A \setminus B = \{1,5,7,9\}$,

$B \setminus A = \{2,6\}$, $\overline{A} = \{0,2,6\}$, $\overline{B} = \{0,1,5,7,9\}$, $A \oplus B = \{1,2,5,6,7,9\} = B \oplus A$.

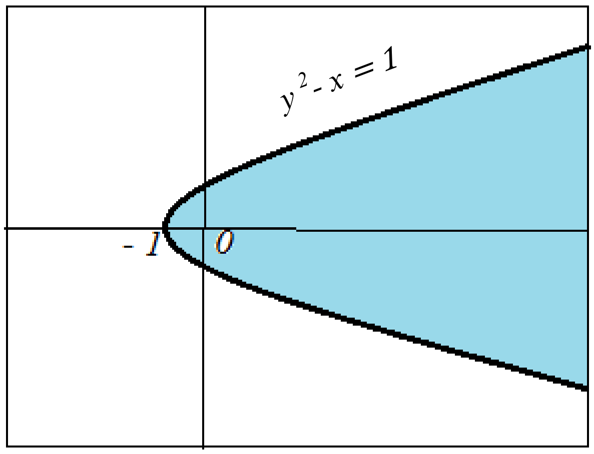
Задание 4.



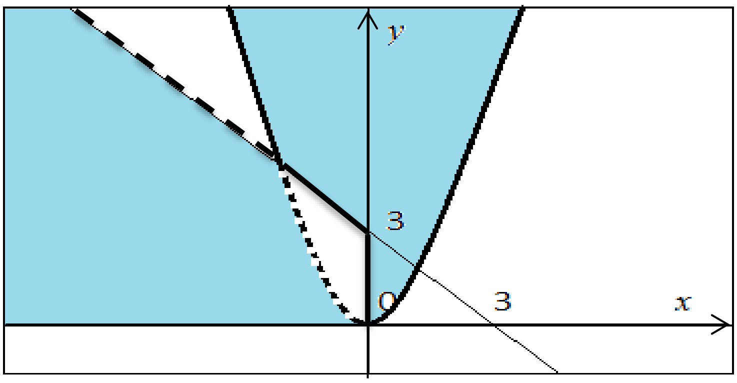
Более темная область - $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, y \geq 0, x+y < 3\}$;



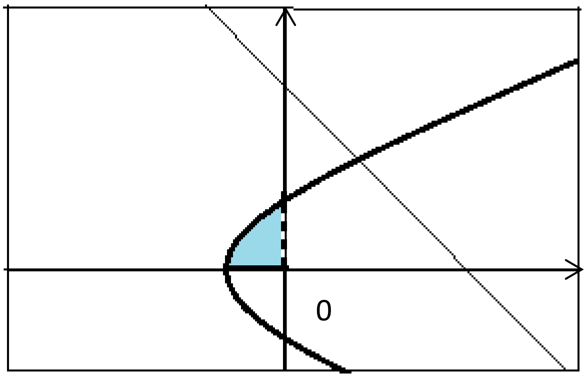
Более темная область - $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 \geq 0\}$;



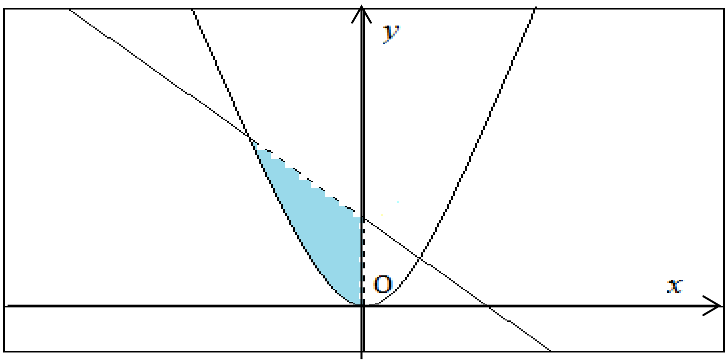
Более темная область - $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x \geq 1\}$.



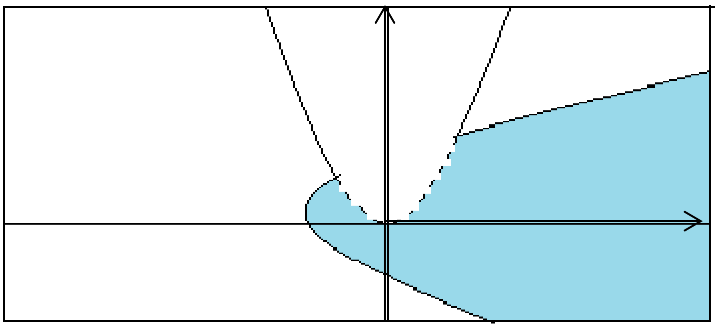
Более темная область - $A \oplus B$.



Более темная область - $A \cap C$.



Более темная область - $A \setminus (A \setminus B)$.



Более темная область - $C \oplus (C \cap B)$.

Задание 5. Ответы:

$\overline{A} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge \overline{n \vdots 2}\};$

$\overline{C} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge \overline{n \vdots 5}\};$

$A \cap B = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \vdots 2 \wedge n \vdots 3\} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \vdots 6\};$

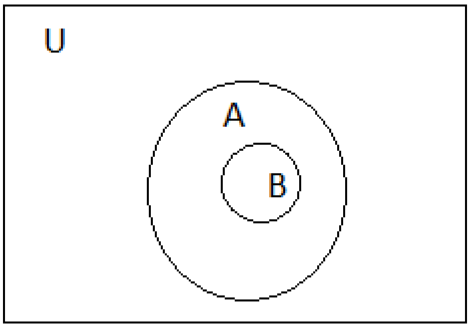
$A \cap C = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \vdots 2 \wedge n \vdots 5\} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \vdots 10\};$

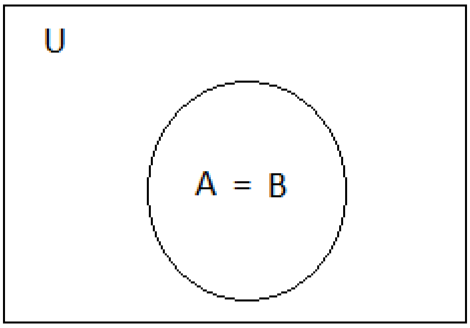
$A \cap B \cap C = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \vdots 2 \wedge n \vdots 3 \wedge n \vdots 5\} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \vdots 30\};$

$A \cap \overline{B} \cap C = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \vdots 2 \wedge \overline{n \vdots 3} \wedge n \vdots 5\} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \vdots 10 \wedge \overline{n \vdots 3}\};$

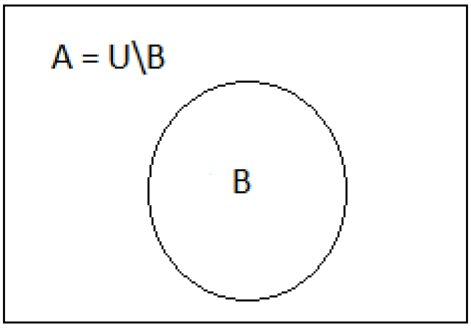
$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge \overline{n \vdots 2} \wedge \overline{n \vdots 3} \wedge \overline{n \vdots 5}\}.$

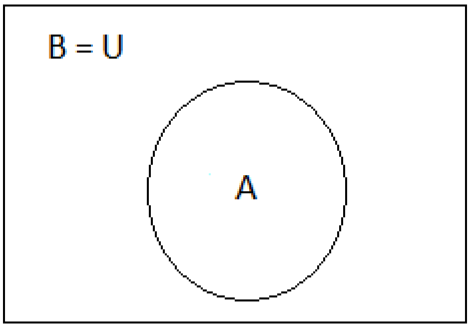
Задание 6. Ответы:





1) $\overline{A}\cap B=\emptyset \wedge A\cap\overline{B}\neq\emptyset$; *2)* $\overline{A}\cap B=\emptyset \wedge A\cap\overline{B}=\emptyset$;

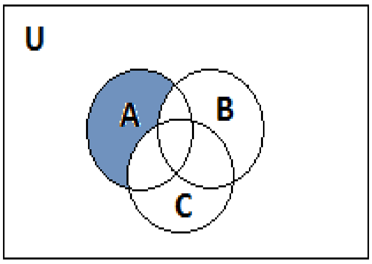


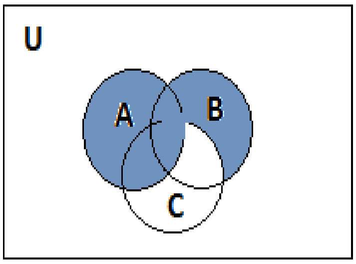


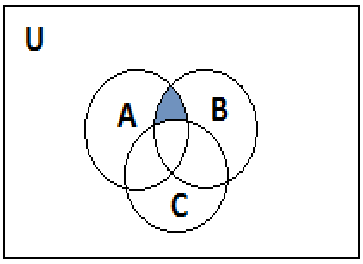
3) $\overline{A}\cap B=B \wedge A\cap\overline{B}=A$; *4)* $A\cup B=B \wedge A\cap B=$

$=A \wedge A\cap\overline{B}=\emptyset \wedge \overline{A}\cup B=U.$

Задание 7. В произвольной интерпретации $X = A$, $Y = B$, $Z = C$ при наиболее общем расположения множеств A, B, C итоговые диаграммы Эйлера для левых и правых частей, например, первых трех тождеств следующие:







1) *2)* *3)*

Задание 8. Решения. Используя связь формул АВ и АМ, имеем, например, для первых трех тождеств:

1) (X \ Y)\ Z = X \(Y∪Z) $\Leftrightarrow (x\overline{y})\overline{z}=x\overline{y\vee z} \Leftrightarrow x\overline{y}\,\overline{z}=x\overline{y}\,\overline{z}$;

2) X∪(Y\Z) = (X∪Y)\(Z\X) ⇔ $x \vee y\,\bar{z} = (x \vee y)\overline{z\,\bar{x}} = (x \vee y)(x \vee \bar{z}) = x \vee y\,\bar{z}$

3) X∩(Y\Z) = (X∩Y)\(X∩Z) ⇔ $x(y\,\bar{z}) = (xy)\overline{xz} = xy(\bar{x} \vee \bar{z}) = xy\,\bar{z} = x(y\bar{z})$.

Тождества в АВ доказаны. Следовательно, они имеют место и в АМ.

Задание 9. Докажем, например, *5)*. Имеем:

$$x \in A \bigcup B \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \overset{A \subseteq C}{\Rightarrow} \\ x \in B \overset{B \subseteq D}{\Rightarrow} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x \in C \\ x \in D \end{array}\right. \overset{def(C \bigcup D)}{\Rightarrow} \quad x \in C \bigcup D.$$

Таким образом, (A ∪ B) ⊆ (C ∪ D). Все доказано.

Задание 10. Ответы (формула определяется неоднозначно):

1) (A⊕B)\C; *2)* (A∪B∪C)\(B⊕C); *3)* ((A⊕B)\C)∪(A∩C);

4) A∪(B∩C); *5)* $(C \bigcap \bar{A} \bigcap \bar{B}) \bigcup (\bar{C} \bigcap A \bigcap B)$;

6) $(A \bigcap \bar{B} \bigcap \bar{C}) \bigcup (\bar{A} \bigcap B \bigcap \bar{C}) \bigcup (\bar{A} \bigcap \bar{B} \bigcap C) \bigcup (A \bigcap B \bigcap C)$;;

7) (B\(A∪C))∪(A∩C); *8)* (C\B)∪(A∩C); *9)* ((B\A)∩C)∪(A\C).

Задание 11. Проще всего упрощения указанных выражений можно осуществить, используя связь формул АМ и АВ. Имеем, например,:

6) $((A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup \bar{B})) \bigcap (\bar{A} \bigcup (\bar{A} \bigcap C))$;

Аналогом этой формулы в АВ является формула:

$$(x \vee y)(x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee \bar{x}\,z).$$

Упростим последнюю формулу с применением законов поглощения (A∨AB = A), склеивания $((A \vee B)(A \vee \bar{B}) = A)$ и противоречия $(A\bar{A} = 0)$. Получим:

$$(x \vee y)(x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee \bar{x}\,z) = x\bar{x} = 0.$$

Возвращаясь в АМ, имеем:

$$((A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup \bar{B})) \bigcap (\bar{A} \bigcup (\bar{A} \bigcap C)) = \emptyset.$$

Задание 12. Для упрощения записей вместо *(a,b)* или *(a,b,c)* будем писать *ab* или *abc*. Тогда:

1) *A × B = {a0, a1, b0, b1, c0, c1};*

2) $A \times B^2 = \{a,b,c\} \times \{00, 01, 10, 11\} = \{a00, b00, c00, a01, b01, c01, a10, b10, c10, a11, b11, c11\}$;

3) $B \times A \times B = \{0a0, 0b0, 0c0, 0a1, 0b1, 0c1, 1a0, 1b0, 1c0, 1a1, 1b1, 1c1\}$;

4) $B^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$.

Задание 13. Докажем, например, $A \subseteq B \wedge C \subseteq D \Rightarrow A \times C \subseteq B \times D$;

Необходимость. Дано: $A \subseteq B$ и $C \subseteq D$. Доказать: $A \times C \subseteq B \times D$. Имеем:

$$A \subseteq B \wedge C \subseteq D \Rightarrow \begin{cases} x \in A \overset{A \subseteq B}{\Rightarrow} x \in B \\ y \in C \overset{C \subseteq D}{\Rightarrow} y \in D \end{cases} \Rightarrow [(x,y) \in A \times C \Rightarrow (x,y) \in B \times D] \Rightarrow$$

$$[A \times C \subseteq B \times D].$$

Достаточность. Дано: $A \times C \subseteq B \times D$. Доказать: $A \subseteq B$ и $C \subseteq D$.

$$[A \times C \subseteq B \times D] \Rightarrow [(x,y) \in A \times C \Rightarrow (x,y) \in B \times D]$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\left[\begin{cases} x \in A \\ y \in C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in B \\ y \in D \end{cases}\right] \Rightarrow \begin{cases} A \subseteq B \\ C \subseteq D \end{cases}.$$

Таким образом, $[A \times C \subseteq B \times D] \Rightarrow [A \subseteq B \wedge C \subseteq D]$ и достаточность доказана.

Задание 14. Докажем, например, 2) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

$$(x,y) \in (A \cup B) \times C \Leftrightarrow [x \in (A \cup B) \wedge y \in C] \Leftrightarrow [(x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C)] \Leftrightarrow [(x,y) \in A \times C \vee (x,y) \in B \times C] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(x,y) \in (A \times C) \cup (B \times C)]$$

Задание 15. *1)* A - квадраты;

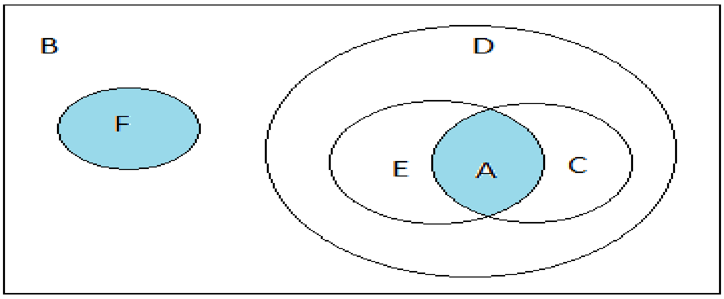
2) B - четырехугольники;

3) C - ромбы;

4) D - параллелограммы;

5) E - прямоугольники;

6) F - трапеции.



Задание 16. Из условия следует, что отношения R и S заданы на множестве $A = \{0, 1, 2, 3\}$. Тогда, на основании определения композиции отношений, имеем:

1) $R \circ S = \{(0,3), (0,1), (1,1), (1,3), (2,1), (2,3)\}$;
2) $S \circ R = \{(0,2), (0,2), (1,2), (2,2), (3,2)\}$.

Задание 17. Например, для отношения $R = \{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y = 2^x - 1\}$:

a) $D(R) = \mathbb{R}$;

b) $E(R) = \{y\in\mathbb{R} \mid y \geq -1\}$;

c) $R^{-1} = \{(x,y) \mid (y,x) \in R\} = \{(x,y) \mid x = 2^y - 1\} = \{(x,y) \mid y = \log_2(x+1)\}$;

d) $R\circ R = \{(x,y) \mid \exists z\in\mathbb{R}: (x,z) \in R \wedge (z,y)\in R\} =$

$= \{(x,y) \mid \exists z\in\mathbb{R}: z = 2^x - 1 \wedge y = 2^z - 1\} = \{(x,y) \mid y = 2^{2^x-1} - 1\}$;

e) $R^{-1}\circ R = \{(x,y) \mid \exists z\in\mathbb{R}: (x,z) \in R^{-1} \wedge (z,y)\in R\} =$

$= \{(x,y) \mid \exists z\in\mathbb{R}: x = 2^z - 1 \wedge y = 2^z - 1\} =$

$= \{(x,y) \mid \exists z\in\mathbb{R}: z = \log_2(x+1) \wedge y = 2^z - 1\} =$

$= \{(x,y) \mid y = 2^{\log_2(x+1)} - 1\} = \{(x,y) \mid x+1 > 0 \wedge y = 2^{\log_2(x+1)} - 1\} =$

$= \{(x,y) \mid x+1>0 \wedge y = x\}$.

f) $R\circ R^{-1} = \{(x,y) \mid \exists z\in\mathbb{R}: (x,z) \in R \wedge (z,y)\in R^{-1}\} =$

$= \{(x,y) \mid \exists z\in\mathbb{R}: z = 2^x - 1 \wedge z = 2^y - 1\} =$

$= \{(x,y) \mid 2^x - 1 = 2^y - 1\} = \{(x,y) \mid x = y\}$.

Задание 18. Докажем, например, $Q \circ R_1 \subseteq Q \circ R_2$.

$$(x,y)\in Q \circ R_1 \Rightarrow \exists z: (x,z)\in Q \wedge (z,y)\in R_1 \overset{R_1\subseteq R_2}{\Rightarrow} \exists z: (x,z)\in Q \wedge (z,y)\in R_2 \Rightarrow (x,y)\in Q \circ R_2.$$

Таким образом, $Q \circ R_1 \subseteq Q \circ R_2$ и все доказано.

Задание 19. Пусть A = {1, 2, 3}. На множестве A задано отношение R = {(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,3)}. Является ли отношение R рефлексивным, иррефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным?

Проверку указанных свойств отношения можно осуществить на основании определений, применяя теорему 6.1 или используя матрицу отношения (матрицу смежности соответствующего орграфа).

Применим третий прием, отмечая в скобках обоснования выводов на основании теоремы 6.1. Матрица отношения A_R следующая:

$$A_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Отношение является рефлексивным, т.к. в матрице отношения все элементы главной диагонали равны единице ($I_A \subseteq R$);
2. Отношение не является иррефлексивным, т.к. в матрице отношения на главной диагонали есть элементы отличные от нуля ($R \cap I \neq \varnothing$);
2. Отношение не является симметричным, т.к. матрица отношения не симметрична относительно главной диагонали ($R \neq R^{-1}$);
3. Отношение является антисимметричным, т.к. матрицы A_R и ее транспонированная матрица $(A_R)'$ (матрица обратного отношения $A_{R^{-1}}$) имеют общие элементы только на главной диагонали ($R \cap R^{-1} \subseteq I$);
4. Для проверки транзитивности отношения построим композицию $R \circ R$ и матрицу композиции:

$$R \circ R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,1)\},$$

$$A_{R \circ R} = A_R \circ A_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отношение не является транзитивным, т.к. $R \circ R \not\subseteq R$ - элементы (1,2) и (2,3) принадлежат R, а (1,3) не принадлежит R (элемент a_{13} в матрице $A_{R \circ R}$ равен единице, а в матрице A_R он равен нулю).

Задание 20. Заполним, например, столбец для отношения R = $\{(x,y)|x+y=8\}$.

1. R не является рефлексивным, т.к., например, $(1,1) \notin$ R.
2. R не является иррефлексивным, т.к., например, $(4,4) \in$ R.
3. R является симметричным, т.к., $\forall(x,y)$: $(x,y) \in R \Leftrightarrow x + y = 8 \Leftrightarrow$ $y + x = 8 \Leftrightarrow (y,x) \in R$.
4. R не является антисимметричным, т.к., например, $(3,5) \in$ R и $(5,3) \in$ R, но $5 \neq 3$.
5. R не является транзитивным, т.к., например, $(3,5) \in$ R и $(5,3) \in$ R, но $(3,3) \notin$ R.

	Отношение R = $\{(x,y)\}$ задано на множестве ℕ натуральных чисел						Отношение R= $\{(l_1,l_2)\}$ задано на множестве прямых плоскости	
	$x=y$	$x<y$	$x\leq y$	$x \vdots y$	$\|x-y\|<2$	$x+y=8$	$l_1 \parallel l_2$	$l_1 \perp l_2$
Р	+	-	+	+	+	-	-	-
ИР	-	+	-	-	-	-	+	+
С	+	-	-	-	+	+	+	+
АС	+	+	+	+	-	-	-	-
Т	+	+	+	+	-	-	-	-

(Здесь прямые параллельны ($l_1 \parallel l_2$) тогда и только тогда, когда они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек).

Задание 21. Докажем, например, что если отношения R_1 и R_2 на некотором множестве А рефлексивны, то рефлексивно и отношение $R_1 \cap R_2$ на этом множестве. Имеем:

R_1 и R_2 рефлексивны на А $\Leftrightarrow$ $\forall a \in A: (a,a) \in R_1 \wedge \forall a \in A: (a,a) \in R_2 \Leftrightarrow$ $\forall a \in A: (a,a) \in R_1 \wedge (a,a) \in R_2 \Leftrightarrow \forall a \in A: (a,a) \in R_1 \cap R_2 \Leftrightarrow R_1 \cap R_2$ – рефлексивно на А.

Задание 22. Докажем, например, что если отношения R_1 и R_2, заданные на некотором множестве А, иррефлексивны, то иррефлексивно и отношение $R_1 \cup R_2$. Имеем:

R_1 и R_2 иррефлексивны на А $\Leftrightarrow$ $\forall a \in A$: $(a,a) \notin R_1$ $\wedge$ $\forall a \in A$: $(a,a) \notin R_2$ $\Leftrightarrow$ $\forall a \in A$: $(a,a) \notin R_1$ $\wedge$ $(a,a) \notin R_2$ $\Leftrightarrow$ $\forall a \in A$: $(a,a) \notin R_1 \cup R_2$ $\Leftrightarrow$ $R_1 \cup R_2$ – иррефлексивно на А.

Задание 23. Докажем, например, что если отношения R_1 и R_2, заданные на некотором множестве А, симметричны, то симметрично и отношение $R_1 \cap R_2$. Имеем:

$$R_1 \text{ и } R_2 \text{ симметричны на А} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a,b \in A: (a,b) \in R_1 \Rightarrow (b,a) \in R_1 \\ \forall a,b \in A: (a,b) \in R_2 \Rightarrow (b,a) \in R_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$[\forall a,b \in A$: $(a,b) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow (b,a) \in R_1 \cap R_2] \Leftrightarrow$ $R_1 \cap R_2$ – симметрично на А.

Задание 24. Докажем, например, что если отношения R_1 и R_2, заданные на некотором множестве А, антисимметричны, то и $R_1 \cap R_2$ - антисимметрично. Имеем:

$$(a,b) \in R_1 \cap R_2 \wedge (b,a) \in R_1 \cap R_2 \Leftrightarrow \begin{cases} (a,b) \in R_1 \wedge (b,a) \in R_1 \overset{R_1 - \text{антисим.}}{\Rightarrow} a = b \\ (a,b) \in R_2 \wedge (b,a) \in R_2 \overset{R_2 - \text{антисим.}}{\Rightarrow} a = b \end{cases}.$$

Таким образом:

$$(a,b) \in R_1 \cap R_2 \wedge (b,a) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow a = b,$$

т.е. отношение $R_1 \cap R_2$ - антисимметрично. Все доказано.

Задание 25. Доказать самостоятельно.

Задание 26. Построим, например, бинарное отношение R со следующими свойствами: R – рефлексивное, симметричное и не транзитивное.

Задачу можно решать двумя различными способами. Во-первых, можно попытаться отыскать требуемое отношение на конкретном множестве из уже известных отношений на нем так, чтобы оно отвечало заданным условиям (метод «тыка»). Например, рассмотрим отношение $R = \{(x,y) \in N^2 \mid |x - y| < 2\}$. Проверим выполнение заданных условий.

1. R – рефлексивное, т.к. $\forall x \in N$: $|x - x| = 0 < 2$, т.е. $\forall x \in N$: $(x, x) \in R$;

2. R – симметричное, т.к. $\forall x,y \in \mathbb{N}$: $(x,y)\in$ R $\Leftrightarrow |x - y| < 2 \Leftrightarrow |y - x| < 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (y, x)\in R$;

3. R – не является транзитивным. Для подтверждения этого факта достаточно привести контрпример: $(1,2)\in$ R и $(2,3)\in$ R, но $(1,3) \notin$ R.

Во-вторых, можно выбрать конкретное множество A, например, A = $\{a,b,c\}$ и построить отношение R согласно условиям задачи (конструктивный подход).

Т.к. R должно быть рефлексивным, то $(a,a), (b,b), (c,c) \in R$.
Если оставить R = $\{(a,a), (b,b), (c,c)\}$, то получим отношение рефлексивное, симметричное и транзитивное – не удовлетворяющее условиям задачи. Необходимо расширить предыдущее отношение, добавив некоторые пары так, чтобы сохранить симметричность отношения и обеспечить «нарушение» транзитивности. Рассмотрим, например, R = $\{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a), (b,c), (c,b)\}$. Полученное отношение рефлексивно, симметрично и не является транзитивным (например, $(a,b) \in R$ и $(b,c) \in R$, но $(a,c) \notin R$). Задача решена.

Задания 27, 28, 29 доказать самостоятельно.

Задание 30. Докажем, например, что отношение R, определенное на $\mathbb{N}^2$, где

$$R = \{\langle(a, b),(c, d)\rangle \mid a + d = b + c\},$$

является отношением эквивалентности. Для этого проверим свойства отношения эквивалентности. Имеем:

1. R – рефлексивно, т.к. $a + b = b + a$ влечет $\forall(a, b)\in\mathbb{N}^2 : \langle(a, b),(a, b)\rangle \in$ R;
2. R – симметрично, т.к.

$$\forall(a, b),(c,d)\in\mathbb{N}^2 : \langle(a, b),(c, d)\rangle \in \mathrm{R} \Leftrightarrow a+d = b+c \Leftrightarrow c+b = d+a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \langle(c, d),(a, b)\rangle \in \mathrm{R}.$$

3. R – транзитивно, т.к.

$$\forall(a, b),(c,d), (e,f)\in\mathbb{N}^2: \langle(a, b),(c, d)\rangle \in \mathrm{R} \wedge \langle(c, d),(e, f)\rangle \in \mathrm{R} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a+d = b+c \wedge c+f = d+e \Rightarrow a+d+c+f = b+c+d+e \Rightarrow a+f = b+e \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \langle(a, b),(e, f)\rangle \in \mathrm{R}.$$

Таким образом, R является отношением эквивалентности.

Задание 31. Проверим выполнимость свойств отношения эквивалентности для отношения R^{-1}, если R - отношение эквивалентности на множестве A. Имеем:

1. R - отношение эквивалентности $\Rightarrow$ R – рефлексивно $\Rightarrow \forall a\in A: (a,a)\in R$ $\Rightarrow \forall a\in A: (a,a)\in R^{-1} \Rightarrow$ R^{-1} – рефлексивно;

2. R - отношение эквивалентности $\Rightarrow$ R – симметрично $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad [\forall a,b\in A: (a,b)\in R \Rightarrow (b,a)\in R] \quad \Leftrightarrow$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$(b,a)\in R^{-1} \qquad (a,b)\in R^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad [\forall a,b\in A: (b,a)\in R^{-1} \Rightarrow (a,b)\in R^{-1}] \ \Rightarrow\ R^{-1} \text{ – симметрично.}$$

3. R - отношение эквивалентности $\Rightarrow$ R - транзитивно $\Rightarrow$

$$\Rightarrow [\forall a,b,c\in A: (a,b)\in R \wedge (b,c)\in R \Rightarrow (a,c)\in R] \quad \Leftrightarrow$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$(b,a)\in R^{-1} \quad (c,b)\in R^{-1} \quad (c,a)\in R^{-1}$$

$$\Leftrightarrow [\forall a,b,c\in A: (b,a)\in R^{-1} \wedge (c,b)\in R \Rightarrow (c,a)\in R] \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\forall a,b,c\in A: (c,b)\in R \wedge (b,a)\in R^{-1} \Rightarrow (c,a)\in R] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^{-1} \text{ - транзитивно.}$$

Таким образом, R^{-1} - отношение эквивалентности и все доказано.

Задание 32. Докажем, например, что если R_1 и R_2 - отношения эквивалентности на некотором множестве A, то $R_1 \cap R_2$ - отношение эквивалентности на этом множестве, т.е. рефлексивно, симметрично и транзитивно. $\forall a,b,c\in A$:

1. $$\left.\begin{array}{l} R_1 - \text{рефл.} \Rightarrow (a,a)\in R_1 \\ R_2 - \text{рефл.} \Rightarrow (a,a)\in R_2 \end{array}\right\} \overset{def\,\cap}{\Rightarrow} (a,a)\in R_1 \cap R_2 \Rightarrow R_1 \cap R_2 - \text{рефлексивно};$$

2. $$(a,b)\in R_1 \cap R_2 \Rightarrow \begin{cases} (a,b)\in R_1 \\ (a,b)\in R_2 \end{cases} \overset{R_1,R_2-\text{симм.}}{\Rightarrow} \begin{cases} (b,a)\in R_1 \\ (b,a)\in R_2 \end{cases} \Rightarrow (b,a)\in R_1 \cap R_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_1 \bigcap R_2 - \textit{симметрично;}$$

3. $$(a,b),(b,c) \in R_1 \bigcap R_2 \;\Rightarrow \begin{cases} (a,b),(b,c) \in R_1 \\ (a,b),(b,c) \in R_2 \end{cases} \overset{R_1, R_2 - \textit{транз.}}{\Rightarrow} \begin{cases} (a,c) \in R_1 \\ (a,c) \in R_2 \end{cases} \overset{def \cap}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow (a,c) \in R_1 \bigcap R_2 \;\Rightarrow\; R_1 \bigcap R_2 - \textit{транзитивно.}$$

Таким образом, $R_1 \cap R_2$ – отношение эквивалентности на A.

Задание 33. Решения:

a) Отношение подобия треугольников, как известно из курса геометрии средней школы, обладает свойствами рефлексивности (каждый треугольник подобен сам себе), симметричности (если один треугольник подобен другому, то и второй подобен первому) и транзитивности (если один треугольник подобен второму, а второй подобен третьему, то первый подобен третьему). Поэтому подобие треугольников – отношение эквивалентности на множестве треугольников.

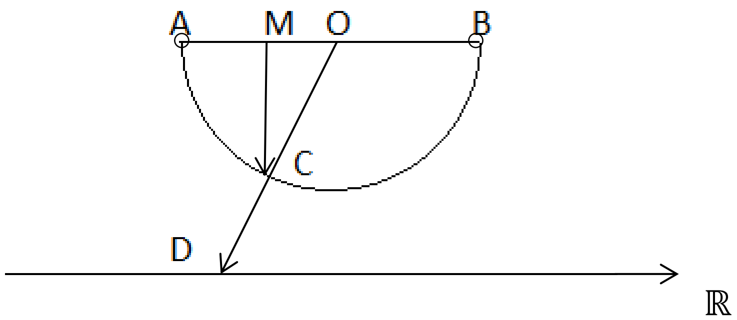
Фактор-множество по этому отношению эквивалентности состоит из классов подобных между собой треугольников. Это фактор-множество – бесконечное.

b) Обозначим $L(n;\mathbb{P})$ множество конечномерных линейных пространств над полем $\mathbb{P}$, размерности которых не превосходят некоторого заданного натурального числа *n*. В курсе высшей алгебры при изучении линейных пространств доказывается критерий изоморфизма линейных пространств над одним и тем же полем: «Два конечномерных линейных пространства, заданных над одним и тем же полем, изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одну и ту же размерность». В силу этой теоремы ясно, что отношение изоморфизма на множестве линейных пространств над одним и тем же полем обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Таким образом, отношение изоморфизма – отношение эквивалентности.

Класс эквивалентности, состоящий из линейных пространств заданной размерности m, содержит арифметическое пространство $\mathbb{P}^m$. Обозначим его $K(\mathbb{P}^m)$. Тогда фактор-множество $L(n;\mathcal{P})/_{\cong}$ множества $L(n;\mathcal{P})$ по этому отношению эквивалентности $\cong$ следующее:

$$L(n;\mathcal{P})/_{\cong} = \{\, K(\mathbb{P}^m) \mid m \in \mathcal{N} \wedge m \leq n \,\}.$$

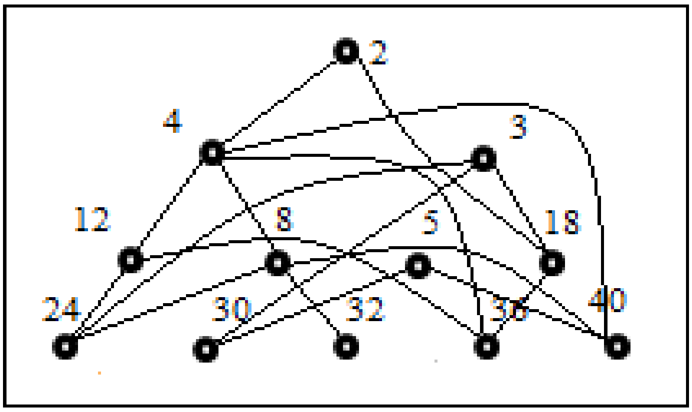
Задание 34. Рассмотрим произвольный интервал (A; B) точек вещественной прямой $\mathbb{R}$. Расположим его над вещественной осью и построим нижнюю полуокружность с центром в середине отрезка AB диаметром, равным длине AB (см. рисунок). Затем, каждой точке M отрезка AB сопоставим точку C полуокружности, проводя перпендикуляр к отрезку AB из точки M до пересечения с полуокружностью. Теперь, проводя радиус OC и продлевая его до пересечения с вещественной осью, получим точку D. Сопоставим точку D вещественной прямой исходной точке M интервала AB.



Это соответствие, в чем легко убедиться, является биективным отображением (инъективное и сюрьективное отображение). Таким образом, множество точек интервала эквивалентно множеству точек прямой и, следовательно, множество действительных чисел эквивалентно некоторому своему собственному подмножеству, т.е. бесконечно.

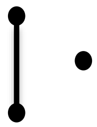
Задания 35, 36, 37, 38, 39 доказать самостоятельно.

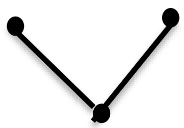
Задание 40. Например, для $\langle\{2,3,4,5,8,12,18,24,30,32,36,40\}; x \leq y \Leftrightarrow x \vdots y\rangle$ диаграмма Хассе следующая:

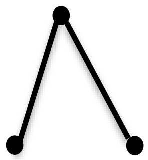


Задание 41. Диаграммы Хассе для всех попарно неизоморфных ЧУМ на множестве из трех элементов:

1.  - все три элемента попарно несравнимы;

2.  - два элемента сравнимы, третий – не сравним ни с одним из них ;

3.  - ЧУМ содержит два максимальных элемента и один наименьший (он же минимальный);

4.  - ЧУМ содержит один максимальный элемент (он же наибольший) и два минимальных элемента;

5.  - ЧУМ является линейно упорядоченным.

Задания 42, 43 доказать самостоятельно.

Задание 44. Отношение «$\leq_1$» рефлексивное (что очевидно следует из определения: $(a,a) \leq_1 (a,a)$, т.к. $(a = a)$).

Поскольку

$$(a,b) \leq_1 (c,d) \;\; \overset{def}{<=>} \;\; (a < c) \wedge [(a = c) \Rightarrow (b \leq d)])$$

и

$$(c,d) \le_1 (a,b) \overset{def}{\Leftrightarrow} (c < a) \wedge [(c = a) \Rightarrow (d \le b)]),$$

то $(a = c)$ и $(b = d)$, т.е. $(a,b) = (c,d)$ и, тем самым, отношение «$\le_1$» антисимметричное.

Далее: $$(a,b) \le_1 (c,d) \wedge (c,d) \le_1 (e,f) \Rightarrow$$

$$(a < c \wedge [a = c \Rightarrow b \le d]) \wedge (c < e \wedge [c = e \Rightarrow d \le f]) \Rightarrow$$
$$(a < e \wedge [a = e \Rightarrow b \le f]) \Rightarrow (a,b) \le_1 (e,f)$$

и, следовательно, отношение «$\le_1$» - транзитивное.

В итоге, «$\le_1$» - отношение частичного порядка на А.

Порядок «$\le_1$» является линейным на А, поскольку любые элементы (любые пары (a,b) и (c,d)) из А сравнимы между собой относительно «$\le_1$». Наименьшим элементом в А относительно порядка «$\le_1$» является пара (1,1) (единственный минимальный элемент). Наибольшим элементом в А относительно порядка «$\le_1$» является пара (4,4) (единственный максимальный элемент).

Диаграмма Хассе для частично упорядоченного множества А представляет собой цепь (расположим ее с учетом доминирования элементов не снизу вверх, а слева направо):

$$(1,1) \to (1,2) \to (1,3) \to (1,4) \to (2,1) \to (2,2) \to (2,3) \to (2,4) \to (3,1) \to (3,2) \to$$
$$\to (3,3) \to (3,4) \to (4,1) \to (4,2) \to (4,3) \to (4,4).$$

Задание 45. Докажем, например, *b)*.

$$\forall n \in N: \quad 1 + 4 + 7 + 10 + \ldots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2};$$

1. База. Положим $n = 1$. Получим 1 = 1. База проверена.

2. Предположение. Предположим, что утверждение имеет место при $n = k$, т.е.:

$$1 + 4 + 7 + 10 + \ldots + (3k-2) = \frac{k(3k-1)}{2}.$$

3. Шаг. Положим $n = k + 1$. Имеем:

$$1+4+7+10+\ldots+(3k-2)+(3(k+1)-2)=$$

$$=1+4+7+10+\ldots+(3k-2)+(3k+1)=$$

$$=\quad \frac{k(3k-1)}{2}+3k+1=\frac{3k^2+5k+2}{2}=\frac{(k+1)(3k+2)}{2}=\frac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2}.$$

Шаг доказан.

4. Вывод. $\forall n \in \mathbb{N}$: $\quad 1+4+7+10+\ldots+(3n-2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$.

Рекомендуемая литература

1. Джеймс А. Андерсон. – Дискретная математика и комбинаторика. – М.:, Вильямс, 2003. 957с.
2. Белоусов А.И., Ткачев С.Б., Дискретная математика. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 743с.
3. Галушкина Ю.И., Марьямов А.Н.- Конспект лекций по дискретной математике (с упражнениями и контрольными работами). – М.: Айрис пресс, 2007. 174 с.
4. Игошин В.И., Математическая логика и теория алгоритмов. - М.: Академия, 2008. 449 с.
5. Игошин В.И., Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов.- М.: Академия, 2007. 305 с.
6. Шапорев С.Д., Математическая логика (курс лекций и практических занятий). - С.- Петербург, 2005. 410 с.
6. Новиков Ф.А., Дискретная математика для программистов.- С.-Петербург.: Питер, 2001. 301 с.

Дополнительная литература

7. Драган Г.С., Федоровский С.В., Элементы алгебры высказываний и логики предикатов (методическое пособие). – Одесса, ОГУ им. И.И. Мечникова, 2014. 98с.
8. Федоровский С.В., Элементы теории графов (методические указания). - Одесса, ОГУ им. И.И. Мечникова, 2013. 43с.