

М Е Х А Н И К А

УДК 532.13:532.5:519.876.5

С. К. Асланов, Н. Н. Драгуновский, А. П. Царенко
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

**К ПРОБЛЕМЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ С ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТЬЮ**

Доклад сделан на заседании научного семинара кафедры
"Теоретической механики" ИМЭМ ОНУ имени И. И. Мечникова 19.03.2012 г.

Асланов С. К., Драгуновський М. М., Царенко О. П. До проблеми математичного моделювання течій рідин зі змінною в'язкістю. На базі відомих експериментальних вимірювань досліджено питання про границі застосування різних емпіричних законів, що апроксимують залежність в'язкості рідини від її температури.
Ключові слова: гідродинаміка, течія рідини, математичне моделювання.

Асланов С. К., Драгуновский Н. Н., Царенко А. П. К проблеме математического моделирования течений жидкости с переменной вязкостью. На основе известных экспериментальных данных исследован вопрос о границах применимости различных эмпирических законов, аппроксимирующих зависимость вязкости жидкости от ее температуры.
Ключевые слова: гидродинамика, течение жидкости, математическое моделирование.

Aslanov S. K., Dragunovsky N. N., Tsarenko A. P. To problem of mathematical modeling of fluid flows with variable viscosity. Was investigated the question of the limits of various empirical laws applicability, which approximate the dependence of viscosity of liquid on the temperature, on the basis of known experimental data.
Key words: hydrodynamics, fluid flows, mathematical modeling.

ВВЕДЕНИЕ. Диссипация механической энергии, сопровождающая всякое течение вязкой жидкости вблизи неподвижных границ, обязательно приводит к повышению температуры самой жидкости. Очевидно, что этот разогрев существенно понижает вязкое сопротивление среды действующим внешним силам и, как итог, качественно и количественно изменяет кинематические характеристики рассматриваемых течений.

К таковому мы здесь будем относить стационарное напорное течение Хагена-Пуазейля в круглой трубе и плоское и цилиндрическое (коаксиальный цилиндрический подшипник) сдвиговые течения типа Куэтта.

Учет зависимости вязкости жидкости от ее температуры (физическая кинетика [1]) существенно усложняет математические постановки указанных задач.

Это происходит, во-первых, за счет добавления в них уравнения баланса тепла и, во-вторых, за счет постановки граничных условий третьего рода, определяющих режим стационарного теплообмена с внешней средой.

Модели, в которых учтена зависимость вязкости жидкости от ее температуры, уже позволили выявить ряд новых свойств и особенностей у стационарных профилей скорости и температуры [2, 7, 8] и обнаружили принципиальную связь между ними.

Математическая сложность задачи, возможность ее решения в аналитической форме и научная ценность конечного результата целиком определяются функциональным видом физической кинетики, выбранной при ее постановке.

Так интегрирование сопряженной краевой задачи на основе уравнений движения Навье–Стокса и баланса тепла с использованием известной теоретической зависимости [1] оказалось возможным только численным образом [7].

Используемые в работах [2, 3, 4, 5] более простые (в функциональном смысле) зависимости коэффициента вязкости жидкости от ее температуры (для которых решение найдено в конечном виде), являются, по сути, асимптотиками теоретического закона [1]. Все эти асимптотики построены в предположении о малости диссипативного разогрева относительно температуры внешней среды, с которой имеет теплообмен рассматриваемый поток вязкой жидкости. Иные аспекты проблемы вязких течений рассмотрены авторами в [9].

В настоящей работе законы зависимости вязкости от температуры анализируются с точки зрения их соответствия известным экспериментальным данным. Делается это, прежде всего для того, чтобы сформулировать общие правила построения математических моделей для рассматриваемых вязких течений и проведения на их основе физически корректных сопоставлений для полученных решений.

Данная работа является продолжением цикла исследований, основной целью которого является численный эксперимент по проблеме устойчивости ламинарных течений жидкости с переменной вязкостью. В последующих работах по данной тематике рассматриваемые ниже аспекты не будут уже так детально освещаться.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ. В кинетической теории жидкостей [1] закон, по которому вязкость жидкости зависит от ее температуры, предлагается в виде:

$$\mu(T) = A \cdot \exp(E/T), \quad (1)$$

где значения параметров A и E для каждой конкретной жидкости должны определяться из данных, полученных экспериментальным путем.

Будем предполагать, что рассматриваемое стационарное течение вязкой жидкости происходит при температуре T_0 окружающей среды, с которой движущаяся жидкость обменивается теплом через некоторые неподвижные твердые границы.

Таким образом, при отсутствии движения жидкости, обусловленного действием внешних сил, ее температура будет во всех точках жидкости одинакова и будет равна температуре T_0 .

В соответствии с законом (1) коэффициент вязкости μ , измеренный при температуре T_0 , должен быть равен

$$\mu(T_0) = \mu_0 = A \cdot \exp(E/T_0). \quad (2)$$

Значение μ_0 мы можем выбрать в качестве масштаба и на его основе привести к безразмерному виду теоретический закон (1):

$$M(T) = \mu(T)/\mu_0 = \exp(E \cdot (T^{-1} - T_0^{-1})). \quad (3)$$

Введем в рассмотрение еще одну безразмерную функцию, физический смысл которой — изменение температуры жидкости по отношению к температуре внешней среды

$$\Theta(T) = (T - T_0)/T_0. \quad (4)$$

Тогда формула (3) может быть переписана в следующем виде:

$$M(T) = \mu(T)/\mu_0 = \exp\left(-\frac{E}{T_0} \cdot \frac{\Theta(T)}{\Theta(T) + 1}\right). \quad (5)$$

Первую из дробей, стоящих под экспонентой, можно обозначить $\delta_0 = E/T_0$, поскольку ее значение целиком определяется физическими свойствами конкретной жидкости при температуре T_0 .

Параметр δ_0 имеет принципиальное значение для нашего исследования. Его физический смысл можно проследить из соотношений (2) и (5):

$$\mu_0 = A \cdot \exp(\delta_0) \text{ и } \delta_0 = -\left.\frac{d \ln(M)}{d\Theta}\right|_{\Theta=0}. \quad (6)$$

Поскольку мы рассматриваем только диссипативные процессы, для нас параметр δ_0 будет характеризовать интенсивность уменьшения вязкости выбранной жидкости при росте ее температуры.

Для вычисления же конкретного значения δ_0 мы должны опираться на данные экспериментальных измерений, выполненных при температуре T_0 и близких к ней.

Как уже отмечалось выше, помимо закона (5) в литературе рассматривались и другие физические кинетики. Покажем, что они являются асимптотиками закона (5) в предположении о малости диссипативного разогрева жидкости, т.е. при $\Theta \ll 1$.

Перепишем (5) с учетом введенного обозначения

$$M_\Phi = \exp\left(-\delta_0 \cdot \frac{\Theta}{\Theta + 1}\right), \quad (7)$$

где аргумент T опущен для компактности записи. Нижний индекс для функции вязкости выбран с целью идентификации кинетики по фамилии ее автора [1, 3, 4].

Очевидно, что при условии $\Theta \ll 1$ знаменатель подэкспоненциального выражения разлагается в следующий степенной ряд $(1 + \Theta)^{-1} = 1 - \Theta + \Theta^2 - \Theta^3 + \dots$. Тогда всю дробь, стоящую под экспонентой в (7), с точностью до малых второго порядка можно заменить функцией Θ и использовать зависимость вязкости от температуры в виде, предложенном в [4, 5]:

$$M_A = \exp(-\delta_0 \Theta). \quad (8)$$

В работе [3] используется кинетика, которая является уже следствием (8):

$$M_K = \exp^{-1}(\delta_0 \Theta) = \left(1 + \delta_0 \Theta + \frac{(\delta_0 \Theta)^2}{2} + \dots\right)^{-1} \approx \frac{1}{1 + \delta_0 \Theta}. \quad (9)$$

Дальнейшее упрощение кинетики, очевидно, смысла не имеет.

В нашей работе [7] на базе кинетик (7) и (8) рассчитывались и сопоставлялись между собой предельные режимы течения вязкой жидкости в круглом трубопроводе (задача Хагена–Пуазейля). Были обнаружены количественные отличия профилей скоростей для зависимостей (7) и (8), а также существенная разница значений для максимально возможных перепадов давления на концах трубопровода, при которых еще имеет место стационарность течения.

Решение, построенное с учетом кинетики (9), не рассматривалось.

Обсуждение полученных результатов выявило определенный изъян в подготовке входных данных для численного эксперимента [7]. Значение параметра δ_0 определялось на основе табличных данных [6] и использовалось одновременно для обеих кинетик вида (7) и (8).

Для выяснения влияния значения параметра δ_0 на качество аппроксимации экспериментальных данных при помощи законов (7)–(9) была составлена соответствующая компьютерная программа (пользовательское приложение).

Она позволяет вычислять значения параметра δ_0 для всех упомянутых кинетик и строить их графики на одной координатной плоскости.

Основой для работы указанной программы являются данные из натурального эксперимента, которые вводятся пользователем и обрабатываются непосредственно в самой программе. Для конкретных вычислений были использованы таблицы теплофизических свойств вязких жидкостей [6].

Как показали вычисления, все рассматриваемые кинетики обеспечивают удовлетворительный уровень аппроксимации экспериментальных данных вблизи значения температуры T_0 ($\Theta = 0$), при котором определялось соответствующее значение параметра δ_0 . В особенности это касается жидкостей, вязкость которых слабо зависит от температуры.

Ниже на рисунке 1 представлены графики зависимостей вязкости от температуры для воды при температуре $t_0 = 20^\circ\text{C}$ и при атмосферном давлении. На этом же рисунке нанесены экспериментальные точки из [6]. Сплошная линия соответствует зависимости (7), штриховая линия — формуле (8), штрихпунктирная — асимптотике (9). Эти правила распространяются и на другие рисунки.

Значения параметра δ_0 , вычисленные для воды при указанной температуре, дали следующие значения: $\delta_{0\text{Ф}} = 7.14$, $\delta_{0\text{А}} = 6.91$ и $\delta_{0\text{К}} = 7.79$.

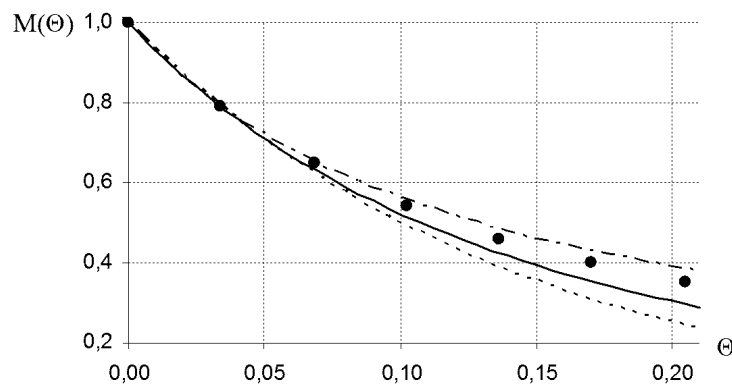


Рис. 1 Кинетики $M(\theta)$ для воды при $t_0 = 20^\circ\text{C}$

Очевидная количественная разница приведенных значений усиливается тем фактом, что тенденции изменения (уменьшения) вязкости жидкости с ростом ее температуры для исследуемых законов (7)–(9) также существенно различаются.

Асимптотика (9) "завышает" вязкость, тогда как зависимости (7)–(8) ее "занижают", сохраняя при этом общую закономерность уменьшения вязкости.

На рисунке 2 представлены зависимости (7)–(9) для масла МС-20 [6], которое следует отнести к жидкостям, вязкость которых сильно зависит от температуры.

Здесь наблюдается существенный качественный дефект асимптотики (9), который проявляет себя уже на отрезке $[T_0, T_1]$, на основе которого вычислялось соответствующее значение параметра δ_0 . На указанном отрезке температур значения вязкости оказываются даже ниже экспериментальных.

В дальнейшем асимптотика (9) дает заметное завышение значения вязкости по сравнению с экспериментальными данными и значениями, вычисленными в соответствии с формулами (7)–(8).

Значения параметра δ_0 , вычисленные для масла МС-20 при температуре $t_0 = 20^\circ\text{C}$, имеют следующие значения: $\delta_{0\text{Ф}} = 23.12$, $\delta_{0\text{А}} = 22.36$ и $\delta_{0\text{К}} = 33.55$.

Как и для воды, так и для масла МС-20 и для других жидкостей, исследованных в рамках данной работы, значения параметров $\delta_{0\text{Ф}}$ и $\delta_{0\text{А}}$ оказывались достаточно близкими (отличие не более 4%). Кроме того, законы зависимости вязкости от температуры (7) и (8) в качественном и количественном смысле достаточно хорошо описывали экспериментальные данные.

Это свидетельствует в пользу того, что именно экспоненциальный вид закона вязкости должен быть положен в основу исследования стационарных течений на гидродинамическую устойчивость.

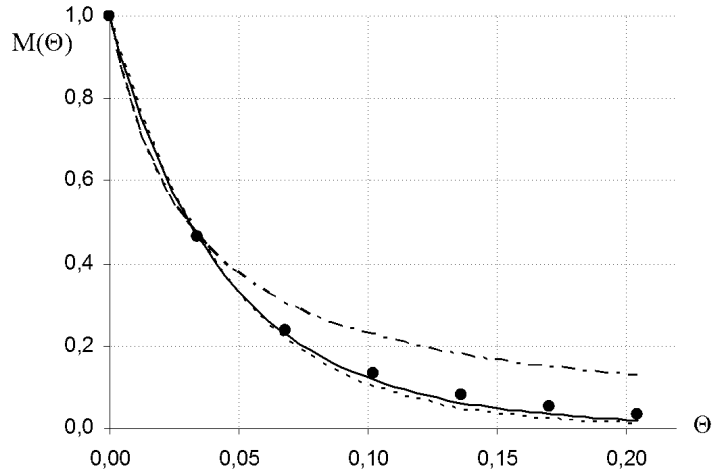


Рис. 2 Кинетики $M(\theta)$ для масла МС-20 при $t_0 = 20^\circ\text{C}$

Отклонение графиков кинетик от экспериментальных данных (рисунки 1, 2), которое наблюдается при удалении в сторону больших температур от точки T_0 ($\Theta = 0$), можно объяснить модельным допущением о постоянстве параметра δ_0 .

Очевидно, что параметр δ_0 , определяемый выражениями (6), определенным образом зависит от температуры самой жидкости, т.е. $\delta = \delta(T)$.

Выяснение вида функциональной зависимости $\delta = \delta(T)$ выходит за рамки данного исследования и не представляется целесообразным с точки зрения ее использования при решении упомянутых задач стационарной гидродинамики.

Указанный выше факт можно учитывать путем пересчета для выбранной физической кинетики конкретного значения δ_0 для различных значений задаваемой температуры внешней среды T_0 (при проведении численного эксперимента).

Поскольку диссипативный разогрев в рассматриваемых стационарных течениях [4, 5, 8] (при условиях интенсивного теплообмена с внешней средой) действительно остается малой величиной, предположение о постоянстве параметра δ_0 равнозначно предположениям о постоянстве плотности, теплопроводности жидкости и ряду других модельных допущений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Исследован вопрос о границах применимости различных эмпирических законов, аппроксимирующих зависимость вязкости жидкости от ее температуры. Выявлено качественное превосходство кинетик (7)–(8) перед их асимптотикой (9).

Предложен более обоснованный подход к заданию ключевых параметров стационарных течений жидкости с переменной вязкостью при физико-математической постановке соответствующих задач гидродинамики и их численной реализации.

Разработано пользовательское Windows-приложение, осуществляющее описанные выше вычисления. Заинтересованные лица могут обратиться к авторам статьи по адресу tsarenko@onu.edu.ua с целью бесплатного получения экземпляра этой программы для собственных научных исследований.

1. **Френкель Я. И.** Кинетическая теория жидкостей [текст] / Я. И. Френкель. Л.: Наука, 1975. – 592 с.
2. **Асланов С. К.** Пределы существования и устойчивость течения жидкости переменной вязкости в круглой трубе [текст] / С. К. Асланов, А. П. Царенко // Вестник Одесского ун-та, 1995. – Вып.1. – С. 104–111.
3. **Каганов С. А.** О профиле скоростей ламинарного потока вязкой жидкости с учетом теплоты трения и изменения коэффициента вязкости от температуры [текст] / С. А. Каганов, В. С. Яблонский // Изв. высш. уч. зав. – Нефть и газ, 1960. – № 1. – С. 85–92.
4. **Асланов С. К.** Течение жидкости переменной вязкости в круглом трубопроводе [текст] / С. К. Асланов // Изв. высш. уч. заведений. – Нефть и газ, 1961. – № 12. – С. 83–88.
5. **Асланов С. К.** О границах стационарного режима и устойчивости ламинарного течения жидкости в круглой трубе с учетом температурной зависимости вязкости и теплообмена [текст] / С. К. Асланов // Изв. высш. уч. заведений. – Нефть и газ, 1963. – № 1. – С. 77–80.
6. **Варгафтик Н. Б.** Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей [текст] / Н. Б. Варгафтик. – М.: Наука, 1972. – 720 с.
7. **Драгуновский Н. Н.** Математическое моделирование течений жидкости с переменной вязкостью [текст] / Н. Н. Драгуновский, А. П. Царенко // Вестник Одесского ун-та, 2008. – Т. 13. – Вып. 17. Матем. и мех. – С. 132–146.

8. **Драгуновский Н. Н.** Особенности течения жидкости переменной вязкости в круглой трубе [текст] / Н. Н. Драгуновский, А. П. Царенко // Физика аэродисперсных систем. Научный сборник ОНУ, 2008. – № 45. – С. 79–88.
9. **Асланов С. К.** Об одном обобщении гидродинамической теории смазки [текст] / С. К. Асланов, Н. Н. Драгуновский, А. П. Царенко // Вестник Одесского ун-та, 2011. – Т. 16. – Вып. 16, Матем. и мех. – С. 144–151.