

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра оптимального керування та економічної кібернетики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Побудова множини досяжності в R^3 »
«Construction of reachability sets in R^3 »

Виконав: здобувач денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Освітня програма «Прикладна математика»

Романов Богдан Максимович

Керівник доц. к. ф.-м. н. Таїрова М.С. _____

(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали, підпис)

Рецензент д. ф.-м. н., проф. Кічмаренко О.Д. _____

(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ____ від _____ 2025 р.

Захищено на засіданні ЕК № _____
протокол № ____ від _____ 2025р.
Оцінка _____ / _____ / _____
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Завідувач кафедри

Голова ЕК

(підпис)

(прізвище, ініціали)

(підпис)

(прізвище, ініціали)

Одеса – 2025

	2
ВСТУП.....	3
1. РОЗДІЛ 1. Операції над множинами.....	4
1.1 Сума двох множин в R^2 та R^3	4
1.2 Відстань по Хаусдорфу в R^2 та R^3	7
2. РОЗДІЛ 2. Побудова множин в R^2 та R^3.....	11
2.1 Опорна функція та її властивості.....	11
2.2 Алгоритм побудови опуклої оболонки множини за допомогою опорної функції.....	14
2.3 Функціонал Мінковського.....	17
2.4 Алгоритм побудови опуклої оболонки множини за допомогою функціоналу Мінковського.....	18
2.5 Функція деформації.....	19
2.6 Алгоритм побудови опуклої оболонки множини за допомогою функції деформації.....	19
2.7 Порівняння функціоналу Мінковського та функції деформації для побудови опуклої оболонки множини в R^2	22
2.8 Порівняння двох методів побудови опуклої оболонки множини в R^3 . 24	
3. РОЗДІЛ 3. Побудова множини досяжності в R^2 та R^3.....	27
3.1 Множина досяжності та її властивості.....	27
3.2 Побудова множини досяжності.....	28
3.3 Дослідження поведінки двох керованих об'єктів за допомогою множини досяжності.....	30
ВИСНОВОК.....	35
ЛІТЕРАТУРА.....	36
Додаток.....	37

ВСТУП

У багатьох прикладних задачах, зокрема в оптимальному керуванні, робототехніці, механіці та моделюванні фізичних систем, виникає необхідність дослідження множини досяжності - сукупності всіх станів, які система може досягти за певний проміжок часу з урахуванням обмежень на керування та початкові умови.

Особливо актуальною є задача побудови множини досяжності в тривимірному просторі R^3 , яка дозволяє візуалізувати можливі траєкторії руху, зони безпеки або області, доступні для керованих об'єктів. Побудова таких множин є складним завданням, що потребує ефективних чисельних методів.

Оскільки точний аналітичний опис множини досяжності в загальному випадку неможливий або надто складний, на практиці застосовуються наближені методи, такі як метод побудови опуклої оболонки, метод Мінковського, використання функцій деформації тощо. Ці підходи дозволяють ефективно апроксимувати множину та досліджувати її геометричні властивості.

Таким чином, розробка та аналіз чисельних методів побудови множини досяжності є важливою задачею, що має як теоретичне, так і практичне значення у сучасному математичному моделюванні.

Цілі роботи:

1) Дослідити та реалізувати алгоритм для обчислення суми двох множин у двовимірному та тривимірному просторах, алгоритмів для обчислення відстані по Хаусдорфу між множинами та дослідити властивості опорних функцій та їх застосування для опису множин.

2) Розробити методи для побудови суми двох множин, відстані по Хаусдорфу, зовнішньої апроксимації за допомогою опорних функцій методами: перетину опорних гіперплощин, функції деформації, функціонала Мінковського, множини досяжності.

3) Оцінити точність та ефективність алгоритмів для порівняння геометричних форм та структур.

1. РОЗДІЛ 1. Операції над множинами

1.1 Сума двох множин в R^2 та R^3

Нехай R^n - n -мірний евклідов векторний простір з елементами $x = (x_1, \dots, x_n)^T$.

Простір R^n є лінійним простором із звичайними операціями додавання векторів, множення вектора на число та скалярним твором $(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$, а також нормованим простором з нормою $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. [2]

Алгебраїчною сумою або просто сумою двох множин з простору $\text{comp}(R^n)$ називається множина

$$F + G = \{f + g : f \in F, g \in G\}$$

Сума $F + G$ двох множин F та G з простору $\text{comp}(R^n)$ є також елементом простору $\text{comp}(R^n)$. Крім того, якщо множини F, G випуклі, то їх алгебраїчна сума $F + G$ також буде випуклою множиною.

Операція алгебраїчної суми для будь-яких множин $F, G, H \in \text{comp}(R^n)$ задовольняє наступним властивостям:

- 1) комутативності $F + G = G + F$;
- 2) асоціативності $F + (G + H) = (F + G) + H$;
- 3) існує нульовий елемент $\{0\}$: $F + \{0\} = F$.

Слід зазначити, що якщо множина F складається з більш як однієї точки, то у такій множині немає зворотного елемента щодо введеної операції суми множин, тобто не існує такої множини $-F \in \text{comp}(R^n)$, що $F + (-F) = \{0\}$. Якщо ж $F = \{f\}$, то $-F = \{-f\}$. [3]

Сума двох множин особливо корисна для задач комп'ютерної графіки, обробки зображень та аналізу просторових даних, де необхідно візуалізувати об'єднання різних геометричних фігур.

У практичних застосуваннях, таких як моделювання фізичних систем або обробка географічних даних, сума множин може використовуватися для визначення області покриття, моделювання об'єктів та їх взаємодії в просторі.

Алгоритм суми двох множин

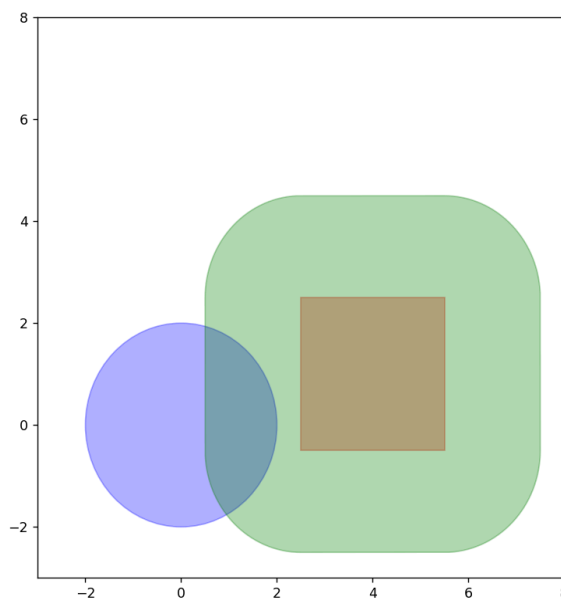
Нехай задано деякі множини $F \in \text{comp}(R^n)$ та $G \in \text{comp}(R^n)$. Треба побудувати суму двох цих множин.

Для будь-якої точки $g \in G$ множина $F + \{g\}$ виходить з множини F паралельним зрушенням на вектор g , тобто являє собою множину з центром у точці g . Коли елемент g "пробігає" множину G , центр множини $F + \{g\}$ "рухається" по множині G , в результаті утворюючи суму цих множин.

Приклад 1 Сума двох множин R^2

Потрібно зобразити суму двох множин у двовимірному просторі.

Дано множина F - коло з центром у точці $(0,0)$, радіусом 2. Та множина G - квадрат з центром в точці $(4,1)$ і сторонами які дорівнюють 3.(Додаток 1)

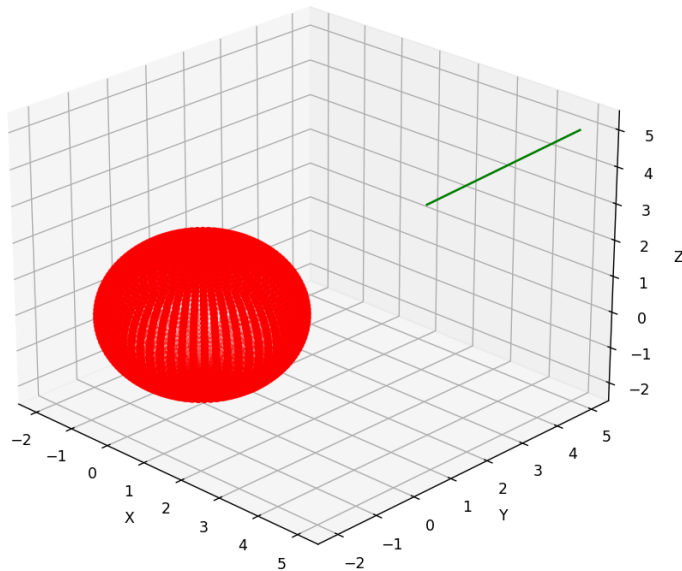


(Рис.1 Сума двох множин R^2)

Приклад 2 Сума двох множин R^3

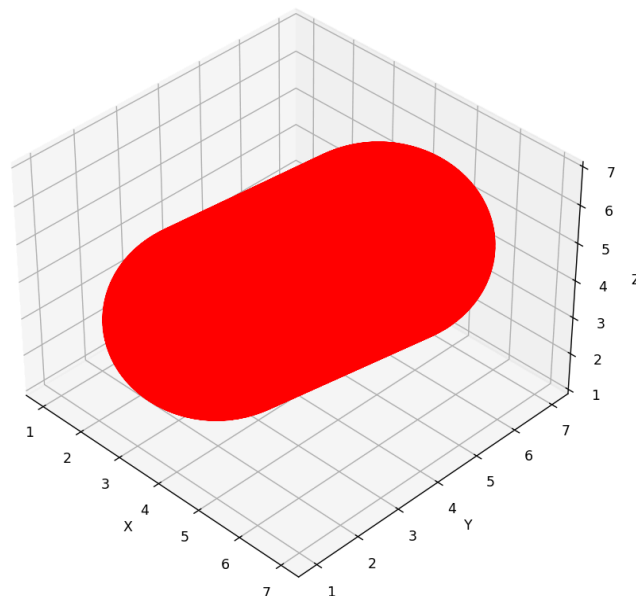
Потрібно зобразити суму двох множин у тривимірному просторі.

Дано множина F - сфера з центром у точці $(0,0,0)$, радіусом 2, воно зображене червоним кольором. Та множина G - відрізок з координатами початку $(3,3,3)$, та кінця $(5,5,5)$, він зображений зеленим кольором. (Додаток 2)



(Рис.2 Сума двох множин R^3)

Отримано множину H , яка представляє суму двох множин F і G .



(Рис.3 Сума двох множин R^3)

1.2 Відстань по Хаусдорфу в R^2 та R^3

У просторі $comp(R^n)$ можна ввести метрику, або відстань, між двома множинами F і G за формулою:

$$h(F, G) = \min\{r \geq 0: F \subset G + S_r(0), G \subset F + S_r(0)\}.$$

Таким чином, відстанню між двома множинами є найменше з позитивних чисел r , для яких виконуються одночасно два включення $F \subset G + S_r(0), G \subset F + S_r(0)$. Ця метрика називається хаусдорфовою.

Відстань Хаусдорфа задовільняє всі аксіоми метрики, для довільних множин виконуються властивості:

- 1) $h(F, G) \geq 0$
- 2) $h(F, G) = 0$ тоді і лише тоді, коли $F = G$;
- 3) $h(F, G) = h(G, F)$;
- 4) $h(F, H) \leq h(F, G) + h(G, H)$. [3] [5]

Відстані Хаусдорфа застосовують у комп'ютерному зорі, де вона використовується для порівняння форм та виявлення об'єктів, у аналізі зображень, а також в геометричному моделюванні для оцінки схожості різних геометричних структур. Відстань Хаусдорфа допомагає визначити максимальне відхилення між об'єктами, що є важливим для точного зіставлення та аналізу даних.

Алгоритм знаходження відстані по Хаусдорфу між множинами F і G

Нехай задано деякі множини $F \in comp(R^n)$ та $G \in comp(R^n)$. Треба побудувати суму двох цих множин.

Відстань по Хаусдорфу між двома множинами точок F і G визначається як найбільша з усіх відстаней від точки в одній множині до найближчої точки в іншій множині. Це означає, що вона вимірює максимальне "одностороннє" віддалення між двома множинами.

Тобто алгоритм обчислення метрики Хаусдорфа можна записати так:

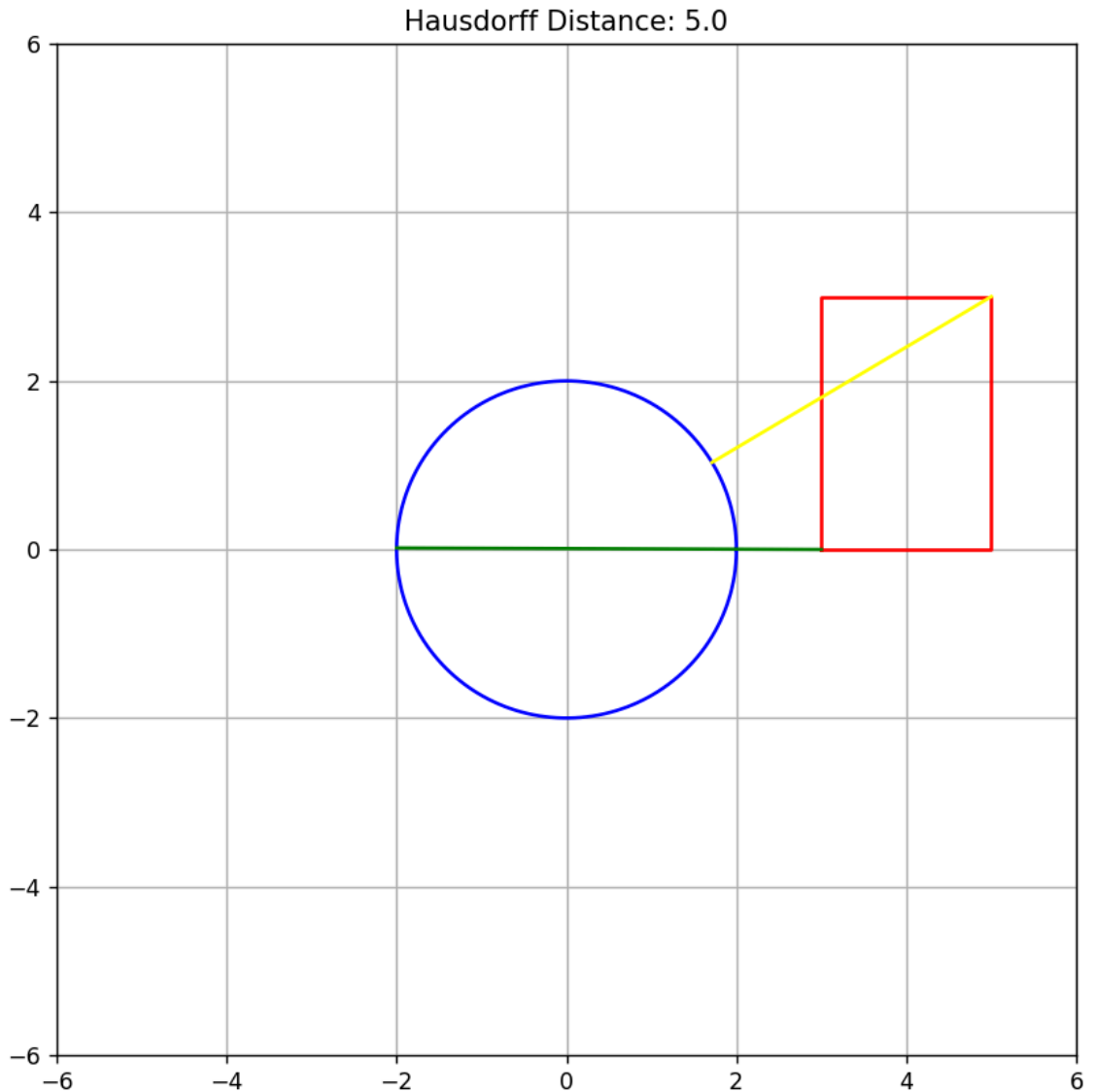
- 1) знайти мінімальну відстань від кожної точки першої множини до всіх точок другої множини;
- 2) серед цих точок знайти максимальне значення - це буде відстань від першої множини до другої;
- 3) знайти мінімальну відстань від кожної точки другої множини до всіх точок першої множини;
- 4) серед них знайти максимальне значення - це буде відстань від другої множини до першої;
- 5) відстань Хаусдорфа для двох множин точок знаходиться як більше значення серед двох обчислених відстаней. [4]

Приклад 3 Відстань по Хаусдорфу R^2

Розрахувати та зобразити відстань по Хаусдорфу між двома множинами у двовимірному просторі.

Дано множина F - коло з центром у точці $(0,0)$, радіусом 2, воно зображене синім кольором. Та множина G - прямокутник з центром в точці $(4,1.5)$ і сторонами, які дорівнюють 2 і 3, він зображений червоним кольором.

Отримано два відрізка: перший зображений жовтим кольором, це максимальна відстань серед мінімальних відстаней від кожної точки множини F до всіх точок множини G , та друга зображена зеленим кольором, це максимальна відстань серед мінімальних відстаней від кожної точки множини G до всіх точок множини F . Серед них більший відрізок й буде показувати відстань по Хаусдорфу, тобто зелений відрізок. (Додаток 3)



(Рис.4 Відстань по Хаусдорфу R^2)

Приклад 4 Відстань по Хаусдорфу R^3

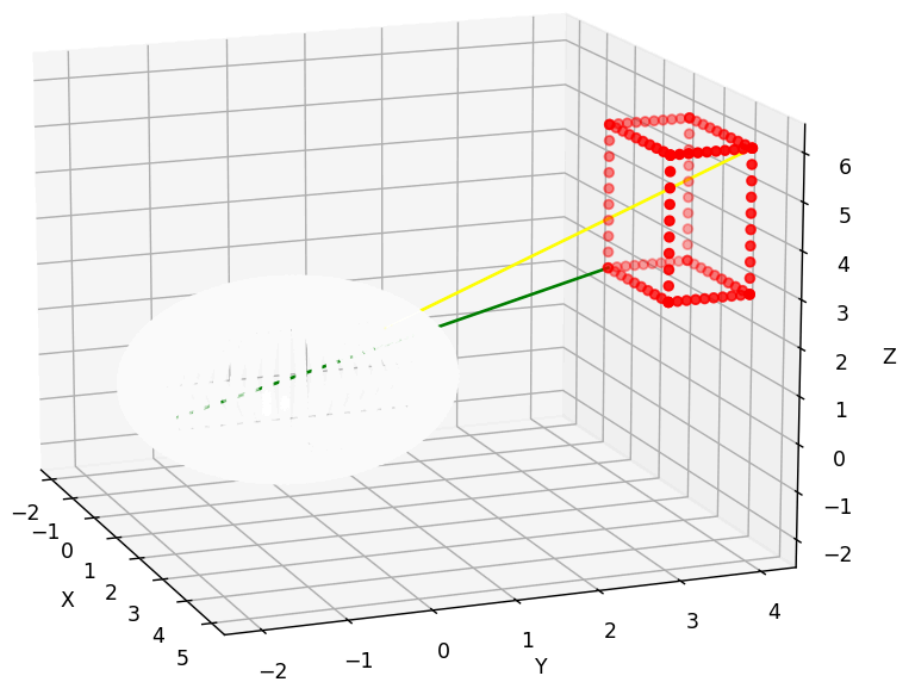
Розрахувати та зобразити відстань по Хаусдорфу між двома множинами у тривимірному просторі.

Дано множина F - сфера з центром у точці $(0,0,0)$, радіусом 2, вона зображена білим кольором. Та множина G - паралелепіпед з координатами двох протилежних кутів $(3,3,3)$ та $(5,4,6)$.

Отримано два відрізка: перший зображений жовтим кольором, це максимальна відстань серед мінімальних відстаней від кожної точки множини F

до всіх точок множини G , та друга зображена зеленим кольором, це максимальна відстань серед мінімальних відстаней від кожної точки множини G до всіх точок множини F . Серед них більший відрізок й буде показувати відстань по Хаусдорфу, тобто зелений відрізок. (Додаток 4)

Hausdorff Distance: 7.196



(Рис.5 Відстань по Хаусдорфу R^3)

2. РОЗДІЛ 2. Побудова множин в R^2 та R^3

2.1 Опорна функція та її властивості

Опорні функції є зручним аналітичним апаратом для опису опуклих компактів. Опорні функції зручно застосовувати не тільки для викладу теорії, а й при побудові чисельних методів розв'язання задач.

Нехай задана деяка множина $F \in \text{comp}(R^n)$. Опорною функцією множини F називається скалярна функція $c(F, \psi)$ векторного аргументу $\psi \in R^n$, обумовлена умовою

$$c(F, \psi) = \max_{f \in F} (f, \psi).$$

Множина F також вважається одним із аргументів функції $c(F, \psi)$. Зафіксуємо множину F . Функція $c(F, \psi)$ як функція аргументу ψ відображає простір R^n у числову вісь R . Максимум у правій частині рівності досягається, оскільки скалярний твір (f, ψ) безперервно по f , а множина F компактно.

Нехай $\psi_0 \in R^n$ деякий фіксований вектор, а f_0 – один із векторів множини F , на якому досягається максимум у визначенні опорної функції для вектора $\psi = \psi_0$, тобто виконується рівність

$$(f_0, \psi_0) = \max_{f \in F} (f, \psi_0) = c(F, \psi_0).$$

У цьому випадку вектор ψ_0 – називається опорним вектором до множини F у точці f_0 , а сукупність $U(F, \psi_0)$ всіх векторів $f_0 \in F$, що задовольняють рівності, називається опорною множиною до множини F у напрямку вектора ψ_0 . Гіперплощина Γ_{ψ_0} у просторі R^n , що визначається співвідношенням

$$\Gamma_{\psi_0} = \{x \in R^n : (x, \psi_0) = (f_0, \psi_0)\}$$

називається опорною гіперплощиною до множини F у напрямку вектора ψ_0 .

Властивості опорних функцій

Властивість 1 (позитивна однорідність опорної функції другого аргументу)

Опорна функція $c(F, \cdot): R^n \rightarrow R$ позитивно однорідна, тобто

$$c(F, \lambda\psi) = \lambda c(F, \psi)$$

для будь-якого вектора $\psi \in R^n$ та будь-якого числа $\lambda \geq 0$. Зокрема, $c(F, 0) = 0$.

Властивість 2

Для двох векторів $\psi_1, \psi_2 \in R^n$ опорна функція задовольняє нерівності

$$c(F, \psi_1 + \psi_2) \leq c(F, \psi_1) + c(F, \psi_2).$$

Властивість 3 (опорна функція лінійно перетвореної множини)

Нехай D – квадратна матриця n -го порядку. Тоді

$$c(DF, \psi) = c(F, D^T \psi),$$

де D^T – матриця, отримана з матриці D транспонуванням.

Властивість 4 (позитивна однорідність за першим аргументом)

Нехай $F \in \text{comp}(R^n)$, $\lambda \in R$. Тоді

$$c(\lambda F, \psi) = c(F, \lambda\psi).$$

Властивість 5 (адитивність за першим аргументом)

Нехай $F, G \in \text{comp}(R^n)$. Тоді опорна функція $c(F + G, \psi)$ суми $F + G$ дорівнює сумі двох опорних функцій $c(F, \psi)$ і $c(G, \psi)$, тобто

$$c(F + G, \psi) = c(F, \psi) + c(G, \psi).$$

Властивість 6

Нехай $F, G \in \text{comp}(R^n)$. Якщо виконується включення $G \subset F$, то для будь-якого вектора $\psi \in R^n$ справедлива нерівність

$$c(G, \psi) \leq c(F, \psi).$$

Властивість 7

Нехай $F \in \text{comp}(R^n)$. Тоді опорні функції множин $\text{co}F$ та F збігаються:

$$c(\text{co}F, \psi) = c(F, \psi).$$

Властивість 8

Нехай задані множина $F \in \text{comp}(R^n)$ та його опорна функція $c(F, \psi)$. Тоді опукла оболонка $\text{co}F$ множини F представляється у вигляді

$$\text{co}F = \bigcap_{\psi \in S} \{f \in R^n : (f, \psi) \leq c(F, \psi)\}.$$

Тут і далі S – поодинокі сфера із центром на початку координат.

Властивість 9

Нехай $F \in \text{comp}(R^n)$, $f \in R^n$. Якщо для будь-якого вектора $\psi \in S$ виконується нерівність

$$(f, \psi) \leq c(F, \psi),$$

то точка f належить опуклій оболонці $\text{co}F$ множини F .

Властивість 10

Нехай $F, G \in \text{comp}(R^n)$. Якщо для будь-якого вектора $\psi \in S$ виконується нерівність

$$c(G, \psi) \leq c(F, \psi),$$

то справедливе включення $G \subset \text{co}F$.

Властивість 11

Нехай $F, G \in \text{comp}(R^n)$. Якщо множини F і G рівні, то їх опорні функції збігаються. Навпаки, якщо їхні опорні функції збігаються, то $\text{co}G = \text{co}F$.

Властивість 12

Нехай $F, G \in \text{comp}(R^n)$. Якщо множини F і G перетинаються, тобто $F \cap G \neq \emptyset$, то для будь-якого вектора $\psi \in R^n$ виконується нерівність

$$c(F, \psi) + c(G, -\psi) \geq 0.$$

Навпаки, якщо співвідношення виконується для будь-якого вектора $\psi \in S$, то $\text{co}F \cap \text{co}G \neq \emptyset$

Властивість 13

Опорна функція для будь-яких двох множин $F, F_0 \in \text{comp}(R^n)$ і будь-яких двох векторів $\psi, \psi_0 \in R^n$ задовольняє нерівності

$$|c(F, \psi) - c(F_0, \psi_0)| \leq \|\psi_0\|h(F, F_0) + \|F_0\| \cdot \|\psi - \psi_0\| + 2h(F, F_0)\|\psi - \psi_0\|$$

Властивість 14

Нехай $F \in \text{comp}(R^n)$. Якщо точка f є внутрішньою точкою множини F , то для будь-якого вектора $\psi \in S$ виконується нерівність

$$(f, \psi) < c(F, \psi).$$

Навпаки, якщо співвідношення виконується для будь-якого вектора $\psi \in S$, то $f \in \text{int } coF$.

Властивість 15

Нехай задані дві множини $F, G \in \text{comp}(R^n)$. Тоді справедливе співвідношення

$$h(coF, coG) = \max_{\psi \in S} |c(F, \psi) - c(G, \psi)| \leq h(F, G). [3] [6] [7]$$

Опорні функції застосовуються в комп'ютерній графіці для побудови та рендерингу складних об'єктів, в оптимізації для розв'язання задач з обмеженнями, та в геометричному моделюванні для аналізу та апроксимації множин. Їх використання дозволяє знизити обчислювальну складність та покращити точність моделей, що є проблемою у багатьох прикладних задачах.

2.2 Алгоритм побудови опуклої оболонки множини за допомогою опорної функції

1. Задається фігура $F \subset R^3$, яка має центр та характерні для цієї фігури дані.
2. Генерується множина напрямків ψ_i , рівномірно розподілених на одиничній сфері.

3. Для кожного напрямку ψ_i знаходиться опорна точка x^* на фігурі, використовуючи опорну функцію $c(F, \psi_i)$. Далі будується опорна площина у вигляді рівняння:

$$x\psi_i^x + y\psi_i^y + z\psi_i^z = c(F, \psi_i),$$

де $(\psi_i^x, \psi_i^y, \psi_i^z)$ – компоненти спрямованого вектора, а $c(F, \psi_i)$ – значення опорної функції.

4. Щоб знайти точки перетину площин, потрібно визначити список сусідніх напрямків. Це робиться за допомогою алгоритму побудови опуклої оболонки ConvexHull, який знаходить трикутники, утворені напрямками ψ_i , і зберігає індекси трійок сусідніх площин.
5. Для кожної трійки сусідніх напрямків ψ_1, ψ_2, ψ_3 розв'язується система

рівнянь:

$$x\psi_1^x + y\psi_1^y + z\psi_1^z = c(F, \psi_1)$$

$$x\psi_2^x + y\psi_2^y + z\psi_2^z = c(F, \psi_2)$$

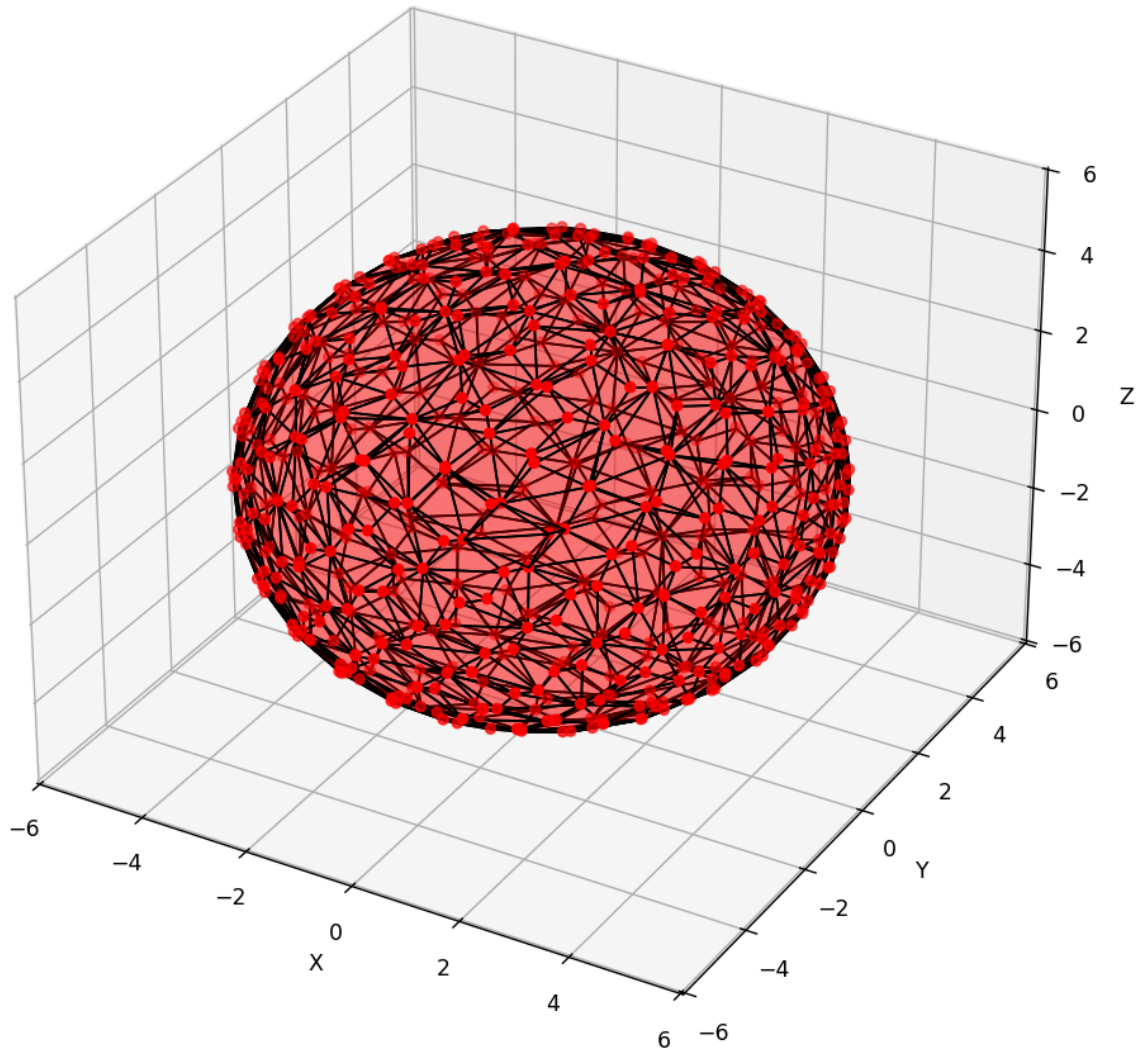
$$x\psi_3^x + y\psi_3^y + z\psi_3^z = c(F, \psi_3)$$

Отримуємо точку перетину трьох площин, тобто точку опуклої оболонки множини. Розглянувши такі трійки, ми можемо знайти всі точки опуклої оболонки.

6. Усі знайдені точки перетину зберігаються та передаються у алгоритм побудови опуклої оболонки. З використанням алгоритму ConvexHull будується багатогранник, що є зовнішньою апроксимацією фігури.
7. Для оцінки точності апроксимації використовується метрика Хаусдорфа. Вона визначається як максимальна мінімальна відстань між точками апроксимованої моделі та вихідної поверхні фігури. Це дозволяє оцінити похибку апроксимації.

Приклад 5 Побудова опуклої оболонки множини за допомогою опорної функції

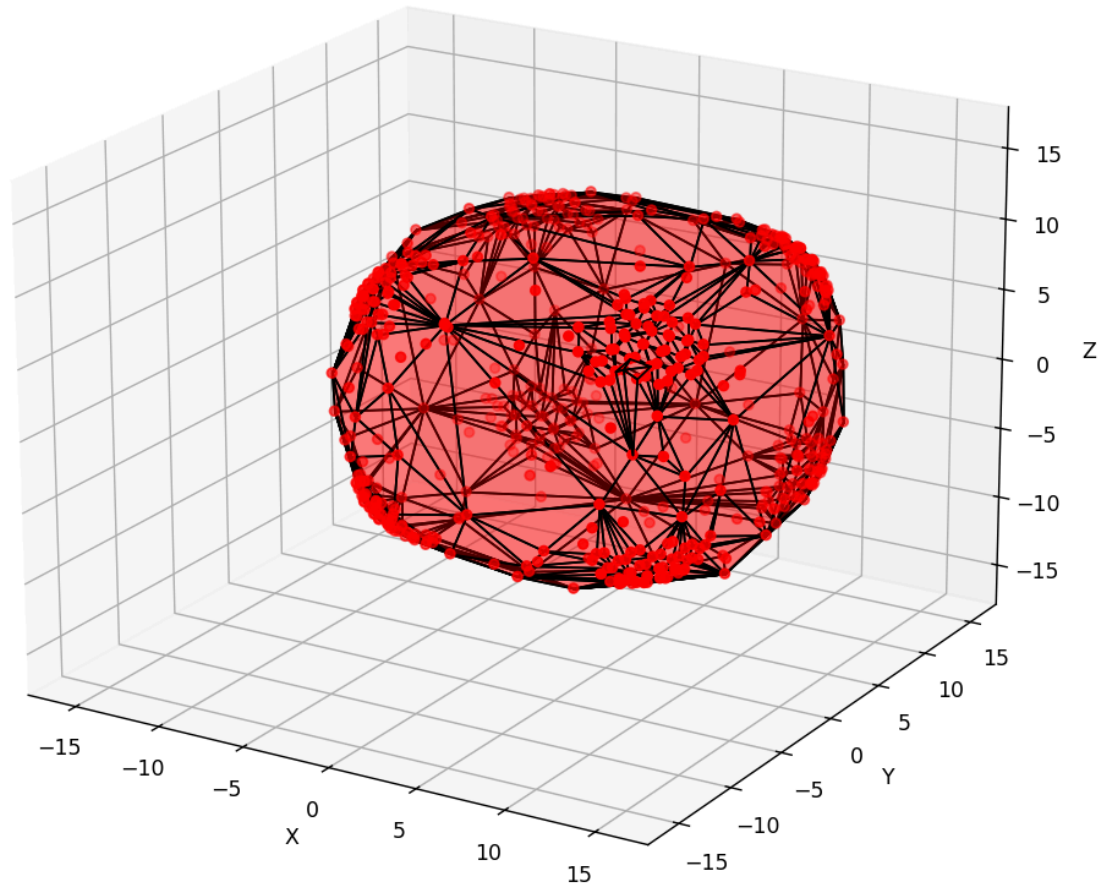
Треба побудувати опуклу оболонку множини $F = S_5(0, 0, 0)$, використовуючи метод перетину опорних гіперплощин.



(Рис.6: Приклад побудови опуклої оболонки множини $F = S_5(0, 0, 0)$)

Приклад 6 Побудова опуклої оболонки суми множин за допомогою опорної функції

Треба побудувати опуклу оболонку множини $F = K_{5,5,5}(3, 2, 1) + S_5(0, 0, 0)$ використовуючи метод перетину опорних гіперплощин.



(Рис.7: Приклад побудови опуклої оболонки множини
 $F = K_{5,5,5}(3, 2, 1) + S_5(0, 0, 0)$)

2.3 Функціонал Мінковського

Функціоналом Мінковського опуклої множини A , $0 \in \text{int}A$, називається функція

$$m(x, A) = \inf\{\lambda > 0: \frac{x}{\lambda} \in A\}.$$

Використовуючи функціонал Мінковського, множину $A \in \text{conv}(R^n)$ можна представити у вигляді

$$A = \{x \in R^n: m(x, A) \leq 1\}.$$

2.4 Алгоритм побудови опуклої оболонки множини за допомогою функціоналу Мінковського

1. Задається фігура $F \subset R^3$, яка має центр та характерні для цієї фігури дані.
2. Генерується множина напрямків ψ_i , рівномірно розподілених на одиничній сфері.
3. Використовується алгоритм обчислення функціоналу Мінковського. Він обчислює, як далеко можна відкласти вектор у кожному заданому напрямку, щоб він досяг межі опуклої оболонки фігури, але не виходив за неї.
 - a. Ми беремо множину напрямків φ рівномірно розподілених на одиничній сфері, якими хочемо досліджувати фігуру.
 - b. Для кожного напрямку φ з цього списку ми хочемо знайти максимальну довжину допустимого вектора r , коли вектор $r \cdot \varphi$ все ще належить опуклій множині оболонки.
 - c. Щоб перевірити, що вектор належить фігурі, ми використовуємо Властивість 9 опорної функції. Нехай $F \in \text{comp}(R^n)$, $f \in R^n$. Якщо для будь-якого вектора $\psi \in S$ виконується нерівність $(f, \psi) \leq c(F, \psi)$, то точка f належить опуклій оболонці $\text{co}F$ множини F .
 - d. Ми перебираємо всі можливі напрямки ψ , і у кожному їх:
 - i. Обчислюємо скалярний твір між поточним напрямком φ та напрямком ψ .
 - ii. Обчислюємо значення опорної функції у напрямку ψ .
 - iii. Якщо скалярний твір не нуль, обчислюємо значення $\frac{(\varphi, \psi)}{c(F, \psi)}$.
 - e. З усіх таких допустимих значень, ми вибираємо найбільше. Таким чином, ми гарантуємо, що вектор $r \cdot \varphi$ задовольняє всі умови і належить межі фігури в цьому напрямку.
4. Будується множина точок, які лежать на межі зовнішньої апроксимації множини F . Ці точки зберігаються та передаються у алгоритм побудови опуклої

оболонки. З використанням алгоритму ConvexHull будується багатогранник, що є зовнішньою апроксимацією фігури.

5. Для оцінки точності апроксимації використовується метрика Хаусдорфа. Вона визначається як максимальна мінімальна відстань між точками апроксимованої моделі та вихідної поверхні фігури. Це дозволяє оцінити похибку апроксимації.

2.5 Функція деформації

Функцією деформації опуклої множини $A \in \text{conv}(R^n)$, $0 \in \text{int}A$ називається функція

$$d(A, l) = \sup\{\lambda > 0: \lambda l \in A\}, l \in S.$$

Функція деформації співпадає з оберненим функціоналом Мінковського на одиничній сфері.

Використовуючи функцію деформації, множину $A \in \text{conv}(R^n)$ можна представити у вигляді

$$A = \bigcup_{l \in S} \{x \in R^n: x = \lambda l, \lambda \in [0, d(A, l)]\}.$$

2.6 Алгоритм побудови опуклої оболонки множини за допомогою функції деформації

1. Задається фігура $F \subset R^3$, яка має центр та характерні для цієї фігури дані.

2. Генерується множина напрямків ψ_i , рівномірно розподілених на одиничній сфері.

3. Використовуємо алгоритм знаходження функції деформації. Він обчислює, наскільки далеко можна протягнути вектор у кожному заданому напрямку, щоб він все ще залишався всередині фігури.

- a. Ми беремо множину напрямків φ рівномірно розподілених на одиничній сфері, якими хочемо досліджувати фігуру.
- b. Для кожного напрямку φ з цього списку ми хочемо знайти максимальну довжину λ , коли вектор $\lambda \cdot \varphi$ все ще належить фігурі.
- c. Щоб перевірити, що вектор належить фігурі, ми використовуємо Властивість 9 опорної функції. Нехай $F \in \text{comp}(R^n)$, $f \in R^n$. Якщо для будь-якого вектора $\psi \in S$ виконується нерівність $(f, \psi) \leq c(F, \psi)$, то точка f належить опуклій оболонці $\text{co}F$ множини F .
- d. Ми перебираємо всі можливі напрямки ψ , і у кожному їх:
 - i. Обчислюємо скалярний твір між поточним напрямком φ та напрямком ψ .
 - ii. Обчислюємо значення опорної функції у напрямку ψ .
 - iii. Якщо скалярний твір не нуль, ми ділимо значення опорної функції на цей скалярний твір - це дає максимально допустиму довжину λ у цьому напрямку φ , щоб не вийти за межі фігури.

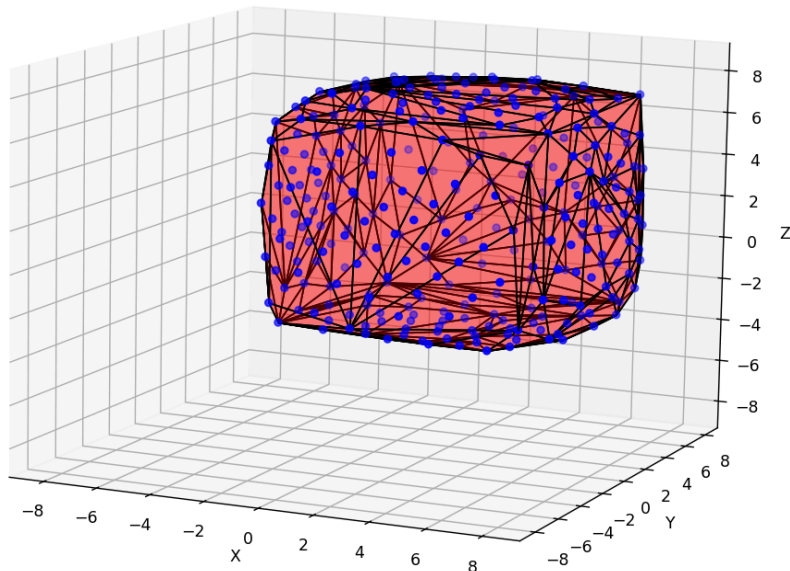
Тобто щоб $\lambda \cdot \varphi$ належало фігурі, потрібно:

$$(\lambda \cdot \varphi, \psi) \leq c(F, \psi) \Rightarrow \lambda \leq \frac{c(F, \psi)}{(\varphi, \psi)}$$

- e. З усіх таких допустимих λ , ми вибираємо найменшу. Це гарантує, що вектор $\lambda \cdot \varphi$ задовольняє всім умовам і не виходить за межі фігури в жодному напрямку.
4. Будується множина точок, які лежать на межі зовнішньої апроксимації множини F . Ці точки зберігаються та передаються у алгоритм побудови опуклої оболонки. З використанням алгоритму ConvexHull будується багатогранник, що є зовнішньою апроксимацією фігури.
 5. Для оцінки точності апроксимації використовується метрика Хаусдорфа. Вона визначається як максимальна мінімальна відстань між точками апроксимованої моделі та вихідної поверхні фігури. Це дозволяє оцінити похибку апроксимації.

Приклад 7 Функція деформації для квадрата

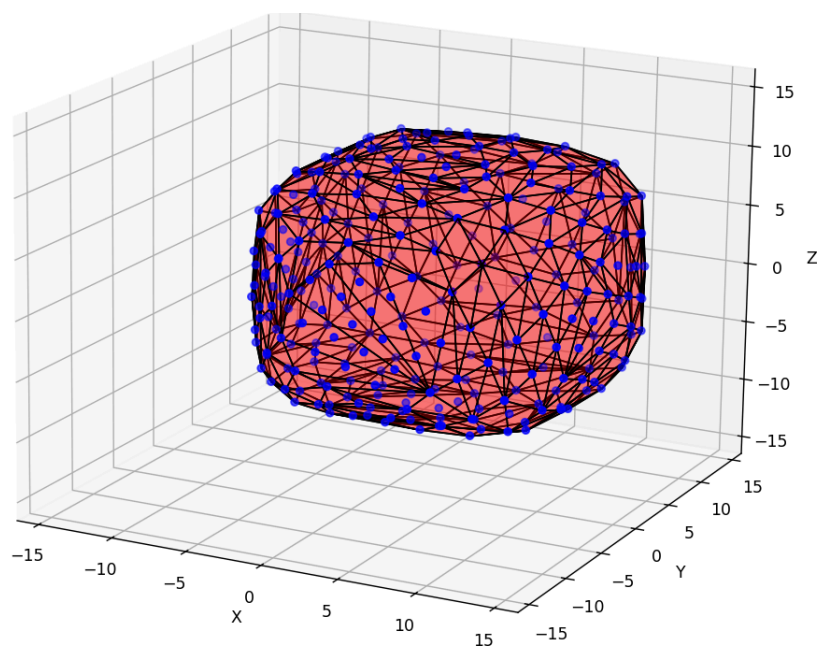
Треба побудувати опуклу оболонку множини $F = K_{5,5,5}(2, 2, 2)$, використовуючи функцію деформації.



(Рис.8: Приклад побудови опуклої оболонки множини $F = K_{5,5,5}(2, 2, 2)$)

Приклад 8 Функція деформації для суми множин

Треба побудувати опуклу оболонку множини $F = K_{5,5,5}(3, 2, 1) + S_5(0, 0, 0)$ використовуючи функцію деформації.



(Рис.9: Приклад побудови опуклої оболонки суми множин)

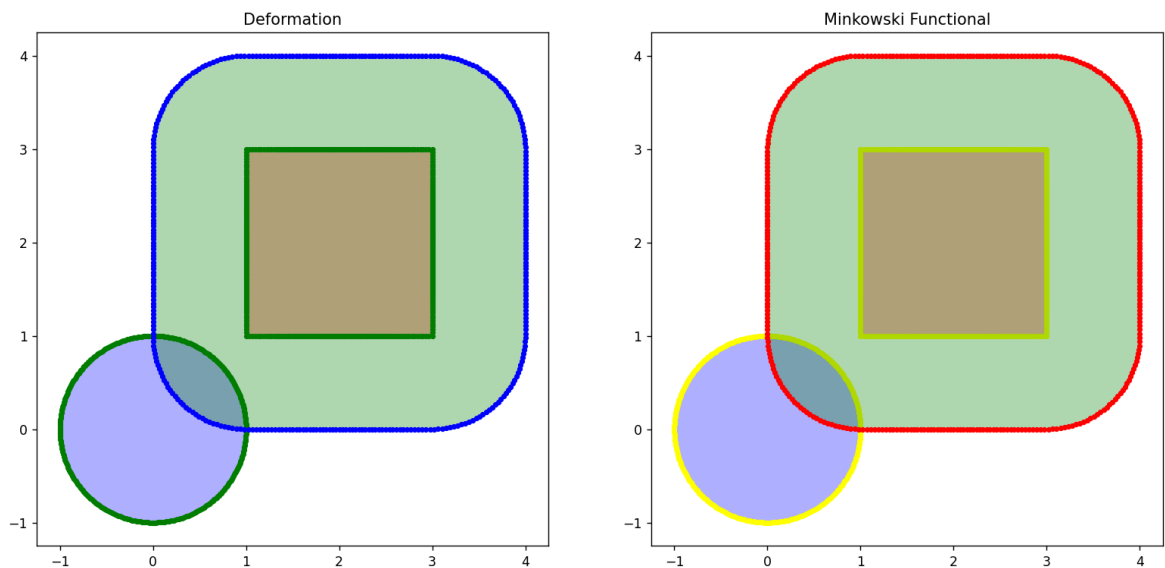
2.7 Порівняння функціоналу Мінковського та функції деформації для побудови опуклої оболонки множини в R^2

Приклад 9 Функціонал Мінковського та функція деформації для суми множин

Треба побудувати опуклу оболонку множини якщо вона задана як сума двох множин, за допомогою функціоналу Мінковського та функції деформації.

Для вирішення цієї задачі можна використати властивість 5 опорної функції $c(F + G, \psi) = c(F, \psi) + c(G, \psi)$.

Потрібно розглянути цю задачу для кола з центром у точці (0,0) та радіусом, який дорівнює 1, та квадратом з центром у точці (2,2) та стороною рівною 2.



(Рис.10: Приклад побудови опуклої оболонки множини

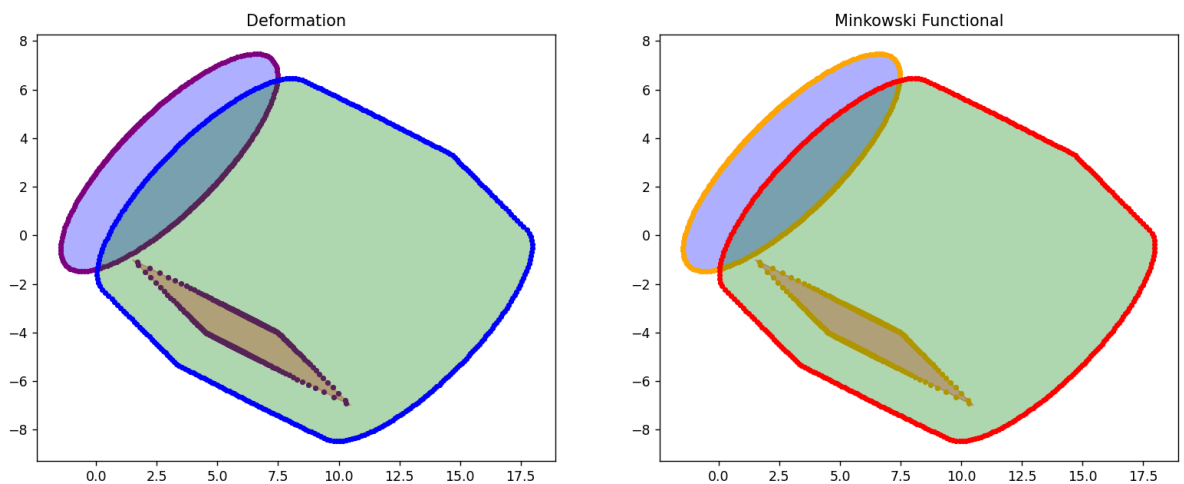
$$F = K_{2,2}(2, 2) + S_1(0, 0))$$

Приклад 10 Функціонал Мінковського та функція деформації для суми множин помножених на матрицю

Треба побудувати опуклу оболонку множини якщо вона задана як сума двох множин, кожна з яких помножена на матрицю, за допомогою функціоналу Мінковського та функції деформації.

Для вирішення цієї задачі потрібно також використати властивість 3 опорної функції $c(AF, \psi) = c(F, A^T \psi)$, де A – квадратна матриця n -го порядку, разом з властивістю 5 з попередньої задачі.

Потрібно розглянути цю задачу для кола з центром у точці $(1,1)$ та радіусом, який дорівнює 2 помноженого на матрицю $A1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, та квадрата з центром у точці $(2,2)$ та стороною рівною 3, помноженого на матрицю $A2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.



(Рис.11: Приклад побудови опуклої оболонки множини $F = A2 \cdot K_{2,2}(2, 2) + A1 \cdot S_1(0, 0)$)

Таблиця 1

	функціонал Мінковського	функції деформації
опукла оболонка множини приклад 9	0.3202 секунд	0.2924 секунд
опукла оболонка множини приклад 10	0.4817 секунд	0.4509 секунд

Функція деформації визначає, як далеко можна протягнути вектор у кожному напрямі, щоб залишитись у межах фігури. Вона працює швидше, особливо на простих фігурах, оскільки потребує лише пошуку мінімального

допустимого значення серед скалярних поділів. У той же час, функціонал Мінковського, теоретично, забезпечує більш точну геометричну апроксимацію, особливо при роботі зі складними фігурами або після застосування лінійних перетворень, але за рахунок повного перебору та нормалізації напрямків працює повільніше.

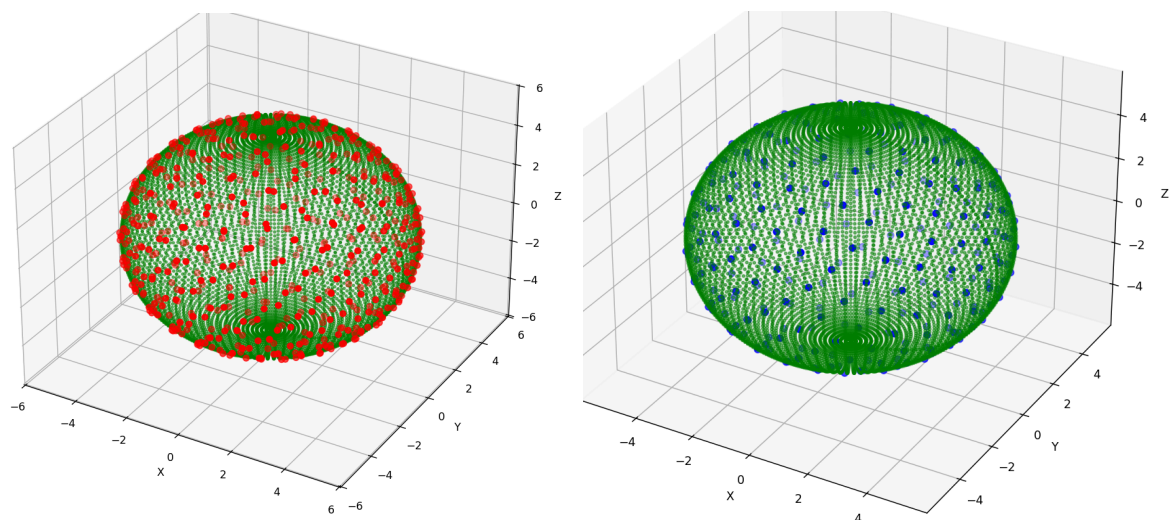
Функцію деформації доцільно застосовувати у завданнях, де пріоритетом є час виконання, тоді як функціонал Мінковського краще використовувати там, де важлива точність геометричного представлення множини.

2.8 Порівняння двох методів побудови опуклої оболонки множини в R^3

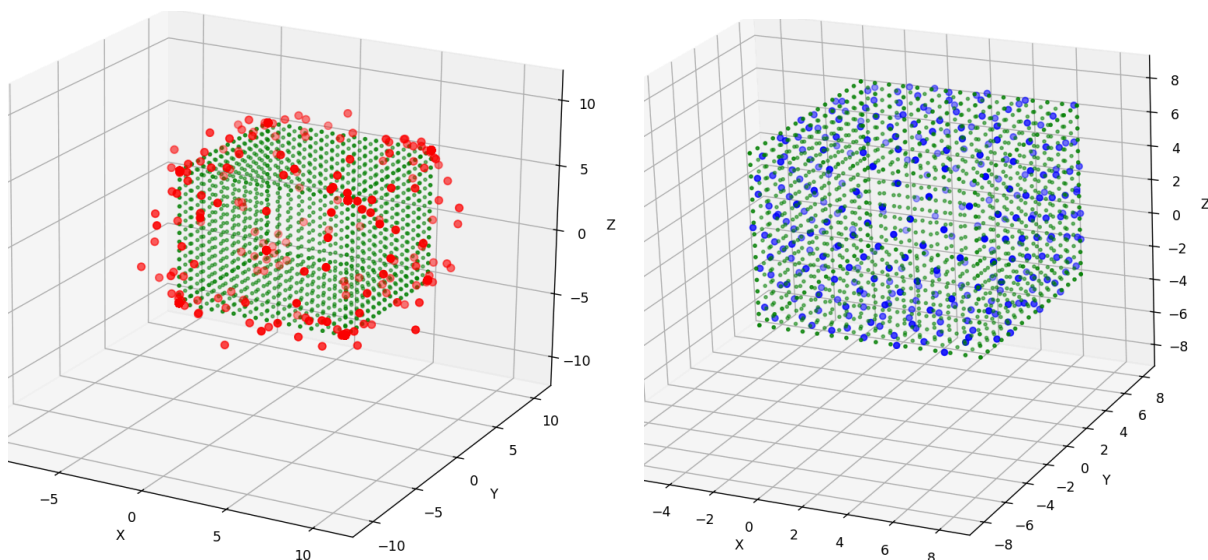
Приклад 11 Перетин опорних гіперплощин та функція деформації

На кожному з наведених зображень показано тривимірне початкове множинне тіло та результати побудови його зовнішньої опуклої оболонки за допомогою двох різних методів: перетину опорних гіперплощин (позначено червоним кольором) та функції деформації (позначено синім кольором).

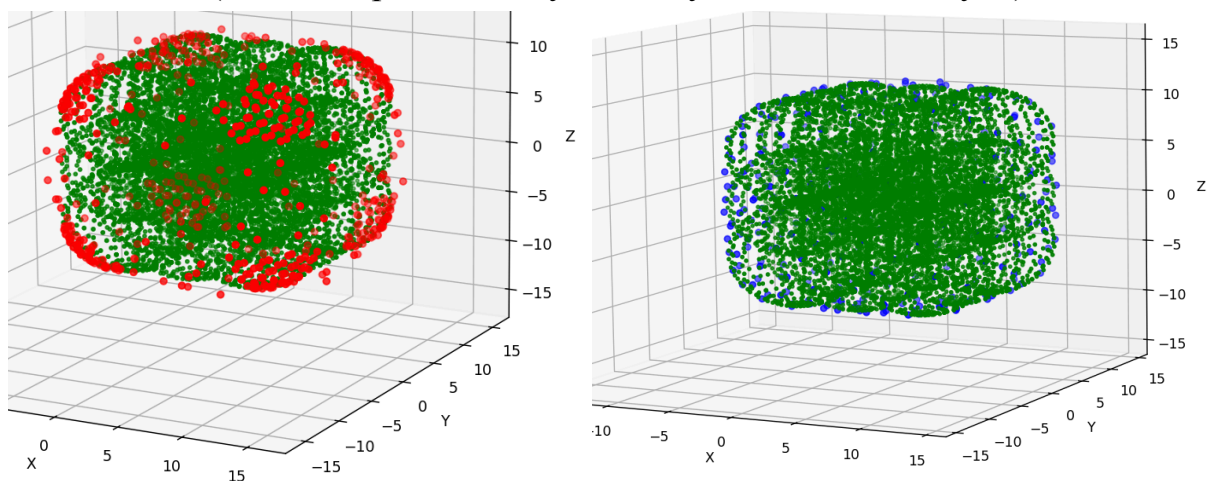
Обидві побудови ґрунтуються на однаковій множині напрямків, рівномірно розподілених на одиничній сфері.



(Рис.12: Приклад побудови опуклої оболонки сфери)



(Рис.13: Приклад побудови опуклої оболонки куба)



(Рис.14: Приклад побудови опуклої оболонки суми сфери та куба)

Для подальшого аналізу занесемо до таблиці отримані результати.

Таблиця 2

	100 векторів	300 векторів	500 векторів
радіус кола = 5 перетин опорних гіперплощин	3.0467 секунд 3623.46 KB (пік: 35250.37 KB) 1.1963	3.3739 секунд 3690.86 KB (пік: 97940.12 KB) 0.6800	3.6519 секунд 3758.58 KB (пік: 160630.05 KB) 0.5467
радіус кола = 5 функція деформації	3.2710 секунд 3434.59 KB (пік: 20019.90 KB)	4.6718 секунд 3449.44 KB (пік: 51322.53 KB)	7.5398 секунд 3467.40 KB (пік: 82628.03 KB)

	1.3462	0.7706	0.5881
куб, сторона = 10 перетин опорних гіперплощин	1.6287 секунд 2802.16 КВ (пік: 19391.73 КВ) 4.1137	1.7500 секунд 2870.24 КВ (пік: 17459.58 КВ) 3.8163	1.9072 секунд 2947.68 КВ (пік: 27215.25 КВ) 4.0164
куб, сторона = 10 функція деформації	2.6356 секунд 2942.59 КВ (пік: 11437.13 КВ) 1.9178	10.8127 секунд 3129.62 КВ (пік: 10530.73 КВ) 1.3759	26.9586 секунд 3141.35 КВ (пік: 15364.65 КВ) 0.8983

У кожній клітинці спочатку йде час витрачений на виконання кода (часова складність), далі використання пам'яті (просторова складність) та наприкінці помилка вирахована за допомогою метрики Хаусдорфа.

Для складних фігур, таких як куб та сума сфери та куба результати показали, що функція деформації забезпечує стабільнішу та точнішу апроксимацію. З її допомогою можна точніше описати геометрію фігури. Однак вона працює довше, особливо при зростанні кількості напрямків.

З іншого боку, метод перетину опорних гіперплощин працює швидше, однак його точність знижується при роботі зі складними множинами. Але у випадку зі сферою, метод дає кращі результати, і збільшення векторів не так сильно на нього впливає, як це відбувається з функцією деформації. Також з гладкими і симетричними фігурами, таких як кулі, еліпсоїди або інші опуклі тіла, де опорна точка в кожному напрямі фактично лежатиме на межі фігури в цьому напрямку, метод перетину опорних гіперплощин працює досить швидко та чітко.

3. РОЗДІЛ 3. Побудова множини досяжності в R^2 та R^3

3.1 Множина досяжності та її властивості

Розглянемо керований об'єкт, поведінка якого описується лінійною системою диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = Ax + u,$$

клас допустимих рівнянь, що складається з усіх функцій $u(t) \in U$, $U \in \Omega(E^n)$, інтегрованих по Лебегу на відрізку часу $I = [t_0, t_1]$, і номінальна множина $M_0 \in \Omega(E^n)$. Нехай $t \in [t_0, t_1]$.

Множиною досяжності в момент часу t назвемо множину всіх точок фазового простору E^n , в які можна перейти на відрізку часу $[t_0, t_1]$ з усіх можливих точок початкової множини M_0 за рішеннями рівняння $\dot{x} = Ax + u$ при всіх можливих допустимих напрямках $u(t)$. Таким чином, множина досяжності $X(t)$ складається з усіх точок виду $\{x(t)\}$, де $x(t)$ - Рішення рівняння $\dot{x} = Ax + u$ з початковою умовою $x(t_0) \in M_0$ і з допустимим управлінням $u(t)$. Множина досяжності залежить від матриці A , що обмежує множини U , множини початкових станів M_0 і відрізка часу $[t_0, t_1]$.

Властивості множини досяжності

Властивість 1

Множина Досяжності представляється у вигляді:

$$X(t) = e^{(t-t_0)A} M_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} U ds,$$

де $e^{(t-t_0)A} M_0$ - образ множини при лінійному перетворенні $e^{(t-t_0)A}$, а під знаком інтеграла стоїть багатозначне відображення, яке виходить для всіх $s \in [t_0, t_1]$ як образ множини U при лінійному перетворенні і $e^{(t-s)A}$.

Матриця $e^{(t-t_0)A}$ є фундаментальним рішенням однорідної лінійної системи $\dot{x}(t) = Ax(t)$ і відповідає за еволюцію стану системи у часі.

Вона визначає, як початковий стан $x(t_0)$ перетворюється на момент часу t під впливом динаміки, заданої матрицею A .

Властивість 2

Множина досяжності є не пустою компактною підмножиною фазового простору E^n , тобто $X(t) \in \Omega(E^n)$.

Властивість 3

Якщо початкова множина M_0 опукла, то множина досяжності $X(t)$ теж опукла.

Властивість 4

Опорна функція множини досяжності має вигляд

$$c(X(t), \psi) = c(M_0, e^{(t-t_0)A^*} \psi) + \int_{t_0}^t c(U, e^{(t-s)A^*} \psi) ds .$$

3.2 Побудова множини досяжності

Приклад 12 Побудова множини досяжності в R^3

Побудуємо множину досяжності керованого об'єкта, рух якого описується рівнянням

$$\dot{x} = Ax + u, \quad x(t_0) \in X^0, u \in U,$$

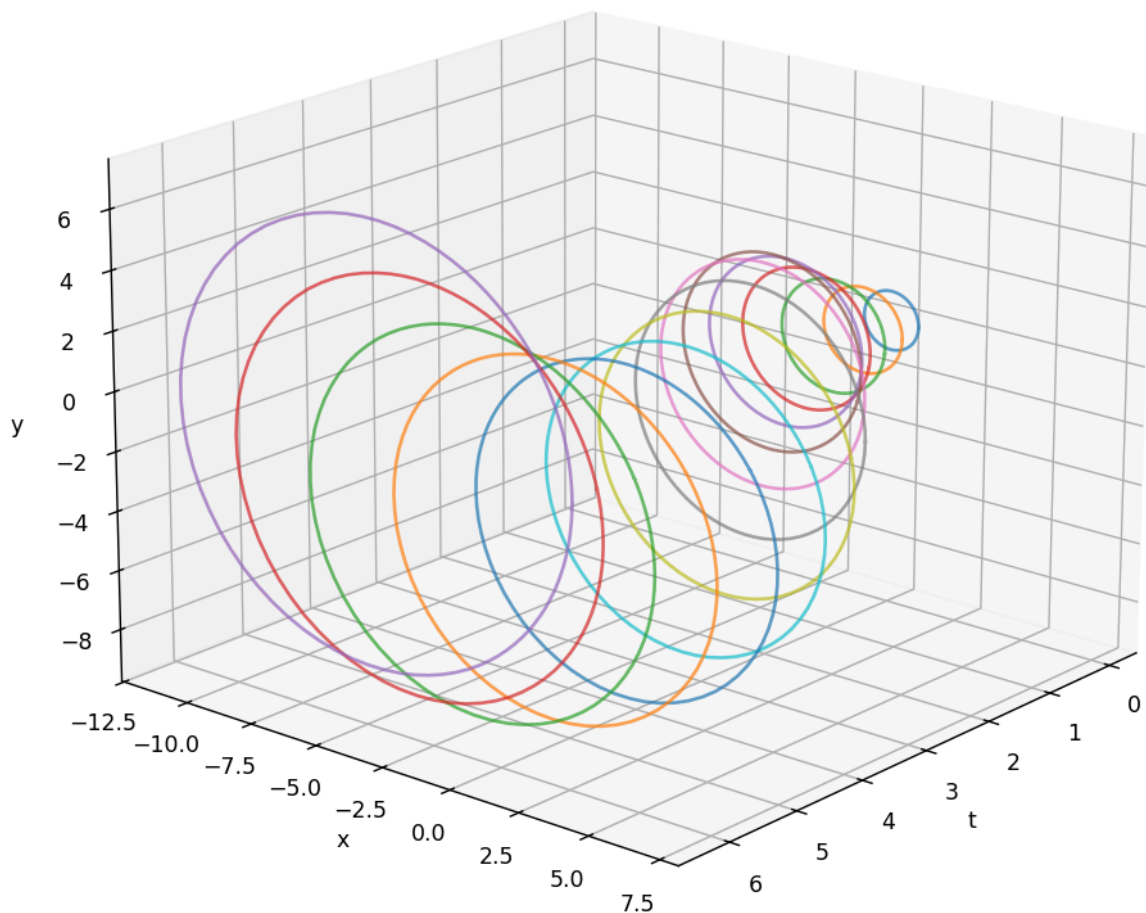
$$U \in \text{comp}(R^3), t \in [0, 2\pi].$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$X^0 = \{(x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 = 1\},$$

$$U = \{(u_1, u_2) | (u_1 - \sin(t/2))^2 + (u_2 - \cos(t/2))^2 = 1\}$$

Проміжок часу $t \in [0, 2\pi]$ розбиваємо на 15 кроків.



(Рис.15: Приклад побудови множини досяжності в R^2)

Приклад 13 Побудова множини досяжності в R^3

Побудуємо множину досяжності керованого об'єкта, рух якого описується рівнянням

$$\dot{x} = Ax + u, \quad x(t_0) \in X^0, u \in U,$$

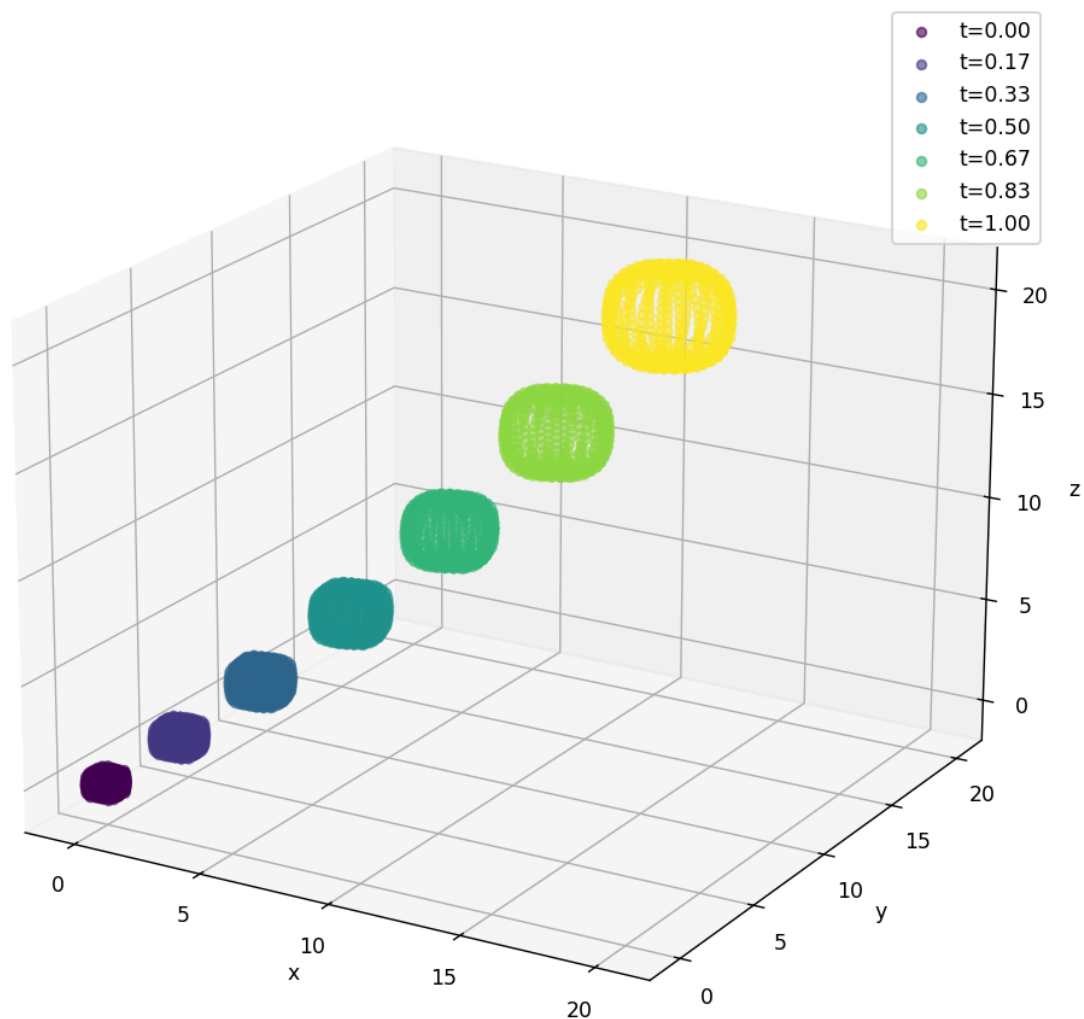
$$U \in \text{comp}(R^3), t \in [0, 1].$$

$$A = [[\cos(\pi/6), -\sin(\pi/6), 0], [\sin(\pi/6), \text{np.} \cos(\pi/6), 0], [0, 0, 1]],$$

$$X^0 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid |x_1| \leq 0.5, |x_2| \leq 0.5, |x_3| \leq 0.5\},$$

$$U = \{(u_1, u_2, u_3) \mid (u_1 - 10)^2 + (u_2 - 10)^2 + (u_3 - 10)^2 = 1\}$$

Проміжок часу $t \in [0, 1]$ розбиваємо на 7 кроків.



(Рис.16: Приклад побудови множини досяжності в R^3)

3.3 Дослідження поведінки двох керованих об'єктів за допомогою множини досяжності

Розглянемо задачу дослідження поведінки двох керованих об'єктів.

Поставлена задача таким чином:

1. Знайти момент часу, коли множина досяжності одного об'єкту вперше дотикається до множини досяжності другого, це свідчить про те, що з'являються спільні стани, які може досягти кожен із об'єктів.
2. Знайти момент часу, коли множина досяжності одного об'єкту повністю поглинає множину досяжності другого, це свідчить

про те, що всі стани, досяжні для другого об'єкту, також досяжні для першого.

Для цього, побудуємо множини досяжності двох керованих об'єктів, рух яких описується рівняннями

$$\dot{x} = Ax + u, \quad x(t_0) \in X^0, u \in U, \quad (3.3.1)$$

$$\dot{y} = By + v, \quad y(t_0) \in Y^0, v \in V, \quad (3.3.2)$$

$$U, V \in \text{comp}(R^2), t \in [0, 2\pi].$$

Передбачається, що обидва об'єкти починають рухатися одночасно.

Залежно від параметрів A, B, U, V, X^0, Y^0 можна отримати ситуації, коли множини досяжності обох об'єктів у моменти часу t , перетинаються або перекриваються, але початкові множини не перетинаються.

Приклад 14

Нехай рівняння (3.3.1) характеризується наступними вхідними параметрами:

$$A = [[0.2, 0], [0, 0.2]],$$

$$X^0 = \{(x_1, x_2) | x_1^2 + (x_2 - 5)^2 = 4\},$$

$$U = \{(u_1, u_2) | u_1^2 + u_2^2 = 1\}$$

Нехай рівняння (3.3.2) характеризується наступними вхідними параметрами:

$$B = [[0, -0.5], [0.5, 0]],$$

$$Y^0 = \{(y_1, y_2) | (y_1 + 25)^2 + y_2^2 = 1\},$$

$$V = \{(v_1, v_2) | (v_1 - 3)^2 + (v_2 - 8)^2 = 1\}$$

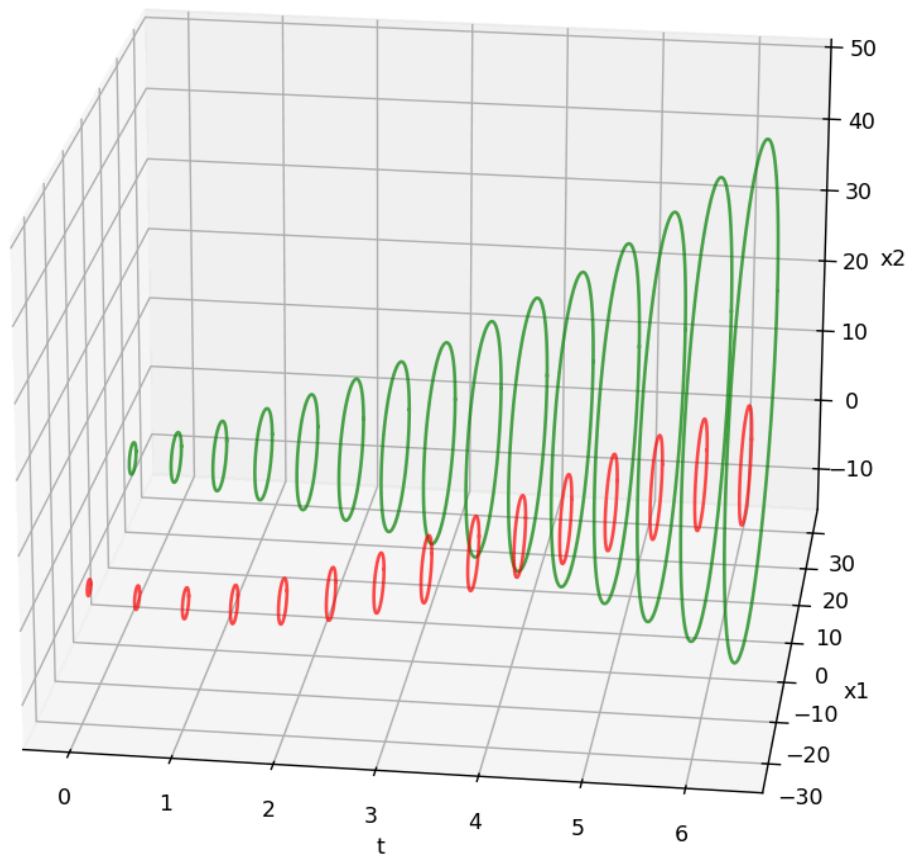
Проміжок часу $t \in [0, 2\pi]$ розбиваємо на 15 кроків.

Перший об'єкт позначений зеленим кольором, другий об'єкт - червоним.

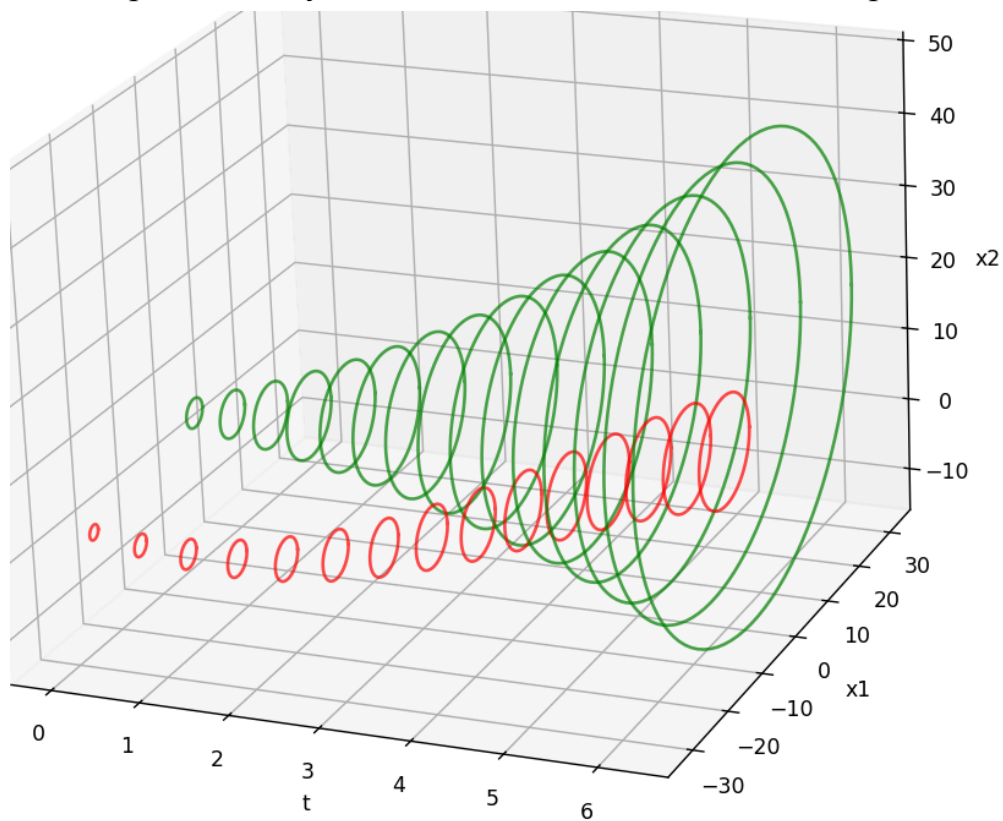
Отримали такі результати:

Перший дотик на момент часу: $t = 3.1416$

Перший об'єкт повністю поглинає другий у момент: $t = 4.4880$



(Рис.17: Приклад побудови множини досяжності двох керованих об'єктів в R^2)



(Рис.18: Приклад побудови множини досяжності двох керованих об'єктів в R^2)

Приклад 15

Нехай рівняння (3.3.1) характеризується наступними вхідними параметрами:

$$A = [[\cos(\pi/6), \sin(\pi/6), 0], [-\sin(\pi/6), \text{np.} \cos(\pi/6), 0], [0, 0, 1]],$$

$$X^0 = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1^2 + (x_2 - 9)^2 + (x_3 - 1.5)^2 = 1\},$$

$$U = \{(u_1, u_2, u_3) | (u_1 - 10)^2 + (u_2 - 10)^2 + (u_3 - 10)^2 = 1\}$$

Нехай рівняння (3.3.2) характеризується наступними вхідними параметрами:

$$B = [[\cos(\pi/6), -\sin(\pi/6), 0], [\sin(\pi/6), \text{np.} \cos(\pi/6), 0], [0, 0, 1]],$$

$$Y^0 = \{(x_1, x_2, x_3) | (x_1 - 6)^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} +$$

$$\{(x_1, x_2, x_3) | |x_1| \leq 0.5, |x_2| \leq 0.5, |x_3| \leq 0.5\}$$

$$V = \{(v_1, v_2, v_3) | (v_1 - 13)^2 + (v_2 - 13)^2 + (v_3 - 13)^2 = 1\}$$

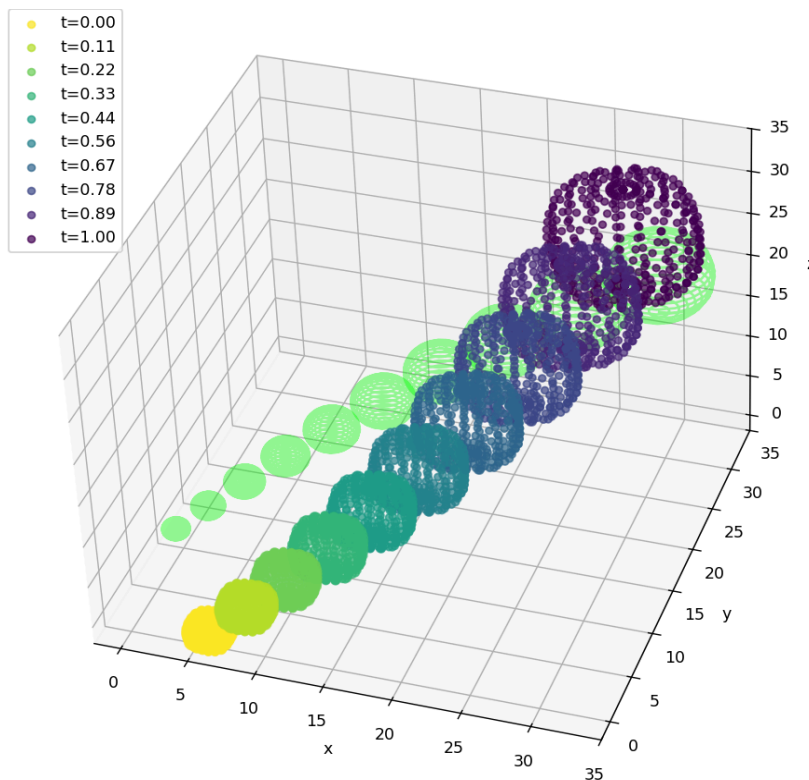
Проміжок часу $t \in [0, 1]$ розбиваємо на 10 кроків.

Перший об'єкт позначена зеленим, другий об'єкт - різними кольорами.

Отримали такі результати:

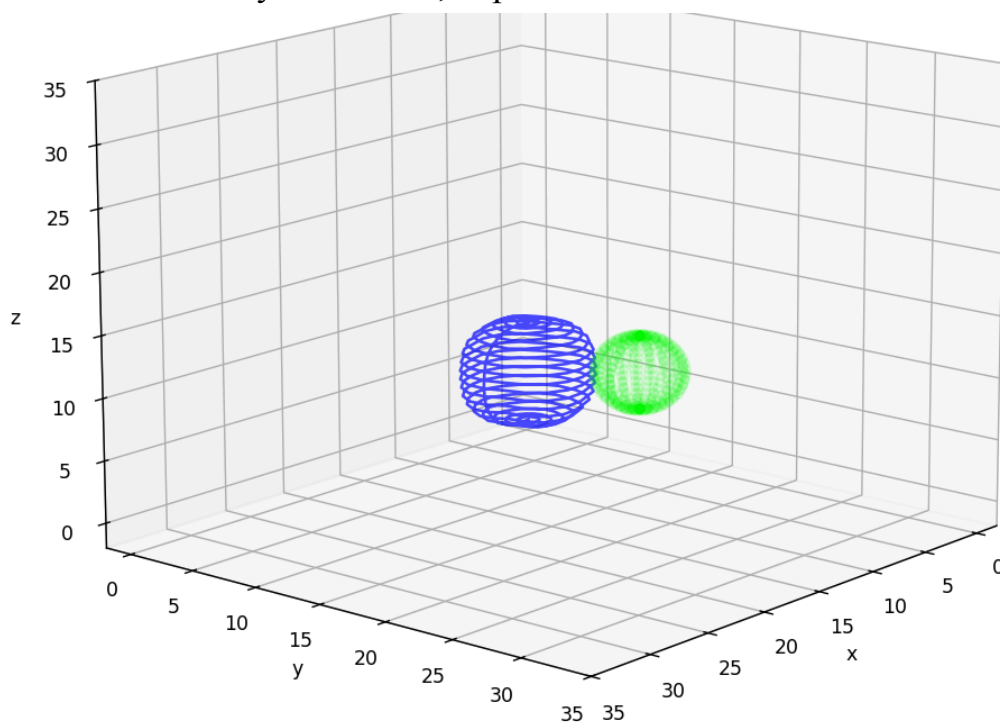
Перший дотик на момент часу: $t = 0.6667$

Другий об'єкт повністю поглинає перший у момент: $t = 0.8889$



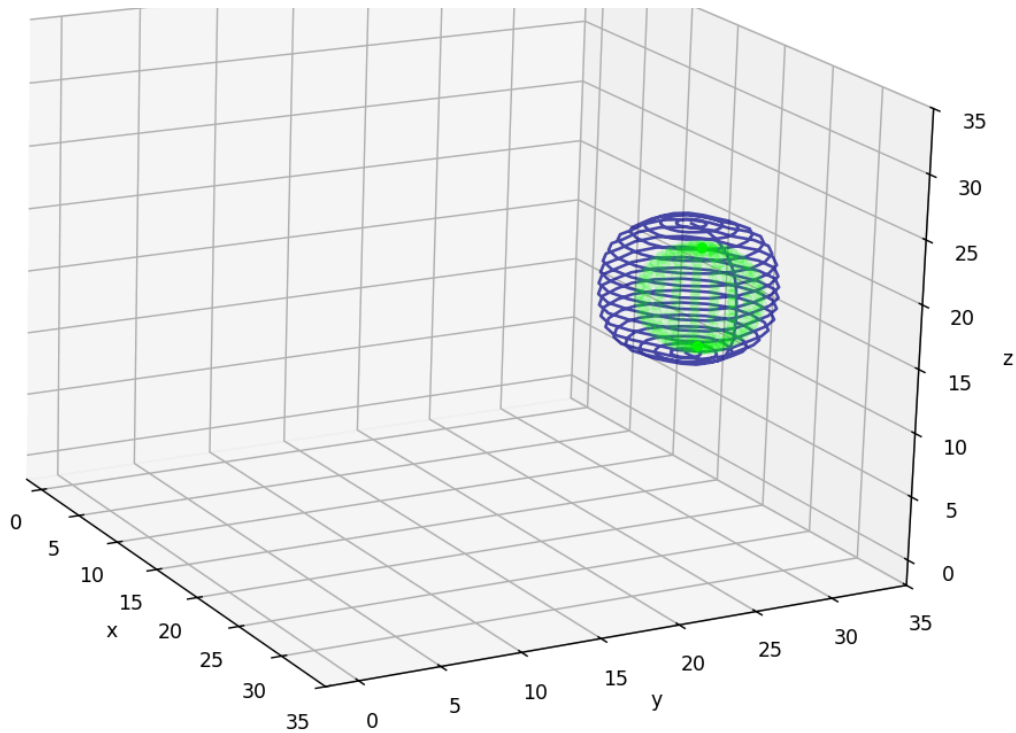
(Рис.19: Приклад побудови множини досяжності двох керованих об'єктів в R^3)

момент часу $t = 0.6667$, перший дотик



(Рис.20: Приклад побудови множини досяжності двох керованих об'єктів в R^3)

момент часу $t = 0.8889$, множина В повністю поглинає А



(Рис.21: Приклад побудови множини досяжності двох керованих об'єктів в R^3)

ВИСНОВОК

Отже, було досліджено та реалізовано алгоритм для обчислення суми двох множин у двовимірному та тривимірному просторах, алгоритм для обчислення відстані по Хаусдорфу між множинами, досліджено властивості опорних функцій та їх було застосовано для будування зовнішніх апроксимацій множин.

Також було розроблено методи для побудови суми двох множин, відстані по Хаусдорфу, зовнішньої апроксимації за допомогою опорних функцій трьома методами в R^2 : перетину опорних гіперплощин, функції деформації, функціонал Мінковського; та двома методами в R^3 : перетину опорних гіперплощин, функції деформації. Була досліджена поведінка двох керованих об'єктів за допомогою множини досяжності, та знайдено момент часу, коли множина досяжності одного об'єкту вперше дотикається до множини досяжності другого та момент коли множина досяжності одного об'єкту повністю поглинає множину досяжності другого. Також оцінено точність та ефективність алгоритмів для порівняння геометричних форм та структур.

Таким чином, чисельні методи, що розуміються в цій роботі, видаються універсальними та ефективними для побудови множини досяжності в просторі R^3 . Завдяки своїй здатності апроксимувати складні геометричні множини, ці методи дозволяють досліджувати властивості керованих систем, візуалізувати досяжні області та аналізувати поведінку об'єктів у тривимірному просторі. Вони знають широке застосування в комп'ютерній графіці, геометричному моделюванні, автоматичному управлінні та аналізі просторових даних. Подальше вдосконалення комп'ютерних технологій тільки підвищить значущість цих методів, роблячи їх незамінними інструментами для наукових та прикладних досліджень.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] “Чисельні методи” Задачин В. М. Конюшенко І. р. Харків-2014 -13с.
- [2] “ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН” Решетилова В.В. Харків–2012
- [3] “Конфліктно-керовані системи” Ігнатенко Олексій Петрович. 2018
- [4] “ЗАСТОСУВАННЯ МЕТРИКИ ХАУСДОРФА ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ НЕТИПОВИХ КАРДІОЦИКЛІВ У ТРИВИМІРНОМУ ФАЗОВОМУ ПРОСТОРІ КООРДИНАТ ВЕКТОРКАРДІОГРАМИ” В. В. Вишневецький, Т. М. Романенко. Інститут проблем математичних машин і систем НАН України
- [5] “Детерміністичні фрактали” Т.О.Банах, Р.В.Ардан,Т.М.Радул. Львів-1997
- [6] Благодатських В.І. “Лінійна теорія раціонального управління.” - М.: Вид-во МДУ, 1978. – 94 с
- [7] Благодатських В.І. “Введення в оптимальне керування.” - М.: Вищ.шк., 2001. – 239 с.

Додаток

<https://github.com/BohdanR0man/Diploma/tree/develop>