Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Асимптотичні зображення правильно змінних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку з правильно змінними нелінійностями »

«Asymptotic representations of regular varying solutions to nonlinear second order differential equations with regularly varying nonlinearities »

Виконала: здобувачка денної форми навчання
спеціальності 111 Математика
Освітня програма «Математика»
Сульжук Ганна Ігорівна

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Білозерова М.О. ________
Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. Шарай Н.В.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від ______________ 2025 р.

Завідувач кафедри

__________ ____________________

Захищено на засіданні ЕК № ______________

Протокол № ____ від ______________ 2025 р.

Оцінка __________ / __________ / __________

Голова ЕК

__________ _________________________

Одеса — 2025 р.

Зміст

ВСТУП **3**

1 РОЗДІЛ **5**

1.1 Асимптотична поведінка правильно змінних розв'язків лінійних диференціальних рівнянь другого порядку 5

2 РОЗДІЛ **19**

3 Приклад **39**

ВИСНОВКИ **46**

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ **47**

ВСТУП

Останнім часом особливо актуальним завданням якісної теорії диференціальних рівнянь стало вивчення суттєво нелінійних диференціальних рівнянь. Серед робіт у цій галузі, що стосуються встановлення асимптотичних представлень розв'язків, значну частину складають дослідження рівнянь зі степеневими нелінійностями. Одним із важливих напрямів таких досліджень стало вивчення відомого рівняння Емдена–Фаулера, окремі випадки якого застосовувалися в ядерній фізиці, газовій динаміці, механіці рідини, релятивістській механіці та інших галузях природничих наук. Асимптотична поведінка розв'язків цього рівняння детально описана в монографіях Р. Беллмана [1] та Дж. Сансоне [2].

З роботи Ф. В. Аткінсона [3] розпочалося якісне дослідження узагальненого рівняння Емдена–Фаулера:

$$y'' = p(t)|y|^{\sigma} signy, \tag{0}$$

де $\sigma \in (0; +\infty)$, а $p : [0; +\infty) \to R$ — локально інтегровна функція.

У згаданій роботі було отримано ознаку коливальності всіх правильних розв'язків цього рівняння при $p(t) \leq 0$ та $\sigma > 1$. Методи дослідження асимптотичної поведінки монотонних розв'язків цього рівняння були розроблені у працях І.Т. Кігурадзе , Т.А. Чантурії [4-8], А.В. Костіна, [9-11] В.М. Євтухова [12-29] та багатьох інших авторів, причому ці дослідження охоплювали й випадки $\sigma < 1$.

Теорія, розроблена під час дослідження узагальненого рівняння Емдена–Фаулера, надалі отримала широке продовження. Для рівнянь типу Емдена–Фаулера вищих порядків, а також для рівнянь загального вигляду n-го порядку були встановлені тонкі ознаки коливальності розв'язків, доведено загальні теореми про класифікацію рівнянь за осциляційними властивостями їхніх розв'язків, знайдено умови існування або відсутності у нелінійних рівняннях сингулярних, правильних, коливальних і монотонних розв'язків різних типів. Також були отримані оцінки правильних розв'язків в околі нескінченності, а також наведено асимптотичні формули для розв'язків досить широкого класу нелінійних рівнянь. Особливо варто відзначити результати, викладені в монографії І.Т. Кігурадзе та Т.А. Чантурії, а також у працях А.В. Костіна і В.М. Євтухова.

Відомо багато практичних застосувань узагальненого рівняння Емдена–Фаулера. Проте у більшості випадків наявність степеневої нелінійності була наслідком розгляду ідеалізованої моделі певного реального процесу. З розвитком обчислювальної техніки з'явилася можливість будувати точніші математичні моделі. У зв'язку з цим зріс інтерес до рівнянь з нелінійностями, відмінними від степеневих. Дослідженню асимптотичної поведінки розв'язків таких рівнянь присвячено велику кількість робіт, у яких, однак, вдавалося отримати лише двосторонні асимптотичні оцінки розв'язків.

Згодом було розроблено методику встановлення асимптотики монотонних розв'язків диференціального рівняння:

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi(y),$$

де $\varphi(y)$ — функція, яка в певному сенсі близька до степеневої. Також були розглянуті питання існування таких розв'язків. Природним узагальненням рівнянь такого типу є рівняння, що часто з'являються на практиці й містять у правій частині також похідну невідомої функції. Саме таким рівнянням присвячено цю роботу.

1 РОЗДІЛ

1.1 Асимптотична поведінка правильно змінних розв'язків лінійних диференціальних рівнянь другого порядку

Спочатку розглянемо деякі властивості повільно змінних функцій, які знадобляться нам пізніше.

Властивість 1. *Якщо L повільно змінюється на ∞, тоді для $x \to \infty$:*
1) якщо $\alpha > -1$, то

$$\int_a^x t^\alpha L(t)dt \sim (\alpha+1)^{-1}x^{\alpha+1}L(x),$$

2) якщо $\alpha < -1$, то

$$\int_a^x t^\alpha L(t)dt \sim (-\alpha-1)^{-1}x^{\alpha+1}L(x),$$

3) якщо $\alpha = -1$, то

$$l(x) = \int_a^x t^{-1}L(t)dt$$

є новою повільно змінною функцією і такою, що $\frac{L(x)}{l(x)} \to 0$.

Властивість 2. *Для кожного $\varepsilon > 0$ та $x \to \infty$:*

$$x^\varepsilon L(x) \to \infty, \quad x^{-\varepsilon}L(x) \to \infty.$$

Властивість 3. *Якщо при $x \to \infty$ функція $g(x)$ поводиться як правильно змінна функція з порядком α, тобто $g(x) \sim x^\alpha L(x)$, при $x \to \infty$, тоді $g(x)$ є правильно змінною функцією з порядком α, тобто $g(x) = x^\alpha L^*(x)$, де загалом $L^*(x) \neq L(x)$, але $L^*(x) \sim L(x)$. Це випливає з того, що $g(x)x^{-\alpha} \sim L(x)$*
.

Теорема 1.1. *Нехай*

$$F(x) := \int_x^\infty f(t)\,dt. \tag{1.1}$$

Якщо існує додатна неперервна функція p, яка прямує до нуля при $x \to \infty$ і така, що для $x \geq x_0$

$$|F(x)| \leq p(x), \tag{1.2}$$

$$\int_x^\infty p^2(t)\,dt \leq c\,p(x), \tag{1.3}$$

де $0 < c < \dfrac{1}{4}$, тоді рівняння $y'' + f(x)y = 0$ є неосциляторним і має розв'язок виду

$$y(x) = \exp\left\{\int_a^x (F(t) - Z(t))\ dt\right\}. \tag{1.4}$$

Тут $Z(t)$ є розв'язком інтегрального рівняння

$$Z(x) = -\int_x^\infty (Z(t) - F(t))^2\,dt \tag{1.5}$$

і задовольняє умову

$$Z(x) = O(p(x)) \quad \text{при } x \to \infty. \tag{1.6}$$

Доведення. Використаємо метод послідовних наближень і спочатку покажемо, що наведене інтегральне рівняння має розв'язок із бажаною властивістю.

Означимо для $x \geq x_0$ послідовність $\{Z_n(x)\}$ як:

$$Z_0(x) := 0, \quad Z_n(x) := -\int_x^\infty \left(F(t) - Z_{n-1}(t)\right)^2 dt, \quad n \geq 1. \tag{1.7}$$

Спершу доведемо, що для $x \geq x_0$ виконується нерівність:

$$|Z_n(x)| \leq 4c\,p(x). \tag{1.8}$$

Це очевидно для $n = 1$, оскільки, використовуючи умови (1.2) та (1.3), маємо:

$$|Z_1(x)| \leq \int_x^\infty F^2(t)\,dt \leq \int_x^\infty p^2(t)\,dt \leq c\,p(x).$$

Припустимо, що (1.8) виконується для деякого n.
Тоді, використовуючи (1.2)–(1.3), маємо:

$$|Z_{n+1}(x)| \leq \int_x^\infty (|Z_n(t)| + |F(t)|)^2 dt \leq 4c\,p(x).$$

Отже, за принципом математичної індукції, нерівність (1.8) виконується для всіх $n \geq 0$. Також інтеграл у (1.7) збігається, і послідовність є добре визначеною.

Далі доведемо, що $\{Z_n(x)\}$ збігається рівномірно при $x \geq x_0$ до неперервної функції. Неперервність випливає з означення послідовності та неперервності $F(x)$. Щоб довести збіжність, покажемо, що для $n \geq 0$ та $x \geq x_0$ виконується:

$$|Z_{n+1}(x) - Z_n(x)| \leq \frac{(4c)^{n+1}}{4} p(x). \tag{1.9}$$

Із (1.2), (1.3) та означення $Z_0(x)$ ця нерівність виконується для $n = 0$. Припустимо, що вона виконується для деякого $n - 1$. Тоді:

$$|Z_{n+1}(x) - Z_n(x)| \leq \int_x^\infty |Z_n(t) - Z_{n-1}(t)|\,(|Z_n(t)| + |Z_{n-1}(t)| + 2|F(t)|)\,dt.$$

І використовуючи (1.32), (1.3), (1.8) та припущення індукції (1.9) для $n - 1$, маємо:

$$|Z_{n+1}(x) - Z_n(x)| \leq \int_x^\infty \frac{(4c)^n}{4} (8c + 2) p^2(t)\,dt \leq \frac{(4c)^{n+1}}{4} p(x),$$

що доводить (1.9). Отже:

$$Z_{n+1}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} (Z_{\nu+1}(x) - Z_\nu(x))\,. \tag{1.10}$$

З оцінки (1.9) та оскільки $4c < 1$, випливає, що $\{Z_n(x)\}$ збігається рівномірно на $[x_0, \infty)$ до неперервної функції:

$$Z(x) = \lim_{n\to\infty} Z_n(x).$$

Крім того, оцінка (1.6) випливає безпосередньо з (1.8). Покажемо, що $Z(x)$ є розв'язком інтегрального рівняння (1.5).

Оскільки, за (1.2) та (1.8),

$$(Z(x) - F(x))^2 \leq (4c+1)^2 p^2(x),$$

а інтеграл від $p^2(x)$ є збіжним за умовою (1.3), то, застосовуючи теорему про збіжність Лебега, отримуємо:

$$\lim_{n\to\infty} \int_x^\infty (Z_n(t) - F(t))^2 dt = \int_x^\infty (Z(t) - F(t))^2 dt.$$

Отже, із формули (1.7) випливає, що $Z(x)$ є розв'язком рівняння (1.5).

Нарешті, щоб побудувати розв'язок рівняння $y'' + f(x)y = 0$, введемо функцію $s(x)$, що задовольняє:

$$\frac{s'(x)}{s(x)} = F(x) - Z(x). \tag{1.11}$$

Простим обчисленням бачимо, що $s(x)$ задовольняє диференціальне рівняння:

$$s''(x) + \big(Z'(x) - (Z(x) - F(x))^2 - F'(x)\big)\, s(x) = 0.$$

Оскільки $Z(x)$ — розв'язок рівняння (1.5), а згідно з (1.1) маємо $F'(x) = -f(x)$, то

$$s''(x) + f(x)s(x) = 0,$$

тобто $s(x)$ є розв'язком рівняння $y'' + f(x)y = 0$. Інтегруючи обидві сторони рівняння (1.11) від a до x, отримаємо розв'язок рівняння $y'' + f(x)y = 0$ у формі (1.4):

$$y(x) = \exp\left\{\int_a^x (F(t) - Z(t))\,dt\right\},$$

що явно є неосциляторним.

Теорема 1.2. *Нехай L_i, $i = 1{,}2$, — це дві нормалізовані повільно змінні функції. Тоді існують дві лінійно незалежні розв'язки рівняння $y''+f(x)y = 0$ вигляду*

$$y_1(x) = L_1(x), \quad y_2(x) = xL_2(x)$$

тоді і лише тоді, коли при $x \to \infty$

$$x\int_x^\infty f(t)\,dt \to 0. \tag{1.12}$$

Крім того, $L_2(x) \sim L_1^{-1}(x)$ при $x \to \infty$.

Доведення.

Достатність. Умова (1.12) означає існування додатної функції $c(x)$, що спадає до нуля при $x \to \infty$, такої, що для $F(x)$, визначеної у (1.1), виконується:

$$|F(x)| \le \frac{c(x)}{x}.$$

Покладемо у (1.2): $p(x) = \frac{c(x)}{x}$. Оскільки $c(x)$ — додатна й спадна до нуля, то умова (1.3) також виконується.

Застосування теореми 1.1 забезпечує існування розв'язку вигляду (1.4), який можна записати як:

$$y_1(x) = \exp\left\{\int_a^x \frac{t(F(t) - Z(t))}{t}\,dt\right\}.$$

Аналіз оцінки (1.6) та вибір $p(x)$ дають $t(F(t) - Z(t)) = o(1)$, тому $y_1(x)$ — нормалізований повільно змінний розв'язок.

Необхідність. Припустимо, що $y_1(x) = L_1(x)$, де L_1 — повільно змінна та нормалізована функція. Тоді $y_1(x)$ не має нулів (оскільки повільно змінні функції мають сталий знак). Отже, тотожність $\frac{y_1''}{y_1} = \left(\frac{y_1'}{y_1}\right)' + \left(\frac{y_1'}{y_1}\right)^2$ має сенс, і рівняння $y'' + f(x)y = 0$ набирає вигляду:

$$\left(\frac{L_1'}{L_1}\right)' + \left(\frac{L_1'}{L_1}\right)^2 + f(x) = 0.$$

Оскільки L_1 нормалізована, то $x\frac{L_1'}{L_1} \to 0$ при $x \to \infty$, і після інтегрування на проміжку (x, ∞) та множення на x, маємо:

$$-x\frac{L_1'(x)}{L_1(x)} + x\int_x^\infty \left(\frac{tL_1'}{L_1}\right)^2 t^{-2}\,dt + x\int_x^\infty f(t)\,dt = 0.$$

Оскільки $x\frac{L_1'}{L_1} \to 0$, то перший доданок прямує до нуля, другий інтеграл збігається, отже, і умова (1.12) виконується.

Теорема 1.3. *Нехай $-\infty < c < \frac{1}{4}$, $c \neq 0$ і нехай $\alpha_1 < \alpha_2$ — два корені рівняння*

$$\alpha^2 - \alpha + c = 0. \tag{1.13}$$

Нехай також $L_i, i = 1{,}2$ — дві нормалізовані повільно змінні функції. Тоді існують дві лінійно незалежні правильно змінні розв'язки вигляду

$$y_i(x) = x^{\alpha_i} L_i(x), \quad i = 1, 2,$$

тоді і лише тоді, коли при $x \to \infty$

$$x\int_x^\infty f(t)\,dt \to c. \tag{1.14}$$

Крім того, має місце співвідношення

$$L_2(x) \sim \{(1 - 2\alpha_1)L_1(x)\}^{-1} \quad \text{при } x \to \infty.$$

Доведення.

Достатність. Визначимо

$$\phi(x) := x \int_x^\infty f(t)\,dt - c, \tag{1.15}$$

тоді, згідно з (1.14),

$$\phi(x) \to 0, \quad \text{при } x \to \infty. \tag{1.16}$$

Прямим обчисленням можна показати, що функція

$$y_1(x) = \exp\left\{\int_a^x \left(\frac{\alpha_1}{t} + \frac{\phi(t)}{t} + v(t)\right) dt\right\} \tag{1.17}$$

є (неосциляторним) розв'язком рівняння $y'' + f(x)y = 0$, якщо $v(x)$ — це розв'язок рівняння Ріккаті, визначений для $x \geq x_0$:

$$v'(x) = -\left\{g(x)v(x) + h(x) + v^2(x)\right\}, \tag{1.18}$$

де

$$g(x) := \frac{2(\alpha_1 + \phi(x))}{x}, \quad h(x) := \frac{2\alpha_1\phi(x) + \phi^2(x)}{x^2}. \tag{1.19}$$

Покажемо, що $v(x)$ справді існує та задовольняє

$$xv(x) \to 0, \quad \text{при } x \to \infty. \tag{1.20}$$

З цією метою покладемо

$$\rho(x) := \exp\left\{\int_1^x g(t)\,dt\right\}$$

і покажемо, що інтегральне рівняння

$$v(x) = \frac{1}{\rho(x)} \int_x^\infty \rho(t)\left\{h(t) + v^2(t)\right\} dt, \tag{1.21}$$

яке рівносильне (1.18), має розв'язок.

Зазначимо, що, згідно з (1.19),

$$\rho(x) = x^{2\alpha_1} \exp\left\{2\int_1^x \frac{\phi(t)}{t}\,dt\right\}.$$

Отже, завдяки (1.16), $\rho(x)$ є правильно змінною функцією індексу $2\alpha_1$, і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $x_0 = x_0(\varepsilon)$ таке, що при $x, t \geq x_0$:

$$\frac{\rho(t)}{\rho(x)} \leq \left(\frac{t}{x}\right)^{2\alpha_1+2\varepsilon}. \tag{1.22}$$

Беручи до уваги (1.16),

$$\frac{\rho(t)}{\rho(x)} \leq \left(\frac{t}{x}\right)^{2\alpha_1} \exp\left(2\int_x^t \frac{\phi(\tau)}{\tau}d\tau\right) \leq \left(\frac{t}{x}\right)^{2\alpha_1} \exp\left(2\varepsilon\int_x^t \frac{d\tau}{\tau}\right) = \left(\frac{t}{x}\right)^{2\alpha_1+2\varepsilon}.$$

Нехай

$$I(x) := \frac{1}{\rho(x)}\int_x^\infty \rho(t)h(t)dt,$$

щоб отримати з (1.16), (1.19) і (1.22) для деякого $m > 0$,

$$|I(x)| \leq \frac{m\varepsilon}{x^{2\alpha_1+2\varepsilon}}\int_x^\infty t^{2\alpha_1+2\varepsilon-2}dt.$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ довільне, α_1—менший корінь (1.13), і тому $2\alpha_1 + 2\varepsilon < 1$, то наведений інтеграл є збіжним, і, завдяки (1.20), другий у (1.21) також, і нерівність виконується для $x \geq x_0$, де $x_0 = x_0(\varepsilon)$. Отже

$$|I(x)| \leq \frac{m_1\varepsilon}{x} \quad \text{з} \quad m_1 = \frac{m}{1-(2\alpha_1+2\varepsilon)}. \tag{1.23}$$

Тепер введемо послідовність $v_n(x)$ послідовних наближень наступним чином:

$$\text{а)}\quad v_1(x) := I(x) + \frac{1}{\rho(x)}\int_x^\infty \rho(t)I^2(t)dt$$

$$\text{б)}\quad v_{n+1}(x) := I(x) + \frac{1}{\rho(x)}\int_x^\infty \rho(t)v_n^2(t)dt.$$

Покажемо спочатку, що для всіх $n \geq 1$ і для $x \geq x_0$,

$$|v_n(x)| \leq \frac{2m_1\varepsilon}{x}. \tag{1.24}$$

Для $n = 1$, (1.23) і (1.22) разом дають

$$|v_1(x)| \leq \frac{m_1\varepsilon}{x}(1 + m_1^2\varepsilon).$$

Вибравши таке ε, що

$$4m_1^2\varepsilon < 1, \tag{1.25}$$

маємо

$$|v_1(x)| \leq \frac{5m_1\varepsilon}{4x},$$

тож у цьому випадку (1.24) виконується. Припустимо, що це виконується для деякого n; тоді, з (1.23), (1.24), (1.25) і (1.22), випливає

$$|v_{n+1}(x)| \leq |I(x)| + \frac{1}{\rho(x)}\int_x^\infty \rho(t)v_n^2(t)dt \leq \frac{m_1\varepsilon}{x} + \frac{4m_1^2\varepsilon^2}{x} \leq \frac{2m_1\varepsilon}{x}.$$

Отже, (1.24) виконується для всіх n.

Далі ми покажемо, що для всіх $n \geq 1$ і для $x \geq x_0$

$$|v_{n+1}(x) - v_n(x)| \leq \frac{\varepsilon_1^{n+2}}{16m_1 x} \quad \text{де} \quad \varepsilon_1 = 4m_1^2\varepsilon. \tag{1.26}$$

Для $n = 1$, (1.58) дає

$$|v_2(x) - v_1(x)| \leq \frac{1}{\rho(x)} \int_x^\infty \rho(t)(v_1(t) - I(t))(|v_1(t)| + |I(t)|)dt. \tag{1.27}$$

Також, завдяки (1.22) і (1.23), маємо

$$|v_1(t) - I(t)| = \frac{1}{\rho(x)} \int_x^\infty \rho(t) I^2(t) dt \leq \frac{m_1^3 \varepsilon^2}{x}. \tag{1.28}$$

Оцінки (1.22), (1.23), (1.24), (1.27) і (1.28) разом дають

$$|v_2(x) - v_1(x)| \leq \frac{3m_1^3\varepsilon^3}{x} \leq \frac{(4m_1^2\varepsilon)^3}{16m_1 x},$$

тобто (1.26) виконується для $n = 1$. Припустимо, що воно виконується для деякого n; тоді за (1.22), (1.24) і (1.26) маємо

$$|v_{n+2}(x) - v_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{\rho(x)} \int_x^\infty \rho(t)|v_{n+1}(t) - v_n(t)|(|v_{n+1}(t)| + |v_n(t)|)dt$$

$$\leq \frac{4m_1^2\varepsilon\varepsilon_1^{n+2}}{16m_1 x} = \frac{\varepsilon_1^{n+3}}{16m_1 x}.$$

Таким чином, оцінка (1.26) виконується для всіх n і для $x \geq x_0$.

Рівномірна збіжність послідовності $v_n(x)$ на $[x_0, \infty)$ до функції $v(x)$ випливає з загального факту:

$$v_{n+p}(x) - v_n(x) = \sum_{k=n}^{n+p-1} (v_{k+1}(x) - v_k(x)),$$

оцінка (1.26) і нерівність (1.25). Більше того, завдяки (1.24), для будь-якого $\varepsilon > 0$ і всіх $x \geq x_0$ маємо

$$|v(x)| \leq \frac{2m_1\varepsilon}{x}. \tag{1.29}$$

Завдяки рівномірній збіжності послідовності $\{v_n(x)\}$, оцінці (1.29), факту, що $\rho(t)$ є правильною змінною функцією з показником $2\alpha_1 < 1$ та властивість 4 (ii), випливає:

$$\lim_{n\to\infty} \int_x^\infty \rho(t)v_n^2(t)dt = \int_x^\infty \rho(t)v^2(t)dt.$$

Отже, $v(x)$ є розв'язком рівнянь (1.21) і (1.18) з властивістю (1.20), що випливає з (1.29).

Відповідно, розв'язок $y_1(x)$ рівняння $y'' + f(x)y = 0$, визначений за (1.17), який записується як

$$y_1(x) = x^{\alpha_1} \exp\left\{\int_a^x \frac{\nu(t)}{t}dt\right\} = x^{\alpha_1}L_1(x),$$

є правильно змінною функцією з показником α_1.
Завдяки (1.16) і (1.20)

$$\nu(t) := \phi(t) + t\psi(t) \to 0, \quad \text{як} \quad t \to \infty,$$

L_1 є нормалізованою повільно змінною функцією.

Необхідність. Припустимо $y_1(x) = x^{\alpha_1}L_1(x)$, де L_1 — нормалізована повільно змінна функція. Тоді, для $x \to \infty$, маємо $\frac{xy_1'(x)}{y_1(x)} \to \alpha_1$. Також, використовуючи $y'' + f(x)y = 0$, отримуємо:

$$-\frac{xy_1'(x)}{y_1(x)} + x\int_x^\infty \left(\frac{ty_1'}{y_1}\right)^2 t^{-2}dt + x\int_x^\infty f(t)dt = 0.$$

Отже, обидва інтеграли збігаються, і при $x \to \infty$ отримуємо:

$$-\alpha_1 + \alpha_1^2 + o(1) + x \int_x^{\infty} f(t)dt = 0.$$

Звідси умова (1.14) випливає з (1.13).

Другий лінійно незалежний розв'язок виду $y_2(x) = x^{\alpha_2} L_2(x)$ знову отримується за допомогою властивості 1 , який розходиться, оскільки $2\alpha_1 < 1$. Це дає при $x \to \infty$:

$$y_2(x) \sim x^{1-\alpha_1} \left\{(1 - 2\alpha_1) L_1(x)\right\}^{-1},$$

і тому за властивістю 3 з $\alpha = 0$, маємо:

$$y_2(x) = x^{\alpha_2} L_2(x),$$

де L_2 — повільно змінна функція, така, що при $x \to \infty$

$$L_2(x) \sim \left\{(1 - 2\alpha_1) L_1(x)\right\}^{-1}.$$

Що L_2 є нормалізованою, показується:

$$y_2(x) = y_1(x) \int_a^x y_1^{-2}(t)\, dt \quad \text{або} \quad y_2(x) = y_1(x) \int_x^{\infty} y_1^{-2}(t)\, dt,$$

і завдяки формі y_1 і y_2, маємо:

$$\frac{x y_2'(x)}{y_2(x)} = \frac{x y_1'(x)}{y_1(x)} + \frac{1}{L_1 L_2}.$$

Але при $x \to \infty$, $\frac{x y_1'(x)}{y_1(x)} \to \alpha_1$, і $L_2 \sim \left\{(1 - 2\alpha_1) L_1(x)\right\}^{-1}$, так що, згідно з попереднім співвідношенням, $\frac{x y_2'(x)}{y_2(x)} \to \alpha_2$, коли $x \to \infty$. Оскільки $\frac{x y_2'(x)}{y_2(x)} = \alpha_2 + \frac{x L_2'(x)}{L_2(x)}$, це означає, що $\frac{x L_2'(x)}{L_2(x)} \to 0$, коли $x \to \infty$, і L_2 нормалізована.

Тоді необхідність випливає так само, як і для y_1.

Розглянемо більш загальний випадок.

Теорема 1.4 *Нехай функції F і p задані так, як у теоремі 1.1. Якщо існує неперервна спадна функція $c(x)$, така що*

$$\int_x^\infty p^2(t)\,dt \le c(x)p(x), \tag{1.30}$$

$$0 < c(x) \le c < \frac{1}{4}, \tag{1.31}$$

а також якщо для деякого натурального числа n виконується

$$\int_x^\infty c^n(t)p(t)\,dt < \infty, \tag{1.32}$$

тоді розв'язок y рівняння $y'' + f(x)y = 0$, який задається як у (1.4), тобто

$$y(x) = \exp\left\{\int_a^x (F(t) - Z(t))\,dt\right\},$$

задовольняє при $x \to \infty$ співвідношення

$$y(x) \sim A\exp\left\{\int_a^x (F(t) - Z_{n-1}(t))\,dt\right\}. \tag{1.33}$$

Тут для $n \ge 1$

$$Z_0(x) := 0, \quad Z_n(x) := -\int_x^\infty (F(t) - Z_{n-1}(t))^2\,dt.$$

Де A — деяка додатна стала, однак її можна вважати $A = 1$.

Доведення. Оскільки виконуються всі умови теореми 1.1, послідовність послідовних наближень збігається до розв'язку $Z(x)$ (рівномірно на $[x_0, \infty)$).

Таким чином, можна записати

$$Z(x) = Z_{n-1}(x) + r_n(x), \tag{1.34}$$

де

$$r_n(x) = \sum_{\nu=n}^{\infty} (Z_\nu(x) - Z_{\nu-1}(x)). \tag{1.35}$$

Аналогічно доведенню нерівності (1.9), можна показати, що, використовуючи спадність функції $c(x)$, для всіх $x \geq x_0$ та всіх $n \geq 1$ виконується

$$|Z_n(x) - Z_{n-1}(x)| \leq \left(\frac{4c(x)^n}{4} \right) p(x). \tag{1.36}$$

Тепер, поєднуючи (1.35), (1.36) і (1.31), отримаємо:

$$|r_n(x)| \leq \frac{p(x)}{4} \sum_{\nu=n}^{\infty} (4c(x))^n = \frac{4^{n-1}c(x)}{1-4c(x)} \ \leq \frac{4^{n-1}}{1-4c}\, c^n(x)p(x).$$

Звідси умова (1.32) показує, що інтеграл

$$\int^{\infty} r_n(t)\, dt$$

збігається, і підставляючи $Z(x)$ із (1.34) у (1.4), отримуємо асимптотичне представлення для y, задане у (1.33).

Зауважимо, що загалом розв'язки y у теоремі 1.4 не обов'язково є повільно змінними. Це, у свою чергу, означає існування функції $c(x)$, що задовольняє умови (1.31) і (1.30), якщо взяти $p(x) = \frac{c(x)}{x}$. Відповідно, має місце наступне твердження.

Наслідок. *Нехай виконується умова (1.12). Якщо умова (1.32) у формі*

$$\int^{\infty} \frac{c^{n+1}(t)}{t}\, dt < \infty,$$

виконується, тоді два лінійно незалежні розв'язки рівняння $y'' + f(x)y = 0$:

$$y_1(x) = L_1(x), \quad y_2(x) = xL_2(x),$$

де L_i, $i = 1{,}2$, є нормованими повільно змінними функціями з $L_2(x) \sim \frac{1}{L_1(x)}$, мають таке асимптотичне представлення при $x \to \infty$:

a)

$$y_1(x) \sim \exp\left\{\int_a^x (F(t) - Z_{n-1}(t))\,dt\right\},$$

b)

$$y_2(x) \sim x\exp\left\{-\int_a^x (F(t) - Z_{n-1}(t))\,dt\right\}. \qquad (1.37)$$

Формула (1.37) для y_1 збігається з (1.33), а поведінка y_2 випливає з подання

$$y_2(x) = y_1(x)\int_a^x y_1^{-2}(t)\,dt \quad \text{або} \quad y_2(x) = y_1(x)\int_x^\infty y_1^{-2}(t)\,dt,$$

яке слідує з властивості 1.

Оскільки функції L_i є нормованими, то також маємо при $x \to \infty$:

$$\frac{xy_1'(x)}{y_1(x)} \to 0, \quad \frac{xy_2'(x)}{y_2(x)} \to 1.$$

Зазначимо, що існування розглянутих розв'язків очевидне.

2 РОЗДІЛ

У роботах Білозерової М. А. та Євтухова В. М. було розглянуто нелінійне диференціальне рівняння такого вигляду:

$$y'' = \alpha_0 p(t), \varphi_0(y), \varphi_1(y'), \qquad (2.1)$$

у якому $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [\alpha, \omega[\to]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega \leq +\infty)$ — неперервна функція, $\varphi_i : \Delta Y_i \to]0, +\infty[$ $(i = 0, 1)$ — двічі неперервно диференційовані функції, що задовольняють умовам

$$\lim_{z \to Y_i,\ z \in \Delta Y_i} \frac{z\varphi_i'(z)}{\varphi_i(z)} = \sigma_i, \qquad \limsup_{z \to Y_i,\ z \in \Delta Y_i} \left| \frac{z\varphi_i''(z)}{\varphi_i(z)} \right| < +\infty \quad (i = 0{,}1), \tag{2.2}$$

$$Y_i = \begin{cases} 0, \\ +\infty \text{ або } -\infty, \end{cases} \qquad \Delta Y_i = \begin{cases} [y_i^0, Y_i[, \\ ]Y_i, y_i^0], \end{cases} \qquad \sigma_i \in \mathbb{R}, \quad \text{причому } \sigma_0 + \sigma_1 \neq 1.$$

У силу першої з умов (2.2) кожна з функцій φ_i $(i \in \{0{,}1\})$ у певному сенсі є близькою до степеневої. А саме вона є правильно змінною при $z \to Y_i$, $z \in \Delta Y_i$ порядку σ_i. Таким чином, φ_i має вигляд

$$\varphi_i(z) = |z|^{\sigma_i}\theta_i(z),$$

де $\theta_i : \Delta Y_i \to]0, +\infty[$ задовольняє співвідношення:

$$\lim_{z \to Y_i,\ z \in \Delta Y_i} \frac{z\theta_i'(z)}{\theta_i(z)} = 0. \tag{2.3}$$

Отже, для будь-якого розв'язку y рівняння (2.1), визначеного на деякому проміжку $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ і такого, що задовольняє умовам:

$$y^{(i)} : [t_0, \omega[\to \Delta Y_i, \quad \lim_{t \to \omega^-} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0{,}1),$$

має місце представлення:

$$\varphi_i\left(y^{(i)}(t)\right) = |y^{(i)}(t)|^{\sigma_i + o(1)} \quad (i = 0{,}1), \quad \text{при } t \to \omega^-.$$

Отже, найпростішим частковим випадком рівняння (1) є узагальнене рівняння Емдена–Фаулера:

$$y'' = \alpha_0 p(t)|y|^{\sigma_0}|y'|^{\sigma_1}. \tag{2.4}$$

Рівняння такого виду застосовуються у багатьох галузях природознавства, їх часткові випадки виникають в астрофізиці, ядерній фізиці, газовій динаміці, механіці рідин, а також при вивченні розподілу електростатичного потенціалу у сферично симетричному об'ємі плазми продуктів згоряння [29], [33].

При $\varphi_1 \equiv 1$ рівняння (2.1) у певному сенсі є близьким до рівняння (2.1), яке було детально досліджено в роботах [28], [34], [26], [35]. Випадки обмеженої φ_1 також розглядалися в роботах Maric V. і Tomic M. [36], [37]. У цих роботах отримано асимптотичні представлення деяких розв'язків, що прямують до нуля при $t \to \infty$. Деякі асимптотичні оцінки для цього випадку також отримано в роботі Taliaferro S.D. [30].

Однак для необмежених і малих функцій φ_1, які тут становлять найбільший інтерес, дослідити асимптотичну поведінку розв'язків раніше не вдавалося. Деякі з проблем, що виникають при спробах дослідження загального випадку, коли φ_1 задовольняє (2.2), подібні до тих, що виникали свого часу при поширенні результатів, отриманих для узагальненого рівняння Емдена–Фаулера

$$y'' = p(t)|y|^{\sigma}\operatorname{sign}(y), \tag{2.5}$$

яке є частковим випадком рівняння (2.1). Дослідження рівнянь навіть такого часткового вигляду вимагало (див. роботи [31], [32], [4], [5], [7]) суттєвого перегляду багатьох основоположних ідей, що використовувалися при вивченні узагальненого рівняння Емдена–Фаулера. Проте у тих дослідженнях суттєвою була степенева природа нелінійностей.

[1] При $Y_i = +\infty$ ($Y_i = -\infty$) вважаємо $y_i^0 > 0$ ($y_i^0 < 0$) відповідно.

У даній роботі функція φ_1 має досить загальний вигляд, що створює додаткові труднощі та не дозволяє прямо використовувати методику дослідження рівнянь (2.1). Водночас ідея класифікації правильних розв'язків виявляється корисною і в цьому випадку.

З метою побудови єдиного підходу до дослідження розв'язків, у яких похідні прямують до нуля або нескінченності, введемо клас розв'язків рівняння (2.1), дещо відмінний від того, що був введений для рівняння виду (2.1).

Означення. Розв'язок y рівняння (2.1) будемо називати $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-*розв'язком*, якщо

$$\begin{gathered} y : [t_0, \omega[\to \Delta Y_i, \quad \lim_{t\to\omega^-} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0{,}1), \\ \lim_{t\to\omega^-} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0. \end{gathered} \tag{2.6}$$

У силу структури рівняння (2.1), кожне його $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – розв'язання при $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ є строго монотонним разом зі своєю першою похідною. Тому, очевидно, що під час дослідження таких розв'язків слід вважати, що $y_0' > 0$, якщо $\Delta Y_0 = [y_0, Y_0[$, та $y_0' < 0$, якщо $\Delta Y_0 =]Y_0, y_0]$.

Також очевидно, що кожне таке $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язання рівняння (2.1) належить до класу функцій $P_\omega^2(\lambda_0)$. Таким чином, апріорно відомі деякі асимптотичні властивості досліджуваних розв'язків при $t \uparrow \omega$.

У даній роботі розроблено методику отримання точних асимптотичних формул при $t \uparrow \omega$ для $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – розв'язків та їх похідних, а також доведено існування таких розв'язків для рівняння (2.1).

Отримано необхідні та достатні умови існування $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – розв'язків рівняння (2.1) у неособливих випадках, а саме для $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, а також в особливих випадках, коли $\lambda_0 \in \{0, 1, \pm\infty\}$.

Крім того, отримано асимптотичні представлення при $t \uparrow \omega$ для таких розв'язків та їх похідних. Виявилося, що у більшості випадків необхідні умови збігаються з достатніми.

Для формального викладу результатів цього розділу запровадимо такі позначення:

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } \omega = +\infty,\ i \neq \lambda_0, \\ t-\omega, & \text{якщо } \omega < +\infty,\ \lambda_0 = 1, \end{cases}$$

$$I(t) = \int_t^\omega p(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_0}\, d\tau, \quad a,$$

$$A_\omega = \begin{cases} a, & \text{якщо } \int_\omega p(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_0}\, d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int_\omega p(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_0}\, d\tau < +\infty. \end{cases}$$

Основний результат викладено у наступній теоремі.

Теорема 2.1 Для існування y – розв'язків рівняння $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$, де $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, необхідно, а якщо

$$\lambda_0 \neq \sigma_1 - 1, \quad \text{або} \quad \lambda_0(\sigma_0 + \sigma_1 - 1) > 0,$$

то й достатньо виконання умов:

$$\lim_{t \to t^\omega} \frac{\pi_\omega(t) I'(t)}{I(t)} = \frac{\sigma_0 + \sigma_1 - 1}{1 - \lambda_0},$$

$$\alpha_0 \lambda_0 \vartheta_0 > 0, \quad \exists b \in [a, \omega[\colon\ \alpha_0 y_1^0 (1 - \sigma_0 - \sigma_1) I(t) > 0 \quad \text{при } t \in [b, \omega[,$$

$$Y_i := \begin{cases} \pm\infty, & \text{якщо } \alpha_0 y_1^0 \lambda_0^i > 0, \\ 0, & \text{якщо } \alpha_0 y_1^0 \lambda_0^i < 0 \quad (i = 0, 1). \end{cases}$$

Більше того, для кожного такого розв'язку при $t \uparrow \omega$ мають місце асимптотичні подання:

$$\frac{y'(t)}{\varphi_1(y'(t))|y'(t)|^{\sigma_1} \vartheta_0(y(t))} \sim \alpha_0 \left| \frac{\lambda_0}{1 - \lambda_0} \right|^{-\sigma_0} (1 - \sigma_0 - \sigma_1) I(t),$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} \sim \frac{\lambda_0}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}.$$

Зазначимо, що при $(\sigma_1 - 1)(\sigma_0 + \sigma_1 - 1) < 0$ дана теорема не дає результатів, які стосуються існування $P_\omega(Y_0, Y_1, \sigma_1 - 1)$-розв'язків рівняння (2.1). У цьому випадку існування таких розв'язків при $\sigma_1 \neq 1, 2$ вдалося довести лише за виконання деяких додаткових обмежень на функції φ_i $(i = 0, 1)$ і функцію p. Однак, на відміну від відповідних результатів для випадку $g_1(z) \equiv 1$, виконання цих обмежень не завжди перевіряється для конкретних функцій.

У теоремі 2.4 асимптотичні подання $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язків рівняння (2.1) і їхніх похідних подано у неявному вигляді. Для отримання явних формул необхідно знаходити обернену функцію й функцію двох змінних, що, в силу достатньої загальності функцій φ_i, не завжди зручно. Розгляд деяких додаткових обмежень на функції дозволяє дещо покращити ситуацію.

Будемо казати, що функція $\varphi_i(z)$, де $i \in \{0, 1\}$, задовольняє умову S_i, якщо для будь-якої неперервно диференційовної функції $L : \Delta_{Y_i} \to]0; +\infty[$ такої, що

$$\lim_{\substack{z \to Y_i \\ z \in \Delta_{Y_i}}} \frac{zL'(z)}{L(z)} = 0,$$

має місце співвідношення

$$\theta_i(zL(z)) = \theta_i(z)(1 + o(1)) \quad \text{при } z \to Y_i \ (z \in \Delta_{Y_i}).$$

Умову S_i гарантовано задовольняють функції $\varphi_i(z)$, для яких $\theta_i(z)$ має скінченну границю при $z \to Y_i$, а також функції виду $|z|^{\sigma_i}| \ln |z||^{\mu_i}$, $|z|^{\sigma_i}| \ln |z||^{\mu_i} \| z \|^{\mu_i}$ та інші. Однак, у силу довільності функції L, таку умову може бути складно перевірити. Тому в деяких випадках доцільно користуватися іншими умовами, наприклад, умовою виду:

$$\lim_{\substack{z \to Y_i \\ z \in \Delta_{Y_i}}} \frac{z \ln |z| \, \theta_i'(z)}{\theta_i(z)} = \text{const},$$

яка є достатньою умовою того, що функція $\varphi_i(z)$ задовольняє S_i.

Якщо для деякого $i \in \{0,1\}$ функція $\varphi_i(z)$ задовольняє S_i, вдається отримати асимптотичні подання при $t \uparrow \omega$ для

$$\frac{y^{(k)}(t)}{\varphi_k(y^{(k)}(t))}\frac{\theta_i(y(t))}{y(t)^{\sigma_i}}, \quad \text{де } k=1, \text{якщо } i=0, \text{ і } k=0, \text{якщо } i=1.$$

За додаткових обмежень на обидві функції φ_0 і φ_1 вдається отримати явні асимптотичні формули при $t \uparrow \omega$ для розглядуваних розв'язків і їхніх похідних. А саме, справджується наступна теорема.

Теорема 2.2 Нехай при кожному значенні $i \in \{0,1\}$ функція $\varphi_i(z)$ задовольняє умову S_i. Тоді для кожного $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язку, де $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні подання:

$$y(t) \sim \frac{\pi_\omega(t)}{\alpha_0\lambda_0}\left|\frac{\lambda_0^{1-\sigma_0}(\sigma_0+\sigma_1-1)}{1-\lambda_0^{1-1}}\right| I(t)\prod_{i=0}^{1}\left(\theta_i\left(y_i\left|\pi_\omega(t)\lambda_0^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}\right|\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}},$$

$$y'(t) \sim \frac{\alpha_0}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}y(t).$$

Отримані результати проілюстровано на прикладі рівняння

$$y'' = At^\gamma|y|^{\sigma_0}e^{\mu_0\sqrt{|\ln|y||}}|y'|^{\sigma_1}|\ln|y'||^{\mu_1}, \tag{2.7}$$

де $A \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\sigma_0, \sigma_1, \mu_0, \mu_1 \in \mathbb{R}$, $\sigma_0+\sigma_1 \neq 1$. Це рівняння є рівнянням (1), в якому $\alpha_0 = \mathrm{sign}A$, $p(t) = |A|t^\gamma$, $\varphi_0(z) = |z|^{\sigma_0}e^{\mu_0\sqrt{|\ln|z||}}$, $\varphi_1(z) = |z|^{\sigma_1}|\ln|z||^{\mu_1}$.

Це рівняння розглядається при $t \in]0, +\infty[$. Тут φ_1 задовольняє S_1, але, якщо $\mu_0 \neq 0$, φ_0 не задовольняє S_0. Тому, загалом, теорему 2.2 застосувати не можна. Проте, в результаті застосування теореми 2.4 все ж вдається отримати явні асимптотичні формули при $t \uparrow \omega$ для всіх розглядуваних розв'язків і їх похідних, а також необхідні й достатні умови їх існування.

Для викладу результатів, присвячених особливим випадкам $\lambda_0 \in \{0, 1, \infty\}$, необхідне наступне позначення:

$$I_1(t) = \int_{A_t^\omega} p(\tau)\,d\tau, \quad A_t^\omega = \begin{cases} a, & \text{якщо } \int_a^\omega p(\tau)\,d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int_a^\omega p(\tau)\,d\tau < +\infty. \end{cases}$$

В особливих випадках доводиться накладати на деяку з функцій $\varphi_i(z)$ умову S_i. Якщо при деякому $i \in \{0,1\}$ функція $\varphi_i(z)$ задовольняє S_i, отримані асимптотичні подання при $t \uparrow \omega$ для

$$\frac{y^{(k)}(t)\theta_i(y(t))}{\varphi_k(y^{(k)}(t))y(t)^{\sigma_i}}, \quad \text{де } k = 1, \text{при } i = 0 \text{ та } k = 0, \text{при } i = 1.$$

при $i = 1$, $y(t)$ — $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-розв'язок рівняння (2.1). Доведено також існування таких розв'язків. У даному випадку функція $\varphi_k(z)$ завідомо повинна задовольняти S_k, якщо $\sigma_k = k$ для деякого $k \in \{0,1\}$. Ці результати викладено в наступних теоремах.

Теорема 2.3

Нехай функція φ_1 задовольняє умову S_1. Тоді для існування y – розв'язків у рівнянні (2.1) $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$ – розв'язків необхідно, а якщо

$$\sigma_1 \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}, \quad \text{або} \quad \sigma_1 = 2 \quad \text{і} \quad \sigma_0 > -1,$$

то й достатньо виконання умов:

$$\lim_{t\uparrow\omega} y_i^0 I_1(t)^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} = Y_i \quad (i = 0, 1), \tag{2.8}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{I_1(t)J_1'(t)}{p(t)J_1(t)} = 1,$$

$$\alpha_0 y_0^0 > 0, \quad \alpha_0 y_1^0 (1 - \sigma_0 - \sigma_1) I_1(t) > 0, \quad \text{при } t \in [b, \omega[. \tag{2.9}$$

Більше того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$

асимптотичні подання:

$$\frac{y(t)}{\varphi_0(y(t))|y(t)|^{\sigma_1}} \sim \alpha_0|1-\sigma_0-\sigma_1|^{2-\sigma_1}J_1(t),$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} \sim \frac{J_1'(t)}{(1-\sigma_1-\sigma_0)J_1(t)},$$

де

$$J_1(t) = \int_{B_t^\omega} \theta_1\left(|I_1(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} \operatorname{sign} y_1^0\right)|I_1(\tau)|^{1-\sigma_1}\, p(\tau)\, d\tau.$$

$$B_\omega^1 = \begin{cases} b, & \text{якщо } \displaystyle\int_b^\omega \theta_1\left(|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} \operatorname{sign}\, y_1^0\right)\frac{p^{\sigma_1}(t)}{|I_1(t)|^{\sigma_1-1}}dt = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \displaystyle\int_b^\omega \theta_1\left(|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} \operatorname{sign}\, y_1^0\right)\frac{p^{\sigma_1}(t)}{|I_1(t)|^{\sigma_1-1}}dt < +\infty, \end{cases}$$

$b \in (a;\omega)$ вибрано так, щоб $|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} \operatorname{sign}\, y_1^0 \in \Delta_{Y_1}$, при $t \in [b;\omega)$.

Введемо такі позначення:

$$I_1(t) = \int_{A_t^\omega} p(\tau)\, d\tau, \quad A_t^\omega = \begin{cases} a, & \text{якщо } \int_a^\omega p(\tau)\, d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int_a^\omega p(\tau)\, d\tau < +\infty. \end{cases}$$

$$G(t) = \exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\sigma_1} + \sqrt{\left(\frac{1}{1-\sigma_1}\right)^2 + 4\ln\left(\varphi_0(y)\alpha_0 I_1(t)\right)}\right)\right)$$

У випадку, коли $\lim\limits_{t\uparrow\omega} y_i^0|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} = Y_i$

$$J(t) = \int_{B_\omega}^t |G(\tau)I_1(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\, d\tau,$$

$$B_\omega = \begin{cases} b, & \text{якщо } \int_b^\omega |G(\tau)I_1(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\,d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int_b^\omega |G(\tau)I_1(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\,d\tau < +\infty, \end{cases}$$

де $b \in [a;\omega)$ вибрано так, щоб $|I_1(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} \operatorname{sign} y_1^0 \in \Delta_{Y_i}$ при $t \in [b;\omega)$.

Теорема 2.4 Нехай $\sigma_1 \neq 1$. Тоді для існування y – розв'язків рівняння (0) $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$ – типу необхідно, а якщо існує скінченна або нескінченна границя $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \dfrac{\pi_\omega(t)p(t)}{I_1(t)}$, то й достатньо виконання умов:

$$\lim_{t\uparrow\omega} y_1^0 |I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} = Y_1, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y_0^0 |J(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} = Y_0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{(J'(t))^2}{J''(t)J(t)} = 0,$$

$$\alpha_0 y_1^0 (1-\sigma_1) I_1(t) > 0, \quad y_0^0 \alpha_0 (1-\sigma_0-\sigma_1) I_1(t) J(t) > 0 \quad \text{при } t \in [b,\omega[. \quad (2.10)$$

Більше того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні подання:

$$\frac{y(t)}{\varphi_0(y(t))|y(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} \sim \frac{|\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_1}|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} \operatorname{sign} y_1^0}{1-\sigma_1} (1-\sigma_0-\sigma_1) J(t),$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} \sim \frac{(1-\sigma_1)J'(t)}{(1-\sigma_1-\sigma_0)J(t)}. \qquad (2.11)$$

Доведення Необхідність. Нехай $y : [t_0, \omega[\to \mathbb{R}$ — $P_\omega(Y_0; Y_1; 0)$ – розв'язок рівняння (0). Тоді з рівностей

$$\left(\frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))}\right)' = \frac{y''(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))} \times$$

$$\times \left(1 - \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} \cdot \frac{y(t)\varphi_0(y(t))}{\varphi_0(y(t))} - \frac{y'(t)\varphi_1'(y'(t))}{\varphi_1(y'(t))}\right)$$

з урахуванням (0), у випадку, коли $\int\limits_a^\omega p(\tau)\,d\tau = +\infty$, випливає, що

$$\frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))} = \alpha_0(1-\sigma_1)I_1(t)[1+o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \tag{2.12}$$

У випадку ж, коли $\int\limits_a^\omega p(\tau)\,d\tau < +\infty$, отримаємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))} = c \neq 0. \tag{2.13}$$

Покажемо, що (2.13) не може мати місце. Оскільки $\sigma_1 \neq 1$, то в силу першої з умов (2.6) і (2.2) функція $\frac{y'(t)}{\varphi_1(y'(t))}$ має або нульову, або нескінченну границю при $t \uparrow \omega$. Якщо б виконувалась умова (2.13), то функція $\varphi_0(y(t))$ мала б відповідно нульову або нескінченну границю при $t \uparrow \omega$. Тому, використовуючи правило Лопіталя, (2.2) і (2.6), отримали б

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))} = \lim_{t\uparrow\omega} \left[\frac{1}{\varphi_0(y(t))} \cdot \frac{1}{\varphi_1(y'(t))}\right]' =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} \cdot \frac{y(t)\varphi_0'(y(t))}{\varphi_0(y(t))} \cdot \frac{1 - \frac{y'(t)\varphi_1'(y'(t))}{\varphi_1(y'(t))}}{} = 0,$$

що суперечить (2.13). Таким чином, (2.5) має місце в обох випадках.

Використовуючи (0), перепишемо (2.5) у вигляді

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{p(t)}{(1-\sigma_1)I_1(t)}[1+o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega, \tag{2.14}$$

звідки отримаємо третю і четверту з умов (2.10). Інтегруючи (2.14) по проміжку $[t_0, t] \subset [t_0, \omega[$ і враховуючи визначення $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$ – розв'язку, маємо

$$\ln|y'(t)| = \frac{1}{1-\sigma_1} \ln|I_1(t)|[1+o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega, \tag{2.15}$$

звідки отримуємо першу з умов (2.10).

Із (2.12) випливає, що:

$$(1-\sigma_1)\ln|y'(t)| - \sqrt{|\ln|y'(t)||} - \ln|\varphi_0(y(t))| =$$

$$= \ln(\alpha_0(1-\sigma_1)) + \ln|I_1(t)| + \ln|1+o(1)| \quad \text{при } t\uparrow\omega \tag{2.16}$$

Розглядаючи (2.16) як квадратне рівняння відносно $\sqrt{|\ln|y'(t)||}$, отримаємо

$$\sqrt{|\ln|y'(t)||} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\sigma_1} + \sqrt{\left(\frac{1}{1-\sigma_1}\right)^2 + 4\ln(\varphi_0(y(t))\alpha_0 I_1(t)(1+o(1)))}\right). \tag{2.17}$$

Оскільки

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\sigma_1} + \sqrt{\left(\frac{1}{1-\sigma_1}\right)^2 + 4\ln\left(\varphi_0(y(t))\alpha_0 I_1(t)(1+o(1))\right)}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\sigma_1} + \sqrt{\left(\frac{1}{1-\sigma_1}\right)^2 + 4\ln\left(\varphi_0(y(t))\alpha_0 I_1(t)\right)}\right) = 0 \tag{2.18}$$

то при $t\uparrow\omega$

$$\exp\left(\sqrt{|\ln|y'(t)||}\right) = G(t)[1+o(1)]. \tag{2.19}$$

Підставивши (2.19) у (2.16), отримаємо при $t\uparrow\omega$

$$\frac{y'(t)}{|\varphi_0(y(t))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} = |1-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} G(t) I_1(t)^{\frac{1}{1-\sigma_1}}[1+o(1)]. \tag{2.20}$$

Використовуючи це співвідношення, а також (2.2), (2.6), умову $\sigma_0+\sigma_1 \neq 1$

і правило Лопіталя, знаходимо:

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{y(t)\operatorname{sign}y_1^0}{J(t)|\varphi_0(y(t))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}=\lim_{t\uparrow\omega}\left[\frac{y(t)\operatorname{sign}y_1^0}{|\varphi_0(y(t))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}\right]'\div J'(t)=$$

$$=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{y'(t)\operatorname{sign}y_1^0\,|\varphi_0(y(t))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}-\frac{y(t)\operatorname{sign}y_1^0\,\varphi_0'(y(t))}{(1-\sigma_1)\varphi_0(y(t))}}{I_1(t)\theta_1\left(|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\operatorname{sign}y_1^0\right)|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}=$$

$$=|1-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\cdot\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}.$$

Звідси випливають друга й п’ята з умов (2.10), а також перша з подань (2.11).

Із першого з подань (2.11) з урахуванням (2.20) отримаємо друге з подань (2.11).

У силу другого з подань (2.11), третьої з умов (2.14), (0) і вигляду функції J має місце третя з умов (2.10).

Достатність. Нехай виконуються умови (2.10). Розглянемо функцію

$$\Phi(y)=\int_{Y_0^*}^{y}\frac{dz}{|\varphi_0(z)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}},\quad \text{де } Y_0^*=\begin{cases}y_0^0, & \text{якщо } \left|\int_{y_0^0}^{Y_0}\frac{dz}{|\varphi_0(z)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}\right|=+\infty,\\ Y_0, & \text{якщо } \left|\int_{y_0^0}^{Y_0}\frac{dz}{|\varphi_0(z)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}\right|<+\infty.\end{cases}$$

Оскільки Φ строго монотонна на Δ_{Y_0} і

$$\lim_{y\to Y_0^*,\,y\in\Delta_{Y_0}}\Phi(y)=\Phi^0=\begin{cases}\pm\infty, & \text{якщо } Y_0^*=y_0^0,\\ 0, & \text{якщо } Y_0^*=Y_0,\end{cases}$$

то для неї існує обернена функція Φ^{-1}, задана в силу (2.2) на проміжку

$$\Delta_{\Phi^0} = \begin{cases} [C_{\varphi_0}, \Phi^0[, & \text{якщо } C_{\varphi_0} < \Phi^0, \\ ]\Phi^0, C_{\varphi_0}], & \text{якщо } C_{\varphi_0} > \Phi^0, \end{cases} \quad \text{де } C_{\varphi_0} = \int_{Y_0^*}^{y_0^0} \frac{dz}{|\varphi_0(z)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}},$$

при чому

$$\lim_{z \to \Phi^0,\, z \in \Delta_{\Phi^0}} \Phi^{-1}(z) = Y_0. \tag{2.21}$$

Крім того, згідно з правилом Лопіталя

$$\lim_{y \to Y_0,\, y \in \Delta_{Y_0}} \frac{\Phi(y)|\varphi_0(y)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}{y} = \frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}. \tag{2.22}$$

Рівняння (0) за допомогою перетворення

$$\Phi(y(t)) = |1-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} (\operatorname{sign} y_1^0) J(t)[1 + z_1(x)], \tag{2.23}$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{(1-\sigma_1)J'(t)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)J(t)}[1 + z_2(x)], \tag{2.24}$$

де

$$x = \beta \ln |I_1(t)|, \quad \beta = \operatorname{sign}(\alpha_0 y_1^0 (1-\sigma_1))$$

зведемо, враховуючи четверту з умов (2.10), до системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} z_1' = \beta G(x) \left[|1-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} BF(x, z_1)(1+z_2) \operatorname{sign} y_1^0 - 1 - z_1 \right], \\ z_2' = \beta (1+z_2) \left[|BF(x, z_1)(1+z_2)|^{\sigma_1 - 1} \dfrac{K(x, z_1, z_2)}{\operatorname{sign}(1-\sigma_1)} \right. \\ \qquad \left. - BG(x)(z_2+1) + M(x) \right], \end{cases} \tag{2.25}$$

де

$$B = \frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_1-\sigma_0}, \quad G(x) = \frac{I(t(x))J'(t(x))}{P(t(x))J(t(x))},$$

$$M(x)=G(x)-\frac{1}{1-\sigma_1}\left[1+\frac{|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(\operatorname{sign} y_1^0)\theta_1'\left(|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\operatorname{sign} y_1^0\right)}{(1-\sigma_1)\theta_1\left(|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\operatorname{sign} y_1^0\right)}\right],$$

$$F(x,z_1)=\frac{Y(t(x),z_1)}{J(t(x))\varphi_0(Y(t(x),z_1))^{\frac{1}{1-\sigma_1}}},$$

$$K(x,z_1,z_2)=\frac{\theta_1(Y[1](t(x),z_1,z_2))}{\theta_1\left(|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\operatorname{sign} y_1^0\right)},$$

$$Y(t,z_1)=\Phi^{-1}\left(|1-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\operatorname{sign} y_1^0 J(t)(1+z_1)\right),$$

$$Y[1](t,z_1,z_2)=\frac{Y(t,z_1)J'(t)}{BJ(t)}(1+z_2).$$

Із визначення функції J випливає, що

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p(t)J'(t)}{J''(t)I_1(t)}=1-\sigma_1. \tag{2.26}$$

В силу (2.21) і п'ятої з умов (2.10), $\lim\limits_{t\uparrow\omega} Y(t,\theta)=Y_0$ при $|\theta|\le\frac{1}{2}$. Використовуючи правило Лопіталя і (2.2) для кожного такого θ, знаходимо

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{Y(t,\theta)}{J(t)|\varphi_0(Y(t,\theta))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}=\lim_{t\uparrow\omega}\left[\frac{Y(t,\theta)}{|\varphi_0(Y(t,\theta))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}\right]'\Big/J'(t)=$$

$$=\lim_{t\uparrow\omega}|1-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(\operatorname{sign} y_1^0)(1+\theta)\left[1-\frac{Y(t,\theta)\varphi_0'(Y(t,\theta))}{(1-\sigma_1)\varphi_0(Y(t,\theta))}\right]=$$

$$=|1-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(1+\theta)\cdot\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}\cdot\operatorname{sign} y_1^0. \tag{2.27}$$

Тоді з урахуванням (2.12), третьої з умов (2.10) і (2.26) будемо мати:

$$\frac{I_1(t)\left(Y^{[1]}(t,\theta,0)\right)'}{I_1'(t)Y^{[1]}(t,\theta,0)}=|1-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(1+\theta)G(x(t))\times$$

$$\times\frac{J(t)|\varphi_0(Y(t,\theta))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}{\operatorname{sign} y_1^0 Y(t,\theta)}-M(x(t))\sim\frac{1}{1-\sigma_1},\quad \text{при } t\uparrow\omega. \tag{2.28}$$

Це означає, що $|Y^{[1]}(t,\theta,0)| = |I_1(t)|^{\frac{1+\theta}{1-\sigma_1}}$ при $t \uparrow \omega$. Оскільки в силу монотонності функції Φ^{-1} мають місце обидві нерівності:

$$\frac{1}{2}Y^{[1]}\left(t,\frac{1}{2},0\right) < Y^{[1]}(t,z_1,z_2) < \frac{3}{2}Y^{[1]}\left(t,\frac{3}{2},0\right) \quad \text{при } |z_i| \le \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}Y^{[1]}\left(t,\frac{3}{2},0\right) < Y^{[1]}(t,z_1,z_2) < \frac{3}{2}Y^{[1]}\left(t,\frac{1}{2},0\right) \quad \text{при } |z_i| \le \frac{1}{2}.$$

з урахуванням першої та другої з умов (2.10), можна вибрати число $t_0 \in [a,\omega[$ так, щоб

$$Y(t,z_1) \in \Delta_{Y_0}, \quad Y^{[1]}(t,z_1,z_2) \in \Delta_{Y_1},$$
$$|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} \operatorname{sign} y_1^0 \in \Delta_{Y_1} \quad \text{при } t \in [t_0,\omega[\text{ і } |z_i| \le \frac{1}{2},\ i=1,2.$$

Тепер розглянемо систему диференціальних рівнянь (2.25) на множині

$$\Omega = [x_0,+\infty[\times D,$$

де

$$x_0 = \beta \ln |I(t_0)|, \quad D = \left\{(z_1,z_2) : |z_i| \le \frac{1}{2},\ i=1,2\right\}.$$

На цій множині праві частини цієї системи є неперервними функціями за змінною x і двічі неперервно диференційовними за змінними z_1, z_2, причому

$$F'_{x_1}(x,z_1) = |1-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(\operatorname{sign} y_1^0)\left(1 - \frac{Y(t(x),z_1)\varphi_0'(Y(t(x),z_1))}{(1-\sigma_1)\varphi_0(Y(t(x),z_1))}\right),$$

$$F''_{x_1}(x,z_1) = \frac{|1-\sigma_1|^{\frac{2}{1-\sigma_1}} Y(t(x),z_1)\varphi_0'(Y(t(x),z_1))}{(\sigma_1-1)\varphi_0(Y(t(x),z_1))F(x,z_1)} \times$$
$$\times\left[1 - \frac{Y(t(x),z_1)\varphi_0'(Y(t(x),z_1))}{\varphi_0(Y(t(x),z_1))} + \frac{Y(t(x),z_1)\varphi_0''(Y(t(x),z_1))}{\varphi_0'(Y(t(x),z_1))}\right],$$

$$K'_{z_1}(x,z_1,z_2) = \frac{|1-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} \operatorname{sign} y_1^0}{F(x,z_1)} \times Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2)$$

$$\theta_1'\left(Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2)\right)\Big/\theta_1\left(|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\operatorname{sign}y_1^0\right),$$

$$K'_{z_2}(x,z_1,z_2)=\frac{Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2)\,\theta_1'\left(Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2)\right)}{(1+z_2)\,\theta_1\left(|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\operatorname{sign}y_1^0\right)}.$$

$$K''_{z_1z_1}(x,z_1,z_2)=K'_{z_1}(x,z_1,z_2)\cdot\frac{|1-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\operatorname{sign}y_1^0}{F(x,z_1)}\times$$
$$\times\left[\frac{Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2)\,\theta_1''(Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2))}{\theta_1'(Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2))}-\frac{F'_{z_1}(x,z_1)}{|1-\sigma_1|\operatorname{sign}y_1^0}+1\right],$$

$$K''_{z_2z_2}(x,z_1,z_2)=K'_{z_2}(x,z_1,z_2)\cdot\frac{Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2)\,\theta_1''(Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2))}{(1+z_2)\,\theta_1'(Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2))},$$

$$K''_{z_1z_2}(x,z_1,z_2)=\frac{K'_{z_1}(x,z_1,z_2)}{1+z_2}\times\left[\frac{Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2)\,\theta_1''(Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2))}{\theta_1'(Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2))}+1\right].$$

Розклавши при кожному фіксованому $x\in[x_0,+\infty[$ функції $F(x,z_1)$ і $|F(x,z_1)|^{\sigma_1-1}$ за формулою Тейлора з остачею у формі Лагранжа в околі $z_1=0$ до другого порядку включно, функцію $K(x,z_1,z_2)$ — в околі точки $(z_1,z_2)=(0,0)$, а функцію $|1+z_2|^{\sigma_1-1}$ — в околі точки $z_2=0$, перепишемо систему (2.25) у вигляді:

$$\begin{cases} z_1'=F_1(x)+A_{11}(x)z_1+A_{12}(x)z_2+G(x)R_1(x,z_1,z_2),\\ z_2'=F_2(x)+A_{21}(x)z_1+A_{22}(x)z_2+R_2(x,z_1,z_2),\end{cases}\tag{2.29}$$

де

$$F_1(x)=\beta G(x)\left[|1-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}B(\operatorname{sign}y_1^0)F(x,0)-1\right],$$

$$F_2(x)=\beta\left[|BF(x,0)|^{\sigma_1-1}K(x,0,0)\operatorname{sign}(1-\sigma_1)-BG(x)+M(x)\right],$$

$$A_{11}(x)=\beta G(x)\left[|1-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}B(\operatorname{sign}y_1^0)F'_{z_1}(x,0)\right],$$

$$A_{12}(x) = \beta G(x)\left[|1-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} BF(x,0)\operatorname{sign} y_1^0\right],$$

$$A_{21}(x) = \beta\left[B(\operatorname{sign} y_1^0)^{\sigma_1-1}|BF(x,0)|^{\sigma_1-2}F'_{z_1}(x,0)K(x,0,0)+\right].$$

$$+|BF(x,0)|^{\sigma_1-1}K'_{z_1}(x,0,0)\operatorname{sign}(1-\sigma_1),$$

$$A_{22}(x) = \beta F_2(x) - \beta BG(x) + \beta\left[(\sigma_1-1)|BF(x,0)|^{\sigma_1-1}K(x,0,0)+\right.$$

$$\left.+|BF(x,0)|^{\sigma_1-1}K'_{z_2}(x,0,0)\right]\operatorname{sign}(1-\sigma_1),$$

$$R_1(x,z_1,z_2) = \beta|1-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\frac{B}{\operatorname{sign} y_1^0}\left[F'_{z_1}(x,0)z_1z_2 + \frac{z_1^2}{2}F''_{z_1}(x,\theta_1)(1+z_2)\right],$$

$$R_2(x,z_1,z_2) = \beta\left[A_{21}(x)z_1z_2 + A_{22}(x)z_2^2\right] + \beta(1+z_2)\operatorname{sign}(1-\sigma_1)|B|^{\sigma_1-1}\times$$

$$\times\Big((1+z_2)^{\sigma_1-1}K(x,z_1,z_2)(\sigma_1-1)|F(x,z_2)|^{\sigma_1-3}\times$$

$$\times\left((\sigma_1-2)(F'_{z_1}(x,\theta_2))^2 + F(x,\theta_2)F''_{z_1}(x,\theta_2)\right)\frac{z_1^2}{2} + (\sigma_1-1)|F(x,0)|^{\sigma_1-2}\times$$

$$\times F'_{z_1}(x,0)\left(K(x,z_1,z_2)(1+z_2)^{\sigma_1-1} - K(x,0,0)\right)z_1+$$

$$+|F(x,0)|^{\sigma_1-1}(K(x,z_1,z_2)(\sigma_1-1)(\sigma_1-2)(1+\theta_5)^{\sigma_1-3}\frac{z_2^2}{2}+$$

$$+(1+(\sigma_1-1)z_2)\cdot\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}K''_{z_iz_j}(x,\theta_3,\theta_4)z_iz_j\Big),$$

де

$$|\theta_i| < |z_i| \le \frac{1}{2}, \quad (i=1,\ldots,5).$$

Враховуючи (2.28) і те, що функція $\varphi_1(z)$ задовольняє умову S_1, маємо

$$\theta_1\left(Y^{[1]}(t(x),0,0)\right) = \theta_1\left(|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\operatorname{sign} y_1^0\right)(1+o(1)), \quad \text{при } x\to+\infty$$

Звідси $\lim\limits_{x\to+\infty} K(x,0,0) = 1$ і $\lim\limits_{x\to+\infty} K'_{z_i}(x,0,0) = 0$ ($i \in \{1{,}2\}$). Тому в силу (2.27), умови (2.10) і (2.26) отримаємо, що

$$\lim_{x\to+\infty} F_i(x) = 0 \quad (i = 1, 2),$$

гранична матриця коефіцієнтів лінійної частини системи (2.29) має вигляд

$$A = \lim_{x\to+\infty} \begin{pmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\beta & -\beta \end{pmatrix}$$

і

$$\lim_{|z_1|+|z_2|\to 0} \frac{R_i(x,z_1,z_2)}{|z_1|+|z_2|} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad \text{рівномірно за } x \in [x_0, +\infty[.$$

Застосуємо тепер до системи (2.29) перетворення

$$z_2 = w_1, \quad z_1 = w_2 + Ch(x)w_1, \tag{2.30}$$

де w_1, w_2 — нові невідомі функції,

$$C = \frac{1}{1-\sigma_1}, \quad h(x) = \frac{\pi_\omega(t(x))J'(t(x))}{J(t(x))}. \tag{2.31}$$

Оскільки існує скінченна або нескінченна границя $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)p(t)}{I_1(t)}$, то в силу вигляду функції J третя з умов (2.10) означає, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)p(t)}{J(t)} = 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)J''(t)}{J'(t)} = -1.$$

Таким чином, з урахуванням (2.26) будемо мати

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{G(x)} = \sigma_1 - 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{h'(x)}{G(x)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\beta\left(1+\frac{\pi_\omega(t)J''(t)}{J'(t)} - \frac{\pi_\omega(t)J'(t)}{J(t)}\right) = 0. \tag{2.32}$$

В результаті перетворення (2.30) отримаємо, враховуючи (2.31) і (2.32), систему рівнянь:

$$\begin{cases} w_1' = F_2(x) + (A_{22}(x) + Ch(x)A_{21}(x))w_1 + A_{21}(x)w_2 + N_1(x, w_1, w_2), \\ w_2' = F_1(x) - Ch(x)F_2(x) + B_{21}(x)w_1 + B_{22}(x)w_2 + G(x)N_2(x, w_1, w_2), \end{cases} \tag{2.33}$$

де

$$N_1(x, w_1, w_2) = R_2(x, w_2 + Ch(x)w_1, w_1),$$

$$B_{21}(x) = Ch'(x) + A_{12}(x) + A_{22}(x)Ch(x) - A_{21}(x)(Ch(x))^2,$$

$$B_{22}(x) = A_{11}(x) - Ch(x)A_{21}(x),$$

$$N_2(x, w_1, w_2) = R_1(x, w_2 + Ch(x)w_1, w_1) - \frac{Ch(x)}{G(x)}R_2(x, w_2 + Ch(x)w_1, w_1).$$

Використовуючи властивості коефіцієнтів системи (2.29), (2.31) і (2.32), отримаємо, що

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F_2(x)}{A_{22}(x) + Ch(x)A_{21}(x)} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{F_1(x) + Ch(x)F_2(x)}{B_{22}(x)} = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{A_{22}(x) - Ch(x)A_{21}(x)} = -\beta, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{G(x)}{B_{22}(x)} = -\beta,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{A_{21}(x)}{A_{22}(x) - Ch(x)A_{21}(x)} = 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{B_{21}(x)}{B_{22}(x)} = 0, \quad \int_{x_0}^{+\infty}|A_{22}(x) + Ch(x)A_{21}(x)|\,dx = +\infty,$$

$$\int_{x_0}^{+\infty}|B_{22}(x)|\,dx = +\infty, \quad \text{оскільки } \int_{x_0}^{+\infty}|G(x)|\,dx = +\infty,$$

$$\lim_{|w_1|+|w_2|\to 0} \frac{N_i(x,w_1,w_2)}{|w_1|+|w_2|} = 0 \quad (i=1,2) \quad \text{рівномірно за } x \in [x_0,+\infty[.$$

Тоді згідно з теоремою 1.3 і зауваженням 1.4 з [26] система (2.33) має хоча б одне розв'язання $\{z_i^*(x)\}_{i=1}^2 : [x_1,+\infty[\to \mathbb{R}^2$ $(x_1 \geq x_0)$, що прямує до нуля при $x \to +\infty$. Йому в силу замін (2.23), (2.24) і перетворення (2.30) відповідає розв'язок y рівняння (0), що допускає при $t \uparrow \omega$ асимптотичні подання:

$$\Phi(y(t)) \sim |1-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} J(t)\,\mathrm{sign}\, y_1^0, \quad \frac{y'(t)}{y(t)} \sim \frac{(1-\sigma_1)J'(t)}{(1-\sigma_1-\sigma_0)J(t)}.$$

Ураховуючи (2.22), перше з них перепишемо у вигляді

$$\frac{y(t)}{|\varphi_0(y(t))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} \sim \frac{|1-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\,\mathrm{sign}\, y_1^0}{1-\sigma_1}(1-\sigma_0-\sigma_1)J(t) \quad \text{при } t\uparrow\omega.$$

Таким чином, y є зростаючим $P_\omega(Y_0,Y_1,0)$-розв'язком рівняння (0). Теорема 2.4 повністю доведена.

3 Приклад

Диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y')\exp(R(|\ln|yy'||)), \tag{3.1}$$

де $\alpha_0 \in -1{,}1$, $p : [a{,}\omega[\to\, ,]0,+\infty[$ $(-\infty < a < \omega \leq +\infty)$, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \to\, ,]0,+\infty[$ — неперервні функції, $Y_i \in 0,\pm\infty$ $(i=0{,}1)$, Δ_{Y_i} — одностороннє околення точки Y_i, кожна функція $\varphi_i(z)$ $(i=0{,}1)$ є регулярно змінною при $z \to Y_i$ $(z \in \Delta_{Y_i})$ порядку σ_i, $\sigma_0+\sigma_1 \neq 1$, $\sigma_1 \neq 0$. Функція $R :]0,+\infty[\to\, ,]0,+\infty[$ є неперервно диференційовною та регулярно змінною на нескінченності порядку μ, де $0 < \mu < 1$, при цьому похідна функції R монотонна.

Означення. Розв'язок y рівняння (3.1) називається $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ -розв'язком, якщо він визначений на $[t_0,\omega[\subset[a,\omega[$ і

$$\lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t)=Y_i \quad (i=0,1), \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{(y'(t))^2}{y(t)y''(t)}=\lambda_0.$$

Багато праць присвячено встановленню асимптотичних представлень $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ – розв'язків рівнянь виду (3.1), у яких $R\equiv 0$. $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ – розв'язки рівняння (3.1) є регулярно змінними функціями при $t\uparrow\omega$ порядку

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1},$$

якщо $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus 0{,}1$. Асимптотичні властивості та необхідні й достатні умови існування таких розв'язків наведено в [38].

Випадок $\lambda_0=0$ є одним із найскладніших, оскільки в цьому випадку такі розв'язки є повільно змінними функціями при $t\uparrow\omega$. У цій роботі наведено деякі результати щодо асимптотичних властивостей та існування $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ – розв'язків рівняння (3.1) у цьому особливому випадку.

Ми кажемо, що повільно змінна при $z\to Y$ $(z\in\Delta_Y)$ функція $\theta:\Delta_Y\to$ $,]0,+\infty[$ задовольняє умову S, якщо для будь-якої неперервно диференційовної функції $L:\Delta_Y\to,]0,+\infty[$, для якої виконується

$$\lim_{\substack{z\to Y\\ z\in\Delta_Y}}\frac{zL'(z)}{L(z)}=0,$$

має місце рівність

$$\Theta(zL(z))=\Theta(z)(1+o(1)) \quad \text{при } z\to Y,\ z\in\Delta_Y.$$

Допоміжні позначення:

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } \omega = +\infty, \\ t-\omega, & \text{якщо } \omega < +\infty, \end{cases} \qquad \Theta_i(z) = \varphi_i(z)\,|z|^{-\sigma_i}, \quad (i=0,1),$$

$$I(t) = \alpha_0 \int\limits_{A_\omega}^{t} p(\tau)\,d\tau, \qquad A_\omega = \begin{cases} a, & \text{якщо } \int\limits_a^\omega p(\tau)\,d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int\limits_a^\omega p(\tau)\,d\tau < +\infty. \end{cases}$$

У випадку, якщо $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \frac{\operatorname{sign} y_0^1}{|\pi_\omega(t)|} = Y_1$, вводимо позначення:

$$J(t) = \int\limits_{B_\omega}^{t} \left| I(\tau)\Theta_1\left(\frac{\operatorname{sign} y_0^1}{|\pi_\omega(t)|}\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} d\tau,$$

де

$$B_\omega = \begin{cases} b, & \text{якщо } \int\limits_b^\omega \left| I(\tau)\,\Theta_1\left(\frac{\operatorname{sign} y_0^1}{|\pi_\omega(t)|}\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int\limits_b^\omega \left| I(\tau)\,\Theta_1\left(\frac{\operatorname{sign} y_0^1}{|\pi_\omega(t)|}\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} d\tau < +\infty, \end{cases}$$

Визначимо також функцію:

$$N(t) = \frac{(1-\sigma_1)I(t)\left|(1-\sigma_1)I(t)\Theta_1\left(\frac{y_1^0}{|\pi_\omega(t)|}\right)\right|^{\frac{1}{\sigma_1-1}}}{I'(t)R'\left(|\ln|\pi_\omega(t)||\right)}.$$

Теорема 3.1. Нехай у рівнянні (3.1) функція $\varphi_1(y')$ задовольняє умову

S і виконується умова

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{R(|\ln|\pi_\omega(t)||),J(t)}{\pi_\omega(t)\ln|\pi_\omega(t)|,J'(t)}=0. \tag{3.2}$$

Тоді необхідними і достатніми умовами існування $P_\omega(Y_0,Y_1,0)$-розв'язків рівняння (3.1) є виконання співвідношень:

$$\lim_{t\uparrow\omega}y_0^0|J(t)|^{\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}=Y_0,\quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{J'(t)}{y_1^0|J(t)|}=Y_1,\quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)}=\sigma_1-1,$$

$$\frac{I(t)}{y_1^0(1-\sigma_1)}>0\quad \text{при } t\in]a,\omega[,\qquad \frac{y_0^0y_1^0(1-\sigma_1)J(t)}{1-\sigma_0-\sigma_1}>0\quad \text{при } t\in]b,\omega[.$$

Для таких розв'язків виконуються наступні асимптотичні представлення при $t\uparrow\omega$:

$$\frac{y(t)}{|\exp\left(R\left(|\ln|y(t)y'(t)||\right)\right)\varphi_0(y(t))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}=\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}|1-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}J(t)[1+o(1)],$$

$$\frac{y(t)}{y'(t)}=\frac{(1-\sigma_0-\sigma_1)J(t)}{(1-\sigma_1)J'(t)}[1+o(1)].$$

Теорема 3.2. Нехай у теоремі 3.1 умова (3.2) не виконується, але функція φ_1 задовольняє умову S, функція p є двічі неперервно диференційовною, і має місце умова

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)N'(t)}{R'\left(|\ln|\pi_\omega(t)||\right)N(t)}=0. \tag{3.3}$$

Тоді необхідними й достатніми умовами існування $P_\omega(Y_0,Y_1,0)$-розв'язків рівняння (3.1), для яких існує скінченна або нескінченна границя

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)},$$

є виконання таких співвідношень:

$$\lim_{t\uparrow\omega} y_0^0 \left(\exp\left(R(|\ln|\pi_\omega(t)||)\right)\right)^{\frac{\sigma_1-1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} = Y_0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{-\alpha_0}{\pi_\omega(t)} = Y_1,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) I'(t)}{I(t)} = \frac{\sigma_1 - 1}{\alpha_0}$$

$$\alpha_0 y_1^0 \pi_\omega(t) < 0, \qquad \alpha_0(1-\sigma_1)(1-\sigma_0-\sigma_1) y_0^0 R'\left(|\ln|\pi_\omega(t)||\right) > 0.$$

Для таких розв'язків виконуються наступні асимптотичні представлення при $t \uparrow \omega$:

$$\frac{y(t)}{\left|\varphi_0(y(t)) \exp\left(R\left(|\ln|y(t)y'(t)||\right)\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} = \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1} N(t)[1+o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{I'(t) R'\left(|\ln|\pi_\omega(t)||\right)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)(1-\sigma_1) I(t)}[1+o(1)].$$

Теорема 3.3. Нехай у теоремі 3.1 умова (3.2) не виконується, але функція φ_1 задовольняє умову S, функція p є двічі неперервно диференційовною і має місце умова

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) N'(t)}{R'\left(|\ln|\pi_\omega(t)||\right) N(t)} = M \in \mathbb{R} \setminus 0{,}1.$$

Тоді необхідними й достатніми умовами існування $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язків рівняння (3.1), для яких існує скінченна або нескінченна границя

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)},$$

є виконання таких співвідношень:

$$\lim_{t\uparrow\omega} y_0^0 \left(\exp\left(R(|\ln|\pi_\omega(t)||)\right)\right)^{\frac{\sigma_1-1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} = Y_0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{-\alpha_0}{\pi_\omega(t)} = Y_1,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) I'(t)}{I(t)} = \frac{\sigma_1 - 1}{\alpha_0}$$

$$\alpha_0 y_1^0 \pi_\omega(t) < 0, \qquad \alpha_0(1-M)(1-\sigma_1)(1-\sigma_0-\sigma_1) y_0^0 R'\left(|\ln|\pi_\omega(t)||\right) > 0.$$

Для таких розв'язків виконуються наступні асимптотичні представлення при $t \uparrow \omega$:

$$\frac{y(t)}{|\varphi_0(y(t))\exp\left(R\left(|\ln|y(t)y'(t)||\right)\right)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} = \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{(1-\sigma_1)(1-M)} N(t)[1+o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{I'(t)R'\left(|\ln|\pi_\omega(t)||\right)(1-M)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)(1-\sigma_1)I(t)}[1+o(1)].$$

Розглянемо деякий конкретніший клас диференціальних рівнянь виду (3.1) та застосуємо до нього теореми 3.1, 3.2 і 3.3. Диференціальне рівняння:

$$y'' = mt^{\sigma_1-2}\exp(k\ln^\gamma t), |y|^{\sigma_0}|y'|^{\sigma_1}\exp\left((|\ln|yy'||)^\mu\right), \tag{3.4}$$

що розглядається на інтервалі $[t_0; +\infty[$ $(t_0 > 0)$, де $m \in]-\infty, 0[$, $k \in]0, +\infty[$, $\gamma, \mu \in]0{,}1[$, $\sigma_0, \sigma_1 \in \mathbb{R}$, $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$, $\sigma_1 \neq 1$, є рівнянням виду (3.1), у якому: $\alpha_0 = \operatorname{sign} m = -1$, $p(t) = mt^{\sigma_1-2}\exp(k\ln^\gamma t)$, $\varphi_0(y) = |y|^{\sigma_0}$, $\varphi_1(y') = |y'|^{\sigma_1}$, $R(z) = z^\mu$.

Функція φ_1 задовольняє умову S.

Розглянемо випадок $\omega = Y_0 = Y_1 = +\infty$.

Згідно з теоремою 3.1, якщо $\mu - \gamma < 0$, то необхідною й достатньою умовою існування $P_{+\infty}(+\infty, +\infty, 0)$-розв'язків рівняння (3.4) є:

$$1 - \sigma_0 - \sigma_1 > 0. \tag{3.5}$$

Крім того, для кожного такого розв'язку виконуються такі асимптотичні представлення при $t \to +\infty$:

$$y^{\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}} \exp\left(\frac{|\ln|y(t)y'(t)||^\mu}{\sigma_1 - 1}\right) = \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{\gamma k}\exp\left(\frac{k\ln^\gamma t}{1-\sigma_1}\right)\ln^{1-\gamma} t[1+o(1)],$$

$$\frac{y(t)}{y'(t)} = \frac{(1-\sigma_0-\sigma_1), \gamma k}{(1-\sigma_1)^2} \cdot \frac{\ln^{\gamma-1} t}{t}[1+o(1)].$$

Розглянемо тепер випадок $\mu - \gamma > 0$. Тоді згідно з теоремою 3.2, для існування $P_{+\infty}(+\infty, +\infty, 0)$-розв'язків рівняння (3.4) умова (3.5) також є необхідною й достатньою.

Кожен такий розв'язок задовольняє наступні асимптотичні представлення при $t \to +\infty$:

$$y^{\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}} \exp\left(\frac{|\ln|y(t)y'(t)||^{\mu}}{\sigma_1 - 1}\right) = \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{\mu(1-\sigma_1)} \exp\left(\frac{k\ln^{\gamma} t}{1-\sigma_1}\right) \ln^{1-\mu} t[1+o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\mu}{\sigma_0+\sigma_1-1} t^{\sigma_1-2} \ln^{\gamma-1} t[1+o(1)].$$

Розглянемо нарешті випадок $\mu = \gamma$. Тоді, згідно з теоремою 3.3, для існування $P_{+\infty}(+\infty, +\infty, 0)$-розв'язків рівняння (3.4) необхідними й достатніми є умови (3.5) та:

$$(1-\sigma_1-k)(1-\sigma_1) > 0.$$

Кожен такий розв'язок задовольняє такі асимптотичні представлення при $t \to +\infty$:

$$y^{\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}} \exp\left(\frac{|\ln|y(t)y'(t)||^{\mu}}{\sigma_1 - 1}\right) = \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{\mu(1-\sigma_1-k)} \exp\left(\frac{k\ln^{\gamma} t}{1-\sigma_1}\right) \ln^{1-\mu} t[1+o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\mu(1-\sigma_1-k)}{(\sigma_0+\sigma_1-1)(1-\sigma_1)} t^{\sigma_1-2} \ln^{\gamma-1} t[1+o(1)].$$

ВИСНОВКИ

В роботі розглянуто достатньо широкий клас істотно нелінійних диференціальних рівнянь з правильно змінними нелінійностями.

Опановано основні методи дослідження таких рівнянь. Наведено конкретні приклади, які ілюструють результати роботи.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1) Беллман Р. *Теорія стійкості розв'язків диференціальних рівнянь* [текст] / Р. Беллман ; пер. з англ. — М. : ІЛ, 1954. — 216 с.
2) Сансоне Дж. *Звичайні диференціальні рівняння* [текст] / Дж. Сансоне ; пер. з італ. — М. : ІЛ, 1954. — Т. 2. — 415 с.
3) Atkinson F.V. *On second-order non-linear oscillations* [text] / F.V. Atkinson // Pacific J. Math. — 1955. — Vol. 5, No. 1. — P. 643–647.
4) Кігурадзе І.Т. *Про асимптотичні властивості розв'язків рівняння* $u'' + a(t)u^n = 0$ [текст] / І.Т. Кігурадзе // Повід. АН ГРСР. — 1963. — Т. 30, № 2. — С. 129–136.
5) Кігурадзе І.Т. *Про неколивальні розв'язки рівняння* $u''+a(t)|u|^n \operatorname{sign} u = 0$ [текст] / І.Т. Кігурадзе // Повід. АН ГРСР. — 1964. — Т. 35, № 1. — С. 15–22.
6) Кігурадзе І.Т. *Асимптотичні властивості розв'язків одного нелінійного диференціального рівняння типу Емдена–Фаулера* [текст] / І.Т. Кігурадзе // Вісн. АН СРСР. Сер. мат. — 1965. — Т. 29, № 5. — С. 965–986.
7) Кігурадзе І.Т., Чантурія Т.А. *Асимптотичні властивості розв'язків неавтономних звичайних диференціальних рівнянь* [текст] / І.Т. Кігурадзе, Т.А. Чантурія. — М. : Наука, 1990. — 430 с.
8) Кігурадзе І.Т. *Про асимптотичну поведінку розв'язків нелінійного неавтономного звичайного диференціального рівняння* [текст] / І.Т. Кігурадзе // Qual. Theory Differ. Equations. — Vol. 1. — Amsterdam та ін., 1981. — С. 507–554.
9) Костін О.В. *Стійкість і асимптотика майже трикутних систем* : дис. ... канд. фіз.-мат. наук : 01.01.02 / Костін Олександр Васильович. — Київ, 1962. — 108 с.
10) Костін О.В. *До питання про існування в системах звичайних диференціальних рівнянь обмежених часткових розв'язків, що прямують до нуля при* $t \to +\infty$ / О.В. Костін // Диференц. рівняння. — 1965. — Т. 1, № 5. — С. 585–604.

11) Костін О.В. *Про асимптотику продовжуваних розв'язків рівнянь типу Емдена–Фаулера* [текст] / О.В. Костін // Доп. АН СРСР. — 1971. — Т. 200, № 1. — С. 28–31.

12) Євтухов В.М. *Про одне нелінійне диференціальне рівняння другого порядку* [текст] / В.М. Євтухов // Доп. АН СРСР. — 1977. — Т. 233, № 4. — С. 531–534.

13) Євтухов В.М. *Асимптотична поведінка розв'язків одного нелінійного диференціального рівняння другого порядку типу Емдена–Фаулера* : дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02 [текст] / Євтухов В'ячеслав Михайлович. — Одеса, 1980. — 119 с.

14) Євтухов В.М. *Асимптотичні представлення розв'язків одного класу нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку* [текст] / В.М. Євтухов // Повід. АН ГРСР. — 1982. — Т. 106, № 3. — С. 473–476.

15) Євтухов В.М. *Асимптотичні властивості розв'язків одного класу диференціальних рівнянь другого порядку* [текст] / В.М. Євтухов // Math. Nachr. — 1984. — Bd. 115. — P. 215–236.

16) Євтухов В.М. *Асимптотичні властивості монотонних розв'язків одного класу нелінійних диференціальних рівнянь 1-го порядку* [текст] / В.М. Євтухов // Доп. розшир. засідання семінару Ін-ту прикл. мат. ім. І.Н. Векуа ТГУ. — 1988. — Т. 3, № 3. — С. 62–65.

17) Євтухов В.М. *Асимптотика розв'язків одного напівлінійного диференціального рівняння другого порядку* [текст] / В.М. Євтухов // Диференц. рівняння. — 1990. — Т. 26, № 5. — С. 776–787.

18) Євтухов В.М. *Асимптотичні представлення монотонних розв'язків нелінійного диференціального рівняння типу Емдена–Фаулера 1-го порядку* [текст] / В.М. Євтухов // Доп. АН Росії. — 1992. — Т. 324, № 2. — С. 258–260.

19) Євтухов В.М. *Про один клас монотонних розв'язків нелінійного диференціального рівняння 1-го порядку типу Емдена–Фаулера* [текст] / В.М. Євтухов // Повід. АН Грузії. — 1992. — Т. 145, № 2. — С. 269–273.

20) Євтухов В.М. *Асимптотичні представлення розв'язків неавтономних звичайних диференціальних рівнянь* : дис. ... д-р фіз.-мат. наук: 01.01.02

[текст] / Євтухов В'ячеслав Михайлович. — Київ, 1998. — 295 с.

21) Євтухов В.М., Шебаніна Є.В. *Асимптотичні представлення розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку* [текст] // Диференц. рівняння. — 1997. — Т. 33, № 6. — С. 858.

22) Євтухов В.М. *Асимптотичні властивості розв'язків диференціальних рівнянь 3-го порядку* [текст] / В.М. Євтухов // Укр. мат. конгрес. Зб. вибр. праць. — Київ, 2003. — С. 15–33.

23) Євтухов В.М. *Про зникнення на нескінченності розв'язків речовинних неавтономних систем квазілінійних диференціальних рівнянь* [текст] / В.М. Євтухов // Диференц. рівняння. — 2003. — Т. 39, № 4. — С. 441–452.

24) Євтухов В.М., Білозерова М.А. *Асимптотика розв'язків одного класу істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку* [текст] // Диференціальні рівняння та їх застосування : Міжнар. конф., Київ, 6–9 червня 2005 р. — С. 9.

25) Євтухов В.М., Білозерова М.А. *Асимптотичні представлення розв'язків істотно нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь другого порядку* [текст] // Укр. мат. журн. — 2008. — Т. 60, № 3. — С. 310–331.

26) Євтухов В.М., Кириллова Л.А. *Про асимптотику розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку* [текст] // Диференц. рівняння. — 2005. — Т. 41, № 8. — С. 1053–1061.

27) Evtukhov V.M. *Asymptotic representations of solutions of ordinary differential equations of n-th order* [text] / V.M. Evtukhov // Mem. Differential Equations Math. Phys. — Tbilisi, 2001. — Vol. 21, № 1–4. — P. 140–145.

28) Evtukhov V.M., Kirillova L.A. *Asymptotic representations for unbounded solutions of second order nonlinear differential equations close to equations of Emden–Fowler type* [text] // Mem. Differential Equations Math. Phys. — Tbilisi: Georgian Academy of Sciences, 2003. — Vol. 30. — P. 153–158.

29) Evtukhov V.M., Vishnyakov V.I., Dragan G.S. *Nonlinear Poisson–Boltzmann equation in spherical symmetry* [text] // Physical Review. — 2007. — E76, № 3. — P. 1–5.

30) Taliaferro S.D. *Asymptotic behavior of solutions of* $y'' = \Phi(t)f(y)$ [text] / S.D. Taliaferro // SIAM J. Math. Anal. — 1981. — Vol. 12. — P. 853–865.

31) Ізобов Н.А. *Про продовжувані і неподовжувані розв'язки нелінійного диференціального рівняння довільного порядку* [текст] / Н.А. Ізобов // Матем. замітки. — 1984. — Т. 35, № 6. — С. 829–839.

32) Ізобов Н.А. *Про кнезеровські розв'язки* [текст] / Н.А. Ізобов // Диференц. рівняння. — 1985. — Т. 21, № 4. — С. 581–588.

33) Вишняков В.І. *Розподіл електростатичного потенціалу в сферично симетричній плазмі* [текст] / В.І. Вишняков, Г.С. Драган, В.М. Євтухов, С.В. Маргащук // Теплофізика високих температур. — 1987. — Т. 25, № 3. — 620 с. — Деп. у ВІНІТІ 13.12.86, № 8791. — 17 с.

34) Кириллова Л.О. *Асимптотичні властивості розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку, які близькі до рівнянь типу Емдена–Фаулера* [текст] / Л.О. Кириллова // Науковий вісник Чернівецького університету. — Чернівці: «Рута», 2004. — Вип. 228. — С. 30–35.

35) Кириллова Л.А. *Про асимптотику розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку* [текст] / Л.А. Кириллова // Нелінійні коливання. — 2005. — Т. 8, № 1. — С. 18–28.

36) Maric V., Tomic M. *Regular variation and asymptotic properties of solutions of nonlinear differential equations* [text] / V. Maric, M. Tomic // Publ. Inst. Math. — 1977. — Vol. 21, № 35. — P. 119–129.

37) Maric V., Tomic M. *Asymptotics of solutions of generalised Thomas–Fermi equation* [text] / V. Maric, M. Tomic // J. Differ. Equations. — 1980. — Vol. 35. — P. 36–44.

38) Belozerova M.A., Gerzhanovskaya G.A. *Asymptotic representations of solutions of second order differential equations with nonlinearities close to regularly varying* // Mat. Stud. — 2015. — No. 44. — P. 204–214.

39) Seneta E. *Regularly varying functions* // Lecture Notes in Mathematics. — Vol. 508. — Berlin: Springer-Verlag, 1976.

40) Belozerova M.A. *Asymptotic representations of solutions of differential equations of the second order with nonlinearities, that are in some sense close to power nonlinearities* // Науковий вісник Чернівецького університету. — Чернівці: «Рута», 2008. — Вип. 374. — С. 34–43.