

МЕХАНІКА

УДК 531.55:521.2

Л. Д. Акуленко*, Я. С. Зинкевич**, А. Л. Рачинская***,
Д. Д. Лещенко**

*Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлинского
Российской Академии наук

**Одесская государственная академия строительства и архитектуры

***Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ВРАЩЕНИЯ СПУТНИКА С ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРАВИТАЦИОННОГО И СВЕТОВОГО МОМЕНТОВ

Акуленко Л. Д., Зінкевич Я. С., Рачинська А. Л., Лещенко Д. Д. **Обертання супутника з порожниною, заповненою в'язкою рідиною, під дією гравітаційного та світлового моментів.** Досліджується швидкий обертальний рух відносно центру мас несиметричного супутника з порожниною, заповненою в'язкою рідиною, при малих числах Рейнольдса під дією гравітаційного і світлового моментів. Орбітальні рухи навколо Сонця з довільним ексцентриситетом вважаються заданими. Аналізується система, яка отримана після усереднення по руху Ейлера – Пуансо та модифікованого методу усереднення. Встановлено, що під впливом моменту сил в'язкої рідини в порожнині відбувається еволюція кінетичної енергії тіла. Проведено чисельний аналіз у загальному випадку і аналітичне дослідження в околі осевого обертання. **Ключові слова:** супутник, гравітаційний і світловий моменти, усереднення.

Акуленко Л. Д., Зинкевич Я. С., Рачинская А. Л., Лещенко Д. Д. **Вращения спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, под действием гравитационного и светового моментов.** Исследуется быстрое вращательное движение относительно центра масс динамически несимметричного спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса, под действием гравитационного и светового моментов. Орбитальные движения с произвольным эксцентриситетом считаются заданными. Анализируется система, полученная после усреднения по движению Эйлера – Пуансо и применения модифицированного метода усреднения. Проведен численный анализ в общем случае и аналитическое исследование в окрестности осевого вращения.

Ключевые слова: спутник, гравитационный и световой моменты, усреднение.

Akulenko L. D., Zinkevich Ya. S., Rachinskaya A. L., Leshchenko D. D. **Rotations of a satellite with cavity filled with a viscous fluid under the action of gravitational and light torques.** We investigate fast rotational motion of dynamically asymmetric satellite with cavity filled with a viscous fluid under the action of gravitational and light torques. Orbital motions with arbitrary eccentricity are assumed to be set. The system obtained after the averaging with respect to Euler – Poinsot motion and application the modified averaging method is analyzed. The numerical analysis in general case and analytical analysis is conducted in neighborhood of axial rotation.

Key words: satellite, gravitation and light moments, resistance, averaging.

ВВЕДЕНИЕ. Рассмотрено движение спутника относительно центра масс под действием момента сил светового давления в гравитационном поле. Тело содержит полость, целиком заполненную сильно вязкой однородной жидкостью. Вращательные движения рассматриваются в рамках модели квазитвердого тела, центр масс которого движется по заданной фиксированной эллиптической орбите вокруг Солнца [1]. Задачи динамики, обобщенные и осложненные учетом различных возмущающих факторов, и в настоящее время остаются достаточно актуальными. Исследованиям вращательных движений тел относительно центра масс под действием возмущающих моментов сил различной природы (гравитационных, светового давления, влияния полости, заполненной вязкой жидкостью, и др.), близким к приведенному ниже, посвящены работы [1–15].

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

1. Постановка задачи. Введем три декартовы системы координат, начало которых совместим с центром инерции спутника [2, 3]. Система Ox_i ($i = 1, 2, 3$) движется поступательно вместе с центром инерции: ось Ox_1 параллельна радиус-вектору перигелия орбиты, ось Ox_2 – вектору скорости центра масс спутника в перигелии, ось Ox_3 – нормали к плоскости орбиты. Система координат Oy_i ($i = 1, 2, 3$) связана с вектором кинетического момента $\mathbf{G}$. Ось Oy_3 направлена по вектору кинетического момента $\mathbf{G}$, ось Oy_2 лежит в плоскости орбиты (т. е. в плоскости Ox_1x_2), ось Oy_1 лежит в плоскости Ox_3y_3 и направлена так, что векторы $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ образуют правую тройку [2–4]. Оси системы координат Oz_i ($i = 1, 2, 3$) связаны с главными центральными осями инерции твердого тела. Взаимное положение главных центральных осей инерции и осей Oy_i определим углами Эйлера. При этом направляющие косинусы α_{ij} осей Oz_i относительно системы Oy_i выражаются через углы Эйлера φ, ψ, θ по известным формулам [2]. Положение вектора кинетического момента $\mathbf{G}$ относительно его центра масс в системе координат Ox_i определяется углами λ и δ , как показано в [2–4].

Уравнения движения тела относительно центра масс запишем в форме [3]:

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= L_3, & \frac{d\delta}{dt} &= \frac{L_1}{G}, & \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{L_2}{G \sin \delta}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= G \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) + \frac{L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi}{G}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= G \cos \theta \left(\frac{1}{A_3} - \frac{\sin^2 \varphi}{A_1} - \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) + \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G \sin \theta}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = G \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) - \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G} \operatorname{ctg} \theta - \frac{L_2}{G} \operatorname{ctg} \delta.$$

Здесь L_i моменты приложенных сил относительно осей Oy_i , G — величина кинетического момента, A_i ($i = 1, 2, 3$) — главные центральные моменты инерции относительно осей Oz_i .

В некоторых случаях удобно наряду с переменной θ использовать в качестве дополнительной переменной важную характеристику — кинетическую энергию

T , производная которой имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} = \frac{2T}{G} L_3 + G \sin \theta \left[\cos \theta \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} - \frac{1}{A_3} \right) (L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi) + \right. \\ \left. + \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) (L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Центр масс спутника движется по кеплеровскому эллипсу с эксцентриситетом e и частотой обращения ω_0 . Зависимость истинной аномалии ν от времени t дается соотношением

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\omega_0(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{Q} = \sqrt{\frac{\mu(1 - e^2)^3}{\ell_0^3}}. \quad (3)$$

Здесь ℓ_0 — фокальный параметр орбиты, ω_0 — угловая скорость орбитального движения, e — эксцентриситет орбиты, μ — гравитационная постоянная.

Проекция L_i момента приложенных сил складывается из момента сил светового давления L_i^c , момента сил вязкой жидкости в полости L_i^p и из гравитационного момента L_i^g .

Допустим, что поверхность космического аппарата представляет собой поверхность вращения, причем единичный орт оси симметрии $\mathbf{k}$ направлен вдоль оси Oz_3 . Как показано в [2, 5], в этом случае для момента сил светового давления L_i^c , действующего на спутник, имеет место формула

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^c = (a_c(\varepsilon_s) R_0^2 / R^2) \mathbf{e}_r \times \mathbf{k}, \\ a_c(\varepsilon_s) \frac{R_0^2}{R^2} = p_c S(\varepsilon_s) Z'_0(\varepsilon_s), \quad p_c = \frac{E_0}{c} \left(\frac{R_0}{R} \right)^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{e}_r$ — единичный вектор по направлению радиус-вектора орбиты; ε_s — угол между направлениями $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{k}$ так, что $|\mathbf{e}_r \times \mathbf{k}| = \sin \varepsilon_s$; R — текущее расстояние от центра Солнца до центра масс спутника; R_0 — фиксированное значение R , например, в начальный момент времени; $a_c(\varepsilon_s)$ — коэффициент момента сил светового давления, определяемый свойствами поверхности; S — площадь “тени” на плоскости, нормальной к потоку; Z'_0 — расстояние от центра масс до центра давления; p_c — величина светового давления на расстоянии R от центра Солнца; c — скорость света; E_0 — величина потока энергии светового давления на расстоянии R_0 от центра Солнца.

Здесь приведена проекция на ось Oy_1 гравитационного момента, на другие оси проекции имеют аналогичный вид и получаются ротацией индексов (сдвигом)

$$\begin{aligned} L_1^g = \frac{3\omega_0^2(1 + e \cos \nu)^3}{(1 - e^2)^3} \sum_{j=1}^3 (\beta_2 \beta_j S_{3j} - \beta_3 \beta_j S_{2j}), \\ S_{mj} = \sum_{p=1}^3 A_p \alpha_{jp} \alpha_{mp}, \quad \beta_1 = \cos(\nu - \lambda) \cos \delta, \\ \beta_2 = \sin(\nu - \lambda), \quad \beta_3 = \cos(\nu - \lambda) \sin \delta. \end{aligned} \quad (5)$$

Проекция момента сил сильно вязкой жидкости в полости L_i^p на оси Oy_i ($i = 1, 2, 3$) имеют вид [1]:

$$L_i^p = \frac{P}{A_1 A_2 A_3} \left\{ \omega \bullet \mathbf{B} + \left(a_c (\cos \varepsilon_s) \frac{R_0^2}{R^2} \mathbf{C} + \frac{3\mu}{R^3} (\mathbf{D} + \mathbf{S}) \right) \bullet \alpha \right\} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (6)$$

где

$$\omega = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{i1} \\ \alpha_{i2} \\ \alpha_{i3} \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} A_2 A_3 (A_3 - A_2) \{-\gamma_{31} \gamma_{33} r + \alpha^* (F_1 p_{\alpha 1} + M_1 p_{\alpha 2})\} \\ A_1 A_3 (A_1 - A_3) \{-\gamma_{32} \gamma_{33} r + \alpha^* (F_2 p_{\alpha 1} + M_2 p_{\alpha 2})\} \\ (A_2 - A_1) \{(\gamma_{32}^2 - \gamma_{31}^2) r - \alpha^* (F_3 p_{\alpha 1} + M_3 p_{\alpha 2})\} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \gamma_{31} \gamma_{33} \alpha_{33} + \beta_{\alpha 1} \gamma_{33} + \beta_{\alpha 2} \gamma_{32} \\ \gamma_{32} \gamma_{33} \alpha_{33} + \beta_{\alpha 3} \gamma_{33} + \beta_{\alpha 2} \gamma_{31} \\ (\gamma_{32}^2 - \gamma_{31}^2) \alpha_{33} + \beta_{\alpha 3} \gamma_{32} + \beta_{\alpha 1} \gamma_{31} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \gamma_{33}^2 \alpha_{32} + \gamma_{32} \gamma_{33} \alpha_{33} - \gamma_{32} \beta_3 \\ \gamma_{33}^2 \alpha_{31} + \gamma_{31} \gamma_{33} \alpha_{33} - \gamma_{31} \beta_3 \\ \gamma_{33} [\gamma_{32} \alpha_{31} + \gamma_{31} \alpha_{32}] \end{pmatrix}, \quad \alpha^* = \frac{1}{1 - \alpha_{33}^2},$$

$$C_1 = A_3 [A_2 \alpha^* (p_{\alpha 1} (\gamma_{31} \alpha_{33} - \alpha_{22} \beta_1 + \alpha_{12} \beta_2) + \alpha_{32} \gamma_{33} p_{\alpha 2}) - r \gamma_{31} (A_1 + A_3)],$$

$$C_2 = A_3 [A_1 \alpha^* (p_{\alpha 1} (\alpha_{11} \beta_2 - \alpha_{33} \gamma_{32} - \alpha_{21} \beta_1) + \alpha_{31} \gamma_{33} p_{\alpha 2}) + r \gamma_{32} (A_2 + A_3)],$$

$$C_3 = q \gamma_{32} A_2 (A_1 - A_2 - A_3) + p \gamma_{31} A_1 (A_1 - A_2 + A_3),$$

$$S_1 = \gamma_{31} [\gamma_{33} r A_3 (A_1 A_2 - A_1^2 - A_2 A_3 + A_3^2) + \\ + \gamma_{32} q A_2 (A_1 A_3 - A_1^2 - A_2 A_3 + A_2^2)],$$

$$S_2 = \gamma_{32} [\gamma_{31} p A_1 (A_3 A_2 - A_2^2 - A_1 A_3 + A_1^2) + \\ + \gamma_{33} r A_3 (A_1 A_2 - A_2^2 - A_1 A_3 + A_3^2)],$$

$$S_3 = \gamma_{33} [\gamma_{32} q A_2 (A_1 A_3 - A_3^2 - A_1 A_2 + A_2^2) + \\ + \gamma_{31} p A_1 (A_2 A_3 - A_3^2 - A_1 A_2 + A_1^2)],$$

$$\gamma_{3i} = \beta_1 \alpha_{1i} + \beta_2 \alpha_{2i} + \beta_3 \alpha_{3i} \quad (i = 1, 2, 3), \quad p_{\alpha 1} = p \alpha_{31} + q \alpha_{32},$$

$$\beta_{\alpha 1} = -\alpha_{22} \beta_1 + \alpha_{12} \beta_2, \quad \beta_{\alpha 2} = -\alpha_{23} \beta_1 + \alpha_{13} \beta_2, \quad \beta_{\alpha 3} = -\alpha_{21} \beta_1 + \alpha_{11} \beta_2,$$

$$B_1 = [\omega_2^2 A_2 (A_1 - A_2) (A_2 - A_3 + A_1) + \omega_3^2 A_3 (A_1 - A_3) (A_3 - A_2 + A_1)] \alpha_{i1},$$

B_2, B_3 имеют аналогичный вид и получаются ротацией индексов (сдвигом).

Здесь α_{ij} — направляющие косинусы между системами координат Oy_i ($i = 1, 2, 3$) и Oz_i ($i = 1, 2, 3$), p, q, r — проекции на оси Oz_i ($i = 1, 2, 3$) вектора абсолютной угловой скорости ω спутника относительно системы координат $Ox_1 x_2 x_3$.

Величина $\tilde{P}$ — тензор, зависящий только от формы полости, характеризует диссипативный момент сил, обусловленный вязкой жидкостью, в квазистатическом приближении [1]. Для простоты в уравнениях (6) рассмотрен так называемый скалярный тензор, определенный одной скалярной величиной $P > 0$; компоненты которого имеют вид $\tilde{P}_{ij} = P \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символы Кронекера (такой вид тензор $\tilde{P}$ имеет, например, в случае сферической полости). Если форма полости существенно отличается от сферической, то определение компонент тензора представляет значительные вычислительные трудности.

Рассматривается динамически несимметричный спутник, моменты инерции которого для определенности удовлетворяют неравенству $A_1 > A_2 > A_3$, в предположении, что угловая скорость ω движения спутника относительно центра масс существенно больше угловой скорости орбитального движения ω_0 , т. е. $\varepsilon = \omega_0/\omega \sim A_1\omega_0/G \ll 1$. В этом случае кинетическая энергия вращения тела велика по сравнению с моментами возмущающих сил.

В работе предполагается, что в полости находится жидкость большой вязкости, т. е. $\vartheta \gg 1$ ($\vartheta^{-1} \sim \varepsilon^2$), форма полости сферическая, тогда [1]

$$\tilde{P} = P \text{diag}(1, 1, 1), \quad P = \frac{8\pi\rho b_0^7}{525\vartheta}. \quad (7)$$

Здесь ρ, ϑ — плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости в полости соответственно, b_0 — радиус полости.

Полагаем [2], что в силу симметрии соответствующая функция имеет вид $a_c = a_c(\cos \varepsilon_s)$ и аппроксимируем ее тригонометрическим полиномом по степеням $\cos \varepsilon_s$. Представим функцию $a_c(\cos \varepsilon_s)$ в виде $a_c = a_0 + a_1 \cos \varepsilon_s + \dots$. Рассмотрим второй член разложения, когда $a_c(\cos \varepsilon_s) = a_1 \cos \varepsilon_s$ в предположении, что $a_1 \sim \varepsilon$.

С учетом рассмотренных выше предположений видно, что второе слагаемое (с коэффициентом $a_c(\cos \varepsilon_s)$) в формуле проекции момента сил вязкой жидкости в полости (6) имеет порядок ε^3 . Гравитационная постоянная μ пропорциональна квадрату угловой скорости орбитального движения ω_0 , т. е. $\mu \sim \varepsilon^2$. Значит, с точностью до величин второго порядка малости ($P \sim \varepsilon^2$) проекции момента сил вязкой жидкости в полости имеют вид:

$$\begin{aligned} L_i^P &= \frac{P}{A_1 A_2 A_3} \times \\ &\times \{ p [q^2 A_2 (A_1 - A_2)(A_2 - A_3 + A_1) + r^2 A_3 (A_1 - A_3)(A_3 - A_2 + A_1)] \alpha_{i1} + \\ &+ q [r^2 A_3 (A_2 - A_3)(A_3 - A_1 + A_2) + p^2 A_1 (A_1 - A_2)(A_3 - A_1 - A_2)] \alpha_{i2} + \\ &+ r [p^2 A_1 (A_3 - A_1)(A_1 - A_2 + A_3) + q^2 A_2 (A_3 - A_2)(A_2 - A_1 + A_3)] \alpha_{i3} \}, \\ &(i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (8)$$

Ставится задача исследования эволюции вращений спутника на асимптотически большом интервале времени $t \sim \varepsilon^{-2}$, на котором происходит существенное изменение параметров движения.

2. Модифицированная процедура метода усреднения. Для рассматриваемой задачи решения системы (1)–(3) при малом ε на промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-2}$ будем применять модифицированную схему метода усреднения [3, 16, 17]. Рассмотрим невозмущенное движение ($\varepsilon = 0$), когда моменты приложенных сил равны нулю. В этом случае вращение твердого тела является движением Эйлера Пуансо. Величины $G, \delta, \lambda, T, \nu$ обращаются в постоянные, а φ, ψ, θ — некоторые функции времени t . Медленными переменными в возмущенном движении будут $G, \delta, \lambda, T, \nu$, а быстрыми — углы Эйлера φ, ψ, θ .

Рассмотрим движение при условии $2TA_1 \geq G^2 \geq 2TA_2$, соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось наибольшего момента инерции A_1 . Введем величину

$$k^2 = \frac{(A_2 - A_3)(2TA_1 - G^2)}{(A_1 - A_2)(G^2 - 2TA_3)} \quad (0 \leq k^2 \leq 1), \quad (9)$$

представляющую собой в невозмущенном движении постоянную — модуль эллиптических функций, описывающих это движение.

Для построения усредненной системы первого приближения подставим решение невозмущенного движения Эйлера-Пуансо в правые части уравнений движения (1), (2) и проведем усреднение по переменной ψ , а затем по времени t с учетом зависимости φ, θ от t по схеме, предложенной в [3] для нерезонансного случая. При этом для медленных переменных δ, λ, G, T сохраняются прежние обозначения. В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= 0, \\ \frac{d\delta}{dt} &= -a_1 R_0^2 (2GR^2)^{-1} H \sin \delta \sin 2(\lambda - \nu) - \frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3}{2G (1 - e^2)^3} \beta_2 \beta_3 N^*, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= -a_1 R_0^2 (GR^2)^{-1} H \cos \delta \cos^2(\lambda - \nu) + \frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3}{2G (1 - e^2)^3 \sin \delta} \beta_1 \beta_3 N^*, \\ \frac{dT}{dt} &= -\frac{4PT^2(A_1 - A_3)(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)}{3A_1^2 A_2^2 A_3^2 S^2(k)} \times \\ &\quad \times \{ A_2(A_1 - A_3)(A_1 + A_3 - A_2) [k^2 V(k) - W(k)] + \\ &\quad + A_1(A_2 - A_3)(A_3 + A_2 - A_1) [(k^2 - 2)W(k) + k^2] + \\ &\quad + A_3(A_1 - A_2)(A_1 + A_2 - A_3) [(1 - 2k^2)W(k) + k^2] \}, \\ S(k) &= A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2, \quad V(k) = 1 + \frac{E(k)}{K(k)}, \quad W(k) = 1 - \frac{E(k)}{K(k)}, \\ H &= \frac{1}{2} \left[3a^2 \frac{E(k)}{K(k)} - 1 \right] \quad \text{при} \quad 2TA_2 - G^2 > 0, \\ H &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{3a^2}{k^2} \left[k^2 - 1 + \frac{E(k)}{K(k)} \right] - 1 \right\} \quad \text{при} \quad 2TA_2 - G^2 < 0, \\ a^2 &= \frac{\sigma + h}{1 + \sigma}, \quad \sigma = \frac{A_3}{A_1} \frac{A_1 - A_2}{A_2 - A_3}, \quad h = \left(\frac{2T}{G^2} - \frac{1}{A_2} \right) \frac{A_2 A_3}{A_2 - A_3}, \\ N^* &= A_2 + A_3 - 2A_1 + 3 \left(\frac{2A_1 T}{G^2} - 1 \right) \left[A_3 + (A_2 - A_3) \frac{K(k) - E(k)}{K(k)k^2} \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно [18]. Согласно первому уравнению (10), кинетический момент спутника остается постоянным и равен G_0 . Дифференцируя выражение для k^2 (9) и используя уравнения для кинетической энергии (10), получим дифференциальное уравнение, которое не зависит от других переменных [1, 11]

$$\frac{dk^2}{d\xi} = (1 - \chi)(1 - k^2) - [(1 - \chi) + (1 + \chi)k^2] \frac{E(k)}{K(k)},$$

$$\chi = \frac{3A_2[(A_1^2 + A_3^2) - A_2(A_1 + A_3)]}{(A_1 - A_3)[A_2(A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1A_3]}, \quad (11)$$

$$\xi = (t - t_*)/N, \quad N = \frac{3A_1^2A_2^2A_3^2}{PG_0^2(A_1 - A_3)[A_2(A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1A_3]} \sim \varepsilon^{-2}.$$

Здесь t_* — постоянная. Значению $k^2 = 1$ отвечает равенство $2TA_2 = G^2$, что соответствует сепаратрисе для движения Эйлера-Пуансо. Уравнение (11) описывает усредненное движение конца вектора кинетического момента $\mathbf{G}$ на сфере постоянного радиуса G_0 .

3. Анализ усредненного собственного вращения спутника. Из уравнений движения (10) следует, что под влиянием момента сил вязкой жидкости в полости происходит эволюция кинетической энергии тела T в пределах от вращения вокруг оси A_3 (неустойчивое движение) до вращения вокруг оси A_1 (устойчивое движение). Изменения углов λ, δ зависят как от действия внешних моментов сил светового давления и гравитационных сил, так и от действия внутреннего момента сил вязкой жидкости в полости. Выражение, стоящее в фигурных скобках правой части уравнения (10) для T , положительно (при $A_1 > A_2 > A_3$), так как справедливы неравенства $(1 - k^2)K \leq E \leq K$. Поэтому $dT/dt < 0$ поскольку $T > 0$, т. е. переменная T строго убывает для любых $k^2 \in [0, 1]$.

Рассмотрим систему, состоящую из четвертого уравнения системы (10) и уравнения (11). Проведем обезразмеривание в уравнении изменения кинетической энергии, считая характерными величинами задачи N (11) и момент инерции A_1 . Имеем:

$$\frac{d\tilde{T}}{d\xi} = - \frac{2(\tilde{T})^2(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)}{A_1[A_2(A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1A_3][A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2]^2} \times$$

$$\times \{ A_2(A_1 - A_3)(A_1 + A_3 - A_2)[k^2V(k) - W(k)] +$$

$$+ A_1(A_2 - A_3)(A_3 + A_2 - A_1)[(k^2 - 2)W(k) + k^2] +$$

$$+ A_3(A_1 - A_2)(A_1 + A_2 - A_3)[(1 - 2k^2)W(k) + k^2] \}, \quad (12)$$

где $\tilde{T} = \frac{2A_1T}{G_0^2}$, ξ определяется согласно (11). Это равенство выполняется при $\xi > 0$, т. е. для случая $2TA_1 \geq G^2 \geq 2TA_2$.

Проведен численный расчет при значениях моментов инерции $A_1 = 8$, $A_2 = 5, 6, 7$, $A_3 = 4$; $k^2(0) = 0.99999$, $G(0) = 1$. Начальное значение кинетической энергии находилось из равенства

$$T = \frac{G_0^2}{2} \frac{A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2(0)}{A_1(A_2 - A_3) + A_3(A_1 - A_2)k^2(0)}. \quad (13)$$

В безразмерном виде имеем:

$$\tilde{T} = \frac{A_1(A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2(0))}{A_1(A_2 - A_3) + A_3(A_1 - A_2)k^2(0)}.$$

Рассмотрен также случай $\xi < 0$, что соответствует случаю $2TA_2 \geq G^2 \geq 2TA_3$. Уравнение (11) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{T}}{d\xi} = & \frac{2(\tilde{T})^2(A_3 - A_2)(A_2 - A_1)}{A_3[A_2(A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1A_3]S^2(k)} \times \\ & \times \{A_2(A_1 - A_3)(A_1 + A_3 - A_2)[k^2V(k) - W(k)] + \\ & + A_1(A_2 - A_3)(A_3 + A_2 - A_1)[(k^2 - 2)W(k) + k^2] + \\ & + A_3(A_1 - A_2)(A_1 + A_2 - A_3)[(1 - 2k^2)W(k) + k^2]\} \end{aligned}$$

с начальным условием

$$\tilde{T} = \frac{A_3(A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2(0))}{A_1(A_2 - A_3) + A_3(A_1 - A_2)k^2(0)}.$$

В этом случае численный расчет проводился для значений моментов инерции $A_1 = 4$, $A_2 = 5, 6, 7$, $A_3 = 8$. Графики изменения кинетической энергии имеют вид, представленный на рис. 1.

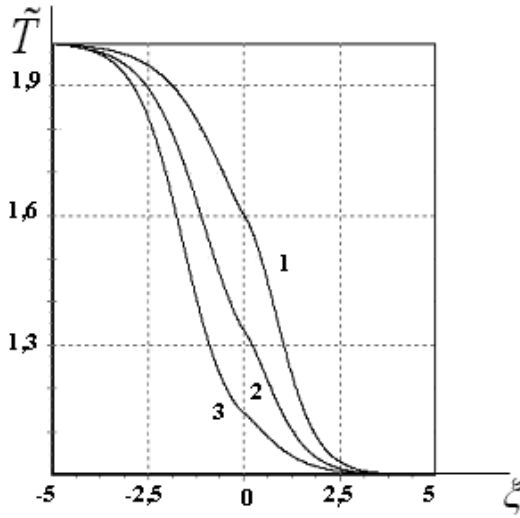


Рис. 1

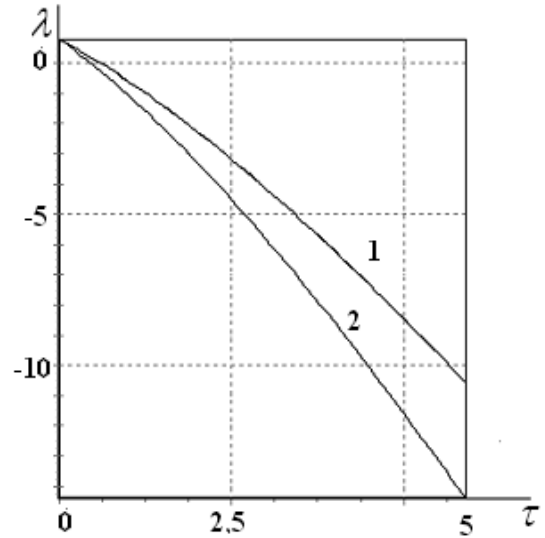


Рис. 2

Такой вид имеют графики изменения кинетической энергии в случае вращения спутника с полостью под действием только гравитационного момента [14] или только под действием светового давления [15], так как на эволюцию величины T оказывает влияние только момент сил вязкой жидкости, целиком заполняющей полость.

Кривые 1, 2, 3 соответствуют различным значениям $A_2 = 5, 6, 7$. Значение $\tilde{T} = 2$ соответствует вращению около оси A_3 (неустойчивое движение), $\tilde{T} = 1$ вращению около оси A_1 (устойчивое движение). При $\xi = 0$ (переход через сепаратрису) кривые имеют горизонтальную касательную (точки перегиба). Аналогичные графики изменения кинетической энергии могут быть получены пересчетом из формулы (9) для безразмерной кинетической энергии

$$\tilde{T} = \frac{A_1 S(k)}{A_1(A_2 - A_3) + k^2 A_3(A_1 - A_2)}.$$

Отсюда видно, что при $k^2 \rightarrow 0$ имеем $\tilde{T} \rightarrow 1$. Аналогично, для случая вращения около оси A_3 можно показать, что $\tilde{T} \rightarrow 2$.

4. Ориентация вектора кинетического момента. Рассмотрим систему, состоящую из уравнений для λ и δ системы (10).

Как известно, $R = l_0 / (1 + e \cos \nu)$, а фокальный параметр орбиты определяется равенством $l_0 = \mu^{1/3} (1 - e^2) \omega_0^{-2/3}$. Тогда первые два уравнения (10) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} &= -\frac{\omega_0^{4/3} r(e, \nu)}{2G} \left[\frac{a_1 R_0^2}{\mu^{2/3}} H \sin \delta \sin 2(\lambda - \nu) + \frac{3(1 + e \cos \nu) \omega_0^{2/3}}{1 - e^2} \beta_2 \beta_3 N^* \right], \\ \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{\omega_0^{4/3} r(e, \nu)}{G} \left[\frac{a_1 R_0^2}{\mu^{2/3}} H \cos \delta \cos^2(\lambda - \nu) - \frac{\omega_0^{2/3} (1 + e \cos \nu)}{2(1 - e^2) \sin \delta} \beta_1 \beta_3 N^* \right], \end{aligned} \quad (14)$$

$$r(e, \nu) = \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^2}.$$

Проведем обезразмеривание уравнения изменения кинетического момента (10), уравнений для истинной аномалии (3) и k^2 (11), уравнений системы (14). Характерными параметрами задачи являются G_0 — кинетический момент спутника при $t = 0$, Ω_0 — величина угловой скорости ω движения спутника относительно центра масс в начальный момент времени. Безразмерные величины определяются формулами: $\tilde{t} = \Omega_0 t$, $\tilde{G} = G/G_0$, $\tilde{A}_i = A_i \Omega_0 / G_0$, $\tilde{L}_i = L_i / (G_0 \Omega_0)$, $\tilde{T} = T / (G_0 \Omega_0)$, $\varepsilon^2 \tilde{P} = P \Omega_0^2 / G_0$.

Введем обозначение

$$\Gamma = \frac{a_1 R_0^2 \Omega_0}{G_0 \mu^{2/3} \omega_0^{2/3}} \quad (15)$$

и назовем эту величину приведенным коэффициентом момента сил светового давления. После обезразмеривания имеем систему уравнений движения вида:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{d\tilde{t}} &= -\varepsilon^2 \frac{r(e, \nu)}{2\tilde{G}} \left(\Gamma \tilde{H} \sin \delta \sin 2(\lambda - \nu) + \frac{3(1 + e \cos \nu)}{2(1 - e^2)} \beta_2 \beta_3 \tilde{N}^* \right), \\ \frac{d\lambda}{d\tilde{t}} &= \varepsilon^2 \frac{r(e, \nu)}{\tilde{G}} \left(\frac{3(1 + e \cos \nu)}{2(1 - e^2) \sin \delta} \beta_1 \beta_3 \tilde{N}^* - \Gamma \tilde{H} \cos \delta \cos^2(\lambda - \nu) \right), \\ \frac{d\nu}{d\tilde{t}} &= \varepsilon \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}, \quad \frac{d\tilde{G}}{d\tilde{t}} = 0, \\ \frac{dk^2}{d\tilde{t}} &= \varepsilon^2 \frac{1}{\tilde{N}} \left\{ (1 - \chi)(1 - k^2) - [(1 - \chi) + (1 + \chi)k^2] \frac{E(k)}{K(k)} \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{N} &= \frac{3\tilde{A}_1^2\tilde{A}_2^2\tilde{A}_3^2}{\tilde{P}(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3)[\tilde{A}_2(\tilde{A}_1 + \tilde{A}_3 - \tilde{A}_2) + 2\tilde{A}_1\tilde{A}_3]}, \\
\tilde{H} &= \frac{1}{2} \left[3\tilde{a}^2 \frac{E(k)}{K(k)} - 1 \right] \quad \text{при} \quad 2\tilde{T}\tilde{A}_2 - \tilde{G}^2 > 0, \\
\tilde{H} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{3\tilde{a}^2}{k^2} [k^2 - W(k)] - 1 \right\} \quad \text{при} \quad 2\tilde{T}\tilde{A}_2 - \tilde{G}^2 < 0, \\
\tilde{a}^2 &= \frac{\tilde{\sigma} + \tilde{h}}{1 + \tilde{\sigma}}, \quad \tilde{\sigma} = \frac{\tilde{A}_3(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)}{\tilde{A}_1(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3)}, \quad \tilde{h} = \left(\frac{2\tilde{T}}{\tilde{G}^2} - \frac{1}{\tilde{A}_2} \right) \frac{\tilde{A}_2\tilde{A}_3}{\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3}, \\
\tilde{N}^* &= \tilde{A}_2 + \tilde{A}_3 - 2\tilde{A}_1 + 3 \left(\frac{2\tilde{A}_1\tilde{T}}{\tilde{G}^2} - 1 \right) \left[\tilde{A}_3 + (\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3) \frac{K(k) - E(k)}{K(k)k^2} \right], \\
\frac{d\tilde{T}}{d\tilde{t}} &= -\varepsilon^2 \frac{4\tilde{P}\tilde{T}^2(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3)(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3)}{3\tilde{A}_1^2\tilde{A}_2^2\tilde{A}_3^2 \left[\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3 + (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)k^2 \right]^2} \times \\
&\times \left\{ \tilde{A}_2(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3)(\tilde{A}_1 + \tilde{A}_3 - \tilde{A}_2) [k^2V(k) - W(k)] + \right. \\
&+ \tilde{A}_1(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3)(\tilde{A}_3 + \tilde{A}_2 - \tilde{A}_1) [(k^2 - 2)W(k) + k^2] + \\
&+ \tilde{A}_3(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)(\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 - \tilde{A}_3) [(1 - 2k^2)W(k) + k^2] \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Первые три уравнения для λ , δ и ν системы (16) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta}{d\tilde{t}} &= \varepsilon^2 \Delta(\nu, \delta, \lambda), \quad \frac{d\lambda}{d\tilde{t}} = \varepsilon^2 \Lambda(\nu, \delta, \lambda), \\
\frac{d\nu}{d\tilde{t}} &= \varepsilon \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{h(e)}, \quad h(e) = (1 - e^2)^{3/2}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Здесь Δ , Λ — коэффициенты в правых частях первого и второго уравнений (16), δ , λ — медленные переменные, а ν — полумедленная.

Получена система специального вида, для решения которой применяется модифицированный метод усреднения по следующей схеме [17]:

$$\frac{d\delta}{d\tilde{t}} = \varepsilon^2 \frac{h(e)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Delta(\lambda, \delta, \nu)}{(1 + e \cos \nu)^2} d\nu, \quad \frac{d\lambda}{d\tilde{t}} = \varepsilon^2 \frac{h(e)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Lambda(\lambda, \delta, \nu)}{(1 + e \cos \nu)^2} d\nu.$$

После усреднения получим:

$$\frac{d\delta}{d\tilde{t}} = 0, \quad \frac{d\lambda}{d\tilde{t}} = \varepsilon^2 \left(\frac{3\tilde{N}^*}{h(e)} - \frac{2\Gamma\tilde{H}}{(1 - e^2)^{1/2}} \right) \frac{\cos \delta}{4\tilde{G}}. \tag{18}$$

Интегрирование системы проводилось для медленного времени $\tau = \varepsilon^2 \tilde{t}$. Численный расчет проводился при начальных условиях $\tilde{G}(0) = 1$; $k^2(0) = 0.99$; $\delta(0) = 0.785$ рад; $\lambda(0) = 0.785$ рад. Численное интегрирование выполнялось для

различных видов орбит с эксцентриситетом: $e = 0$ — круговая орбита; $e = 0.421$ — сильно эллиптическая орбита. Для безразмерного времени τ имеем следующую картину изменения угла ориентации вектора кинетического момента, представленную на рис. 2. Кривые 1, 2 соответствуют различным значениям: 1 — круговой орбите, 2 — сильно эллиптической.

На рис. 3 представлены графики изменения этого же угла при различных значениях моментов инерции спутника. Кривые 1, 2, 3 соответствуют различным значениям $\tilde{A}_2 = 7, 6, 5$ для постоянных значений $\tilde{A}_1 = 8$, $\tilde{A}_3 = 4$. Из рис. 3 видно, что характер изменения угла λ при близких значениях моментов инерции $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ носит почти линейный характер. С уменьшением значения момента инерции $\tilde{A}_2$ кривизна функции увеличивается, при этом функция перестает быть монотонной.

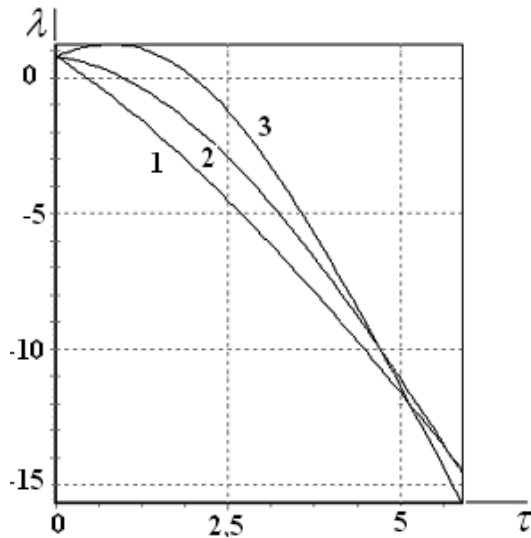


Рис. 3

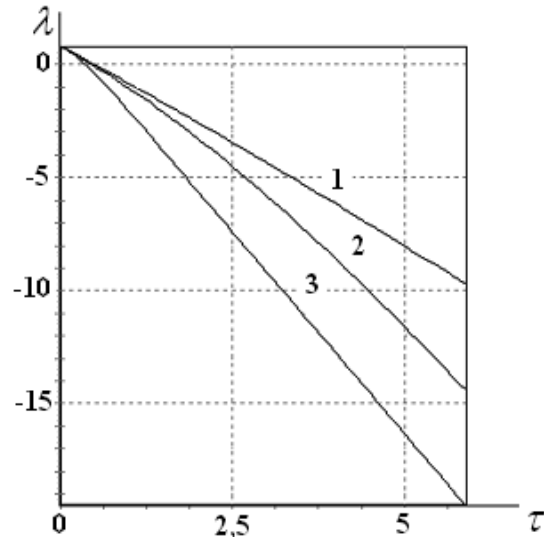


Рис. 4

Характер изменения угла λ имеет такой же вид, как и в задаче о движении спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью в гравитационном поле [14].

В случае движения спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, под действием момента сил светового давления [15] характер изменения угла λ носит почти линейный характер и с увеличением значения безразмерного момента инерции $\tilde{A}_2$ функция увеличивается быстрее.

Можно также провести анализ изменения характера функции $\lambda(\tau)$ при различных значениях безразмерной величины $\tilde{P}$. Кривые 1, 2, 3 на рис. 4 соответствуют различным значениям $\tilde{P}(0) = 10, 100, 1000$. Видно, что характер изменения угла имеет почти линейный вид.

Согласно численному расчету, показано, что для несимметричного спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, движущегося под действием момента сил светового давления вектор кинетического момента $\mathbf{G}$ остается величиной постоянной, направленной под постоянным углом δ к вертикали плоскости орбиты. При этом конец вектора $\mathbf{G}$ движется по сфере радиуса G_0 по ходу часовой стрелки и кинетическая энергия убывает до безразмерного значения 1, соответствующего устойчивому движению спутника вокруг оси A_1 . Такое же направление движения конца вектора кинетического момента характерно для задач о движении спутника с полостью под действием момента сил гравитационного притяжения [14] и момента сил светового давления [15].

5. Предельный случай вращения, близкого к осевому. Рассмотрим движение тела при малых $k^2 \ll 1$, отвечающих движениям твердого тела, близким к вращениям вокруг оси A_1 . В этом случае правую часть уравнения (10) можно упростить, используя разложения полных эллиптических интегралов в ряды по k^2 [18]. Тогда уравнение (10) интегрируется, и асимптотическое решение записывается в виде:

$$\begin{aligned} k^2 &= C_1 \exp \left[-\frac{(3+\chi)\xi}{2} \right] & \text{при } \xi > 0, \\ k^2 &= C_1 \exp \left[\frac{(3-\chi)\xi}{2} \right] & \text{при } \xi < 0, \\ C_1 &= \text{const}, \quad 0 \leq C_1 \leq 1. \end{aligned} \quad (19)$$

Изменение кинетической энергии можно качественно грубо получить, следуя работе [1], простым пересчетом из соотношения (9), используя найденное решение для малых k^2 (19). Имеем:

$$\begin{aligned} T &= \frac{G^2}{2A_1} + \frac{G^2(A_1 - A_3)(A_1 - A_2)}{2A_1^2(A_2 - A_3)} C_1 \exp \left[-\frac{(3+\chi)\xi}{2} \right] & \text{при } \xi > 0, \\ T &= \frac{G^2}{2A_3} + \frac{G^2(A_3 - A_1)(A_3 - A_2)}{2A_3^2(A_2 - A_1)} C_1 \exp \left[\frac{(3-\chi)\xi}{2} \right] & \text{при } \xi < 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Для безразмерной величины кинетической энергии равенства (20) примут вид:

$$\begin{aligned} T^* &= 1 + \frac{(A_1 - A_3)(A_1 - A_2)}{A_1(A_2 - A_3)} C_1 \exp \left[-\frac{(3+\chi)\xi}{2} \right] & \text{при } \xi > 0, \\ T^* &= \frac{A_1}{A_3} + \frac{A_1(A_3 - A_1)(A_3 - A_2)}{A_3^2(A_2 - A_1)} C_1 \exp \left[\frac{(3-\chi)\xi}{2} \right] & \text{при } \xi < 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Постоянная интегрирования C_1 находится грубо из условия равенства кинетической энергии по формулам (20) при $\xi = 0$. Имеем:

$$C_1 = \frac{A_1 A_3 (A_2 - A_3) (A_1 - A_2)}{A_3^2 (A_1 - A_2)^2 + A_1^2 (A_2 - A_3)^2}. \quad (22)$$

Графики изменения безразмерной кинетической энергии T^* в случае малых k^2 имеют вид, представленный на рис. 5.

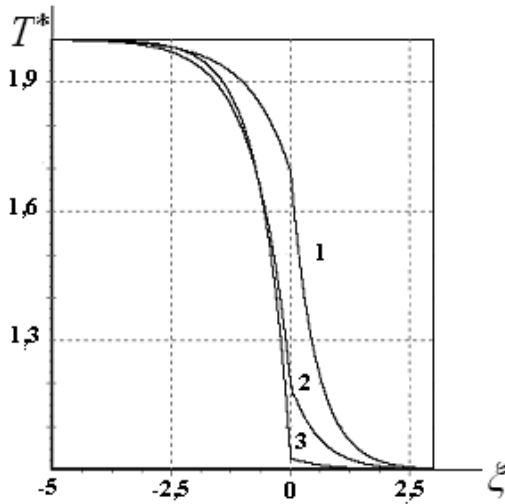


Рис. 5

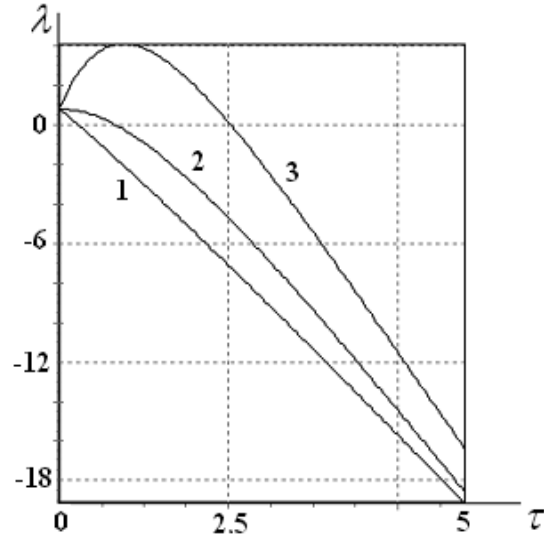


Рис. 6

Кривые 1, 2, 3 соответствуют различным значениям $A_2 = 5, 6, 7$, при постоянных значениях $A_1 = 8, A_3 = 4$ для $\xi > 0$ и $A_1 = 4, A_3 = 8$ для $\xi < 0$. Как видно из рисунка, характер функции $T^* = T^*(\xi)$ тот же, что и для $0 \leq k^2 \leq 1$, а также асимптотические значения T^* на положительных и отрицательных безразмерных временах сохраняют свои величины.

Асимптотическое выражение модуля эллиптических функций можно представить в виде функции по безразмерному времени τ :

$$k^2 = k_0^2 \exp[-\rho\tau], \quad \rho = \frac{\tilde{P}}{\tilde{A}_1^2 \tilde{A}_2^2 \tilde{A}_3^2} \left[\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) + \tilde{A}_1 \tilde{A}_3 (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3) + \tilde{A}_2 \tilde{A}_3 \right]. \quad (23)$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение изменения угла λ (17) в безразмерном времени τ для малых k^2 с учетом (23). В правую часть уравнения входит непостоянная величина $\tilde{H}$. При $2\tilde{T}\tilde{A}_2 - \tilde{G}^2 < 0$ функция $H(\tau)$ с учетом малых второго порядка имеет вид:

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{3\tilde{A}_3(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)}{2\tilde{A}_1(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3)} k_0^2 \exp[-\rho\tau] - 1 \right\}.$$

Видно, что при $\tau \rightarrow \infty$ $\tilde{H} \rightarrow -0.5$.

Асимптотическое выражение кинетической энергии можно представить в виде функции по безразмерному времени τ :

$$\tilde{T} = \frac{\tilde{G}^2}{2\tilde{A}_1} + \frac{\tilde{G}^2(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3)(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)}{2\tilde{A}_1^2(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3)} k_0^2 \exp[-\rho\tau].$$

Подставляем полученное выражение $\tilde{H}$ и $\tilde{T}$ в уравнение изменения угла λ , интегрируем и находим

$$\lambda = \frac{\cos \delta}{4\tilde{G}_0(1-e^2)^{1/2}} \times \\ \times \left\{ \frac{3(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)k_0^2}{\tilde{A}_1(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3)\rho} \left(\Gamma\tilde{A}_3 - \frac{3(\tilde{A}_2 + \tilde{A}_3)(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3)}{(1-e^2)} \right) (\exp[-\rho\tau] - 1) + \right. \\ \left. + \left(\frac{3}{(1-e^2)} (\tilde{A}_2 + \tilde{A}_3 - 2\tilde{A}_1) + \Gamma \right) \tau \right\} + \lambda_0,$$

где константы λ_0 , k_0^2 определяются из начальных условий. График данной функции $\lambda = \lambda(\tau)$ при $k^2 \ll 1$ имеет вид, представленный на рис. 6.

Кривые 1, 2, 3 соответствуют различным значениям $\tilde{A}_2 = 7, 5, 6$, при постоянных значениях $\tilde{A}_1 = 8$, $\tilde{A}_3 = 4$ и при начальном значении угла $\lambda(0) = 0.785$ рад. Как видно из рисунка, характер кривых аналогичен функциям $\lambda = \lambda(\tau)$ при произвольных k^2 .

Характер изменения угла λ при малых k^2 имеет приблизительно тот же вид, что и в случае движения спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, в гравитационном поле [14]. При этом в нашей задаче убывание угла ориентации происходит несколько быстрее.

При движении спутника с вязкой жидкостью под действием момента сил светового давления [15] угол λ возрастает, как и в случае движения спутника под действием момента сил светового давления в сопротивляющейся среде [8].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Таким образом, возмущенное движение тела складывается из быстрого движения Эйлера–Пуансо вокруг вектора $\mathbf{G}$ и из медленной эволюции параметров этого движения. Величина кинетического момента остается постоянной, а изменение кинетической энергии зависит только от момента сил вязкой жидкости в полости спутника. Движение вектора кинетического момента вокруг вертикали к плоскости орбиты в первом приближении описывается уравнениями системы (14). Скорость вращения вектора $\mathbf{G}$ вокруг вертикали переменна с переменным отклонением вектора от вертикали. После применения модифицированного метода усреднения отклонение вектора $\mathbf{G}$ от вертикали остается постоянным, при этом угловая скорость вращения переменна (18).

1. **Черноусько Ф. Л.** Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса [текст] / Ф. Л. Черноусько // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1965. – Т. 5, № 6. – С. 1049–1070.
2. **Белецкий В. В.** Движение искусственного спутника относительно центра масс [текст] / Владимир Васильевич Белецкий. – М.: Наука, 1965. – 416 с.
3. **Черноусько Ф. Л.** О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов [текст] / Ф. Л. Черноусько // Прикл. математика и механика. – 1963. – Т. 27, № 3. – С. 474–483.
4. **Белецкий В. В.** Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле [текст] / Владимир Васильевич Белецкий. – М.: Изд-во МГУ, 1975. – 308 с.

5. **Карымов А. А.** Устойчивость вращательного движения геометрически симметричного искусственного спутника в поле сил светового давления [текст] / А. А. Карымов // Прикл. математика и механика. – 1964. – Т. 28, № 5. – С. 923–930.
6. **Поляхова Е. Н.** Космический полет с солнечным парусом: проблемы и перспективы [текст] / Елена Николаевна Поляхова. – М.: Наука, 1986. – 304 с.
7. **Сазонов В. В.** Движение астероида относительно центра масс под действием момента сил светового давления [текст] / В. В. Сазонов // Астрон. вестник. – 1994. – Т. 28, № 2. – С. 95–107.
8. **Лещенко Д. Д.** Движение спутника относительно центра масс под действием момента сил светового давления в сопротивляющейся среде [текст] / Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. – 2007. – Т. 12, вип. 7. Матем. і мех. – С. 85–98.
9. **Акуленко Л. Д.** Эволюция быстрого вращения спутника под действием гравитационного момента в среде с сопротивлением [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2008. – № 2. – С. 13–26.
10. **Осипов В. В.** О колебании твердого тела со сферической полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью, на эллиптической орбите [текст] / В. В. Осипов, Р. С. Суликашвили // Тр. ин-та / Тбилис. мат. ин-т АН Груз. ССР. – 1978. – Т. 58. – С. 175–186.
11. **Смирнова Е. П.** Стабилизация свободного вращения асимметричного волчка с полостями, целиком заполненными жидкостью [текст] / Е. П. Смирнова // Прикл. математика и механика. – 1974. – Т. 38, № 6. – С. 980–985.
12. **Сидоренко В. В.** Эволюция вращательного движения планеты с жидким ядром [текст] / В. В. Сидоренко // Астрон. вестник. – 1993. – Т. 27, № 2. – С. 119–127.
13. **Вильке В. Г.** Эволюция вращения спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью [текст] / В. Г. Вильке, А. В. Шатина // Космические исследования. – 1993. – 31, вып. 6. – С. 22–30.
14. **Акуленко Л. Д.** Эволюция вращений спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская // Механика твердого тела. – 2007. – Вып. 37. – С. 126–139.
15. **Акуленко Л. Д.** Вращения спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, под действием момента сил светового давления [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 81–96.
16. **Волосов В. М.** Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем [текст] / В. М. Волосов, Б. И. Моргунов. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 507 с.
17. **Акуленко Л. Д.** Схемы усреднения высших степеней в системах с медленной и быстрой фазами [текст] / Л. Д. Акуленко // Прикладная математика и механика. – 2002. – Т. 66, № 2. – С. 165–176.
18. **Градштейн И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений [текст] / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
19. **Ландау Л. Д.** Теоретическая физика. Т. 1. Механика [текст] / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1973. – 208 с.