

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ УПРУГОГО КОНУСА, УСЕЧЕННОГО ПО СФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Н. Д. Вайсфельд¹, Г. Я. Попов², В. В. Реут³

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова
Одесса, Украина

¹vaysfeld@onu.edu.ua, ²popov@onu.edu.ua, ³reut@onu.edu.ua

В работе решены задачи о напряженном состоянии упругого усеченного сферической поверхностью конуса с острием. Предполагается, что коническая поверхность либо жестко закреплена, либо находится в условиях гладкого контакта, сферическая поверхность находится под воздействием нагрузки. В первом случае применение нового интегрального преобразования по меридиальному углу сводит задачу в пространстве трансформант к векторной краевой задаче, приближенное решение которой строится с помощью аппарата матричной краевой задачи. Во втором случае с помощью нового интегрального преобразования по меридиальному углу получено точное решение поставленной задачи. Проведено сравнение полученных значений напряжений для обоих случаев и рассмотрены частные случаи задач.

Постановка задачи. Имеется упругий (G — модуль сдвига, μ — коэффициент Пуассона) круговой конус ($0 < r < a$, $0 < \theta < \omega$, $-\pi \leq \phi \leq \pi$), усеченный по сферической поверхности $r = a$, коническая поверхность $0 < r < a$, $\theta = \omega$, $-\pi \leq \phi \leq \pi$ которого либо закреплена, либо находится в условиях гладкого контакта. К торцу конуса $r = a$ приложена нормальная осесимметричная нагрузка $p(\theta)$. С учетом замены переменной $r = a\rho$ постановка задачи примет вид

$$\begin{aligned} (\rho^2 u')' - 2u + \frac{1}{\mu_*} \frac{(\dot{u} \sin \theta)'}{\sin \theta} - \frac{\mu'}{\mu_*} \frac{(v \sin \theta)'}{\sin \theta} + \frac{\mu_0}{\mu_*} \rho \frac{(v' \sin \theta)'}{\sin \theta} &= 0, \\ (\rho^2 v')' + \mu_* \left(\frac{(\dot{v} \sin \theta)'}{\sin \theta} - \frac{v}{\sin^2 \theta} \right) + \mu_0 \rho \dot{u}' + 2\mu_* \dot{u} &= 0, \\ 0 < \rho < 1, \quad 0 < \theta < \omega \end{aligned} \quad (1)$$

с граничными условиями на конической поверхности

$$u(\rho, \omega) = v(\rho, \omega) = 0, \quad 0 < \rho < 1, \quad (2)$$

$$\tau_{\rho\theta}(\rho, \omega) = 0, \quad v(\rho, \omega) = 0, \quad 0 < \rho < 1 \quad (3)$$

в случаях жесткого защемления и гладкого контакта соответственно, а также на сферической поверхности

$$\sigma_{\rho}(1, \theta) = -p(\theta), \quad \tau_{\rho\theta}(1, \theta) = 0, \quad 0 < \theta < \omega, \quad (4)$$

где $u(\rho, \theta) = u_r(\frac{r}{a}, \theta)$, $v(\rho, \theta) = u_{\theta}(\frac{r}{a}, \theta)$ — физические компоненты вектора перемещений в сферической системе координат, $\mu_0 = (1 - 2\mu)^{-1}$, $\mu_* = 2(1 - \mu)\mu_0$, $\mu' = \mu_0 \mu_*^{-1}$, штрих обозначает производную по ρ , а точка в верхнем индексе обозначает производную по второй переменной θ . Требуется определить напряженно-деформированное состояние конуса.

Решение задачи для случая жесткого защемления конической поверхности. К уравнениям (1) применяются интегральные преобразования по переменной θ [1] соответственно

$$u_k(\rho) = \int_0^{\omega} P_{v_k}(\cos \theta) \sin \theta u(\rho, \theta) d\theta, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (5)$$

$$v_k(\rho) = \int_0^{\omega} P_{v_k}^1(\cos \theta) \sin \theta v(\rho, \theta) d\theta, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

где $P_v(\cos \theta)$ — функция Лежандра, $P_v^1(\cos \theta)$ — присоединенная функция Лежандра 1-го порядка, $v = v_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ — корни трансцендентного уравнения: $P_v^1(\cos \omega) = 0$, $v = v_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$

В трансформантах (3), (4) дифференциальные уравнения (1) запишутся в виде:

$$\begin{aligned} (\rho^2 u'_k(\rho))' - 2u_k(\rho) - \frac{N_k}{\mu_*} u_k(\rho) + \frac{\mu'}{\mu_*} v_k(\rho) - \\ - \frac{\mu_0}{\mu_*} \rho v'_k(\rho) + \frac{F_k(\rho)}{\mu_*} &= 0, \\ (\rho^2 v'_k(\rho))' - \mu_* N_k v_k(\rho) + \mu_0 \rho N_k u'_k(\rho) + 2\mu_* N_k u_k(\rho) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $N_k = v_k(v_k + 1)$, $F_k(\rho, \omega) = \sin \omega P_{v_k}(\cos \omega) \dot{u}(\rho, \omega)$. Введем в рассмотрение векторы и матрицы

$$\begin{aligned} y_k(\rho) = (u_k(\rho), v_k(\rho))^T, \quad f_k(\rho) = -\frac{P_{v_k}(\cos \omega) \sin \omega}{\mu_*} (\dot{u}(\rho, \omega), 0)^T, \\ Q = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\mu_*} \\ N_k & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -2 - \frac{N_k}{\mu_*} & \frac{\mu'}{\mu_*} \\ 2\mu_* N_k & -\mu_* N_k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В этих обозначениях система уравнений в трансформантах запишется в виде векторного уравнения (I — единичная матрица)

$$I \cdot [\rho^2 y'_k(\rho)]' + \mu_0 \rho Q \cdot y'_k(\rho) + P \cdot y_k(\rho) = f_k(\rho), \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Рассмотрим случай $k=0$, который соответствует собственному значению $v_0=0$. В этом случае решение задачи строится непосредственно с помощью фундаментальной функции:

$$u_0(\rho) = \frac{-Ap_0}{1+\mu} \rho - \frac{2(2\mu-1)}{3(\mu+1)} \rho \int_0^1 \xi F_0(\xi) d\xi - \frac{1}{3} \rho^2 \int_0^1 \frac{F_0(\xi)}{\xi^2} d\xi + \\ + \frac{1}{3} \int_0^\rho \left(\frac{\xi}{\rho^2} - \frac{\rho}{\xi^2} \right) F_0(\xi) d\xi, \\ p_k = \int_0^\omega \sin \theta P_{v_k}(\cos \theta) p(\theta) d\theta, \quad A = \frac{a}{2G\mu_0}.$$

В случае $k>0$ решение уравнения (8) строится с помощью фундаментальной матрицы $\Phi(x)$ [2] по схеме работы [1]:

$$u_k(\rho) = \int_0^1 \Phi_{00} \left(\frac{r}{\rho} \right) \frac{f_k^1(r)}{r} dr + Y_{00}(\rho) C_0^{(k)} + Y_{01}(\rho) C_1^{(k)}, \\ v_k(\rho) = \int_0^1 \Phi_{10} \left(\frac{r}{\rho} \right) \frac{f_k^1(r)}{r} dr + Y_{10}(\rho) C_0^{(k)} + Y_{11}(\rho) C_1^{(k)}, \quad (9) \\ f_k^1(r) = \frac{-P_{v_k}(\cos \omega) \sin \omega}{\mu_*} \dot{u}(r, \omega).$$

Здесь $Y_{ij}(r)$, $i, j = \overline{0,1}$ — элементы матрицы $Y(r)$ — регулярного решения матричной фундаментальной системы решений, $C = (C_0^{(k)}, C_1^{(k)})^T$ — вектор неизвестных постоянных, которые определяются из краевых условий задачи. Применение обратных интегральных преобразований [1] к трансформантам (9) завершит построение смещений $u(\rho, \theta)$, $v(\rho, \theta)$, если будет определена неизвестная функция $\dot{u}(\rho, \omega)$, которую разыщем, удовлетворив требование $u(\rho, \omega) = 0$, что приводит к интегральному уравнению

$$\int_0^1 \frac{\chi(r)}{r} \Omega \left(\frac{r}{\rho} \right) dr = f(\rho), \quad \chi(\rho) = \dot{u}(\rho, \omega).$$

Для решения полученного интегрального уравнения установлен характер особенностей неизвестной функции $\chi(\rho)$ на концах промежутка интегрирования $\rho=0$ и $\rho=1$. Это позволяет искать решение уравнения в виде ряда по многочленам Якоби. Дальнейшая ортогонализация системы

проведена по системе функций $\{P_n^{\alpha, \beta}(1-2r)\}$, где $P_n^{\alpha, \beta}(z)$ — многочлены Якоби. Решение бесконечной системы методом редукции позволило найти неизвестные коэффициенты разложения, что и завершило решение поставленной задачи.

Точное решение задачи для случая скользящей заделки на конической поверхности. Это решение является частным случаем ($\omega_0 = 0$, $\omega_1 = \omega$ и $a=0$, $b=a$) решения, полученного в работе [3], где следует совершить предельный переход к $a \rightarrow 0$, $\omega_0 \rightarrow 0$. Однако оказалось проще решить эту задачу непосредственно. Чтобы удовлетворить граничным условиям (3), достаточно потребовать согласно формулам (8), (9) из [3] выполнения равенств $\Phi(\rho, \omega) = 0$, $\Psi(\rho, \omega) = 0$. Эти условия будут выполнены автоматически, если к уравнениям Лапласа применить интегральное преобразование [3]:

$$\begin{bmatrix} \Phi_k(\rho) \\ \Psi_k(\rho) \end{bmatrix} = \int_0^\omega \begin{bmatrix} \Phi(\rho, \theta) \\ \Psi(\rho, \theta) \end{bmatrix} \sin \theta P_{v_k}^1(\cos \theta) d\theta,$$

$v = v_k$, $k=0, 1, 2, \dots$ — корни уравнения $P_v^1(\cos \omega) = 0$. Записав общее решение полученных одномерных дифференциальных уравнений в трансформантах с учетом требования их регулярности в нуле, приходим к определению произвольных постоянных, что реализовано удовлетворением граничных условий (2). Зная трансформанты двух гармонических функций, согласно формулам (7)–(9) из [3], построим трансформанты смещений и напряжений. Окончательное точное решение задачи получено путем применения к вычисленным трансформантам смещений и напряжений обратного преобразования [3].

Поставленные задачи допускают различные частные случаи. Так, если угол раствора конуса равен $\omega = \pi/2$, то, применив интегральное преобразование [3], получаем решение для полушара. В случае дважды усеченного сферическими поверхностями конуса ($r \in [a_0, a]$), получаем решение для сферического полукупола.

Литература

1. Попов Г.Я. Осесимметричная смешанная задача теории упругости для усеченного кругового полого конуса // Прикл. мат. и мех. 2000. Т. 64. вып. 3. С. 431–467.
2. Попов Г.Я., Абдыманапов С.А., Ефимов В.В. Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач. Алматы: Изд. Руан, 1999. 113 с.
3. Попов Г.Я. Об осесимметричных задачах теории упругости для усеченного полого конуса // Прикл. мат. и мех. 2005. Т. 69, вып. 3. С. 458–468.