

УДК 539.3

© 2013 г. Н. Д. Вайсфельд, Г. Я. Попов, В. В. Реут

**ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
ДЛЯ ЗАЩЕМЛЕННОГО ПО БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ КОНУСА
С ПРИСОЕДИНЕННЫМ ШАРОВЫМ СЕГМЕНТОМ**

Рассматривается осесимметричная смешанная задача о напряженном состоянии упругого конуса, к основанию которого присоединен шаровой сегмент. Боковая поверхность конуса жестко защемлена, а поверхность шарового сегмента находится под нагрузкой. Применение нового интегрального преобразования по меридиальному углу сводит задачу в пространстве трансформант к векторной краевой задаче, решение которой строится с помощью аппарата решения матричной краевой задачи. Неизвестная функция (производная смещений), входящая в решение, определяется из приближенного решения сингулярного интегрального уравнения, для чего проведено предварительное исследование характера особенности функции на концах промежутка интегрирования. Последующее применение обратных интегральных преобразований приводит к окончательному решению исходной задачи. Полученные значения напряжений сравниваются с напряжениями, возникающими в конусе при аналогичной нагрузке, когда на боковой поверхности конуса заданы условия скользящей заделки (для этого случая построено точное решение указанной задачи, основанное на известном результате).

Исследованию напряженного состояния упругих цилиндрических [1–4] и сферических [5–8] тел посвящено значительное число работ. Рассматривались [9–11] упругий полушар и купол – частные случаи конуса с присоединенным шаровым сегментом. Значительно реже рассматриваются задачи упругости для конических тел [12, 13], что объясняется их значительной математической сложностью (наличие особой точки – вершины конуса, отсутствие подходящих интегральных преобразований). Появление новых интегральных преобразований [14] позволяет преодолеть указанные трудности и решить новую осесимметричную смешанную задачу.

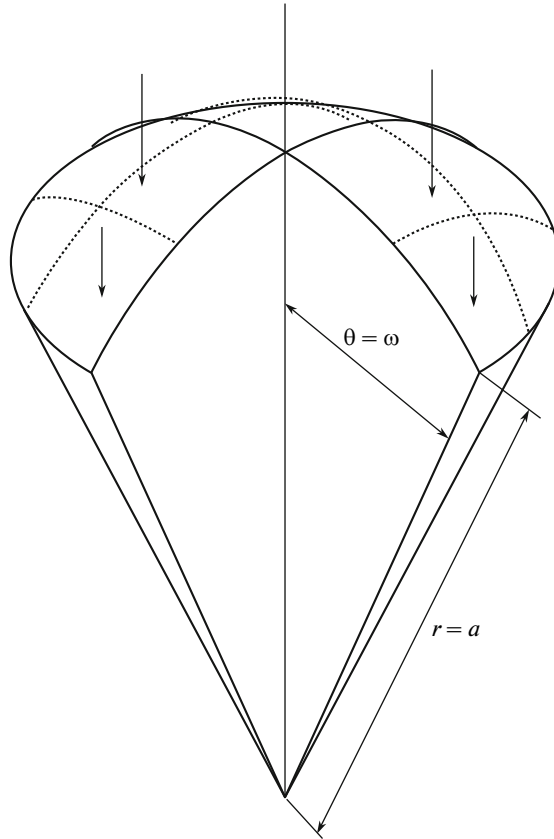
1. Постановка задачи. В сферической системе координат r, θ, φ рассматривается тело (G – модуль сдвига, μ – коэффициент Пуассона) в виде конуса, к основанию которого присоединен шаровой сегмент (фигура):

$$0 < r < a, \quad 0 < \theta < \omega, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi$$

Боковая поверхность конуса

$$0 < r < a, \quad \theta = \omega, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi$$

жестко защемлена, а к поверхности шарового сегмента $r = a$ приложена нормальная осесимметричная нагрузка $p(\theta)$.



При учете замены переменной $r = a\rho$ постановка задачи записывается в виде [15, 16]

$$(\rho^2 u')' - 2u + \frac{1}{\mu_*} \frac{(\sin u^*)'}{\sin \theta} - \frac{\tilde{\mu}}{\mu_*} \frac{(\sin V^*)'}{\sin \theta} + \tilde{\mu} \rho \frac{(\sin \theta V')'}{\sin \theta} = 0 \quad (1.1)$$

$$(\rho^2 V')' + \mu_* \left(\frac{(\sin \theta V^*)'}{\sin \theta} - \frac{V}{\sin^2 \theta} \right) + \mu_0 \rho u'^* + 2\mu_* u^* = 0; \quad 0 < \rho < 1, \quad 0 < \theta < \omega$$

$$u(\rho, \omega) = V(\rho, \omega) = 0, \quad 0 < \rho < 1; \quad \sigma_\rho(1, \theta) = -p(\theta), \quad \tau_{\rho\theta}(1, \theta) = 0, \quad 0 < \theta < \omega; \quad (1.2)$$

Здесь

$$u(\rho, \theta) = u_r \left(\frac{r}{a}, \theta \right), \quad V(\rho, \theta) = u_\theta \left(\frac{r}{a}, \theta \right), \quad \sigma_\rho(\rho, \theta) = \sigma_r \left(\frac{r}{a}, \theta \right), \quad \tau_{\rho\theta}(\rho, \theta) = \tau_{r\theta} \left(\frac{r}{a}, \theta \right),$$

$$\mu_0 = \frac{1}{1 - 2\mu}, \quad \mu_* = 2(1 - \mu)\mu_0, \quad \tilde{\mu} = \mu_0 \mu_*^{-1}$$

Штрихом обозначена производная по переменной r , точкой — по θ ; $u_r, u_\theta, \sigma_r, \tau_{r\theta}$ — смещения и напряжения в сферической системе координат.

Требуется определить напряженное состояние конуса.

2. Сведение задачи к векторной краевой задаче. К уравнениям (1.1) применяются интегральные преобразования по переменной θ [14] (а именно, их частный случай, когда нижний предел интегрирования равен нулю):

$$u_k(\rho) = \int_0^{\omega} P_{v_k}(\cos \theta) \sin \theta u(\rho, \theta) d\theta, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

$$V_k(\rho) = \int_0^{\omega} P_{v_k}^1(\cos \theta) \sin \theta V(\rho, \theta) d\theta, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

где $P_v(\cos \theta)$ – функция Лежандра, $P_v^1(\cos \theta)$ – присоединенная функция Лежандра первого порядка, $v = v_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) – корни трансцендентного уравнения $P_v^1(\cos \omega) = 0$.

В трансформантах (2.1), (2.2) уравнения (1.1) запишутся в виде

$$\begin{aligned} (\rho^2 u'_k(\rho))' - 2u_k(\rho) - \mu_*^{-1} N_k u_k(\rho) + \mu_*^{-1} \tilde{\mu} V_k(\rho) - \tilde{\mu} \rho V'_k(\rho) + \mu_*^{-1} F_k(\rho) &= 0 \\ (\rho^2 V'_k(\rho))' - \mu_* N_k V_k(\rho) + \mu_0 \rho N_k u'_k(\rho) + 2\mu_* N_k u_k(\rho) &= 0 \\ N_k = v_k(v_k + 1), \quad F_k(\rho, \omega) = \sin \omega P_{v_k}(\cos \omega) u'(\rho, \omega) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Краевые условия (1.2) примут вид

$$\begin{aligned} (1 - \mu) u'_k(1) + 2\mu u_k(1) - \mu V_k(1) &= -A p_k, \quad V'_k(1) - V_k(1) + N_k u_k(1) = 0 \\ p_k &= \int_0^{\omega} \sin \theta P_{v_k}(\cos \theta) p(\theta) d\theta, \quad A = \frac{a}{2G\mu_0} \end{aligned} \quad (2.4)$$

При получении условий (2.4) учтены формулы связи смещений и напряжений [17]

$$\begin{aligned} \sigma_\rho(\rho, \theta) &= \frac{2G\mu_0}{a} \left((1 - \mu) u'(\rho, \theta) + 2\mu \frac{u(\rho, \theta)}{\rho} + \mu \frac{(V \sin \theta)^*}{\rho \sin \theta} \right) \\ \tau_{\rho\theta}(\rho, \theta) &= \frac{G}{a} \left(\rho \left(V'(\rho, \theta) - \frac{V(\rho, \theta)}{\rho^2} \right) + \frac{u^*(\rho, \theta)}{\rho} \right) \end{aligned}$$

к первой из которых применено интегральное преобразование (2.1), ко второй – преобразование (2.2).

Введем в рассмотрение векторы и матрицы

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_k(\rho) &= (u_k(\rho), V_k(\rho))^T, \quad \mathbf{f}_k(\rho) = -\mu_*^{-1} P_{v_k}(\cos \omega) \sin \omega (u'(\rho, \omega), 0)^T \\ Q &= \begin{pmatrix} 0 & -\mu_*^{-1} \\ N_k & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -2 - \mu_*^{-1} N_k & \mu_*^{-1} \tilde{\mu} \\ 2\mu_* N_k & -\mu_* N_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

В этих обозначениях система (2.3) запишется в виде векторного уравнения

$$[\rho^2 \mathbf{y}'_k(\rho)]' + \mu_0 \rho Q \mathbf{y}'_k(\rho) + P \mathbf{y}_k(\rho) = \mathbf{f}_k(\rho), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

3. Решение векторной краевой задачи. Рассмотрим случай $k = 0$, который соответствует собственному значению $v_0 = 0$. В этом случае система уравнений (2.3) и краевые условия (2.4) принимают вид

$$\begin{aligned} (\rho^2 u_0'(\rho))' - 2u_0(\rho) &= F_0(\rho) \\ (1 - \mu) u_0'(1) + 2\mu u_0(1) &= -A\rho_0, \quad F_0(\rho) = -\sin \omega u^*(\rho, \omega) \mu_*^{-1} \end{aligned} \quad (3.1)$$

При учете требования регулярности решения в нуле общее решение однородного уравнения (3.1) строится в виде $u_0(\rho) = D\rho$, фундаментальная функция имеет вид [18]

$$g(\rho, \xi) = \frac{1}{3}(\xi \rho^{-2} - \rho \xi^{-2})$$

что позволяет записать общее решение неоднородного уравнения (3.1) следующим образом:

$$u_0(\rho) = D\rho + \frac{1}{3} \int_0^\rho (\xi \rho^2 - \rho \xi^2) F_0(\xi) d\xi$$

Неизвестная постоянная D определяется из краевого условия (3.1). Окончательно решение задачи (3.1) для случая $k = 0$ запишется в виде

$$u_0(\rho) = \frac{-A\rho_0}{1 + \mu} \rho - \frac{2}{3} \frac{2\mu - 1}{\mu + 1} \rho \int_0^1 \xi F_0(\xi) d\xi - \frac{1}{3} \rho^2 \int_0^1 \frac{F_0(\xi)}{\xi^2} d\xi + \frac{1}{3} \int_0^\rho \left(\frac{\xi}{\rho^2} - \frac{\rho}{\xi^2} \right) F_0(\xi) d\xi \quad (3.2)$$

В случае $k > 0$ решение уравнения (2.5) строится с помощью фундаментальной матрицы [19] по предложенной ранее схеме [16]. Фундаментальная матрица имеет вид

$$\Phi(x) = \begin{cases} \mathbf{A}_1 x^{-\nu_k} + \mathbf{A}_2 x^{-\nu_k-2}, & x > 1 \\ \mathbf{B}_1 x^{\nu_k+1} + \mathbf{B}_2 x^{\nu_k-1}, & x < 1 \end{cases}, \quad x = \frac{\rho}{r}, \quad \mathbf{A}_l = \{a_{k,l}^{ij}\}, \quad \mathbf{B}_l = \{b_{k,l}^{ij}\}; \quad l, i, j = 1, 2 \quad (3.3)$$

Вид элементов матриц $\mathbf{A}_l$ и $\mathbf{B}_l$ приведен в приложении 1.

Решение векторной задачи для уравнения (2.5) запишем следующим образом [19]:

$$\mathbf{y}(\rho) = \int_0^\infty \mathbf{f}(r) r^{-1} \Phi\left(\frac{r}{\rho}\right) dr + \mathbf{Y}(\rho) \mathbf{C} \quad (3.4)$$

$\mathbf{Y}(\rho)$ — регулярное решение матричной фундаментальной системы решений, $\mathbf{C} = (C_0^{(k)}, C_1^{(k)})^T$ — вектор неизвестных постоянных, которые определяются из краевых условий задачи. Матрица $\mathbf{Y}(\rho)$ имеет вид

$$\mathbf{Y}(\rho) = \mathbf{B}_1 x^{\nu_k-1} + \mathbf{B}_2 x^{\nu_k+1} \quad (3.5)$$

Эту же формулу можно получить предельным переходом при $\alpha \rightarrow 0$ в более общих формулах ([16], формулы (4.8)).

Трансформанты искоемых смещений окончательно запишутся в виде

$$\begin{aligned} u_k(\rho) &= \int_0^1 \Phi_{00}\left(\frac{r}{\rho}\right) \frac{f_k^1(r)}{r} dr + Y_{00}(\rho) C_0^{(k)} + Y_{01}(\rho) C_1^{(k)} \\ V_k(\rho) &= \int_0^1 \Phi_{10}\left(\frac{r}{\rho}\right) \frac{f_k^1(r)}{r} dr + Y_{10}(\rho) C_0^{(k)} + Y_{11}(\rho) C_1^{(k)} \\ f_k^1(r) &= -\mu_*^{-1} P_{\nu_k}(\cos \omega) \sin \omega u'(r, \omega) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Чтобы отыскать постоянные $C_0^{(k)}$ и $C_1^{(k)}$, подставим выражения (3.6) в краевые условия (2.4) (вид коэффициентов $C_0^{(k)}$ и $C_1^{(k)}$ приведен в приложении 2).

Применение обратных интегральных преобразований (2.1) и (2.2) [14] к трансформантам (3.6)

$$\begin{bmatrix} u(\rho, \theta) \\ V(\rho, \theta) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} u_k(\rho) P_{v_k}(\cos \theta) \|P_{v_k}(\cos \theta)\|^{-2} \\ V_k(\rho) P_{v_k}^1(\cos \theta) \|P_{v_k}^1(\cos \theta)\|^{-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_0(\cos \theta) \left(2 \sin^2 \frac{\omega}{2}\right)^{-1} u_0(\rho) \end{bmatrix}$$

($v = v_k, k = 0, 1, 2, \dots$) завершит построение смещений $u(\rho, \theta), V(\rho, \theta)$, если будет определена неизвестная функция $u'(\rho, \omega)$. При ее определении учтем, что первое условие (1.2) осталось неудовлетворенным. Удовлетворив требованию $u(\rho, \omega) = 0$, получим интегральное уравнение

$$\int_0^1 \frac{\chi(r)}{r} \Omega\left(\frac{r}{\rho}\right) dr = f(\rho); \quad \chi(\rho) = u'(\rho, \omega) \quad (3.7)$$

(Выражения для ядра $\Omega\left(\frac{r}{\rho}\right)$ и правой части $f(\rho)$ этого уравнения приведены в приложении 3.) Для решения полученного интегрального уравнения следует знать характер особенностей неизвестной функции $\chi(\rho)$ на концах промежутка интегрирования $\rho = 0$ и $\rho = 1$.

4. Выявление порядка особенности неизвестной функции $u'(\rho, \omega)$ при $\rho = 0$ и $\rho = 1$. При исследовании особенности смещений при $\rho = 1$, пренебрегая кривизной боковой поверхности конуса, можно интерпретировать исходную задачу как задачу для клина, на одной грани которого заданы напряжения, а на другой – смещения. Такая задача была решена [20] и было показано, что показатель степени, определяющий особенность, близок к $1/3$ (с точностью до шестого десятичного знака).

Для выяснения характера особенности при $\rho = 0$ используем метод Вильямса [21], для чего представим смещения в форме Гутмана [22]

$$\begin{aligned} u(\rho, \theta) &= \Phi'(\rho, \theta) - 2(1 - \mu)\rho \Delta F(\rho, \theta), \quad V(\rho, \theta) = \Phi^*(\rho, \theta)/\rho \\ \Phi(\rho, \theta) &= \rho F'(\rho, \theta) + \kappa F(\rho, \theta), \quad \kappa = 3 - 4\mu \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $F(\rho, \theta)$ – функция, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta^2 F(\rho, \theta) = 0; \quad \Delta F = \frac{(\rho^2 F')'}{\rho^2} - \frac{\nabla F}{\rho^2}, \quad \nabla F = -\frac{(\sin \theta F^*)'}{\sin \theta} \quad (4.2)$$

Представим функцию $F(\rho, \lambda)$ в виде $F(\rho, \lambda) = \rho^\lambda g(\theta)$, где λ – неизвестный порядок особенности, и подставим это в уравнение (4.2):

$$\Delta \left(\lambda(\lambda + 1) g(\theta) + \frac{(\sin \theta g^*(\theta))'}{\sin \theta} \right) = 0 \quad (4.3)$$

Запишем общее решение уравнения (4.3) [18]

$$g(\theta) = L_0 P_{\lambda-2}(\cos \theta) + L_1 Q_{\lambda-2}(\cos \theta) + L_2 P_\lambda(\cos \theta) + L_3 Q_\lambda(\cos \theta) \quad (4.4)$$

$P_v(\cos \theta)$ и $Q_v(\cos \theta)$ – функции Лежандра первого и второго родов.

Учитывая регулярность решения при $\theta = 0$, потребуем, чтобы $L_1 = L_3 \equiv 0$ и подставим представление

$$F(\rho, \alpha) = \rho^\alpha (L_0 P_{\lambda-2}(\cos \theta) + L_2 P_\lambda(\cos \theta))$$

в формулы (4.1), выражающие смещения через функцию $F(\rho, \theta)$. Потребуем выполнения краевых условий (1.2), откуда получим систему однородных уравнений относительно неизвестных постоянных L_0, L_2

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda + \kappa) P_\lambda(\cos \omega) L_2 + (\lambda + \lambda\kappa + 2(1 - \mu)) P_{\lambda-2}(\cos \omega) L_0 &= 0 \\ P'_\lambda(\cos \omega) L_2 + P'_{\lambda-2}(\cos \omega) L_0 &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Для того чтобы система (4.5) имела нетривиальное решение, определитель системы должен равняться нулю:

$$\lambda(\lambda + \kappa) P'_{\lambda-2}(\cos \omega) P_\lambda(\cos \omega) - (\lambda + \lambda\kappa + 2(1 - \mu)) P'_\lambda(\cos \omega) P_{\lambda-2}(\cos \omega) = 0$$

Решив это уравнение численно с помощью математического пакета MAPLE, из его корней выбираем тот, что дает наиболее сильную особенность для смещений $-\lambda_*$. Таким образом, порядок особенности смещений выявлен:

$$\begin{aligned} u(\rho, \omega) &\sim \rho^\alpha q_1(\theta), \quad V(\rho, \omega) \sim \rho^{\alpha*} (\lambda_* + \kappa) q_2(\theta), \quad \alpha = \lambda_* - 1 \\ q_1(\theta) &= \lambda_* (\lambda_* + \kappa) L_2 P_{\lambda_*}(\cos \theta) + (\lambda_*^2 + \lambda_* \chi + 2(1 - \mu)) L_0 P_{\lambda_*-2}(\cos \theta) \\ q_2(\theta) &= L_2 P'_\lambda(\cos \theta) + L_0 P'_{\lambda_*-2}(\cos \theta) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Неизвестная функция представляет собой производную от смещений $\chi(\rho) = u'(\rho, \omega)$. Чтобы выяснить порядок ее особенности, учтем формулы

$$u'(\rho, \omega) = \frac{\rho \tau_{r\theta}(\rho, \omega)}{G}, \quad \tau_{r\theta}(\rho, \theta) = G \left\{ \rho \left(\frac{V(\rho, \theta)}{\rho} \right)' + \frac{u'(\rho, \theta)}{\rho} \right\} \quad (4.7)$$

Учтем, что при $\theta = \omega$ первое слагаемое в фигурных скобках во втором соотношении (4.7) обращается в нуль за счет краевых условий (1.2). Подставим представления (4.6) во второе равенство (4.7) и получим порядок особенности напряжений $\tau_{r\theta}(\rho, \theta)$:

$$\tau_{r\theta}(\rho, \theta) \sim \rho^{\lambda_*-2} G (\lambda_* - 2) (\lambda + \kappa) q_2(\theta) + q_1(\theta)$$

Следовательно, порядок особенности неизвестной функции $u'(\rho, \omega)$ равен $\alpha = \lambda_* - 1$.

Таким образом, установлены порядки особенностей неизвестной функции на обоих краях конуса $\rho = 0$ и $\rho = 1$.

5. Решение интегрального уравнения и отыскание неизвестной функции $u'(\rho, \omega)$. В соответствии с характером особенностей неизвестной функции $\chi(r)$ необходимо искать решение уравнения (3.7) в виде следующего ряда:

$$\chi(r) = r^\alpha (1-r)^\beta \sum_{h=0}^{\infty} x_n P_n^{\alpha, \beta}(1-2r) \quad (5.1)$$

x_n — неизвестные коэффициенты разложения, $P_n^{\alpha, \beta}(z)$ — многочлены Якоби.

Подставим разложение (5.1) в интегральное уравнение (3.7):

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \int_0^1 r^{\alpha-1} (1-r)^{\beta} \Omega\left(\frac{r}{\rho}\right) P_n^{\alpha,\beta}(1-2r) dr = f(\rho) \quad (5.2)$$

Ортогонализацию бесконечной системы (5.2) можно провести по любой полной системе функций, в частности, по системе $\{P_n^{\alpha,\beta}(1-2r)\}$. Для этого умножим обе части равенства (5.2) на $P_m^{\alpha,\beta}(1-2\rho)$ и проинтегрируем на отрезке $\rho \in [0, 1]$. Получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n d_{nm} = f_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad f_m = \int_0^1 f(\rho) P_m^{\alpha,\beta}(1-2\rho) d\rho \quad (5.3)$$

При учете элементов фундаментальной матрицы (3.6) заключаем, что коэффициенты системы имеют вид

$$\begin{aligned} d_{mn} &= \int_0^1 \int_0^1 r^{\alpha-1} (1-r)^{\beta} \Omega\left(\frac{r}{\rho}\right) P_n^{\alpha,\beta}(1-2r) P_m^{\alpha,\beta}(1-2\rho) dr d\rho = \\ &= \int_0^1 P_m^{\alpha,\beta}(1-2\rho) \int_0^{\rho} r^{\alpha-1} (1-r)^{\beta} \left[\tilde{b}_{k0} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\nu_k+1} + \tilde{b}_{k1} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\nu_k-1} \right] + \\ &+ \int_{\rho}^1 r^{\alpha-1} (1-r)^{\beta} \left[\tilde{a}_{k2} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{-\nu_k} + \tilde{a}_{k3} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{-\nu_k-2} \right] P_n^{\alpha,\beta}(1-2r) dr d\rho \end{aligned} \quad (5.4)$$

(Коэффициенты $\tilde{a}_{kl}$, $\tilde{b}_{kl}$ выражаются через элементы матриц $\mathbf{A}_l$, $\mathbf{B}_l$; $l = 1, 2$. Вычисление интегралов (5.4) вынесено в приложение 4.) После интегрирования получим выражения

$$d_{mn} = \sum_{l=0}^1 \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{b}_{kl} v^l(\alpha, \beta, m, n, k) + \sum_{l=2}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_{kl} v^l(\alpha, \beta, m, n, k) \quad (5.5)$$

Исследуем сходимость следующих рядов, входящих в выражения для коэффициентов d_{mn} :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(P_{\nu_k}(\cos \omega))^2 \tilde{a}_{kl}}{\|P_{\nu_k}(\cos \theta)\|^2 \gamma_k}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(P_{\nu_k}(\cos \omega))^2 \tilde{b}_{kj}}{\|P_{\nu_k}(\cos \theta)\|^2 \gamma_k}, \quad l = 2, 3; \quad j = 0, 1$$

Как было показано [23], асимптотическое поведение коэффициентов ν_k нормы $\|P_{\nu_k}(\cos \theta)\|^2$ и функций $P_{\nu_k}(\cos \omega)$ при $k \rightarrow \infty$ определяется выражениями

$$\sigma_k = \frac{\omega}{\pi k} \left[1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right], \quad \nu_k = \frac{k\pi}{\omega}, \quad P_{\nu}(\cos \theta) = \frac{1}{\sqrt{k}} \cos \frac{k\pi\theta}{\omega} \left[1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right]$$

и для коэффициентов, входящих в выражения (5.5), имеем

$$\tilde{a}_{k2} = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad \tilde{a}_{k3} = \frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad \tilde{b}_{k0} = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad \tilde{b}_{k1}^{i,j} = k + O(1), \quad \gamma_k^i = k + O(1)$$

Отсюда заключаем, что исследуемые ряды — сходящиеся.

Представляется полезным сравнить полученные поля смещений и напряжений с их аналогами для случая, когда на боковой поверхности конуса заданы условия гладкого контакта.

6. Точное решение задачи для случая скользящей заделки на боковой поверхности конуса. Рассматриваемое решение – частный случай ($\omega_0 = 0, \omega_1 = \omega$ и $a = 0, b = a$) решения, полученного ранее [16], в котором следует совершить предельный переход при $a \rightarrow 0, \omega_0 \rightarrow 0$. Однако оказалось проще решить эту задачу непосредственно.

В рассматриваемом случае краевые условия (1.2) принимают вид

$$V(\rho, \omega) = 0, \quad \tau_{\rho\theta}(\rho, \omega) = 0 \quad (6.1)$$

Чтобы удовлетворить граничным условиям (6.1), достаточно потребовать (см. [16], формулы (1.8), (1.9)) выполнения равенств

$$\Phi^*(\rho, \omega) = 0, \quad \Psi^*(\rho, \omega) = 0 \quad (6.2)$$

Эти условия будут выполнены автоматически, если к уравнениям Лапласа применить интегральное преобразование

$$\begin{bmatrix} \Phi_k(\rho) \\ \Psi_k(\rho) \end{bmatrix} = \int_0^\omega \begin{bmatrix} \Phi(\rho, \theta) \\ \Psi(\rho, \theta) \end{bmatrix} P_{v_k}^1(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (6.3)$$

с формулой обращения [16]

$$\begin{bmatrix} \Phi(\rho, \theta) \\ \Psi(\rho, \theta) \end{bmatrix} = - \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \Phi_k(\rho) \\ \Psi_k(\rho) \end{bmatrix} \frac{P_{v_k}^1(\cos \theta)}{\sigma_k(\omega)}, \quad \sigma_k(\omega) = \frac{(2v_k + 1) Q_{v_k}^1(\cos \omega)}{[\partial P_{v_k}^1(\cos \omega) / \partial v]_{v=v_k}}$$

где $v = v_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) – корни уравнения $P_v^1(\cos \omega) = 0$.

Общее решение полученных одномерных дифференциальных уравнений в трансформантах с учетом требования их регулярности в нуле имеет вид

$$\Psi_k(\rho) = C_k^0 r^{v_k}, \quad \Phi_k(\rho) = C_k^1 r^{v_k} \quad (6.4)$$

C_k^0 и C_k^1 – произвольные постоянные, которые определяются из требования выполнения граничных условий (1.3), к которым также применяется интегральное преобразование (6.3). Это приводит к решению системы алгебраических уравнений относительно неизвестных общего решения (6.4). В результате получим

$$\begin{aligned} C_k^0 &= -(v_k^2 + 2v_k + 2\mu + 1)a^{2-v_k} p_k / M_k, \quad C_k^1 = (v_k^2 - 3 - 4\mu)a^{-v_k} p_k / M_k \\ M_k &= (2\mu - 1)v_k^5 + (2 - 4\mu)v_k^4 + (8\mu - 3 + v_k^2 - 2\mu v_k^2 - 4\mu^2)v_k^3 + \\ &+ (8\mu^2 v_k^2 + 10\mu - 8\mu v_k^2 + 4 + 16\mu^3 - 44\mu^2 + 2v_k^2)v_k^2 + \\ &+ (16\mu^3 - 8\mu^2 v_k^2 - 3v_k^2 + 30 - 36\mu^2 - 46\mu + 10\mu v_k^2)v_k - 36 + 100\mu^2 + 16\mu^3 + 18\mu \end{aligned} \quad (6.5)$$

Зная трансформанты двух гармонических функций ([16], формулы (1.7)–(1.10)), построим трансформанты смещений и напряжений. Окончательное точное решение задачи получено путем применения к вычисленным трансформантам смещений и напряжений обратного преобразования (6.3).

7. Численный анализ. Рассчитаны нормальные напряжения в стальном конусе (коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$) при заданной постоянной нагрузке P . Угол раствора конуса $\omega = \pi/3$. Ниже для относительных значений радиус-вектора r/a приведены значения нормальных напряжений на поверхности конуса ($\sigma_\theta(r, \theta)$ – напряжения в защем-

ленном конусе, $\sigma_\theta^*(r, \theta)$ — напряжения в конусе, на поверхности которого заданы условия гладкого контакта)

r/a	1/20	1/10	3/20	1/5	1/4	1/2	3/4	4/5	17/20	9/10	19/20
$\sigma_\theta(r, \theta)$	0.070	0.097	0.166	0.196	0.444	0.914	1.308	1.402	1.625	1.795	2.120
$\sigma_\theta^*(r, \theta)$	0.675	0.785	0.893	0.946	1.621	1.895	1.901	1.934	2.034	2.134	2.148

Видно, что нормальные напряжения в конусе с заземленной боковой поверхностью меньше, чем в конусе со скользящей заделкой боковой поверхности. По мере приближения к торцу конуса, на котором приложена нагрузка, в обоих случаях отмечается рост значений нормальных напряжений, а значения напряжений $\sigma_\theta(r, \theta)$ и $\sigma_\theta^*(r, \theta)$ все более сближаются.

Расчеты вблизи вершины конуса показали, что потеря устойчивости счета наступит при значениях радиуса порядка $10^{-5}a$, тогда как потеря устойчивости при приближении к торцу конуса наступает при значениях $9 \cdot 10^{-6}a$.

Аналогичная картина сохраняется при уменьшении угла раствора конуса вдвое, причем абсолютные значения нормальных напряжений при этом увеличиваются.

Представляют интерес некоторые частные случаи поставленной задачи. Так, если угол раствора конуса $\omega = \pi/2$, то, применив интегральное преобразование [16], получаем решение для полушара. В случае конуса, к основанию которого присоединен шаровой сегмент, а со стороны вершины изъята часть тела в форме шарового сегмента, $r \in [a_0, a]$, получаем решение для сферического полукупола.

8. Приложение.

Приложение 1. Вид элементов матриц $\mathbf{A}_l$ и $\mathbf{B}_l$, входящих в фундаментальную матрицу $\Phi(x)$ (3.3):

$$\begin{aligned}
 a_{k,1}^{11} &= -b_{k,1}^{11} = v_k R_{v_k} (1 - v_k + \mu_* (v_k + 1)), & a_{k,1}^{12} &= -b_{k,1}^{12} = \mu_1 R_{v_k} (v_k + \kappa) \\
 a_{k,1}^{21} &= N_k R_{v_k} (-\mu_0 v_k + 2\mu_*), & a_{k,1}^{22} &= -b_{k,1}^{22} = R_{v_k} (-v_k (v_k - 1) + 2 + \mu_*^{-1} N_k) \\
 a_{k,2}^{11} &= -b_{k,2}^{11} = (v_k + 1) R_{v_{k+1}} (v_k + 2 - \mu_* v_k), & a_{k,2}^{12} &= -\mu_1 R_{v_{k+1}} (v_k + 2 + \kappa) \\
 a_{k,2}^{21} &= N_k R_{v_{k+1}} (\mu_0 (v_k + 2) - 2\mu_*), & a_{k,2}^{22} &= -b_{k,2}^{22} = R_{v_{k+1}} ((v_k + 2)(v_k + 1) - 2 - \mu_*^{-1} N_k) \\
 b_{k,1}^{21} &= N_k R_{v_k} (-\mu_0 (v_k - 1) - 2\mu_*), & b_{k,2}^{12} &= -\mu_1 R_{v_{k+1}} (v_{k+1} - \kappa) \\
 b_{k,2}^{21} &= N_k R_{v_{k+1}} (\mu_0 (v_k + 1) + 2\mu_*) \\
 \kappa &= \tilde{\mu} \mu_*^{-1}, & R_{v_k} &= [2(2v_k - 1)(2v_k + 1)]^{-1}
 \end{aligned}$$

Приложение 2. Система уравнений для определения коэффициентов $C_0^{(k)}, C_1^{(k)}$:

$$\begin{aligned}
 A_k C_0^{(k)} + B_k C_1^{(k)} &= F_k^1, & D_k C_0^{(k)} + E_k C_1^{(k)} &= F_k^2 \\
 A_k &= (1 + \mu)(v_k + 1) R_{v_{k+1}} (v_k (\mu_* - 1) - 2) + 2(1 - \mu_*) (v_k - 1) \mu v_k R_{v_k} - \mu (b_{k,1}^{21} + b_{k,2}^{21}) \\
 B_k &= -\mu_1 R_{v_{k+1}} (v_k + 1 - \kappa) (v_k + 1 + 2\mu) + \mu_1 R_{v_k} (v_k - 1 + \kappa) (v_k - 1 + 2\mu) + \mu (a_{k,1}^{22} + a_{k,2}^{22})
 \end{aligned}$$

$$F_k^1 = -A_{pk} - \psi_k(\omega) \int_0^1 [(1-\mu)\Phi'_{11}(r) + 2\mu\Phi_{11}(r) - \mu\Phi_{21}(r)] \frac{x(r)}{r} dr$$

$$D_k = (\nu_k + 1)b_{k,2}^{21} + (\nu_k - 1)b_{k,1}^{21} + (\nu_k + 1)N_k R_{\nu_k+1}(\nu_k(\mu_* - 1) - 2) + (1 - \mu_*)(\nu_k - 1)\nu_k N_k R_{\nu_k}$$

$$E_k = \nu_k b_{k,2}^{22} - (\nu_k - 2)a_{k,1}^{22} - \mu_1 N_k R_{\nu_k+1}(\nu_k + 1 - \kappa) + \mu_1 N_k R_{\nu_k}(\nu_k - 1 + \kappa)$$

$$F_k^2 = -\psi_k(\omega) \int_0^1 [\Phi'_{21}(r) + \Phi_{21}(r) - N_k \Phi_{11}(r)] \frac{x(r)}{r} dr$$

Приложение 3. Вид ядра $\Omega(r/\rho)$ и правой части $f(\rho)$ уравнения (3.7)

$$\Omega\left(\frac{r}{\rho}\right) = -\frac{\sin \omega}{\mu_*} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(P_{\nu_k}(\cos \omega))^2}{\|P_{\nu_k}(\cos \theta)\|^2} \int_0^1 \left[\Phi_{11}\left(\frac{r}{\rho}\right) + (1-\mu)\Phi'_{22}(r) + 2\mu\Phi_{22}(r) + \mu\Phi_{21}(r) \right] \frac{x(r)}{r} dr$$

$$f(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_{\nu_k}(\cos \omega)}{\|P_{\nu_k}(\cos \theta)\|^2} \{ \rho^{\nu_k+1} R_{\nu_k+1} \{ C_{0k}(\nu_k + 1)(\nu_k(\mu_* - 1) - 2 - C_{1k}\mu_1(\nu_k + 1 - \kappa)) \} + \\ + \rho^{\nu_k} R_{\nu_k} \{ C_{0k}\nu_k(\nu_k(1 - \mu_*) - (1 + \mu_*)) + C_{1k}\mu_1(\nu_k - 1 + \kappa) \} \}$$

Приложение 4. Вычисление интегралов

$$I_{\nu_k+1}^1 = \int_0^{\rho} r^{\alpha-1} r^{\nu_k+1} \Pi_n(r) dr \int_0^1 \rho^{\alpha+1} \Pi_m(\rho) d\rho = -\alpha_m \sum_{j=0}^m d_{mj}^{\alpha,\beta} \frac{K_j}{j - \nu_k}$$

$$I_{-\nu_k-1}^2 = \int_{\rho}^1 r^{\alpha-1} r^{-\nu_k-2} \Pi_n(r) dr \int_0^1 \rho^{\alpha+2} \Pi_m(\rho) d\rho = \alpha_m^2 \sum_{j=0}^m d_{mj}^{\alpha,\beta} \frac{K_j}{j + \nu_k + 2}$$

$$\Pi_n(\rho) = (1-\rho)^{\beta} P_n^{\alpha,\beta}(1-2\rho); \quad K_q = \int_0^1 \rho^{\alpha+q} \Pi_n(\rho) d\rho$$

$$\alpha_m = (m!)^{-1} d_{m1}^{\alpha,\beta}; \quad d_{mj}^{\alpha,\beta} = \Gamma(\alpha + \beta + m + j) \Gamma(\alpha + j + 1)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686 с.
2. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Осесимметричные колебания упругого цилиндра конечной длины // Акуст. ж. 1978. Т. 24. № 6. С. 861–866.
3. Баблюян А.А., Баблюян К.Б. Изгибные и поперечные колебания упругого цилиндра конечной длины // Изв. НАН Арм. Респ. Механика. 1995. Т. 48. № 3. С. 23–32.
4. Vaisfel'd N.D. Collision of an elastic finite-length cylinder with a rigid barrier // Int.Appl.Mech. 2007. V. 43. № 9. P. 1009–1016.
5. Селезов И.Т., Яковлев В.В. Дифракция волн на симметричных неоднородностях. Киев: Наук. думка, 1978. 145 с.
6. Подстригач Я.С., Поддубняк А.П. Рассеяние звуковых пучков на упругих телах сферической и цилиндрической формы // Киев: Наук. думка, 1986. 262 с.

7. Бабаев А.Э., Годенко В.П., Кубенко В.Д. Взаимодействие нестационарной волны давления с жесткой сферой, расположенной вблизи свободной поверхности // Гидромеханика. Киев: Наук. думка, 1988. Вып. 57. С. 10–15.
8. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы М.: Наука, 1990. 264 с.
9. Sternberg E., Rosenthal F. The elastic sphere under concentrated loads// J. Appl. Mech. 1952. V. 19. № 4. P. 413–421.
10. Бондарева В.Ф. Контактная задача для весомого полушара // Сб. тр. ВНИИФТРИ. 1974. С. 3–13.
11. Булычев Г.Г., Сабодаш П.Ф. Аналитическое решение осесимметричной задачи динамики полусферического купола // Докл. РАН. 2004. Т. 395. № 4. С. 474–478.
12. Будаев Б.В., Морозов Н.Ф., Нарбут М.А. Принцип Сен-Венана в задачах о возбуждаемых упругих волнах в клине и конусе // Вестн. СПб. ун-та. Сер. А. 1996. № 1. С. 81–84.
13. Vaisfel'd N.D. Nonstationary torsion of a tapered shaft weakened by a spherical crack // Materials Science. 2008. Т. 44. № 1. P. 54–63.
14. Попов Г.Я. Осесимметричная смешанная задача теории упругости для усеченного кругового полого конуса // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 3. С. 431–443.
15. Nowacki W. Teoria sprężystości. Warszawa: PWN, 1973 = Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
16. Попов Г.Я. Об осесимметричных задачах теории упругости для усеченного полого конуса // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 3. С. 458–468.
17. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука. 1970. 939 с.
18. Kamke E. Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen. Leipzig: Akad. Verlag, 1959 = Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965. 703 с.
19. Попов Г.Я., Абдыманапов С.А., Ефимов В.В. Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач. Алматы: Изд-во Руан, 1999. 113 с.
20. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1963. 367 с.
21. Williams M. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extensions// Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1952. V. 19. № 4. P. 526–528.
22. Гутман С.Г. Общее решение задачи теории упругости в обобщенных цилиндрических координатах // Докл. АН СССР, 1947. Т. 58. № 6. С. 923–927.
23. Popov G. Ya., Vaisfel'd N.D. The stress concentration in the neighborhood of the spherical crack inside the infinite elastic cone // Operator Theory. 2009. V. 191. P. 173–186.