

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра математичного аналізу

Дипломна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

на тему: **«Вибрані задачі теорії числових рядів»**

«Selected problems of numeric series theory»

Виконала: студентка денної форми навчання
спеціальності 111 Математика

Воронкова Сабіна Рашидівна

Керівник: проф. Кореновський А. О. _____

Рецензент: доц. Шанін Р. В.

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ____ від _____ 2019 р.
Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № _____
Протокол № ____ від _____ 2019 р.
Оцінка _____ / _____ / _____
Голова ЕК

Одеса — 2019 р.

ЗМІСТ

Вступ	3
1 Допоміжні відомості	6
2 Критерій збіжності	11
2.1 Доведення критерію	11
2.2 Приклади	14
3 Критерій підсумовування	24
3.1 Доведення критерію	24
3.2 Приклад	26
Висновки	31
Список літератури	32

ВСТУП

Робота присвячена дослідженню умов розташування знаків доданків узагальненого гармонічного ряду, без порушення порядку, що гарантують збіжність або розбіжність отриманого ряду. Крім того, у разі розбіжності досліджується можливість підсумовування данного ряду методом середніх арифметичних Чезаро [1, с. 401].

Добре відомо, що узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ збігається при $\alpha > 1$ і розбігається при $\alpha \leq 1$. Але необхідна умова збіжності цього ряду виконується при $\alpha > 0$, причому у цьому випадку доданки прямують до нуля монотонно. Таким чином, якщо змінювати знаки доданків через один, то при $0 < \alpha \leq 1$ відповідний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-\alpha}$, за ознакою Лейбниці [1, с. 302], стане умовно збіжним.

Відома теорема Рімана [1, с. 317] стверджує, що переставляючи доданки умовно збіжного ряду, можна отримати новий ряд, який збігається до будь-якої наперед заданої суми, або ж розбігається. Незначна модифікація доведення теореми Рімана надає можливість розташувати знаки доданків (не переставляючи їх) заданого розбіжного ряду з невід'ємними доданками, що прямують до нуля, так, щоб отримати новий ряд, який збігається до наперед заданої суми, або розбігається (див. [2, с. 75]). У даній роботі розглянута обернена, у визначеному сенсі, задача. Тобто, для ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^{\alpha}}, \quad (0.1)$$

де $\varepsilon_n = \pm 1$, $0 < \alpha \leq 1$, визначено вплив ε_n на його збіжність.

Якщо $\alpha = 1$ і ε_n являє собою випадкову величину, що може приймати значення ± 1 з однаковою ймовірністю (тобто $\frac{1}{2}$), то так званий випадковий ряд, на підставі теореми Колмогорова про три ряди [3, с. 290], збігається майже напевно до дзета-функції Рімана [4, с. 11] $\zeta(2)$. Більш детальне обґрунтування даного факту описане у [5].

Послідовність $\varepsilon_n = \pm 1$ ми задаємо в термінах n_k номерів перемикання знаку. А саме, для строго зростаючої послідовності n_k при $n_{k-1} \leq n < n_k$

покладемо $\varepsilon_n = (-1)^{k-1}$. Основні результати сформульовані у вигляді двох наступних теорем.

Теорема 0.1 (Критерій збіжності). *При $\alpha = 1$ збіжність ряду (0.1) рівносильна збіжності ряду*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \ln \frac{n_k}{n_{k-1}}, \quad (0.2)$$

а при $0 < \alpha < 1$ ряд (0.1) збігається або розбігається одночасно з рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} (n_k^{1-\alpha} - n_{k-1}^{1-\alpha}). \quad (0.3)$$

Теорема 0.2 (Критерій підсумовування). *Ряд (0.1) підсумовується методом середніх арифметичних Чезаро тоді і тільки тоді коли для $n \leq t < n + 1$ при $n \rightarrow \infty$ існує границя наступної функції*

$$\psi(t) \equiv \frac{1}{t} \int_1^t \phi(\tau) d\tau = \frac{1}{t} \int_1^t \int_1^{\tau} f(x) dx d\tau,$$

де

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^\alpha}, & n_{2m} \leq x < n_{2m+1}, \\ -\frac{1}{x^\alpha}, & n_{2m+1} \leq x < n_{2m+2} \end{cases} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Доведення теорем 0.1 та 0.2 наведені розділах 2 і 3, відповідно.

Крім того, розглянуті випадки деяких конкретних послідовностей n_k . Виявилось, що в окремих випадках, застосування теореми 0.1 призводить до труднощів. Одним з таких випадків є $n_k = r \cdot k$, $r \in \mathbb{Q}$. Для того, щоб досліджувати збіжність ряду (0.1) у цьому випадку, необхідно по-перше, перейти до цілих частин у визначенні n_k (тобто $n_k = [r \cdot k]$), оскільки елементи n_k повинні бути натуральними числами. По-друге, представити $r = m + p/q$ ($m, p, q \in \mathbb{N}$, p/q - правильний нескорочуваний дріб), адже інакше n_k не буде строго зростаючою. Інший випадок, коли $n_k = k^\beta$ де $\beta > 1$. Як і в попередньому прикладі, початковим є перехід до цілих частин (тобто $n_k = [k^\beta]$). При подальшому дослідженні використовується

ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(k^{\beta(1-\alpha)} - [k^{\beta}]^{1-\alpha} \right)$, що складає інтерес і незалежно від його використань, розглянутих у даній роботі. В результаті отримані умови збіжності та розбіжності для $n_k = [k^{\beta}]$, проте для $1 < \beta < 2$, $1 - \frac{1}{\beta} < \alpha \leq \frac{1}{\beta}$ питання збіжності залишається відкритим. Висновок щодо збіжності ряду (0.1) при окреслених вище випадках викладені у вигляді теорем (з доведенням) і також складають основні результати даної роботи.

Для зручності в роботі виділено розділ з допоміжними відомостями, на які є посилання в інших розділах. Загальний об'єм роботи становить 30 сторінок. Список використаної літератури містить 8 найменувань.

РОЗДІЛ 1

ДОПОМІЖНІ ВІДОМОСТІ

У даному розділі наведені проміжні результати, на підставі яких були отримані основні здобутки даної роботи.

Для $j \in \mathbb{N}$ позначимо

$$\gamma_j = \frac{1}{j^\alpha} - \int_j^{j+1} \frac{dx}{x^\alpha}, \quad (1.1)$$

а тоді можемо представити часткові суми ряду (0.1) у наступному вигляді

$$A_n^{(\alpha)} \equiv \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon_j}{j^\alpha} = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \int_j^{j+1} \frac{dx}{x^\alpha} + \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \gamma_j. \quad (1.2)$$

Позначимо $\sum_{j=1}^n \varepsilon_j \int_j^{j+1} \frac{dx}{x^\alpha} = B_n^{(\alpha)}$ і перепишемо (1.2) у нових позначеннях

$$A_n^{(\alpha)} = B_n^{(\alpha)} + \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \gamma_j. \quad (1.3)$$

В свою чергу, виділяючи окремо послідовні доданки одного знаку, послідовність $B_n^{(\alpha)}$ можна представити у наступному вигляді

$$B_n^{(\alpha)} = \sum_{m=0}^{s-1} \left(\int_{n_{2m}}^{n_{2m+1}} \frac{dx}{x^\alpha} - \int_{n_{2m+1}}^{n_{2m+2}} \frac{dx}{x^\alpha} \right) + b_n^{(\alpha)}, \quad (1.4)$$

де $n_{2s} - 1 \leq n < n_{2s+2}$ і

$$b_n^{(\alpha)} = \begin{cases} 0, & n = n_{2s} - 1, \\ \int_{n_{2s}}^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha}, & n_{2s} \leq n < n_{2s+1}, \\ \int_{n_{2s}}^{n_{2s+1}} \frac{dx}{x^\alpha} - \int_{n_{2s+1}}^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha}, & n_{2s+1} \leq n < n_{2s+2}. \end{cases}$$

Згідно з рівністю (1.3) отримуємо наступну лему.

Лема 1.1. *Збіжність ряду (0.1) при $0 < \alpha \leq 1$ рівносильна збіжності послідовності $B_n^{(\alpha)}$.*

Доведення. Перепишемо рівність (1.3) як

$$A_n^{(\alpha)} - B_n^{(\alpha)} = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \gamma_j. \quad (1.5)$$

Оскільки для (1.1) виконується наступна нерівність

$$0 \leq \gamma_j = \frac{1}{j^\alpha} - \int_j^{j+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha} \leq \frac{\alpha}{j(j+1)^\alpha}, \quad (1.6)$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \gamma_n$ збігається абсолютно, тобто послідовність $\sum_{j=1}^n \varepsilon_j \gamma_j$ збіжна.

Тому, згідно з рівністю (1.5). існування $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{(\alpha)}$ рівносильно існуванню

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n^{(\alpha)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{s-1} \left(\sum_{j=n_{2m}}^{n_{2m+1}-1} \int_j^{j+1} \frac{dx}{x^\alpha} - \sum_{j=n_{2m+1}}^{n_{2m+2}-1} \int_j^{j+1} \frac{dx}{x^\alpha} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^{(\alpha)}. \quad (1.7)$$

□

Лема 1.2. *Нехай числа $c_k \geq 0$ і*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0. \quad (1.8)$$

Тоді ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} c_k \quad (1.9)$$

і

$$\sum_{k=1}^{\infty} (c_{2k-1} - c_{2k}) \quad (1.10)$$

збігаються або розбігаються одночасно.

Доведення. З очевидної рівності

$$S_{2n} \equiv c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots + c_{2n-1} - c_{2n} = D_n,$$

де S_k і D_k - часткові суми рядів (1.9) та (1.10) відповідно, випливає, що ряд (1.10) збігається тоді і лише тоді, коли існує

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} \equiv S. \quad (1.11)$$

Але, оскільки

$$S_{2n+1} = S_{2n} + c_{2n+1},$$

то, за умовою (1.8), існування границі (1.11) рівносильно тому, що і $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = S$. Це означає, що існує

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = S,$$

тобто збігається ряд (1.9). □

Доведення. Твердження леми випливає з теореми 0.1 застосуванням до ряду (0.1) ознаки Діріхле [1, с. 307]. □

Лема 1.3. *Нехай p/q - правильний нескорочуваний дріб. Тоді число*

$$z_t = \frac{tp}{q}. \quad (1.12)$$

не є натуральним при будь-якому натуральному $0 < t < q$ та справедлива рівність

$$[z_t] - [z_{t-1}] = [-z_{t-1}] - [-z_t] \equiv \chi_t, \quad (1.13)$$

де $\chi_t \in \{0,1\}$.

Доведення. Припустимо, що $z_t \in \mathbb{N}$. Звідси випливає, що tp ділиться на q . За правилами подільності (враховуючи, що p/q - нескорочуваний дріб) t має ділитися на q . Проте, це неможливо, оскільки $1 \leq t < q$. Отже, прийшли до протиріччя з припущенням, що $z_t \in \mathbb{N}$.

Доведемо рівність (1.13). Оскільки числа $z_t \notin \mathbb{Z}$ і $0 < z_t - z_{t-1} = \frac{p}{q} < 1$, то можливий лише один з двох наступних випадків:

a) $[z_t] < z_{t-1} < z_t < [z_t] + 1$. У цьому випадку $-[z_t] - 1 < -z_t < -z_{t-1} < -[z_t]$;

$$[z_t] - [z_{t-1}] = [z_t] - [z_t] = 0, \quad [-z_{t-1}] - [-z_t] = -[z_t] - 1 - (-[z_t] - 1) = 0.$$

b) $[z_t] - 1 < z_{t-1} < [z_t] < z_t < [z_t] + 1$. Маємо $-[z_t] - 1 < -z_t < -[z_t] < -z_{t-1}$;

$$[z_t] - [z_{t-1}] = [z_t] - ([z_t] - 1) = 1, \quad [-z_{t-1}] - [-z_t] = -[z_t] - (-[z_t] - 1) = 1.$$

Згідно з цим отримуємо рівність (1.13) і на цьому завершується доведення леми. $\square$

У разі розбіжності ряду (0.1) досліджується можливість його підсумовування методом середніх арифметичних Чезаро, суть якого полягає в наступному.

По частковим сумах A_n числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ будується послідовність середніх арифметичних

$$\omega_n = \frac{A_1 + \dots + A_n}{n}.$$

Якщо ця послідовність при $n \rightarrow \infty$ має границю, то говорять, що ряд підсумовується методом середніх арифметичних Чезаро.

Теорема 1.1. *Метод середніх арифметичних Чезаро є лінійним та регулярним.*

Доведення. Лінійність методу випливає з наступної очевидної рівності

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k (ua_i + vb_i) = u \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k a_i + v \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k b_i,$$

де $u, v > 0$ деякі сталі. Доведемо регулярність. Нехай виконується

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A.$$

Позначимо $\kappa_n = A_n - A$ та відмітимо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_n = 0$. Хочемо довести, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = A.$$

Запишемо окремо послідовність

$$\omega_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n A_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (A_k - A) + A.$$

Аби довести потрібне, достатньо показати, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (A_k - A) = 0.$$

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_n = 0$, то це означає, що знайдеться номер N_1 такий, що для кожного натурального $k \geq N_1$ виконується нерівність

$$|\kappa_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Оскільки $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k - N_1}{k} = 1$, то можемо знайти такий номер $N_2 \geq N_1$, що для кожного $n \geq N_2$ справедлива нерівність $\left| \frac{\kappa_1 + \dots + \kappa_{N_1}}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Отже, для кожного $n \geq N_2$ справедливо наступне

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (A_k - A) \right| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \kappa_k \right| = \left| \frac{\kappa_1 + \dots + \kappa_{N_1} + \kappa_{N_1+1} + \dots + \kappa_n}{n} \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{\kappa_1 + \dots + \kappa_{N_1}}{n} \right| + \left| \frac{\kappa_{N_1+1} + \dots + \kappa_n}{n} \right| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

що і треба було довести. □

ВИСНОВКИ

Магістерська робота являє собою дослідження впливу розташування знаків доданків узагальненого гармонічного ряду на його збіжність і підсумовування.

Збіжність, в основному, перевіряється за спеціальним критерієм, який є основним результатом даної роботи. Цей критерій збіжності сформульований в термінах номерів перемикання знаків і дозволяє звести питання про збіжність до вивчення більш простого, а саме знакозмінного ряду. Згідно з цим побудовано декілька прикладів, що ілюструють зручність використання отриманого критерію.

Проте, під час спроби застосування отриманого критерію в природних випадках (швидкість зростання номерів як арифметичної прогресії, степеневий ріст номерів) довелось зіткнутися з низкою сумнівних моментів, що обумовлені переходом до цілих частин у випадках ненатуральних параметрів. Це спонукало провести додаткові дослідження. В результаті були отримані нові цікаві результати у випадку арифметичної прогресії з раціональною різницею. Для степеневого росту номерів питання збіжності залишається відкритим при деяких значеннях показника степені.

Цінним досягненням цієї роботи також є критерій підсумовування, заснований на принципах методу середніх арифметичних Чезаро. Побудовано приклад розбіжного ряду, який згідно з отриманим у даній роботі критерієм підсумовування не є підсумовним. Відкритим залишається цікаве питання, щодо пошуку додаткових умов у відношенні до номерів перемикання знаків, які гарантують збіжність розглянутого ряду при його підсумовуванні.

Загалом, дана робота є прикладом викладення нетривіальних теоретичних результатів отриманих у дослідженні збіжності та підсумовування узагальненого гармонічного ряду зі змінними знаками його доданків.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. / Г. М. Фихтенгольц. Т. II. – М.: Физматлит, 2001. – 810 с.
2. **Гелбаум Б.** Контрпримеры в анализе. / Б. Гелбаум, Дж. Олмстед. – М.: Мир, 1967. – 252 с.
3. **Patrick Billingsley** Probability and Measure. / P. Billingsley – 3rd ed. John Wiley and Sons, 1995. – 593 p.
4. **Воронин С. М., Карацуба А. А.** Дзета-функция Римана. / Воронин С. М., Карацуба А. А. – М.: Физматлит, 1994. — 376 с.
5. Random harmonic series [Интернет ресурс]: The blog of mathematical articles published in the Irish Times. 2016. URL: <https://thatsmaths.com>.
6. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. / Г. М. Фихтенгольц. Т. I. – М.: Физматлит, 1962. – 600 с.
7. **Демидович Б. П.** Сборник задач и упражнений по математическому анализу. / Б. П. Демидович. – М.: Наука, 1966. – 544 с.
8. **Ильин В. А.** Математический анализ. / В. А. Ильин. – М.: МГУ, 1987. – 358 с.