УДК 917

В. В. Пічкур*, Є. М. Страхов**
*Київський національний університет імені Тараса Шевченка
**Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ДО ЗАДАЧІ СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ З ФІКСОВАНИМИ ТОЧКАМИ ПЕРЕМИКАННЯ

Рекомендовано до публікації програмним комітетом міжнародної літньої математичної школи пам'яті В. О. Плотнікова

Пічкур В. В., Страхов Є. М. Застосування методу динамічного програмування до задачі структурно-параметричної оптимізації з фіксованими точками перемикання. В роботі обгрунтовано принцип оптимальності Беллмана для задачі структурно-параметричної оптимізації динамічної системи з фіксованими точками перемикання. Для цієї задачі одержано рівняння Беллмана в інтегральній та інтегро-диференціальній формах. Створено чисельний метод для задачі оптимізації лінійної системи з квадратичним термінальним функціоналом в класі структурних керувань.
Ключові слова: структурно-параметрична оптимізація, точки перемикання, динамічне програмування.

Пичкур В. В., Страхов Е. М. Применение метода динамического программирования к задаче структурно-параметрической оптимизации с фиксированными точками переключения. В работе обоснован принцип оптимальности Беллмана для задачи структурно-параметрической оптимизации динамической системы с фиксированными точками переключения. Для этой задачи получено уравнение Беллмана в интегральной и интегро-дифференциальной формах. Получен численный метод для задачи оптимизации линейной системы с квадратичным терминальным функционалом качества в классе структурных управлений.
Ключевые слова: структурно-параметрическая оптимизация, точки переключения, динамическое программирование.

Pichkur V. V., Strahov E. M. Application of dynamic programming method to structural and parametric optimization problem with fixed switching points. In this paper the Bellman's Principle of Optimality for structural and parametric optimization problem of dynamical system with fixed switching points was proved. The Bellman equation in integral and integro-differential forms was obtained. A numerical method for optimization of linear system with quadratic terminal functional in a class of structural controls was created.
Key words: structural and parametric optimization, switching points, dynamic programming.

Вступ. Аналіз прикладних задач показує, що досить часто система містить функціональні параметри, які мають задану сталу конструкцію, відому з деякою точністю. І ставиться задача знаходження оптимальних режимів роботи системи у сталих структурах. Формально це може означати, що в системі керування функція керування задана в структурній формі. Такі задачі вивчалися із застосуванням варіаційних методів з метою побудови алгоритмів типу градієнтного спуску. Зокрема, такі обчислювальні методи були одержані в праці [2]. Важливим випадком структурного представлення керування є випадок релейних керувань, або, більш широко, керувань, що вибираються з дискретної множини. В [5] обгрунтовано алгоритм, який використовує структуризацію фазового простору, при цьому керування вибирається в класі кусково-постійних. В статтях [4, 6] пропонуються методи апроксимації керувань у випадку обмежень на час дії керування та кількість точок перемикань. Робота [1] обгрунтовує принцип оптимальності Беллмана для задачі вибору оптимальної структури, в ній одержано рівняння Беллмана в інтегральній та диференціальній формах. Втім, метод динамічного програмування для задач структурно-параметричної оптимізації досліджений не в достатній мірі, випадок керування в структурах, що містять фазову змінну, висвітлюється недостатньо повно.

У статті метод динамічного програмування застосовується для задачі структурно-параметричної оптимізації системи керування з фіксованими точками перемикання, при цьому структура керування містить фазову змінну. Доведено принцип оптимальності і обгрунтовано рівняння Беллмана у інтегральній та інтегро-диференціальній формах. Запропонований чисельний алгоритм розв'язування задачі у випадку лінійної системи з квадратичним термінальним критерієм якості.

Основні результати.

1. Принцип оптимальності. Розглянемо задачу оптимального керування

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t), t)\, dt + \Phi(x(T)) \;\to\; \inf \tag{1}$$

за умов

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \; x(t_0) = x_0 . \tag{2}$$

Тут x – вектор фазових координат розмірності n, $x(t) \in X(t) \subseteq \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0, T]$ – фазові обмеження, u – вектор керування розмірності m, $u(t) \in U(t) \subseteq \mathbb{R}^m$, $t \in [t_0, T]$ – обмеження на керування, $f_0(x, u, t)$, $\Phi(x)$ – неперервні функції, $f(x, u, t)$ – n-вимірна вектор-функція така, що справджуються умови: для будь-якого фіксованого $t \in [t_0, T]$ функція $f(x, u, t)$ є неперервною за x; для будь-яких фіксованих $x \in X$ та $u \in U$ функція $f(x, u, t)$ є вимірною за t; існує така інтегрована функція $p(t)$, що $\|f(x, u, t)\| \le p(t)$, $t \in [t_0, T]$; на проміжку $[t_0, T]$ виконується умова Ліпшиця за керуванням і за фазовою змінною.

Нехай керування в задачі (1)–(2) задано в структурній формі

$$u(t) = \Psi_i(t, b_i, x(t)), \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \tag{3}$$

де $t_0 < t_1 < ... < t_N = T$ – точки перемикання, $b_i \in M_i$ – числові параметри, $M_i \subset \subset \mathbb{R}^{k_i}$, $i = 0, ..., N-1$, k_i – натуральні числа. Функції $\Psi_i(t, b_i, x)$, $t \in [t_i, t_{i+1})$ є такими, що: на кожному з відрізків $[t_i, t_{i+1})$ функції $\Psi_i(t, b_i, x)$ є неперервними за t і b_i; на проміжку $[t_0, T]$ виконується умова Ліпшиця за фазовою змінною. Точки перемикання $t_0 < t_1 < ... < t_N = T$ є фіксованими. Умови на праву частину системи (2) і функцію керування (3) дозволяють задовольнити умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші у формі Каратеодорі [7]. Крім того, мають виконуватись умови продовжуваності розв'язку на інтервал $t \in [t_0, T]$ [1].

Задача (1)–(3) є задачею структурно-параметричної оптимізації з керуванням, заданим в структурному класі (3).

Припустимо, що розв'язок задачі (1)–(3) існує, $u^*(t) = \Psi_i(t, b_i^*, x^*(t))$, $i = 0, \dots, N-1$ – оптимальне керування в класі (3), $x^*(t)$ – оптимальна траєкторія, $\{b_i^*, i = 0, \dots, N-1\}$ – оптимальний набір параметрів. Розглянемо допоміжну задачу. Зафіксуємо $t_s \in \{t_1, \dots, t_{N-1}\}$. Задача полягає в тому, щоб мінімізувати функціонал

$$J_s(x, u) = \int_{t_s}^{T} f_0(x(t), u(t), t)\, dt + \Phi(x(T)) \tag{4}$$

за умов

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t),\ x(t_s) = x^*(t_s), \tag{5}$$

$$u(t) = \Psi_i(t, b_i, x(t)),\quad b_i \in M_i,$$

$$M_i \subset \mathbb{R}^{k_i},\ i \in \{0, \dots, N-1\},\ k_i \in N,\ t \in [t_i, t_{i+1}) \subset [t_s, T]. \tag{6}$$

При цьому виконуються включення $x(t) \in X(t)$, $t \in [t_s, T]$, $u(t) \in U(t)$, $t \in [t_s, T]$. Має місце наступна теорема.

Теорема 1 (принцип оптимальності Беллмана). *Якщо пара $\left(\tilde{b}_i,\ \tilde{x}(t)\right)$ є розв'язком допоміжної задачі (5)–(8), то на відрізку $t \in [t_s, T]$ має місце рівність $\left(\tilde{b}_i,\ \tilde{x}(t)\right) = (b_i^*,\ x^*(t))$.*

Доведення. Припустимо, що існує такий номер $i_1 \in \{0, \dots, N-1\}$, що $\left(\tilde{b}_{i_1},\ \tilde{x}(t)\right) \neq \left(b_{i_1}^*,\ x^*(t)\right)$ на відрізку $[t_{i_1}, t_{i_1+1})$. Тоді

$$J_s(x^*, u^*) > J_s(\tilde{x}, \tilde{u}).$$

Побудуємо наступне керування:

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} \Psi_i(t, b_i^*, x^*(t)),\ t \in [t_i, t_{i+1}] \subset [t_0, t_s], \\ \Psi_k\left(t, \tilde{b}_k, \tilde{x}(t)\right),\ t \in [t_k, t_{k+1}] \subset (t_s, T]. \end{cases}$$

Відповідна траєкторія матиме вигляд

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} x^*(t),\ t \in [t_0, t_s], \\ \tilde{x}(t),\ t \in (t_s, T]. \end{cases}$$

Таким способом,

$$J(\hat{x}, \hat{u}) = \int_{t_0}^{T} f_0(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)\, dt + \Phi(\hat{x}(T)) =$$

[1] Продовжуваність розв'язку на довільний інтервал забезпечує, наприклад, умова квазілінійності.

$$= \sum_{i=0}^{s-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_0\left(x^*(t), \Psi_i\left(t, b_i^*, x^*(t)\right), t\right) dt +$$

$$+ \sum_{k=s}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_0\left(\tilde{x}(t), \Psi_k\left(t, \tilde{b}_k, \tilde{x}(t)\right), t\right) dt + \Phi\left(\tilde{x}(T)\right) <$$

$$< \sum_{i=0}^{s-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_0\left(x^*(t), \Psi_i\left(t, b_i^*, x^*(t)\right), t\right) dt + J_s\left(x^*, u^*\right) =$$

$$= J\left(x^*, u^*\right).$$

Отримане співвідношення означає, що керування $u^*(t)$ не є оптимальним. Це протиріччя доводить теорему.

2. Рівняння Беллмана. Розглянемо задачу (1)–(2) з керуванням, заданим у структурному класі (3). Точки перемикання вважаємо фіксованими.

Функція

$$B(z, t_s) = \inf_{b_j \in M_j} \left\{ \sum_{j=s}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f_0\left(x(t), \Psi_j\left(t, b_j, x(t)\right), t\right) dt + \Phi\left(x(T)\right) \right\}, \qquad (7)$$

що визначена на розв'язках системи (2) при початковій умові $x(t_s) = z$, називається функцією Беллмана задачі (1)–(3). Тут $z \in X(t_s)$, $x(\cdot)$ – розв'язок системи (2) при допустимому керуванні $u(t) = \Psi\left(t, b_i, x(t)\right) \in U(t)$, $t \in [t_s, T]$, $t_s \in \{t_0, \dots, t_N\}$, інфінум в правій частині співвідношення (7) береться за допустимими керуваннями при $t \in [t_s, T]$.

За означенням функції Беллмана $B(x_0, t_0)$ дорівнює оптимальному значенню функціоналу (1) для задачі (1)-(3) з фіксованим лівим кінцем $x(t_0) = x_0$, тобто

$$B(x_0, t_0) = J\left(x^*, u^*\right).$$

Виходячи з означення функції Беллмана (7) та властивостей інтеграла, отримуємо

$$B(z, t_s) = \inf_{b_j \in M_j} \left\{ \sum_{j=s}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f_0\left(x(\tau), \Psi_j\left(\tau, b_j, x(\tau)\right), \tau\right) d\tau + \Phi\left(x(T)\right) \right\} =$$

$$= \sum_{j=s}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f_0\left(x^*(\tau), \Psi_j\left(\tau, b_j^*, x^*(\tau)\right), \tau\right) d\tau + \Phi\left(x^*(T)\right) =$$

$$= \int_{t_s}^{t_{s+1}} f_0\left(x^*(\tau), \Psi_s\left(\tau, b_s^*, x^*(\tau)\right), \tau\right) d\tau +$$

$$+\sum_{j=s+1}^{N-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} f_0\left(x^*(\tau), \Psi_j\left(\tau, b_j^*, x^*(\tau)\right), \tau\right) d\tau + \Phi\left(x^*(T)\right),$$

де $(x^*(t), u^*(t))$ – розв'язок задачі (1)–(3). Згідно принципу оптимальності Беллмана маємо рівність

$$\sum_{j=s+1}^{N-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} f_0\left(x^*(\tau), \Psi_j\left(\tau, b_j^*, x(\tau)\right), \tau\right) d\tau + \Phi\left(x^*(T)\right) =$$

$$= J_{t_{s+1}}\left(x^*(t), u^*(t)\right) =$$

$$= \inf_{b_i\in M_i}\left\{\sum_{j=s+1}^{N-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} f_0\left(x(\tau), \Psi_j\left(\tau, b_j, x(\tau)\right), \tau\right) d\tau + \Phi\left(x(T)\right)\right\} =$$

$$= B\left(x^*(t_{s+1}), t_{s+1}\right).$$

На довільній допустимій парі $(x(t), u(t))$ виконується нерівність

$$B(z, t) \le \int_t^T f_0\left(x(\tau), \Psi\left(\tau, b_i, x(\tau)\right), \tau\right) d\tau + \Phi\left(x(T)\right).$$

Таким способом,

$$\begin{aligned}(z, t_s) = \inf_{b_i\in M_i}\left\{\int_{t_s}^{t_{s+1}} f_0\left(x(\tau), \Psi_s\left(\tau, b_s, x(\tau)\right), \tau\right) d\tau +\right.\\ \left. + B\left(x(t_{s+1}), t_{s+1}\right)\right\}.\end{aligned} \tag{8}$$

Рівняння (8) називається рівнянням Беллмана в інтегральній формі.

Розглянемо інтегральне рівняння Беллмана (8). Припустимо, що функція Беллмана є неперервно диференційованою. Тоді

$$B\left(x(t_{s+1}), t_{s+1}\right) - B(z, t_s) = \int_{t_s}^{t_{s+1}} \frac{dB\left(x(\tau), \tau\right)}{d\tau} d\tau,$$

де похідна $\frac{dB(x(\tau), \tau)}{d\tau}$ розглядається на розв'язках системи (2), тобто

$$\frac{dB\left(x(\tau), \tau\right)}{d\tau} = \frac{\partial B\left(x(\tau), \tau\right)}{\partial\tau} + \left\langle grad_x B\left(x(\tau), \tau\right), \frac{dx(\tau)}{d\tau}\right\rangle =$$

$$= \frac{\partial B\left(x(\tau), \tau\right)}{\partial\tau} + \left\langle grad_x B\left(x(\tau), \tau\right), f\left(x(\tau), \Psi\left(\tau, b_i, x(\tau)\right), \tau\right)\right\rangle.$$

Отже,

$$B\left(x(t_{s+1}), t_{s+1}\right) = B(z, t_s) + \int_{t_s}^{t_{s+1}} \frac{dB\left(x(\tau), \tau\right)}{d\tau} d\tau =$$

$$= B(z,\, t_s) + \int_{t_s}^{t_{s+1}} \left[\frac{\partial B(x(\tau),\, \tau)}{\partial \tau} + \right.$$

$$\left. + \left\langle grad_x B(x(\tau),\, \tau),\, f(x(\tau),\, \Psi_s(\tau,\, b_s,\, x(\tau)),\, \tau) \right\rangle \right] d\tau.$$

Підставимо останній вираз в формулу (8):

$$B(z,\, t_s) = \inf_{b_s \in M_s} \left\{ \int_{t_s}^{t_{s+1}} f_0(x(\tau),\, \Psi_s(\tau, b_s,\, x(\tau)),\, \tau)\, d\tau + B(z,\, t_s) + \right.$$

$$+ \int_{t_s}^{t_{s+1}} \left[\frac{\partial B(x(\tau),\, \tau)}{\partial \tau} + \right.$$

$$\left. \left. + \left\langle grad_x B(x(\tau),\, \tau),\, f(x(\tau),\, \Psi_s(\tau,\, b_s,\, x(\tau)),\, \tau) \right\rangle \right] d\tau \right\}.$$

Скоротивши на $B(z,\, t_s)$, отримаємо співвідношення

$$\inf_{b_s \in M_s} \left\{ \int_{t_s}^{t_{s+1}} \left[f_0(x(\tau),\, \Psi_s(\tau, b_s,\, x(\tau)),\, \tau) + \frac{\partial B(x(\tau),\, \tau)}{\partial \tau} + \right. \right.$$
$$\left. \left. + \left\langle grad_x B(x(\tau),\, \tau),\, f(x(\tau),\, \Psi_s(\tau,\, b_s,\, x(\tau)),\, \tau) \right\rangle \right] d\tau \right\} = 0. \qquad (9)$$

Рівняння (9) називається інтегро-диференціальним рівнянням Беллмана.

3. Структурно-параметрична оптимізація лінійної системи керування. Розглянемо лінійну систему

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)\, x(t) + u(t), \qquad (10)$$

$$x(t_0) = x_0,$$

в якій керування задано у вигляді

$$u(t) = R(b_i)\, x(t),\, t \in [t_i,\, t_{i+1}),\, i = 0, \ldots, N-1, \qquad (11)$$

де $R(b_i)$ – матриця розмірності $m \times n$, яка неперервно диференційовано залежить від параметрів b_i. Розглянемо випадок $b_i \in \mathbb{R}^{k_i}$. Задача полягає в мінімізації критерію якості

$$J(x,\, u) = \langle P_0\, x(T),\, x(T) \rangle. \qquad (12)$$

Функцію Беллмана будемо шукати у вигляді квадратичної форми

$$B(z,\, t) = \langle P(t)\, z,\, z \rangle,$$

де $P(t)$ – невідома матриця розмірності $n \times n$ з неперервно диференційованими компонентами. При цьому

$$\frac{\partial B(z,\, \tau)}{\partial \tau} = \left\langle \frac{dP(\tau)}{d\tau}\, z,\, z \right\rangle,\; grad_z B(z,\, \tau) = \left(P(\tau) + P^T(\tau) \right) z.$$

З означення функції Беллмана випливає, що $P(T) = P_0$. Запишемо рівняння (9) для цього випадку. Одержуємо

$$\inf_{b_s}\left\{ \int_{t_s}^{t_{s+1}} \left[\left\langle \frac{dP(\tau)}{d\tau} x(\tau), x(\tau) \right\rangle + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left\langle \left(P(\tau) + P^T(\tau)\right) x(\tau), A(\tau) x(\tau) + R(b_s) x(\tau) \right\rangle \right] d\tau \right\} = 0.$$

Зробимо перетворення та згрупуємо подібні члени

$$\inf_{b_s}\left\{ \int_{t_s}^{t_{s+1}} \left[\left\langle \frac{dP(\tau)}{d\tau} x(\tau), x(\tau) \right\rangle + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left\langle P(\tau) x(\tau) + P^T(\tau) x(\tau), A(\tau) x(\tau) + R(b_s) x(\tau) \right\rangle \right] d\tau \right\} =$$

$$= \inf_{b_s}\left\{ \int_{t_s}^{t_{s+1}} \left[\left\langle \frac{dP(\tau)}{d\tau} x(\tau), x(\tau) \right\rangle + \right.\right.$$

$$+ \left\langle A^T(\tau) P(\tau) x(\tau), x(\tau) \right\rangle + \left\langle A^T(\tau) P^T(\tau) x(\tau), x(\tau) \right\rangle +$$

$$\left.\left. + \left\langle \left(P(\tau) + P^T(\tau)\right) x(\tau), R(b_s) x(\tau) \right\rangle \right] d\tau \right\} =$$

$$= \inf_{b_s}\left\{ \int_{t_s}^{t_{s+1}} \left[\left\langle \left(\frac{dP(\tau)}{d\tau} + A^T(\tau) P(\tau) + P(\tau) A(\tau) \right) x(\tau), x(\tau) \right\rangle + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left\langle \left(P(\tau) + P^T(\tau)\right) x(\tau), R(b_s) x(\tau) \right\rangle \right] d\tau \right\} = 0.$$

Ліву частину останньої рівності можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} &\int_{t_s}^{t_{s+1}} \left\langle \left(\frac{dP(\tau)}{d\tau} + A^T(\tau) P(\tau) + P(\tau) A(\tau) \right) x(\tau), x(\tau) \right\rangle d\tau + \\ &+ \inf_{b_s}\left\{ \int_{t_s}^{t_{s+1}} \left\langle \left(R^T(b_s) P(\tau) + P(\tau) R(b_s)\right) x(\tau), x(\tau) \right\rangle d\tau \right\} = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Позначимо

$$I = \int_{t_s}^{t_{s+1}} \left\langle \left(R^T(b_s) P(\tau) + P(\tau) R(b_s)\right) x(\tau), x(\tau) \right\rangle d\tau,$$

$$H(t, b_s) = R^T(b_s) P(t) + P(t) R(b_s).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{dI}{db_s} = &\int_{t_s}^{t_{s+1}} \left[\left\langle \frac{\partial H(\tau, b_s)}{\partial b_s} x(\tau), x(\tau) \right\rangle + \right. \\ &\left. + \left\langle \left(H(\tau, b_s) + H^T(\tau, b_s)\right) \frac{\partial x(\tau)}{\partial b_s}, x(\tau) \right\rangle \right] d\tau, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\frac{\partial H\,(t,\,b_s)}{\partial b_s} = \frac{\partial R^T\,(b_s)}{\partial b_s} P\,(t) + P\,(t)\,\frac{\partial R\,(b_s)}{\partial b_s}\,. \tag{15}$$

Далі, перепишемо систему (10) з урахуванням структури керування. Ця система еквівалентна інтегральному рівнянню

$$x\,(t) = x\,(t_i) + \int_{t_i}^{t} \left(A\,(\tau)\; + R\,(b_i)\right) x\,(\tau)\; d\tau\,, t \in (t_i\,,\, t_{i+1})\;.$$

Тоді

$$\frac{\partial x\,(t)}{\partial b_i} = \int_{t_i}^{t} \left[\,\frac{\partial R\,(b_i)}{\partial b_i}\, x\,(\tau) + R\,(b_i)\;\frac{\partial x\,(\tau)}{\partial b_i}\right] d\tau\,.$$

Позначимо $U_i\,(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial b_i}$, $f\,(t) = \frac{\partial R(b_i)}{\partial b_i}\, x\,(t)$. Таким способом, з останнього співвідношення отримали систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dU_i\,(t)}{dt} = R\,(b_i)\; U_i\,(t) + f\,(t)\;,\, U_i\,(t_i) = 0\,. \tag{16}$$

У підсумку можемо записати такий алгоритм знаходження оптимальних значень параметрів b_i у задачі (12)–(14).

1. Задаємо початкові наближення векторів параметрів $b_i^{(0)}$ на кожному з інтервалів $[t_i,\, t_{i+1})$, $i = 0,\, 1,\, ...\,,\, N-1$.
2. Знаходимо $R\left(b_i^{(0)}\right)$ та $\frac{\partial R}{\partial b_i}\left(b_i^{(0)}\right)$.
3. Розв’язуємо систему

$$\frac{dx\,(t)}{dt} = \left(A\,(t) + R\left(b_i^{(0)}\right)\right) x\,(t)\;,\, x\,(t_0) = x_0$$

та знаходимо траєкторію $x\left(t,\, b_i^{(0)}\right)$.
4. Обчислюємо $f\,(t) = \frac{\partial R(b_i)}{\partial b_i}\, x\,(t)$ при початковому наближенні $b_i^{(0)}$. Далі, на кожному часовому інтервалі $(t_i,\, t_{i+1})$, $i = 0,\, 1,\, ...\,,\, N-1$ розв’язуємо систему (16) та знаходимо $U_i\,(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial b_i}$ при $b_i = b_i^{(0)}$.
5. З того, що існує оптимальний розв’язок задачі, а отже існує і оптимальний набір параметрів b_i, випливає, що інфінум в лівій частині співвідношення (13) досягається. Скориставшись цим фактом, запишемо систему для визначення невідомої матриці $P\,(t)$, яка має вигляд

$$\frac{dP\,(t)}{dt} = -\left[\left(A\,(t) + R\,(b_i)\right)^T P\,(t) + P\,(t)\;\left(A\,(t) + R\,(b_i)\right)\right],$$

$$P\,(T) = P_0\,.$$

Розв’язавши цю систему при $b_i = b_i^{(0)}$, отримуємо матрицю $P\,(t)$.
6. Підставляємо отримані величини у співвідношення (14) та (15) та знаходимо $\frac{dI}{db_i}$.
7. Ітераційна процедура для визначення набору параметрів b_i^*, що доставляють інфінум інтегралу I, буде мати вигляд:

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} + \alpha_k\,\frac{dI}{db_i}, k = 0,\; 1,\; \ldots\,. \tag{17}$$

Параметр α_k можна, наприклад, вибирати з умови збіжності процесу (17), а саме

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty, \ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty,$$

або з умови $I\left(b_i^{(k+1)}\right) < I\left(b_i^{(k)}\right)$ [3].

8. Після визначення оптимального набору параметрів b_i^* за допомогою процедури (19), підставляємо цей набір у систему (10):

$$\frac{dx\,(t)}{dt} = \left(A\,(t) + R\,(b_i^*)\right)\,x\,(t)\ ,\ x\,(t_0) = x_0\,.$$

Розв'язуємо цю систему та знаходимо оптимальну траєкторію $x^*\,(t)$.

9. Знаходимо оптимальне керування $u^*\,(t) = R\,(b_i^*)\ x^*\,(t)$. Опис алгоритму завершено.

Висновки. Отже, ми обгрунтували застосування методу динамічного програмування до задачі структурно-параметричної оптимізації з фіксованими точками перемикання, в якій структура керування містить фазову змінну. Для цієї задачі було одержано інтегро-диференціальне рівняння Беллмана, на основі якого був побудований чисельний метод знаходження оптимальних значень параметрів у випадку лінійної системи керування з квадратичним термінальним функціоналом якості.

1. **Башняков О. М.** Практична стійкість, оцінки та оптимізація [текст] / Башняков О. М., Гаращенко Ф. Г., Пічкур В. В. – К.: Київський університет, 2008. – 383 с.
2. **Бублик Б. Н.** Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков [текст] / Бублик Б. Н., Гаращенко Ф. Г., Кириченко Н. Ф. – К.: Наукова думка, 1985. – 304 с.
3. **Карманов В. Г.** Математическое программирование [текст] / Карманов В. Г. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 264 с.
4. **Михалевич В. С.** Глобальный и локальный анализ программ управления динамическими процессами, описываемыми дифференциальными уравнениями с дискретным множеством управлений [текст] / Михалевич В. С., Попадинец В. И., Голодников А. Н., Ищенко А. В. // Кибернетика. – 1985. – № 2. – С. 1–6.
5. **Моисеев Н. Н.** Элементы теории оптимальных систем [текст] / Моисеев Н. Н. – М.: Наука, 1975. – 528 с.
6. **Руденко А. В.** Об аппроксимации скользящих режимов в системах с ограничением на частоту переключений [текст] / Руденко А. В. // Кибернетика и вычислительная техника. – 1987. – Вып. 75. – С. 44–48.
7. **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью [текст] / Филиппов А. Ф. – М.: Наука, 1985. – 255 с.