Вісник Одеськ. держ. ун-ту.– 2003.– Т. 8, вип. 2. Фіз.-мат. науки.– С. 7–14

УДК 517.5

В. А. Андриенко
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ КОЛМОГОРОВА – ХИНЧИНА – МЕНЬШОВА

Роботу виконано за фінансової підтримки
Державного фонду фундаментальних досліджень України, грант № Ф7/329-2001.

Доповідь зроблено на засіданні наукового семінару з теорії функцій ОНУ 27.09.2002 р.

Доведена узагальнена версія добре відомої теореми Колмогорова – Хінчина – Меньшова.

Доказана обобщенная версия хорошо известной теоремы Колмогорова – Хинчина – Меньшова.

Generalized version of well-known Kolmogorov – Khinchin – Men'shov theorem is proved.

В 1961 г. Д. Е. Меньшов опубликовал [1] пример кусочно-постоянной ОНС сходимости. Этот результат Д. Е. Меньшова есть, по существу, частный случай теоремы А. Н. Колмогорова и А. Я. Хинчина [2, с. 7–16] из теории вероятностей, изложенной на теоретико-функциональном языке. Целью статьи является формулировка и доказательство обобщенной версии теоремы Колмогорова – Хинчина – Меньшова. При этом используется идея доказательства Д. Е. Меньшова [1].

Определение 1. Пусть (X, F, μ) – пространство с положительной, конечной, неатомической мерой, а I – измеримое подмножество X с мерой $|I| = \alpha > 0$. Пусть для каждого $n = 1,2,...$ производится разбиение J_n множества I на $p_n \geq 2$ непересекающихся измеримых подмножеств I_{jn} $(1 \leq j \leq p_n)$, причем разбиение J_{n+1} получается из разбиения J_n делением каждого из множеств I_{jn} на конечное число непересекающихся подмножеств так, что

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq j\leq p} |I_{jn}| = 0 .$$

Если ОНС функций $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на I такова, что:

1) функция $\psi_n(x)$ постоянна на каждом множестве I_{jn} $(n = 1,2,...;\ j = 1,2,...p_n)$;

2) $\int\limits_{I_{jn}} \psi_m(x)\, d\mu(x) = 0,\ (m > n, n = 1,2,...; j = 1,2,...p_n)$,

то систему $\psi_n(x)$ будем называть M-системой.

Множества I_{jn} $(n = 1,2,...;\ j = 1,2,...p_n)$ будем называть элементарными. Очевидно, что система всех элементарных множеств образует полукольцо, которое мы будем обозначать через P.

Лемма. *Полукольцо P элементарных множеств является вполне достаточной системой на I, т. е.*

1) *для каждого измеримого множества $E \subset I$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется множество F, являющееся объединением конечного числа множеств полукольца P и такое, что мера симметрической разности*

$$\left|E \Delta F\right| = \left|\left(E \setminus F\right) \bigcup \left(F \setminus E\right)\right| < \varepsilon\,; \tag{1}$$

2) *для любого множества $E \subset I$ меры 0 и любого $\varepsilon > 0$ найдется множество B, являющееся объединением не более чем счетного числа элементарных множеств, покрывающее E и имеющее меру $\left|B\right| < \varepsilon$.*

Доказательство. 1) Пусть даны измеримое множество $E \subset I$ и число $\varepsilon > 0$. Покажем, что из P можно выбрать конечную подсистему элементарных множеств такую, что объединение F этих множеств удовлетворяет условию (1). При этом множества I_{jn} из фиксированного разбиения J_n будем называть множествами ранга n.

Если $\left|I \setminus E\right| < \varepsilon$, то доказывать нечего, так что будем предполагать, что

$$\left|I \setminus E\right| \geq \varepsilon\,. \tag{2}$$

Рассмотрим числовую последовательность

$$\varepsilon_k = \varepsilon \big/ 2^k\,, \quad (k = 1,2,\ldots) \tag{3}$$

и множество

$$Q_1^* = \left\{Q \in P : Q \bigcap E \neq \varnothing, \left|Q \setminus E\right| < \varepsilon_1\right\}, \tag{4}$$

которое, очевидно, непусто, так как в P имеются элементарные множества сколь угодно малой меры, имеющие непустое пересечение с E.

Положим

$$\alpha_1 = \sup_{Q \in Q_1^*} \left|Q\right|. \tag{5}$$

Очевидно, что $\alpha_1 < \alpha$, так как равенство $\alpha_1 = \alpha$ противоречит (2), и что точная верхняя граница достигается на одном из множеств Q.

Возьмем любое из них и обозначим его через Q_1.

Итак, $\left|Q_1\right| = \alpha_1$ и

$$\left|Q \setminus E\right| < \varepsilon_1\,. \tag{6}$$

Если при этом окажется, что $\left|E \setminus Q_1\right| < \varepsilon_1$, то $F = Q_1$ и все доказано. В противном случае $\left|E \setminus Q_1\right| \geq \varepsilon_1$ и тогда рассмотрим множество

$$Q_2^* = \left\{Q \in P \setminus Q_1 : Q \bigcap E \neq \varnothing, \left|Q \setminus E\right| < \varepsilon_2\right\}, \tag{7}$$

которое непусто, так как $E \setminus Q_1$ имеет положительную меру и в $P \setminus Q_1$ имеются элементарные множества сколь угодно малой меры, пересекающиеся с $E \setminus Q_1$. Положим

$$\alpha_2 = \sup_{Q \subset Q_2} \left|Q\right| \tag{8}$$

Поскольку в силу (3)–(5), (7) и (8) $Q_2^* \subset Q_1^*$, то $\alpha_2 \leq \alpha_1$. Возьмем любое из множеств $Q \subset Q_2^*$ с мерой α_2 и обозначим его через Q_2. Тогда $|Q_2| = \alpha_2$ и $|Q_2 \setminus E| < \varepsilon_2$.

Вместе с (6) это доказывает неравенство

$$\left|(Q_2 \cup Q_1) \setminus E\right| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \tag{9}$$

Если при этом окажется, что $\left|E \setminus (Q_1 \cap Q_2)\right| < \varepsilon_2$, то тогда отсюда и из (3) и (9) получим $\left|E \Delta (Q_1 \cup Q_2)\right| < \varepsilon$ и утверждение 1) леммы доказано. В противном случае $\left|E \setminus (Q_1 \cup Q_2)\right| \geq \varepsilon_2$.

Продолжая таким образом дальше, мы л и б о после конечного числа шагов получим множество $F = \bigcup\limits_{i=1}^{m} Q_i$, являющееся объединением конечного числа непересекающихся элементарных множеств, и такое, что $|E \Delta F| < \varepsilon$, и утверждение 1) доказано, л и б о получим бесконечную последовательность чисел $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_n \geq \ldots$ и непересекающихся множеств $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$ с мерами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ соответственно таких, что

$$\left|\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \setminus E\right| < \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i = \varepsilon, \tag{10}$$

а множество $Z = E \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Q_i$ имеет меру $|Z| \geq 0$. Покажем, что $|Z| = 0$. Пусть $x_0 \in Z$. Так как для заданного p точка x_0 не покрывается множествами $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$, то в полукольце P есть множество $x_0 \in Q_0$, не пересекающееся с множествами $Q_1, \ldots, Q_p$. Если Q_0 не пересекается с множествами $Q_{p+1}, \ldots, Q_{r-1}$, то его можно выбрать из системы множеств

$$Q_r^* = \left\{ Q \in P \setminus \bigcup_{i=1}^{r-1} Q_i : Q \cup E \neq \varnothing, |Q \setminus E| < \varepsilon_r \right\}. \tag{11}$$

Следовательно, поскольку $\alpha_r = \sup\limits_{Q \subset Q_r^*} |Q|$, то $|Q_0| \leq \alpha_r$, а поскольку сумма ряда $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \alpha_m \leq |I|$, то $\alpha_L \to 0$. Далее, имеет место включение

$$Q_r^* \subset Q_s^*, \text{ при } s < r, \tag{12}$$

в силу (3) и (11), причем структура полукольца P и множеств (12) такова, что каждое элементарное множество из Q_s^*, кроме множеств $Q_s, Q_{s+1}, \ldots, Q_{r-1}$, есть объединение конечного числа непересекающихся множеств из Q_r^*. Отсюда следует, что найдется такой первый номер r, что $Q_r \subset Q_0$. Тогда множество Q_0, представляющее собой элемент разбиения ранга более низкого, чем ранг Q_r, и содержащее Q_r, обозначим через $\hat{Q}_r$. Его мера $\left|\hat{Q}_r\right| = |Q_0| \leq \alpha_r$.

Рассмотрим множество $B_p = \bigcup\limits_{r=p}^{\infty} \hat{Q}_r$.

По построению, оно содержит при любом p каждую точку x_0 множества Z . Но его мера $\left|B_p\right| \le \sum\limits_{r=p}^{\infty} \alpha_r \to 0, \ (p \to \infty)$.

Следовательно, множество Z имеет нулевую меру.

Заменив в (10) ε на $\varepsilon/2$ и выбрав такой номер $m = m(\varepsilon)$, что

$$\left|\sum_{i=m+1}^{\infty} Q_i\right| = \sum_{i=m+1}^{\infty} \left|Q_i\right| = \sum_{i=m+1}^{\infty} \alpha_i < \varepsilon/2, \tag{13}$$

получим, что множество $F = \bigcup\limits_{i=1}^{m} Q_i$ является искомым. Действительно, замечая, что

$$E \setminus F = E \setminus \bigcup_{i=1}^{m} Q_i \subset \left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i\right) \bigcup \left(\bigcup_{i=m+1}^{\infty} Q_i\right) = Z \bigcup \left(\bigcup_{i=m+1}^{\infty} Q_i\right)$$

и, следовательно, в силу (13),

$$\left|E \setminus F\right| \le \left|\bigcup_{i=m+1}^{\infty} Q_i\right| < \varepsilon/2,$$

получим(см. (10), где ε заменено на $\varepsilon/2$)

$$\left|E \Delta F\right| = \left|E \setminus F\right| + \left|F \setminus E\right| < \varepsilon/2 + \left|\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \setminus E\right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

2) Для доказательства второго утверждения леммы применим похожую конструкцию. Для заданных множества E нулевой меры и $\varepsilon > 0$ рассмотрим числовую последовательность

$$\varepsilon_k = \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, \ (k = 1,2,...) \tag{14}$$

и систему множеств

$$T_1^* = \left\{T \in P : T \bigcap E \ne \varnothing, \ \left|T\right| < \varepsilon_1\right\}. \tag{15}$$

Положим $\alpha_1 = \sup\limits_{T \in T_1^*} \left|T\right|$, возьмем одно из множеств системы (15) с мерой $\left|T\right| = \alpha_1$ и обозначим его через T_1 .

Если T_1 не покрывает все E , то рассмотрим систему множеств

$$T_2^* = \left\{T \in P \setminus Q_1 : T \bigcap E \ne \varnothing, \left|T\right| < \varepsilon_2\right\},$$

число $\alpha_2 = \sup\limits_{T \in T_2^*} \left|T\right|$ и какое-нибудь множество $T_2 \in T_2^*$ с мерой $\left|T_2\right| = \alpha_2$, которое не пересекается с T_1 . Продолжая таким образом дальше, мы или получим покрытие множества E конечным числом непересекающихся множеств $T_1, T_2, ..., T_m$, так что (см. (14)) $|B| = \left|\bigcup_{i=1}^{m} T_i\right| = \sum_{i=1}^{m} |T_i| < \sum_{i=2}^{m} \varepsilon_i < \varepsilon/2$, или же получим бесконечную последовательность непересекающихся множеств $T_1, T_2, ..., T_m ...$ с мерами соответственно $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...$. Покажем, что множество $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i$ покрывает все E, за исключением, быть может, некоторой его части $Z = E \setminus C$. Поскольку (см. (14)) $|C| = \sum_{i=1}^{\infty} |T_i| = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon/2$, то достаточно покрыть Z счетной системой элементарных множеств, сумма мер которых меньше $\varepsilon/2$, и утверждение 2) будет доказано.

Пусть $x_0 \in Z$. Так как для заданного p точка x_0 не покрывается множествами $T_1, T_2, ..., T_p$, то в полукольце P есть множество $x_0 \in T_0$, не пересекающееся с множествами $T_1, ..., T_p$. Если оно не пересекается далее с множествами $T_{p+1}, ..., T_{r-1}$, то его можно выбрать из системы множеств

$$T_r^* = \left\{ T \in P \setminus \bigcup_{i=1}^{r-1} T_i : T \bigcap E \neq \varnothing, |T| < \varepsilon_r \right\}.$$

Следовательно, его мера $|T_0| \le \alpha_r$, где $\alpha_r = \sup_{T \subset T_r^*} |T|$. Поскольку сумма ряда $\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \le |I|$, то $\alpha_m \to 0$. Далее имеет место включение

$$T_r^* \subset T_s^*, \text{ при } s < r, \tag{16}$$

причем, в силу структуры полукольца P и множеств (16), каждое элементарное множество из T_s^*, кроме множеств $T_s, T_{s+1}, ..., T_{r-1}$, есть объединение конечного числа непересекающихся множеств из Q_r^*. Отсюда следует, что найдется такой первый номер r, что $T_r \subset T_0$. Тогда множество T_0, представляющее собой элемент разбиения ранга более низкого, чем ранг T_r, и содержащее T_r, обозначим через $\hat{T}_r$. Его мера $\left|\hat{T}_r\right| = |T_0| \le \alpha_r$.

Рассмотрим множество $B_p = \bigcup_{r=p}^{\infty} \hat{T}_r$.

По построению, оно содержит при любом p каждую точку x_0 множества Z. Но его мера $B_p = \sum_{r=p}^{\infty} \alpha_r < \varepsilon/2$ для всех $p \ge p_0(\varepsilon)$. Следовательно, множество Z покрыто счетной системой $\left\{T_r^*\right\}_{r=p_0}^{\infty}$ элементарных множеств из полукольца P, сумма мер которых меньше $\varepsilon/2$, что и требовалось доказать.

Определение 2. Пусть дано множество X с положительной и конечной мерой μ. Пусть имеется разбиение X в конечную или счетную совокупность J_1 измеримых, непересекающихся множеств $A_1, A_2, ..., A_m ...$. Множества $A_1, A_2, ..., A_m ...$ будем называть множествами первого ранга. Пусть, далее, каждое множество первого ранга разбито в конечную или счетную совокупность J_2 непересекающихся измеримых множеств второго ранга $A_{m_1}, ..., A_{m_n} ...$ – и далее процесс разбиения продолжен неограниченно, так что для любого n имеется некоторая совокупность непересекающихся измеримых множеств n-го ранга, объединение которых составляет все X. Для каждой точки x_0 и любого n имеется одно и только одно множество n-го ранга, содержащее точку x_0; обозначим его через $A_n(x_0)$. Совокупность $J = \bigcup_n J_n$ всех множеств всех конечных рангов называется сетью, если она является вполне достаточной системой.

Определение 3. Пусть имеется счетно-аддитивная функция $\Phi(\mathrm{E})$, определенная на всех множествах сети J, в частности. Производной функции $\Phi(\mathrm{E})$ по сети J в точке x_0 называется выражение $\frac{d\Phi}{d\mu}(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\Phi(\mathrm{A}_n(x_0))}{\mu(\mathrm{A}_n(x_0))}$, если этот предел существует.

Заметим, что, согласно теореме Де Посселя [3] (см. также [4, с. 200]), всякая счетно-аддитивная функция множеств $\Phi(\mathrm{E})$ имеет на множестве полной меры производную по сети, равную плотности своей абсолютно непрерывной составляющей, не зависящую от выбора сети.

Из леммы и определения 2 вытекает

Следствие. *Полукольцо множеств P образует сеть.*

Следующая теорема является о б о б щ е н н о й в е р с и е й т е о р е м ы Колмогорова – Хинчина – Меньшова ([1, с. 358–361]).

Теорема. *Пусть (X, F, μ) – пространство с конечной положительной неатомической мерой, а I – измеримое подмножество X с мерой $|I| = \alpha > 0$.*

Тогда М-система $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормированных на I функций является системой сходимости.

Доказательство. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x), \tag{17}$$

коэффициенты которого удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty . \tag{18}$$

Из (18) вытекает, что ряд (17) сходится в среднем к некоторой функции $f(x) \in L^2(I)$. Тогда известно, что на любом измеримом подмножестве $E \subset I$ его можно почленно интегрировать, то есть

$$\lim \int_E S_n(x)\, d\,\mu(x) = \int_E f(x)\, d\,\mu(x)\,, \tag{19}$$

где

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k(x), \quad n = 1,2,\ldots \ . \tag{20}$$

Обозначим через E множество всех точек $x \in I$, в каждой из которых счетно-аддитивная функция $\Phi(e) = \int\limits_e f(x) d\,\mu(x)$ измеримых подмножеств $e \subset I$ имеет производную по мере μ. Согласно теореме Радона – Никодима, эта производная существует п.в. и

$$\frac{d\Phi}{d\mu}(x) = f(x),\ x \in E,\ |E| = \alpha\,, \tag{21}$$

а теорема Де Посселя дает способ ее нахождения. По следствию, полукольцо P множеств I_{jn}, $(n = 1,2,\ldots\ j = 1,2,\ldots p_n)$ образует сеть. Поэтому для любого $x \in E$ и любого n существует целое число j_n такое, что $0 \le j_n \le p_n$ и $x \in I_{j_n n}$. Обозначим $I_{j_n n}$ через $A_n(x)$. Тогда по теореме Де Посселя (см. еще определение 3 и (21))

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|A_n(x)|} \int\limits_{A_n(x)} f(t)\, d\,\mu(t) = f(x)\,, \tag{22}$$

где $|A_n(x)| = \mu(\mathrm{A}_n(x))$. Возьмем натуральные числа m и n, удовлетворяющие неравенству $m > n$. Тогда (см. определение 1)

$$\int\limits_{I_{jn}} \psi_m(x) d\,\mu(x) = 0,\ (1 \le j \le p_n,\ m > n; n = 1,2,\ldots) \tag{23}$$

и из (20) и (23) получаем

$$\int\limits_{A_n(x)} S_m(t) d\mu(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \int\limits_{A_n(x)} \psi_k(t) d\mu(t) + \sum_{k=n+1}^{m} c_k \int\limits_{A_n(x)} \psi_k(t) d\mu(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \int\limits_{A_n(x)} \psi_k(t) d\mu(t), \tag{24}$$

$(m > n,\ n = 1,2,\ldots)$.

Поскольку (см. определение 1) каждая из функций $\psi_k(x)$ постоянна на множестве $I_{j_n n} = A_n(x)$, то

$$\int\limits_{A_n(x)} \psi_k(t) d\mu(t) = |A_n(x)| \psi_k(x) \quad 1 \le k \le n;\ n = 1,2,\ldots, \tag{25}$$

а в таком случае, на основании (20) и (24),

$$\int\limits_{A_n(x)} S_m(t) d\mu(t) = |A_n(x)| \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k(x) = |A_n(x)|\, S_n(x), \qquad m > n,\ n = 1,2,\ldots . \tag{26}$$

Из (26) видно, что при фиксированном n левая часть (26) не зависит от m при $m > n$, откуда следует, в силу (19) и условия $A_n(x) \subset I$, что

$$\int\limits_{A_n(x)} S_m(t) d\mu(t) = \int\limits_{A_n(x)} f(t) d\mu(t), \quad m > n,\ n = 1,2,\ldots . \tag{27}$$

Сопоставляя (26) и (27), получим $S_n(x) = \dfrac{1}{|A_n(x)|} \int\limits_{A_n(x)} f(x)\, d\mu(t) = f(x), \quad n = 1, 2, \dots,$

а в таком случае, в силу (22), $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$, где x – любая точка множества E.

Отсюда видим, что ряд (17) сходится п.в. на I. Поскольку $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольные числа, удовлетворяющие условию (18), то M-система $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ есть система сходимости, что и требовалось доказать.

Заключение. Доказанная теорема позволяет довольно просто конструировать системы сходимости на произвольных множествах положительной меры.

1. **Меньшов Д. Е.** О суммировании ортогональных рядов // Труды Московского матем. об-ва.– 1961.– Т. 10.– С. 351–418.
2. **Колмогоров А. Н., Хинчин А. Я.** О сходимости рядов, члены которых определяются случаем // В кн: А. Н. Колмогоров. Теория вероятностей и матем. статистика.– М.: Наука, 1986.– С. 7–16.
3. **De Possel. R.** Sur la dérivation abstraite des fonctions d'ensembles // C.R. Acad. sci.Paris. – 1935.– V. 201.– P. 579–581.
4. **Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л.** Интеграл, мера, производная.– М.: Наука, 1964.– 219 с.

Получено 11.10.2002 г.