Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2012. – Т. 17, вип. 1-2(13-14). – С. 43–53

УДК 511.33

С. П. Варбанец, О. В. Савастру
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

Варбанець С. П., Савастру О. В. Представлення натуральних чисел квадратичними формами. Розглянуто задачу, пов'язану з побудовою асимптотичної формули про середнє значення кількості представлень натуральних чисел сумою k-их степенів додатно означеної квадратичної форми від n змінних.
Ключові слова: квадратична форма, дзета-функція Варінга, асимптотична формула.

Варбанец С. П., Савастру О. В. Представление натуральных чисел квадратичными формами. Рассмотрена задача о построении асимптотической формулы о среднем значении количества представлений натуральных чисел суммой k -ых степеней положительно определенной квадратичной формы от n переменных.
Ключевые слова: квадратичная форма, дзета-функция Варинга, асимптотическая формула.

Varbanets S. P., Savastru O. V. On the representation of natural numbers by the quadratic forms. In this paper, we construct the asymptotic formula for the mean of the numbers of representations of natural numbers as the sum of k-th powers binary positive definite quadratic form.
Key words: quadratic form, Waring zeta-function, asymptotic formula.

Введение.

Пусть Q – бинарная положительно определенная квадратичная форма, $Q(x) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_1^2, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2,\ a, b, c, \in \mathbb{Z},\ (a, b, c) = 1,\ D = ac - b^2 > 0$. Ее присоединенная форма $\widetilde{Q}$ определяется как
$\widetilde{Q}(x) = cx_1^2 - 2bx_1x_2 + ax_1^2$.

Для $u_0, v_0 \in \mathbb{Q}^2$, целых $n, k \geqslant 2$, $\frac{k}{n} < n \leqslant k$ и вещественного $x > 0$ мы обозначим

$$\Theta_k(x; u_0, v_0) = \sum_{w \in \mathbb{Z}^2} e^{-\pi x (Q(w+v_0))^k} e^{2\pi i w \cdot u_0}, \tag{1}$$

где $w \cdot u_0$ обозначает скалярное произведение двумерных векторов w и u_0.

Через $\bar{u}$, $\bar{v}$ будем обозначать наборы длины n двумерных векторов $u_1, \dots, u_n$ и, соответственно, $v_1, \dots, v_n$; $u_i, v_j \in \mathbb{Q}^2$, причем запись $\bar{w} \cdot \bar{u}$ обозначает $\bar{w} \cdot \bar{u} = w_1 \cdot u_1 + \ldots + w_n \cdot u_n$.

Рассмотрим ряд

$$Z_{n,k}(s; \overline{u}, \overline{v}) := \sum_{\substack{w_j \in \mathbb{Z}^2 \\ 1 \le j \le n}} e^{2\pi i \overline{w} \cdot \overline{u}} \cdot \Big(\sum_{j=1}^{n} (Q(w_j + v_j))^k \Big)^{-s}, \tag{2}$$

Ясно, что для $\Re s > 1$ этот ряд сходится. Функцию, определяемую этим рядом, будем называть Z-функцией Варинга с квадратичной формой Q. Эту функцию можно рассматривать как аналог дзета-функции Варинга, которую исследовал А. И. Виноградов [8] (см. также [7]). Нашей целью является исследование $Z_{n,k}(s;\overline{u},\overline{v})$ в полосе $0 < \Re s \leq 1$ и применение этой функции к задаче о представлении натуральных чисел суммой k-ых степеней значений положительно определенной квадратичной формой с целыми коэффициентами.

В дальнейшем будем использовать стандартные обозначения:
$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел;
$\mathbb{Z}$ – множество целых чисел;
$\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел;
$\mathbb{Z}_p := \{0, 1, \ldots, p-1\}$, p – простое;
$\mathbb{Z}_p^\star := \{1, 2, \ldots, p-1\}$, p – простое;
Для $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ через $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ обозначаем $x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$;
$s = \sigma + it$ – комплексное число, $\sigma = \Re s,\ t = \Im s$;
$\sum\limits_{(C)}$ означает, что суммирование идет по тем значениям переменных суммирования, которые описаны в условии C.

Пусть $u_1, \ldots, u_n$, $v_1, \ldots, v_n$– фиксированный набор векторов из $\mathbb{Q}^2$. Для $\lambda \in \mathbb{Q}$ и $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{Q}^{2n}$ полагаем

$$\mathrm{V}_{n,k}(\lambda;\overline{u},\overline{v}) = \sum_{(C)} e^{2\pi i \overline{u}\cdot\overline{v}}, \tag{3}$$

где

$$C = \{w_j \in \mathbb{Z}^2,\ j = 1, \ldots, n \mid \sum_{j=1}^{n} (Q(w_j + v_j))^k = \lambda\}.$$

Из определения $\mathrm{V}_{n,k}(\lambda;\overline{u},\overline{v})$ видно, что в дальнейшем можно считать, что $u_j,\ v_j \in [0,1]^2$, $j = 1, \ldots, n$.
Поэтому в принятых обозначениях имеем

$$Z_{n,k}(s;\overline{u},\overline{v}) = \sum_{\lambda>0} \frac{\mathrm{V}_{n,k}(\lambda;\overline{u},\overline{v})}{\lambda^s}, \qquad (\Re s > 1). \tag{4}$$

Ясно, что для нулевых наборов $\overline{u}, \overline{v}$ функция $\mathrm{V}_{n,k}(\lambda;\overline{0},\overline{0})$ определяет количество представлений λ, $\lambda \in \mathbb{N}$, в виде суммы n k-ых степеней значений положительно определенной квадратичной формы Q. При $n < 2k$ эта сумма является неполной $2k$-формой.

Представлением чисел неполными формами занимались многие авторы.
В частности, C. Hooley ([3] – [4]) исследовал проблему о представлении натуральных чисел суммой двух или четырех h-ых степеней $(h > 2)$. Рассматриваемый нами подход позволяет получать нетривиальные асимптотические формулы для среднего числа представлений натуральных чисел в арифметической прогрессии суммой k-ых степеней значений квадратичной формы.

Приведем некоторые вспомогательные утверждения, используемые в дальнейшем.

Пусть $\zeta_Q(s;\delta_0,\delta_1)$ – дзета-функция Эпштейна, ассоциированная с квадратичной формой Q.

$$\zeta_Q(s;\delta_0,\delta_1)=\sum_{\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^2}\frac{e^{2\pi i\delta_0\cdot\mathbf{x}}}{Q(\mathbf{x}+\delta_1)^s},\qquad \Re s>1,$$

(здесь $\delta_0,\delta_1\in(0,1]^2$).

Для натуральных ν и q, $(\nu,q)=1$, α, $\beta\in\mathbb{Z}^2$, мы определяем функцию

$$L_Q(s;\alpha,\beta):=\sum_{\mathbf{x}\in\,\mathbb{Z}^2\setminus-\beta}\frac{e^{\frac{2\pi i(\nu Q(\mathbf{x})+\alpha\cdot\mathbf{x})}{q}}}{Q(\mathbf{x}+\beta)^s},\qquad \Re s>1,$$

которую называем L-функцией квадратичной формы Q с аддитивным характером ω, $\omega(n)=e^{2\pi i\frac{\nu n}{q}}$.

Очевидно, что

$$\begin{aligned}L_Q(s;\alpha,\beta)&:=\sum_{\mathbf{z}(\mathrm{mod}\ q)}e^{2\pi i\frac{\nu Q(\mathbf{z})}{q}}\sum_{\mathbf{x}\equiv\mathbf{z}(\mathrm{mod}\ q)}\frac{e^{2\pi i\frac{\alpha\cdot\mathbf{z}}{q}}}{Q(\mathbf{x}+\mathbf{z})^s}=\\&=\sum_{\mathbf{z}\in\mathbb{Z}_q}e^{2\pi i\frac{\nu Q(\mathbf{z})}{q}}e^{2\pi i\frac{\alpha\cdot\mathbf{z}}{q}}\cdot q^{-2s}\sum_{\mathbf{x}}Q(\mathbf{x}+\tfrac{\beta+\mathbf{z}}{q})^{-s}=\\&=\sum_{\mathbf{z}\in\mathbb{Z}_q}e^{2\pi i\frac{\nu Q(\mathbf{z})}{q}}\zeta_Q(s;0,\tfrac{\beta+\mathbf{z}}{q}).\end{aligned}$$

Хорошо известно, что $\zeta_Q(s;\delta_0,\delta_1)$ является целой функцией, если $\delta_0\notin\mathbb{Z}^2$ и, для $\delta_0\in\mathbb{Z}^2$, эта функция аналитична во всей комплексной s-плоскости, кроме точки $s=1$, где она имеет полюс I порядка с вычетом $\frac{\pi}{\sqrt{D}}$.
Поэтому

$$\begin{aligned}\underset{s=1}{res}\,L_Q(s;\alpha,\beta)&=\tfrac{\pi}{q^2\sqrt{D}}\sum_{\mathbf{z}(\mathrm{mod}\ q)}e^{2\pi i\frac{\nu Q(\mathbf{z})+\alpha\cdot\mathbf{z}}{q}}:=\\&=\tfrac{\pi}{q^2\sqrt{D}}G_Q(s;\nu,\alpha).\end{aligned}$$

Кроме того, справедливо следующее укороченное уравнение.

Лемма 1. [9] *Пусть* $0\leqslant\Re s=\sigma\leqslant1$, $|\Im s|=|t|\geqslant10$, $1\leqslant x,y$ *и* $xy=\left(\frac{t\sqrt{D}}{\pi}\right)^2$. *Тогда имеем*

$$L_Q(s;\alpha,\beta)=\sum_{n\leqslant x}\frac{a_n}{n^s}+\chi_Q(s)\sum_{n\leqslant y}\frac{b_n}{n^{1-s}}+R_Q(s,x),$$

где

$$\chi_Q(s)=\left(\frac{q\sqrt{D}}{\pi}\right)^{1-2s}\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)},$$

$$R_Q(s,x)\ll|t|^{1/2}x^{-\sigma}\min\left(1,\frac{x}{|t|}\right)\log|t|\log\left(\frac{|t|q\sqrt{D}}{x}+\frac{x}{|t|q\sqrt{D}}\right)+$$

$$+x^{1-\sigma}(|t|q\sqrt{D})^{-1}\left(1+\frac{|t|\sqrt{Dq^2}}{x}\right)\min(x^{\epsilon}+\log|t|,\ y^{\epsilon}+\log|t|),$$

$$a_n = \sum_{\substack{\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^2,\\ Q(\mathbf{x}+\beta)=n}} e^{2\pi i\frac{\nu Q(\mathbf{x})+\alpha\cdot\mathbf{x}}{q}}, \qquad b_n = e^{2\pi i\frac{\alpha\cdot\beta}{q}} \sum_{\substack{\mathbf{u}\in\mathbb{Z}^2,\\ Q(\mathbf{u}+\alpha)=n}} e^{2\pi i\frac{\beta\cdot\mathbf{u}}{q}}.$$

Лемма 2. [8] *Пусть p – простое число, n и k – натуральные, $(p,k)=1$. Тогда для каждого $a\in\mathbb{Z}_p^\star$ и всех a_j, $j=1,\ldots,n$, $(a_1,\ldots,a_n,p)=1$ справедлива следующая оценка*

$$\left|\sum_{(C)} e^{2\pi i\frac{a_1x_1+\ldots+a_nx_n}{p}}\right| \leqslant (k-1)^{2n}p^n,$$

где

$$C := \left\{x_j, y_j\in\mathbb{Z}_p,\ j=1,\ldots,n \mid \sum_{j=1}^n (Q(x_j+y_j))^k \equiv a\,(\mathrm{mod}\ p)\right\}.$$

Доказательство. Для $k=3,4$ утверждение доказывается по методу К. Хули (см. [2]), а общий случай можно доказать на основании оценки Делиня (см. [1]).

Лемма 3 (асимптотическое дифференцирование). [4] *Пусть c_n – последовательность неотрицательных чисел, и пусть*

$$C_1(x) = \sum_{n\leqslant x} c_n(x-n) = Ax_2 + Bx + \Delta_1(x^\alpha), \quad \alpha\geqslant 0.$$

Тогда

$$C_0(x) = 2Ax + O\left(x^{\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Основные результаты.

Используя равенство

$$\lambda^{-s} = \frac{\pi^s}{\Gamma(s)}\int_0^\infty e^{-\pi x\lambda}x^{s-1}dx, \quad (\lambda>0,\ \Re s>0), \tag{5}$$

получаем для $\Re s>0$

$$Z_{n,k}(s;\overline{u},\overline{v}) = \frac{\pi^s}{\Gamma(s)}\int_0^\infty x^{s-1}\left(\sum_{\lambda>0} \mathrm{V}_{n,k}(\lambda;\overline{u},\overline{v})e^{-\pi x\lambda}\right)dx. \tag{6}$$

Пусть $\sigma_l(\overline{u})$ обозначает произвольный набор l векторов u_j, принадлежащих множеству $\{u_1,\ldots,u_n\}$, $\overline{u}=(u_1,\ldots,u_n)$, $u_i\in\mathbb{Z}^2$. Через $\sum_l(\overline{u})$ обозначим множество наборов $\sigma_l(\overline{u})$ длины l. Ясно, что $\sum_l(\overline{u})$ содержит $\begin{pmatrix} n\\ l\end{pmatrix}$ наборов.

Теперь из определений Θ_k и $\mathrm{V}_{n,k}$ находим

$$\begin{gathered}\sum_{\lambda>0}\mathrm{V}_{n,k}(\lambda;\overline{u},\overline{v})e^{-\pi x\lambda} = \sum_{l=1}^n \sum_{\sigma_l(\overline{u})} \prod_{u_j\in\ \sigma_l(\overline{u})} \Theta_k(x;u_j,v_j) = \\ = \prod_{j=1}^n(\Theta_k(x;u_j,v_j)+1)-1,\end{gathered} \tag{7}$$

где $\sum\limits_{\lambda>0}$ означает, что суммирование идет по всем λ вида

$$\lambda = Q(x_1+v_1)^k + \ldots + Q(x_n+v_n)^k,$$

$\sum\limits_{\sigma_l(\overline{u})}$ означает суммирование по всем наборам $(u_{i_1}, \ldots, u_{i_l}) \in \sigma_l(\overline{u})$ и, к тому же, $\sigma_l(\overline{u})$ пробегает все подмножества из l элементов множества $\{u_1, \ldots, u_n\}$.
Кроме того, мы фиксируем взаимно однозначное соответствие между множествами $\{u_1, \ldots, u_n\}$ и $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Поскольку члены ряда для Θ_k экспоненциально убывают к нулю при $x \to \infty$, то часть интеграла в (3), соответствующая участку интегрирования $[1, \infty)$, допускает аналитическое продолжение на всю комплексную s-плоскость. Поэтому для обеспечения аналитического продолжения $Z_{n,k}(s; \overline{u}, \overline{v})$ на полуплоскость $\Re s > 0$ достаточно изучить интеграл

$$\mathrm{F}(s) = \int\limits_0^1 x^{s-1} \left(\sum_{\lambda>0} \mathrm{V}_{n,k}(\lambda; \overline{u}, \overline{v}) e^{-\pi x \lambda} \right) dx. \tag{8}$$

И мы имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(s) &= \sum_{l=1}^{n} \sum_{\sigma_l(\overline{u})} \int\limits_0^1 x^{s-1} \prod_{u_j \in \, \sigma_l(\overline{u})} \Theta_k(x; u_j, v_j) dx = \\ &= \sum_{l=1}^{n} \sum_{\sigma_l(\overline{u})} \mathbf{I}(\sigma_l(\overline{u})), \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\mathbf{I}(\sigma_l(\overline{u})) = \int\limits_0^1 x^{s-1} \prod_{u_j \in \sigma_l(\overline{u})} \Theta_k(x; u_j, v_j) dx. \tag{10}$$

Теперь получим удобное для применения асимптотическое представление $\Theta_k(x; u_j, v_j)$ в правой полуокрестности точки $x = 0$.
Рассмотрим пару Меллина

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-y} y^{z-1} dy, \qquad (\Re z = w \geqslant 0),$$

$$e^{-y} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{u-i\infty}^{u+i\infty} y^{-z} \Gamma(z) dz, \qquad (y > 0),$$

и положим $w = \frac{1}{k} + \epsilon$, $\epsilon > 0$ – произвольно малое число.
Тогда из (1) выводим

$$\Theta_k(x; u, v) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\frac{1}{k}+\epsilon-i\infty}^{\frac{1}{k}+\epsilon+i\infty} (\pi x)^{-z} \Gamma(z) \zeta_Q(kz; u, v) dz, \tag{11}$$

где $\zeta_Q(s;u,v)$ – дзета-функция Эпштейна

$$\zeta_Q(s;u,v)=\sum_{\substack{w\in\mathbb{Z}^2\\ w+v\neq 0}} e^{2\pi i w\cdot v}Q(w+v)^{-s}.$$

В соотношении (11) передвинем контур интегрирования на прямую $\Re z=-1+\frac{1}{2k}$. При этом мы пройдем через простой полюс в точке $s=1$ (если $u\in\mathbb{Z}^2$) и простой полюс в точке $s=0$. Поэтому имеем

$$\Theta_k(x;u,v)=\varepsilon(u)(\pi x)^{-\frac{1}{k}}\Gamma(\frac{1}{k})+\zeta_Q(0;u,v)+\Im(-1+\frac{1}{2k};x,u,v), \qquad (12)$$

где

$$\varepsilon(u)=\begin{cases}0 & \text{если } u\notin\mathbb{Z}^2,\\ 1 & \text{если } u\in\mathbb{Z}^2,\end{cases}$$

$$\Im(b;x,u,v)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty}(\pi x)^{-z}\Gamma(z)\zeta_Q(kz;u,v)dz. \qquad (13)$$

Применяя функциональное уравнение для дзета-функции Эпштейна и формулу Стирлинга для Γ-функции Эйлера, получаем для $\Re z=b$:

$$\begin{aligned}\Im(b;x,u,v)\ll x^{-b}\int\limits_1^\infty|\Gamma(b+it)|\cdot|\zeta_Q(kb+ikt;u,v)|dt\ll\\ \ll x^{-b}\int\limits_1^\infty|\Gamma(b+it)|\cdot\left|\frac{\Gamma(1-kb-ikt)}{\Gamma(kb+ikt)}\right|\cdot|\zeta_Q(1-kb-ikt;-v,u)|dt\ll x^{-b},\end{aligned} \qquad (14)$$

с постоянной в символе $''\ll''$, зависящей от b, k и дискриминанта D квадратичной формы Q.
Поэтому соотношения (12)–(14) дают

$$\Theta_k(x;u,v)=\varepsilon(u)(\pi x)^{-\frac{1}{k}}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)+\zeta_Q(0;u,v)+O(x^{1-\frac{1}{2k}}). \qquad (15)$$

Теперь из (10)–(16) получаем для $\Re s>0$

$$\begin{gathered}\mathrm{F}(s)=\\ =\sum_{l=1}^n\sum_{\sigma_l(\overline{u})}\int\limits_0^1 x^{s-1}\prod_{u_j\in\ \sigma_l(\overline{u})}\left(\varepsilon(u_j)(\pi x)^{-\frac{1}{k}}\Gamma(\tfrac{1}{k})+\zeta_Q(0;u_j,v_j)+O(x^{1-\frac{1}{2k}})\right)dx=\\ =\sum_{l=0}^n\frac{b_k(l)}{s-\frac{l}{k}}+O((\Re s+\tfrac{1}{2k})^{-1}),\end{gathered} \qquad (16)$$

где

$$\begin{gathered}b_k(0)=\sum_{l=1}^n\sum_{\sigma_l(\overline{u})}\prod_{u_j\in\ \sigma_l(\overline{u})}\zeta_Q(0;u_j,v_j),\\ b_k(n)=\left(\Gamma(\tfrac{1}{k})(\pi)^{-\frac{1}{k}}\right)^r\frac{k^2}{n(n+k)};\quad r=\sum_{\substack{j=1\\ u_j\in\mathbb{Z}^2}}^n 1,\end{gathered}$$

$b_k(l), 0 < l < n,$ – полиномы от $\Gamma(\frac{1}{k})$ с коэффициентами, зависящими от $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$.

Соотношения (9), (10) и (15) позволяют заключить, что функция $\mathrm{F}(s)$ (а значит, и $Z_{n,k}(s;\overline{u},\overline{v})$) допускает мероморфное продолжение в полуплоскость $\Re s \geqslant 0$ с простыми полюсами в точках $s = \frac{l}{k}$, $l = 0, 1, \dots, n$.

К сожалению, полученной информации о мероморфности функции $Z_{n,k}(s;\overline{u},\overline{v})$ в полуплоскости $\Re s \geqslant 0$ еще недостаточно для построения асимптотической формулы для среднего значения $\mathrm{V}_{n,k}(\lambda;\overline{u},\overline{v})$, так как применение формулы Перрона требует, чтобы производящая функция имела степенной рост по t внутри полосы $0 \leqslant \Re s \leqslant 1$, а из соотношения (6) этого пока не видно (мешает множитель $\Gamma^{-1}(s)$). Покажем, что в критической полосе $\frac{1}{2} \leqslant \Re s \leqslant 1$ функция $Z_{n,k}(s;\overline{u},\overline{v})$ имеет степенной рост.

Для этого повернем луч интегрирования на угол $\varphi = sign(t)\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{|t|+1}\right)$ (такой прием использовала Р. Кауфман [6]). На выбранном луче имеем $z^s = x^s e^{i\varphi s}$, $x \in [0, +\infty)$, а также $e^{i\varphi s}\left(\Gamma(s)\right)^{-1}$ имеет степенной рост по t. Таким образом, мы заключаем, что $Z_{n,k}(s;\overline{u},\overline{v})$ имеет только степенной рост по t, $|t| \to \infty$, в полуплоскости $\Re s > 0$. Чтобы уточнить этот рост мы возвращаемся к равенству (6) и считаем, что интегрирование ведется по выбранному выше лучу. Так что имеем

$$Z_{n,k}(s;\overline{u},\overline{v}) = \frac{\pi^s}{\Gamma(s)}\left(\int\limits_0^1 + \int\limits_1^\infty\right) dz := Z^{(1)}_{n,k}(s;\overline{u},\overline{v}) + Z^{(2)}_{n,k}(s;\overline{u},\overline{v}), \tag{17}$$

где $z = xe^{i\varphi}$, а ядра интегралов совпадают с ядром интеграла в (6).

Рассмотрим слагаемое $Z^{(1)}_{n,k}(s;\overline{u},\overline{v})$. Передвинем контур интегрирования в (11) на прямую $\Re s = \frac{1}{2k}$, при этом мы пройдем через полюс подынтегральной функции в т. $s = \frac{1}{k}$. Это дает

$$\Theta_k(z;u,v) = (\pi z)^{-\frac{1}{k}}\Gamma(\frac{1}{k}) + \Im(\frac{1}{2k}; z, u, v), \tag{18}$$

где $\Im(\frac{1}{2k}; z, u, v)$ определены в (13). Поэтому

$$\begin{gathered} Z^{(1)}_{n,k}(s;\overline{u},\overline{v}) = \int\limits_{x=0}^{1} (xe^{i\varphi s})^{s-1}\left(\sum_{\lambda>0} \mathrm{V}_{n,k}(\lambda;\overline{u},\overline{v})e^{-\pi z\lambda}\right) dz = \\ = \sum_{l=1}^{n}\sum_{r=0}^{l}\left(\left(\frac{1}{\pi^{\frac{1}{k}}}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\right)^r \int\limits_{x=0}^{1} (xe^{i\varphi s})^{s-1-\frac{r}{k}} \prod_{u_j\in\ \sigma_l(\overline{u})} \Im(\tfrac{1}{2k}; z, u_j, v_j)dz\right). \end{gathered} \tag{19}$$

В правой части (19) подставим вместо $\Im(\frac{1}{2k}; z, u_j, v_j)$ его интегральное представление (13) и сделаем внутренним интегрированием по z.

Среди слагаемых в сумме справа в (19) максимальный вклад дает слагаемое с $l = n$ и $r = 0$, которое равно

$$\frac{\pi^s e^{i\varphi s}}{\Gamma(s)} \cdot \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{\substack{\Re w_j = \frac{1}{2k}\\ j=1,\dots,n}} \cdots \int \prod_{j=1}^{n} e^{-i\varphi w_j}\Gamma(w_j)\zeta_Q(kw_j; u_j, v_j)\frac{dw_1\dots dw_n}{s-w_1-w_n}. \tag{20}$$

Заменяя $\Gamma(w_j)$ асимптотической оценкой по формуле Стирлинга (для $|\Im w_j| \to \to \infty$) и последовательно вычисляя интегралы по $w_1, \ldots, w_n$ методом стационарной фазы (см. лемма 2), заменяя при этом дзета-функцию $\zeta_Q(w; u, v)$ укороченным функциональным уравнением, получим, что выражение (20) можно оценить суммой ряда

$$\sum_{\lambda>0} \frac{\mathrm{V}_{n,k}(\lambda; \overline{u}, \overline{v})}{(\Re s - \frac{1}{2}) + ||t| - \lambda|} e^{-\frac{\lambda}{|t|+1}}. \tag{21}$$

Отсюда следует, что

$$Z_{n,k}^{(1)}(s; \overline{u}, \overline{v}) \ll \left| \sum_{\lambda>0} \frac{\mathrm{V}_{n,k}(\lambda; \overline{u}, \overline{v})}{(\Re s - \frac{1}{2}) + ||t| - \lambda|} e^{-\frac{\lambda}{|t|+1}} \right|. \tag{22}$$

Далее, из (6) с помощью замены $\pi x \lambda = y$ получаем

$$\begin{aligned} Z_{n,k}^{(2)}(s; \overline{u}, \overline{v}) &= \tfrac{\pi^s}{\Gamma(s)} \int\limits_1^\infty x^{s-1} \left(\sum_{\lambda>0} \mathrm{V}_{n,k}(\lambda; \overline{u}, \overline{v}) e^{-\pi x \lambda} \right) dx = \\ &= \sum_{\lambda>0} \tfrac{\mathrm{V}_{n,k}(\lambda; \overline{u}, \overline{v})}{\lambda^s} \Gamma(s)^{-1} \int\limits_{x=\lambda}^\infty z^{s-1} e^{-z} dz, \qquad (z = x e^{i\varphi}). \end{aligned} \tag{23}$$

На луче $z = x e^{i\varphi}$, $\lambda \leqslant x < \infty$, имеем

$$\Gamma(s)^{-1} \int\limits_{x=\lambda}^{\infty} z^{s-1} e^{-z} dz \ll e^{-\frac{\lambda}{|t|+1}}.$$

Так что применение частичного суммирования дает

$$\begin{aligned} Z_{n,k}^{(2)}(s; \overline{u}, \overline{v}) &\ll \sum_{\lambda>0} \tfrac{\mathrm{V}_{n,k}(\lambda; \overline{u}, \overline{v})}{\lambda^\sigma} e^{-\frac{\lambda}{|t|+1}} \ll \\ &\ll \int\limits_1^\infty \sum_{\lambda \leqslant x} \mathrm{V}_{n,k}(\lambda; \overline{u}, \overline{v}) e^{-\frac{x}{|t|+1}} \left(1 + \tfrac{x}{|t|+1}\right) dx. \end{aligned} \tag{24}$$

Теперь, учитывая тривиальную оценку $\sum\limits_{\lambda \leqslant x} \mathrm{V}_{n,k}(\lambda; \overline{u}, \overline{v}) \ll x$, мы получаем

$$Z_{n,k}^{(2)}(s; \overline{u}, \overline{v}) \ll (|t|+1)^{1-\sigma} \min\left(\frac{1}{1-\sigma}, 1 + \log(|t|+1) \right). \tag{25}$$

Оценки (22), (25) позволяют найти асимптотическую формулу для сумматорной функции

$$\mathrm{W}(\lambda; \overline{u}, \overline{v}) = \sum_{\lambda \leqslant x} \mathrm{V}_{n,k}(\lambda; \overline{u}, \overline{v}).$$

Действительно, в силу соотношения

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{y^{s+1}}{s(s+1)} ds = \begin{cases} (y-1) & \text{если } y \geqslant 1, \\ 0 & \text{если } 0 < y < 1, \end{cases}$$

получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{Z_{n,k}(s;\overline{u},\overline{v})}{s(s+1)}x^{s+1}ds=\sum_{\lambda\leqslant x}\mathrm{V}_{n,k}(\lambda;\overline{u},\overline{v})(x-\lambda). \tag{26}$$

Теперь перенесем контур интегрирования в (26) на прямую
$\Re s=b_0$, $b_0=\frac{1}{2}+\log(x)^{-1}$. Учитывая расположение полюсов подынтегральной функции, получим

$$\sum_{\lambda\leqslant x}\mathrm{V}_{n,k}(\lambda;\overline{u},\overline{v})\left(1-\frac{\lambda}{x}\right)=\sum_{\frac{n}{2}<l\leqslant n}a_n(l)x^{\frac{l}{k}}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b_0-i\infty}^{b_0+i\infty}\frac{Z_{n,k}(s;\overline{u},\overline{v})}{s(s+1)}x^s ds, \tag{27}$$

где $a_n(l)=a_n(l;\overline{u},\overline{v})$ – вычислимые коэффициенты.

Далее,

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{b_0-i\infty}^{b_0+i\infty}\frac{Z_{n,k}(s;\overline{u},\overline{v})}{s(s+1)}x^s ds\right|\leqslant\left|\int\limits_{b_0-i\infty}^{b_0+i\infty}\frac{Z^{(1)}_{n,k}(s;\overline{u},\overline{v})}{s(s+1)}x^s ds\right|+\\+\left|\int\limits_{b_0-i\infty}^{b_0+i\infty}\frac{Z^{(2)}_{n,k}(s;\overline{u},\overline{v})}{s(s+1)}x^s ds\right|=\mathfrak{I}_1+\mathfrak{I}_2.\end{aligned} \tag{28}$$

В силу (25) находим $\mathfrak{I}_2\ll x^{\frac{1}{2}}$.

Для оценки $\mathfrak{I}_1$ воспользуемся соотношением (22).
Пусть

$$f(T)=\int\limits_{\Re s=b_0}^{T}Z^{(1)}_{n,k}(s;\overline{u},\overline{v})ds.$$

Тогда, в силу (22),

$$\begin{aligned}|f(T)|\leqslant\left(\max_{1\leqslant T_1\leqslant T}\int\limits_{T_1}^{2T_1}|Z_{n,k}(s;\overline{u},\overline{v})|^2\,dt\right)\log T\ll\\ \ll\left(\max_{1\leqslant T_1\leqslant T}\int\limits_{T_1}^{2T_1}\sum_{\lambda>0}\frac{|\mathrm{V}_{n,k}(\lambda;\overline{u},\overline{v})|}{(b_0-\frac{1}{2})+||t|-\lambda|}e^{-\frac{\lambda}{|t|}}\,dt\right)\log T\ll\\ \ll\left(\max_{1\leqslant T_1\leqslant T}\int\limits_{T_1}^{2T_1}\left(\sum_{\lambda\leqslant\frac{1}{2}T_1}+\sum_{\frac{1}{2}T_1\leqslant\lambda\leqslant 2T_1}+\sum_{\lambda\geqslant 2T_1}\right)e^{-\frac{\lambda}{|t|}}\,dt\right)\log T.\end{aligned}$$

Учтем, что $\sum\limits_{\lambda\leqslant x}\mathrm{V}_{n,k}(\lambda;\overline{u},\overline{v})\ll x$. Тогда легко получаем

$$\int\limits_{\Re s=b_0}^{T}Z^{(1)}_{n,k}(s;\overline{u},\overline{v})ds=T\max\left(\frac{1}{b_0-\frac{1}{2}},\log T\right)\log T. \tag{29}$$

А значит, из (28) – (29) следует

$$\mathfrak{I}_1\ll\int\limits_{b_0-i\infty}^{b_0+i\infty}\frac{Z^{(1)}_{n,k}(s;\overline{u},\overline{v})}{s(s+1)}x^s ds\ll x^{\frac{1}{2}}\log^3 x. \tag{30}$$

Поэтому

$$\sum_{\lambda\leqslant x} \mathrm{V}_{n,k}(\lambda;\overline{u},\overline{v})\left(1-\frac{\lambda}{x}\right) = \sum_{\frac{n}{2}<l\leqslant n} a_n(l)x^{\frac{l}{k}} + O(x^{\frac{1}{2}}\log^3 x). \tag{31}$$

Применение леммы 3 приводит к следующему утверждению.

Теорема. *Для произвольного набора* $\overline{v}\in\mathbb{Q}^{2n}$ *справедлива оценка*

$$\sum_{\lambda\leqslant x} \mathrm{V}_{n,k}(\lambda;\overline{0},\overline{v}) = \sum_{\frac{n}{2}<l\leqslant n} c_k(l)x^{\frac{l}{n}} + O(x^{\frac{3}{4}}\log^3 x)$$

с вычислимыми постоянными $c_k(l)$*, причем*

$$c_k(n) = \left(\Gamma((\pi)^{-\frac{1}{k}}\frac{1}{k})\right)^r \frac{2k^2}{n(n+k)}; \quad r=\sum_{\substack{j=1\\ u_j\in\mathbb{Z}^2}}^{n} 1.$$

Заключение.

Как видно из теоремы целесообразно считать, что $\frac{k}{2}<n\leqslant k$, ибо для $n\leqslant\frac{k}{2}$ мы не можем выделить главный член асимптотики.

В случае $\overline{u}=\overline{v}=\overline{0}$ теорема дает асимптотическую формулу для сумматорной функции, ассоциированной с функцией количества представлений натурального числа суммой k-ых степеней n значений положительно определенной бинарной квадратичной формой $Q(x,y)$.

Изученная выше функция $Z_{n,k}(s;\overline{u},\overline{v})$ позволяет получить асимптотическую формулу для среднего значения $\mathrm{V}_{n,k}(m):=\mathrm{V}_{n,k}(m;\overline{0},\overline{0})$ в арифметической прогрессии.

Действительно, мы имеем

$$\sum_{\substack{m\equiv a(\mathrm{mod}\ q)\\ m\leqslant x}} \mathrm{V}_{n,k}(m)\left(1-\frac{m}{x}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{q^{2ks}}\sum_{(a,q)} Z_{n,k}(s;0,\delta)\frac{x^s}{s(s+1)}ds, \tag{32}$$

где $\delta=(\frac{1}{q}\overline{v}_1,\ldots,\frac{1}{q}\overline{v}_n)$, $\overline{v}_i=(v_{i,1},v_{i,2})\in\mathbb{Z}^2$, а $\sum\limits_{(a,q)}$ означает, что суммирование идет по всем наборам $\overline{v}_i \pmod q$, для которых $Q(v_{i,1},v_{i,2})\equiv a \,(\mathrm{mod}\ q)$.

Обозначим через $N_{n,k}(a,q)$ – число решений сравнения

$$(l_{1,1}^2+l_{1,2}^2)^k+\ldots+(l_{n,1}^2+l_{n,2}^2)^k \equiv a \pmod q.$$

Тогда, очевидно, имеем

$$\mathrm{Z}_{n,k}^{(Q)}(s;a,q) := \sum_{\substack{m=1\\ m\equiv a(\mathrm{mod}\ q)}}^{\infty} \frac{\mathrm{V}_{n,k}(m)}{m^s} = \frac{1}{q^{ks}}\sum_{(a,q)} Z_{n,k}(s;0,\delta).$$

И теперь, проводя рассуждения, использованные при доказательстве предыдущей теоремы, мы с помощью оценок тригонометрической суммы

$$\sum_{(C)} e^{2\pi i\frac{a_1x_1+\ldots+a_nx_n+b_1y_1+\ldots+b_ny_n}{q}}, \tag{33}$$

где условие (C) означает, что суммирование идет по всем наборам (x_j, y_j), $j = 1, \dots n$, для которых

$$(Q(x_1, y_1))^k + \dots + (Q(x_n, y_n))^k \equiv a \,(\mathrm{mod}\ q),$$

можем получить асимптотическую формулу для среднего значения $\mathrm{V}_{n,k}(m)$ в арифметической прогрессии $m \equiv a \,(\mathrm{mod}\ q)$. Для оценки суммы (33) мы используем ее квазимультипликативность по q (см. [4], лемма 4), (а потому можно считать, что $q = p^\alpha$, p – простое число), а затем проводим последовательный спуск к сумме с $q = p$ и применяем лемму 2.

1. **Deligne P.** La conjecture de Weill, I,II [text] / Deligne P. // IHES Publ. Math. – V. 43 (1974). – P. 273–307, – V. 52 (1980). – P. 137–252.
2. **Hooley C.** On the representation of a number as the sum of four cubes [text] / Hooley C. // Proc. London Math. Soc. – V. 36 (1978). – P. 117–140.
3. **Hooley C.** On the sieve method and the numbers that are a sum of two h-th powers [text] / Hooley C. // Proc. London Math. Soc. – V. 43 (1981). – P. 73–109.
4. **Hooley C.** On the numbers that are representable as the sum of two cubes [text] / Hooley C. // J. Reine and Ungew. Math. – V. 314 (1980). – P. 146–173.
5. **Jutila C.** On the approximative functional equation for $\zeta^2(s)$ and other Dirichlet series [text] / Jutila C. // Q. J. Math. Oxford. – V. 37 (1986). – P. 193–209.
6. **Ivić A.** On Riesz means of the coefficients of the Rankin-Selberg series [text] / Ivic A., Matsumoto K., Tamigauva Y. // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – V. 127 (1999). – P. 117–131.
7. **Кауфман Р.** Об укороченных уравнениях А. Ф. Лаврика [текст] / Кауфман Р. // Зап. науч. сем. ЛОМИ, 1978. – Р. 124–159.
8. **Savastru O.** On the representation of integers as the sum of k-th powers in the arithmetic progression [text] / Savastru O., Varbanets P. // Šiauliai Math. Semin. – V. 11, 2008. – P. 207–219.
9. **Savastru O.** On the Means Square of the L-Function of a Quadratic Form [text] / Savastru O., Varbanets P. // Anal. Probab. Methods Number Theory. Proc. of the Fourth Int. Conf. in Honour of J. Kubilius, Palanga, Lithuania, 25-29 Sept. 2006. – 2007. – P. 156–162.
10. **Виноградов А.** Дзета-функция Варинга [текст] / Виноградов А. // Сб. статей, посвящ. 60-летию со дня рожд. В.Г. Спринджука. – Минск, 1997. – С. 117–131.