

УДК 517.5

Ан. А. Кореновский

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

О ВЛОЖЕНИИ КЛАССА ГЕРИНГА В КЛАСС ГУРОВА – РЕШЕТНЯКА

Роботу виконано за фінансової підтримки

Державного фонду фундаментальних досліджень України, грант № Ф7/329-2001.

Доповідь зроблено на засіданні наукового семінару з теорії функцій ОНУ 20.09.2002 р.

Представлено нове доведення вкладення класу Герінга в клас Гурова – Решетняка.

Приведено новое доказательство вложения класса Геринга в класс Гурова – Решетняка.

The new proof of the embedding of the Gehring class into Gurov – Reshetnyk class is given.

При изучении различных операторов в пространствах с весом важнейшую роль играют так называемые классы весовых функций Макенхаупта. Для $1 < p < \infty$ класс Макенхаупта A_p составляют неотрицательные на $\mathbb{R}^n$ (весовые) функции f , удовлетворяющие условию

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q f^{-1/(p-1)}(x) dx \right\}^{p-1} < \infty, \quad (1)$$

где верхняя грань берется по всем кубам $Q \subset \mathbb{R}^n$, стороны которых параллельны координатным осям (только такие кубы рассматриваются в дальнейшем). Для чисел $0 < \alpha, \beta < 1$ предельный класс Макенхаупта $A_\infty \equiv A_\infty(\alpha, \beta)$ определяется таким условием

$$\left| \left\{ x \in Q : f(x) > \beta \cdot f_Q \right\} \right| > \alpha |Q|, \quad (2)$$

где обозначено $f_Q = |Q|^{-1} \int_Q f(x) dx$, а (2) предполагается выполненным равномерно по всем кубам $Q \subset \mathbb{R}^n$. Впервые классы A_p были определены в работах [1,2]. В настоящее время имеется огромное количество публикаций, посвященных изучению этих классов и их приложениям.

Условие Геринга

$$\left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q f^q(x) dx \right\}^{1/q} \leq c \cdot \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx, \quad (3)$$

где $1 < q < \infty$, а постоянная $c > 1$ не зависит от куба $Q \subset \mathbb{R}^n$, впервые было применено в [3] для изучения свойств квазиконформных отображений. Класс $G_q \equiv \bigcup_{c>1} G_q(c)$,

где $G_q(c)$ – совокупность всех неотрицательных функций f , удовлетворяющих условию (3), впоследствии был назван классом Геринга. Классы G_q изучались многими авторами и нашли многочисленные применения в различных вопросах.

Условие Геринга (3) представляет собой “обратное неравенство Гельдера” с показателем $q > 1$, равномерно выполненное по всем кубам $Q \subset \mathbb{R}^n$. Точно также и условие Макенхаупта (1) является “обратным неравенством Гельдера” с показателем $-1/(p-1) < 0$. Связь между классами Макенхаупта и Геринга устанавливает

Теорема Койфмана – Феффермана ([4]). *Следующие три условия эквивалентны:*

- a) функция f принадлежит классу A_p при некотором $p \in (1, \infty)$;
- b) функция f принадлежит классу $A_\infty(\alpha, \beta)$ при некоторых $\alpha, \beta \in (0, 1)$;
- c) функция f принадлежит классу $G_q(c)$ при некоторых $q \in (1, \infty)$ и $c > 1$.

В дальнейшем рядом авторов были получены другие характеристики классов Макенхаупта и Геринга, которые оказывались полезными в конкретных приложениях (см., например, [5]).

В работе Гурова [6] при изучении квазилоренцевых отображений рассматривалось такое условие на неотрицательную функцию f :

$$\Omega(f, Q) \equiv \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx \leq \varepsilon \cdot \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx, \quad (4)$$

где постоянная $\varepsilon \in (0, 2)$ не зависит от куба $Q \subset \mathbb{R}^n$. Более детально класс $GR \equiv GR(\varepsilon)$ всех неотрицательных функций f , удовлетворяющих условию (4), был изучен в последующей работе Гурова и Решетняка [7], после чего его стали называть классом Гурова – Решетняка. Легко видеть, что неравенство (4) при $\varepsilon = 2$ имеет место для любой локально суммируемой неотрицательной f , а при $\varepsilon < 2$ оно, вообще говоря, неверно. Основное свойство функции из класса GR содержится в следующей теореме.

Теорема Гурова – Решетняка ([7]). *Если неотрицательная функция f удовлетворяет условию Гурова – Решетняка (4) при некотором достаточно малом $\varepsilon > 0$, то она принадлежит также классу Геринга G_q при некотором $q > 1$.*

В работе [8] было показано, что в одномерном случае при любом $\varepsilon \in (0, 2)$ условие (4) влечет принадлежность функции f некоторому классу Геринга G_q , а также найдена верхняя грань таких значений q . Различные доказательства теоремы Гурова – Решетняка и ее разновидностей были получены рядом других авторов, однако при $n \geq 2$ вопрос о ее справедливости для любого $\varepsilon < 2$ долгое время оставался открытым. В недавней работе Лернера, Стоколоса и автора данной статьи [9] установлено, что условие Гурова – Решетняка (4) равносильно условию (2) при любых $n \geq 1$ и $\varepsilon < 2$. Точнее, при всех $n \geq 1$ справедливо равенство

$$\bigcup_{0 < \varepsilon < 2} GR(\varepsilon) = \bigcup_{0 < \alpha, \beta < 1} A_\infty(\alpha, \beta).$$

Вместе с теоремой Койфмана – Феффермана это означает, что условие Гурова – Решетняка (4) может служить еще одним характерным свойством функций из классов

Геринга и Макенхаупта. В частности, получаем, что теорема Гурова – Решетняка обратима в том смысле, что любой класс Геринга $G_q(c)$ содержится в классе Гурова – Решетняка $GR(\varepsilon)$ при некотором $\varepsilon < 2$. Цель данной работы заключается в прямом доказательстве этого факта, не опирающемся на теорему Койфмана – Феффермана.

Как отмечается в [10], при $q \geq 2$, $1 < c < \sqrt{5}$ вложение $G_q(c) \subset GR(\sqrt{c^2 - 1})$

мгновенно следует из такого неравенства

$$\begin{aligned} \Omega^2(f, Q) &\leq \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|^2 dx = \\ &= \frac{1}{|Q|} \int_Q f^2(x) dx - \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx \right)^2 \leq \\ &\leq (c^2 - 1) \cdot \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx \right)^2. \end{aligned} \quad (5)$$

При любых $n \geq 1$, $q > 1$ и $c > 1$ вложение $G_q(c) \subset GR(\varepsilon)$ гарантируется следующей теоремой.

Теорема 1. Пусть неотрицательная на $\mathbb{R}^n$ функция f удовлетворяет условию

$$\left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q f^q(x) dx \right\}^{1/q} \leq c \cdot \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx, \quad Q \subset \mathbb{R}^n, \quad (6)$$

при некоторых $q > 1$ и $c > 1$. Тогда найдется такое ε , $0 < \varepsilon < 2$, что справедливо неравенство

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx \leq \varepsilon \cdot \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx, \quad Q \subset \mathbb{R}^n. \quad (7)$$

Доказательство. Зафиксируем произвольный куб $Q \subset \mathbb{R}^n$ и обозначим $E = \{x \in Q: f(x) \geq f_Q\}$, $E^C = Q \setminus E$. Можем считать, что $f_Q > 0$. В силу неравенства Гельдера имеем

$$\begin{aligned} \frac{\Omega(f, Q)}{f_Q} &= \frac{1}{f_Q} \frac{2}{|Q|} \int_E (f(x) - f_Q) dx = 2 \frac{|E|}{|Q|} \frac{1}{f_Q} \frac{1}{|E|} \int_E f(x) dx - 2 \frac{|E|}{|Q|} \leq \\ &\leq 2 \frac{|E|}{|Q|} \frac{1}{f_Q} \left(\frac{1}{|E|} \int_E f^q(x) dx \right)^{1/q} - 2 \frac{|E|}{|Q|} \leq \\ &\leq 2 \left(\frac{|E|}{|Q|} \right)^{1-1/q} \frac{1}{f_Q} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f^q(x) dx \right)^{1/q} - 2 \frac{|E|}{|Q|}. \end{aligned}$$

Но из условия (6) следует, что $(f_Q)^{-1} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f^q(x) dx \right)^{1/q} \leq c$, так что

$$\frac{\Omega(f, Q)}{f_Q} \leq 2 \left(c \left(\frac{|E|}{|Q|} \right)^{1-1/q} - \frac{|E|}{|Q|} \right). \quad (8)$$

Рассмотрим функцию $\varphi(\lambda) = c \cdot \lambda^{1-1/q} - \lambda$, $\lambda > 0$. Анализируя ее производную, легко убедиться в том, что φ возрастает на $(0, \lambda_0)$ и убывает на (λ_0, ∞) , где $\lambda_0 = (c(q-1)/q)^q$. Заметим также, что из очевидного неравенства

$$\frac{\Omega(f, Q)}{f_Q} = 2 \frac{|E^c|}{|Q|} \frac{1}{|E^c|} \int_{E^c} \left(1 - \frac{f(x)}{f_Q} \right) dx \leq 2 \frac{|E^c|}{|Q|}$$

следует

$$\frac{|E|}{|Q|} = 1 - \frac{|E^c|}{|Q|} \leq 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Omega(f, Q)}{f_Q}. \quad (9)$$

Рассмотрим сначала случай

$$c < \left(\frac{q}{q-1} \right)^{(q-1)/q}. \quad (10)$$

В этом случае

$$\lambda_0 < \left(\left(\frac{q}{q-1} \right)^{(q-1)/q} \frac{q-1}{q} \right)^q = \frac{q-1}{q} < 1.$$

Предположим, что

$$\frac{\Omega(f, Q)}{f_Q} \geq 2(1 - \lambda_0). \quad (11)$$

Тогда $\lambda_0 \geq 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Omega(f, Q)}{f_Q}$, а из (8) и (9), в силу монотонности функции φ на $(0, \lambda_0)$, следует

$$\begin{aligned} \frac{\Omega(f, Q)}{f_Q} &\leq 2 \varphi \left(\frac{|E|}{|Q|} \right) \leq 2 \varphi \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Omega(f, Q)}{f_Q} \right) = \\ &= 2 \left(c \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Omega(f, Q)}{f_Q} \right)^{1-1/q} - \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Omega(f, Q)}{f_Q} \right) \right) = \\ &= 2 c \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Omega(f, Q)}{f_Q} \right)^{1-1/q} - 2 + \frac{\Omega(f, Q)}{f_Q}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$c \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Omega(f, Q)}{f_Q} \right)^{1-1/q} \geq 1,$$

или, что то же самое,

$$\frac{\Omega(f, Q)}{f_Q} \leq 2 \left(1 - c^{-q/(q-1)} \right). \quad (12)$$

Сравнивая это неравенство с (11), находим

$$1 - \lambda_0 \leq 1 - c^{-q/(q-1)}. \quad (13)$$

Но $\lambda_0 = (c(q-1)/q)^q$, так что (13) равносильно неравенству

$$c \geq \left(\frac{q}{q-1} \right)^{(q-1)/q},$$

которое противоречит (10). Таким образом, в случае (10) неравенство (11) выполненным быть не может и, стало быть, из (10) следует, что

$$\frac{\Omega(f, Q)}{f_Q} < 2(1 - \lambda_0). \quad (14)$$

Но тогда $\lambda_0 < 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Omega(f, Q)}{f_Q}$, а учитывая еще, что λ_0 – точка максимума функции

Φ , из (8) получим

$$\begin{aligned} \frac{\Omega(f, Q)}{f_Q} &\leq 2 \Phi \left(\frac{|E|}{|Q|} \right) \leq 2 \Phi(\lambda_0) = 2 \Phi \left(\left(c \frac{q-1}{q} \right)^q \right) = \\ &= 2 \left[c \left(\left(c \frac{q-1}{q} \right)^q \right)^{1-1/q} - \left(c \frac{q-1}{q} \right)^q \right] = 2 c^q \frac{(q-1)^{q-1}}{q^q} = \\ &= \frac{2}{q-1} \lambda_0 < \frac{2}{q-1} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Omega(f, Q)}{f_Q} \right) = \frac{2}{q-1} - \frac{1}{q-1} \cdot \frac{\Omega(f, Q)}{f_Q}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает

$$\left(1 + \frac{1}{q-1} \right) \frac{\Omega(f, Q)}{f_Q} \leq \frac{2}{q-1},$$

то есть

$$\frac{\Omega(f, Q)}{f_Q} \leq \frac{2}{q}. \quad (15)$$

Заметим, что условие (10) равносильно тому, что

$$\frac{2}{q} < 2(1 - \lambda_0).$$

Это неравенство означает, что оценка (15) сильнее, нежели (14).

Осталось рассмотреть случай

$$c \geq \left(\frac{q}{q-1} \right)^{(q-1)/q}. \quad (16)$$

Если мы предположим, что выполнено условие (11), то, как и выше, получим, что справедливо неравенство (12). Иначе справедливо противоположное к (11) неравенство (14), из которого следует также (15).

Заметим, что из (14) вытекает

$$1 - \lambda_0 \leq \frac{1}{q} \leq 1 - c^{-q/(q-1)}.$$

Из вышесказанного получаем, что наилучшая из трех оценок (12), (14) и (15), которую можно гарантировать при условии (16), это оценка (12).

Окончательно, полагая

$$\varepsilon \equiv \varepsilon(c, q) = \begin{cases} 2/q, & \text{если } c < (q/(q-1))^{(q-1)/q}, \\ 2(1 - c^{-q/(q-1)}), & \text{если } c \geq (q/(q-1))^{(q-1)/q}, \end{cases}$$

получим (7).

Теорема доказана.

Замечание 1. Полученное при доказательстве теоремы 1 значение $\varepsilon(c, q) \rightarrow 2 - 0$ при $c \rightarrow \infty$ и любом фиксированном $q > 1$, и это по существу. Действительно, для $b > 1$ рассмотрим функцию $f_b(x) = b \cdot \chi_{(-\infty, 0)}(x) + \chi_{[0, +\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, где χ_E — характеристическая функция множества E . Несложные вычисления показывают, что $f_b \in \text{GR}(\varepsilon_0)$, где минимально возможное $\varepsilon_0 \equiv \varepsilon_0(b) = 2(\sqrt{b} - 1)/(\sqrt{b} + 1) \rightarrow 2 - 0$, если $b \rightarrow \infty$. Кроме того, $f_b \in G_q$ для любого $q > 1$. Это означает, что ни при каком $\varepsilon < 2$ класс Геринга G_q не содержится в классе Гурова – Решетняка $\text{GR}(\varepsilon)$. Более того, приведенный пример показывает, что и $\bigcap_{q>1} G_q$ не содержится в каком-либо

$\text{GR}(\varepsilon)$ при $\varepsilon < 2$. С другой стороны, если $q > 1$ и $c \rightarrow 1$, то полученное в доказательстве теоремы 1 значение $\varepsilon(c, q) = 2/q$ не стремится к нулю. В этом смысле $\varepsilon(c, q)$ в теореме 1 существенно завышено. В самом деле, как следует из (5), при $q \geq 2$ во вложении $G_q(c) \subset \text{GR}(\varepsilon)$ при $c \rightarrow 1$ можно гарантировать $\varepsilon \rightarrow 0$.

Замечание 2. Зафиксируем $c > 1$. Тогда $\varepsilon(c, q) \rightarrow 2(c-1)/c$ при $q \rightarrow \infty$. Другими словами, справедливо такое вложение

$$\bigcap_{1 < q < \infty} G_q(c) \subset \bigcap_{\varepsilon_1 < \varepsilon < 2} \text{GR}(\varepsilon), \quad (17)$$

где $\varepsilon_1 = 2(c-1)/c > 0$. Нам неизвестно наименьшее значение $\varepsilon_1(c)$, зависящее, быть может, еще и от размерности пространства n , при котором вложение (17) остается справедливым. Заметим, что (17) теряет силу, если положить $\varepsilon_1 = 0$. Более того, для определенной в замечании 1 функции f_b при $b = c$ получим, что $f_c \in G_q(c)$ для любого $q > 1$. В то же время, как отмечено в замечании 1, $f_c \notin \text{GR}(\varepsilon)$ при любом $\varepsilon < \varepsilon_0(c) = 2(\sqrt{c} - 1)/(\sqrt{c} + 1)$. Таким образом, вложение (17) теряет силу, если только $\varepsilon_1 < 2(\sqrt{c} - 1)/(\sqrt{c} + 1)$ и притом, как легко видеть, в пространстве любой размерности $n \geq 1$. Итак, для наименьшего значения $\varepsilon_1(c)$, при котором (17) имеет место, справедливо такое неравенство

$$2(\sqrt{c}-1)/(\sqrt{c}+1) \leq \varepsilon_1(c) \leq 2(c-1)/c.$$

В другом предельном случае $q \rightarrow 1$ и фиксированном $c > 1$ имеем $\varepsilon(c, q) \rightarrow 2-0$. Это означает, что

$$\bigcup_{1 < q < \infty} G_q(c) \subset \bigcup_{0 < \varepsilon < 2} \text{GR}(\varepsilon). \quad (18)$$

Все тот же пример функции f_b , определенной в замечании 1, показывает, что справа в (18) вместо 2 нельзя записать никакое число, меньшее 2. В самом деле, нетрудно убедиться в том, что при фиксированном $b > 1$ функция $f_b \in G_q(c_{q,b})$, где наименьшее возможное значение

$$c_{q,b} = \frac{(q-1)^{(q-1)/q}}{q} \frac{b^q - 1}{(b-1)^{1/q}} \frac{1}{(b^q - b)^{(q-1)/q}} \rightarrow 1+0 \text{ при } q \rightarrow 1. \quad (19)$$

Зафиксируем $c > 1$, $\varepsilon_1 < 2$ и найдем столь большое $b > 1$, что справедливо неравенство $\varepsilon_0(b) = 2(\sqrt{b}-1)/(\sqrt{b}+1) > \varepsilon_1$. Тогда для полученного b , в силу (19), найдется такое $q > 1$, что $c_{q,b} < c$, так что $f_b \in \bigcup_{1 < q < \infty} G_q(c)$. Вместе с тем, очевидно,

$$f_b \notin \bigcup_{0 < \varepsilon < \varepsilon_1} \text{GR}(\varepsilon).$$

Заключение. Приведенная теорема 1 проясняет связь между классами Гурова – Решетняка и Геринга. Метод доказательства этой теоремы может быть использован при исследовании связей с другими подобными классами функций.

1. **Muckenhoupt B.** Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function // Trans. Amer. Math. Soc.– 1972.– V. 165.– P. 207–226.
2. **Hunt R., Muckenhoupt B., Wheeden R. L.** Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert Transform // Trans. Amer. Math. Soc.– 1973.– V. 176.– P. 227–251.
3. **Gehring F. W.** The L^p -integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping // Acta Math.– 1973.– V. 130.– P. 265–277.
4. **Coifman R. R., Fefferman Ch.** Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals // Studia Math.– 1974.– V. 51, № 3.– P. 241–250.
5. **Strömberg J. O., Torchinsky A.** Weighted Hardy Spaces // Lecture Notes in Math.– 1989.– V. 1381.– P. 1–193.
6. **Гуров Л. Г.** Об устойчивости преобразований Лоренца. Оценки для производных // Докл. АН СССР.– 1975.– Т. 220, № 2.– С. 273–276.
7. **Гуров Л. Г., Решетняк Ю. Г.** Об одном аналоге понятия функции с ограниченным средним колебанием // Сиб. матем. журн.– 1976.– Т. 42, № 3.– С. 540–546.
8. **Кореновский А. А.** О связи между средними колебаниями и точными показателями суммируемости функций // Матем. сборник.– 1990.– Т. 181, № 12.– С. 1721–1727.
9. **Korenovskyy A. A., Lerner A. K., Stokolos A. M.** A note on the Gurov – Reshetnyak condition // Math. Research Letters.– 2002.– V. 9, № 5–6.– P. 579–584.
10. **Bojarski B.** Remarks on the stability of reverse Hölder inequalities and quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.– 1985.– V. 10.– P. 89–94.

Получено 11.10.2002 г.