

КОНЕЧНЫЕ СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕДИКАТЫ

Симметрические булевы функции введены в рассмотрение К.Шенноном еще в 1938 г. В последующие 55 лет существенных приложений практического характера этого понятия не наблюдается, хотя некоторые работы теоретического характера имеют место.

В настоящее время в связи с большой практической значимостью симметрическим булевым функциям уделяется должное внимание [2, гл.6, 3].

В этой работе рассматривается обобщение понятия симметрических булевых функций - симметрические предикаты.

1. Симметрические предикаты размерности 3×3 в алгебре без отрицаний

Пусть $A = \{a, b, c\}$ - предметная область предиката (см. [1]),
 $X = \{A, B, C\}$ - область переменных.

Таблица истинности предиката:

Код	A	B	C	f
0	A	a	a	
1	A	a	b	
2	A	a	c	
3	A	b	a	
4	A	b	b	
5	A	b	c	
6	A	c	a	
7	A	c	b	

Код	A	B	C	f
9	B	a	a	
10	B	a	b	
11	B	a	c	
12	B	b	a	
13	B	b	b	
14	B	b	c	
15	B	c	a	
16	B	c	b	

Код	A	B	C	f
18	c	a	a	
19	c	a	b	
20	c	a	c	
21	c	b	a	
22	c	b	b	
23	c	b	c	
24	c	c	a	
25	c	c	b	

Конкретный предикат определится соответствующей записью нулей и единиц в столбце f. Наборы, на которых $f=1$, определяют так называемые минтермы - конечные предикаты, имеющие вид конъюнкции предикатов узнавания. Например, для набора (b, c, a): $K_{15} = A^b B^c C^a$, здесь A^b , B^c , C^a - предикаты узнавания букв b, c, a соответственно (см.[1], [4]).

Определение 1. Будем говорить, что переменные X, Y входят симметрично в предикат, если замена X на Y, а Y на X не меняет предиката.

Если переменные X, Y входят симметрично в предикат, то перемана мест соответствующих столбцов таблицы истинности с последующим лексикографическим расположением наборов не изменит столбец f.

Определение 2. Предикат f называется симметрическим, если любые его две переменные входят симметрично в предикат.

Рассмотрим в качестве минтермов только такие, которые лишь в одной позиции содержат зафиксированную букву предметного алфавита (например, букву a). Полученный предикат обозначим $f(a; 3)$:

$$f(a; 3) = K_{4} \vee K_{5} \vee K_{7} \vee K_{8} \vee K_{10} \vee K_{11} \vee K_{12} \vee K_{15} \vee K_{19} \vee K_{20} \vee K_{21} \vee K_{24}$$

Итого, 12 минтермов.

Теорема. Предикат $f(x; 3)$ при всяком $x \in \{a, b, c\}$ является симметрическим.

Чтобы выявить структуру предиката $f(a; 3)$, мы запишем таблицу, которая отображает преобразования минтермов при обмене предиката переменными.

Таблица 1

	K_{4}	K_{5}	K_{7}	K_{8}	K_{10}	K_{11}	K_{12}	K_{15}	K_{19}	K_{20}	K_{21}	K_{24}
A	K_{10}	K_{11}	K_{19}	K_{20}	K_{4}	K_{5}	K_{12}	K_{21}	K_{7}	K_{8}	K_{15}	K_{24}
B	K_{12}	K_{21}	K_{15}	K_{24}	K_{10}	K_{19}	K_{4}	K_{7}	K_{11}	K_{20}	K_{5}	K_{8}
C	K_{4}	K_{7}	K_{5}	K_{8}	K_{12}	K_{15}	K_{10}	K_{11}	K_{21}	K_{24}	K_{19}	K_{20}

Замтим, что столбцы таблицы можно разбить на 3 группы:

- 1) K_{4}, K_{10}, K_{12}
- 2) K_{8}, K_{20}, K_{24}
- 3) $K_{5}, K_{7}, K_{11}, K_{15}, K_{19}, K_{21}$

Группе 1) отвечает симметрический предикат, соответствующий наборам содержащим одну букву **a** и две буквы **b**, обозначим такой предикат $f(a,b,b; 3)$.

Группе 2) отвечает симметрический предикат, соответствующий наборам содержащим одну букву **a** и две буквы **c**, обозначим такой предикат $f(a,c,c; 3)$.

Группе 3) отвечает симметрический предикат, соответствующий наборам содержащим все 3 буквы предметного алфавита, обозначим такой предикат $f(a,b,c; 3)$.

Итак, имеем: $f(a;3) = f(a,b,b; 3) \vee f(a,c,c; 3) \vee f(a,b,c; 3)$.

Аналогично:

$$f(b;3) = f(a,a,b; 3) \vee f(b,c,c; 3) \vee f(a,b,c; 3)$$

$$f(c;3) = f(a,a,c; 3) \vee f(b,b,c; 3) \vee f(a,b,c; 3)$$

Предикаты, содержащие точно две одинаковые буквы в минтермах, также являются симметрическими и могут быть записаны как сумма двух симметрических предикатов:

$$f(b,b; 3) = f(a,b,b; 3) \vee f(b,b,c; 3)$$

$$f(c,c; 3) = f(a,c,c; 3) \vee f(b,c,c; 3)$$

Предикаты $f(a,a,a; 3) = A^a B^a C^a$, $f(b,b,b; 3) = A^b B^b C^b$, $f(c,c,c; 3) = A^c B^c C^c$ - простейшие (не раскладывающиеся на сумму) - также, как и $f(a,a,b; 3)$, $f(a,a,c; 3)$, $f(a,b,b; 3)$, $f(a,c,c; 3)$, $f(b,b,c; 3)$, $f(b,c,c; 3)$, $f(a,b,c; 3)$, не имеющие общих минтермов, в совокупности содержат все 27 наборов таблицы истинности. Эти 10 предикатов назовем фундаментальными.

Любой симметрический предикат является суммой фундаментальных предикатов. Пусть $N = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$. Обозначим $S(0)$ - симметрический предикат, для которого $f = 0$ на всех наборах; $S(i)$, $i=1, \dots, 10$ - фундаментальный предикат, взятый в соответствии с порядком, представленным выше; $S(J)$ - симметрический предикат, полученный объединением фундаментальных предикатов, заданных множеством J элементов из N .

На множестве симметрических предикатов могут быть определены операции, результатом которых являются также симметрические предикаты:

$$\begin{array}{ll} 1. \text{ Операция КОНЪЮНКЦИЯ} & \\ S(I) \wedge S(J) = S(I \wedge J) & (1) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 2. \text{ Операция ДИЗЪЮНКЦИЯ} & \\ S(I) \vee S(J) = S(I \vee J) & (2) \end{array}$$

$$3. \text{ Операция ИНВЕРСИЯ}$$

$$\sim S(I) = S(N \setminus I) \quad (3)$$

$$\begin{array}{ll} 4. \text{ Операция СТРОГАЯ ДИЗЪЮНКЦИЯ} & \\ S(I) \oplus S(J) = S((I \cup J) \setminus (I \cap J)) & (4) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 5. \text{ Операция ИМПЛИКАЦИЯ} & \\ S(I) \Rightarrow S(J) = S(N \setminus (I \cup J)) & (5) \end{array}$$

Отметим также возможность разложения симметрической функции по симметрическим функциям меньшей размерности:

$$\begin{aligned} f(a,b,c; 3) &= A^a B^b C^c \vee A^b B^a C^c \vee A^c B^b C^a \vee A^a B^c C^b \vee A^c B^a C^b \vee A^b B^c C^a \\ &= A^a (B^b C^c \vee B^c C^b) \vee A^b (B^a C^c \vee B^c C^a) \vee A^c (B^b C^a \vee B^a C^b) \\ &= A^a f(b,c; 2) \vee A^b f(a,c; 2) \vee A^c f(a,b; 2). \end{aligned}$$

2. Симметрические предикаты размерности 3 x 3 в алгебре с отрицаниями

Если число переменных предиката f равно n ($n > 1$), то можно операцию отрицания определить аксиоматически, задав ее следующими тождествами:

$$\sim(f \vee g) = \sim(f) \sim(g),$$

$$\sim(f g) = \sim(f) \vee \sim(g),$$

$\sim A^a = A^b \vee A^c$ (по всем предметным переменным, отличным от a), f и g произвольные конечные предикаты (см. [1]).

Разумеется, новых симметрических функций при использовании отрицаний мы не получим. Наличие операции отрицания дает возможность записывать в большинстве случаев конечные предикаты в форме более компактных выражений, а также выполнять тождественные преобразования формул более коротким путем. Кроме того, операция отрицания позволяет ввести понятие совершенной конъюнктивной нормальной формы, сформулировать теорему о конъюнктивном разложении предиката.

Предположим вначале, что только один предикат узнавания в минтерме стоит под знаком отрицания (подвергается инверсии).

Несложные выкладки позволяют убедиться в таких соотношениях:

$$f(\sim a, b, b; 3) = f(b, b, b; 3) \vee f(b, b, c; 3)$$

$$f(\sim a, \sim b, c; 3) = f(a, b, c; 3) \vee f(a, c, c; 3) \vee f(b, c, c; 3) \vee f(c, c, c; 3)$$

В последнем соотношении число предикатов узнавания в левой части – $3*6 = 18$, в правой – $6*3 + 3*3 + 3*3 + 1*3 = 39$.

$$\text{Рассмотрим } f(\sim a, \sim a, b; 3) = f(b, b, c; 3) \vee f(b, c, c; 3) \vee f(b, b, b; 3)$$

В этом соотношении число предикатов узнавания в левой части – $3*3 = 9$, в правой – $3*3 + 3*3 + 1*3 = 21$.

Рассмотрим:

$$f(\sim a, \sim b, \sim c; 3) = f(a, a, b; 3) \vee f(a, b, b; 3) \vee f(a, a, c; 3) \vee \\ \vee f(a, c, c; 3) \vee f(b, c, c; 3) \vee f(b, b, c; 3) \vee f(a, b, c; 3)$$

Имеем слева 18 вхождений, а справа – 72. Так что видим, что сложность формулы может значительно уменьшиться при использовании операции отрицания.

Литература

1. Шабанов-Кунаренко Ю. П. Теория интеллекта. Математические средства // Харьков, ХГУ, «Вища школа», 1984.
2. Шалыто А. А. Методы аппаратной и программной реализации алгоритмов // Санкт-Петербург, «Наука», 2000.
3. Паулин О. Н. К построению прикладной теории симметрических булевых функций // Искусственный интеллект, -2005, -№4.-с.245- 255.
4. Любота В. Н. Применение графов конечных предикатов для минимизации их дизъюнктивной формы // ДОСДМ, №2 (июль 2005), с.35-41.

Любота Владимир Николаевич, vladlubota@rambler.ru