

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

(повне найменування вищого навчального закладу)

Інститут математики, економіки та механіки

(повне найменування інституту, назва факультету (відділення))

Кафедра дефернційних рівнянь

(повна назва кафедри (предметної, циклової комісії))

Дипломна робота

Спеціаліст

(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему: Асимптотична поведінка зникаючих на нескінченності розв'язків
суттєво нелінійних диференціальних рівнянь

Виконав: студент 5 курсу,
денної форми навчання
напряму підготовки / спеціальності
6.040201/7.04020101, математика

(шифр і назва напряму підготовки, спеціальності)

Нікітіна Владислава Володимирівна

(прізвище та ініціали)

Керівник: Канд. Фіз.-Мат. наук Білозерова
М.А.

(прізвище та ініціали)

Рецензент: Доктор Фіз.-Мат. наук професор
Євтухов В.М.

(прізвище та ініціали)

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ _____ від « ____ » _____ р.

Захищено на засіданні ДЕК № _____

протокол № _____ від « ____ » _____ р.

Оцінка _____ / _____ / _____
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бал)

Завідувач кафедри

Голова ДЕК

(підпис)

(прізвище, ініціали)

(підпис)

(прізвище, ініціали)

Одеса – 2014 року

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА I. Асимптотическое поведение решений дифференциальных уравнений типа Эмдена-Фаулера второго порядка	5
ГЛАВА II. Асимптотическое поведение решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями, в некотором смысле близкими к степенным	9
Глава III. Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих в правой части производную неизвестной функции.	15
Глава IV. Основные результаты.	15
ВЫВОДЫ	40
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	41

ВВЕДЕНИЕ

Одно из важных направлений в теории нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений порождено исследованиями уравнений типа Эмдена-Фаулера, применяемых во многих областях естествознания, в том числе ядерной физике, газовой динамике, механике жидкости и релятивистской механике. Исследования, касающиеся асимптотического поведения решений таких уравнений, послужили фундаментом для получения в последние десятилетия достаточного большого числа результатов о поведении решений нелинейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений общего вида. Здесь особо следует отметить результаты, изложенные в монографии И.Т. Кигурадзе и Т.А. Чантурия, а также в работах А.В. Костина и В.М. Евтухова.

Практических приложений для обобщенного уравнения Эмдена-Фаулера известно очень много. Однако, в большинстве случаев наличие степенной нелинейности являлось следствием рассмотрения идеализированной модели некоторого реального процесса. В связи с уточнениями моделей возрос интерес к уравнениям с нелинейностями, отличными от степенных.

В работах В. М. Евтухова, М. А. Белозеровой было детально исследовано уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y) \varphi_1(y'), \quad (1)$$

в котором $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ ($-\infty < a < \omega \leq +\infty$) — непрерывная функция, $\varphi_i : \Delta_i \rightarrow]0, +\infty[$ ($i = 0, 1$, Δ_i — односторонние окрестности либо точки 0, либо $\pm\infty$) — дважды непрерывно дифференцируемые правильно меняющиеся при стремлении аргумента к особой точке функции.

Был введен следующий класс решений этого уравнения.

Решение y уравнения (1) будем называть $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -решением, если

$$y^{(i)} : [t_0, \omega[\rightarrow \Delta_{Y_i}, \quad (t_0 \geq a) \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i, \quad (i = 0, 1), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0 \quad (2)$$

Для выделенного класса $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -решений уравнения (1) разработана методика исследования асимптотического поведения при $t \uparrow \omega$ каждого из четырех возможных типов таких решений.

При $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ установлены неявные асимптотические формулы при $t \uparrow \omega$ для $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -решений уравнения (1) и их производных первого порядка, а также получены необходимые и достаточные условия существования таких решений.

Однако в особых случаях $\lambda_0 \in \{0, \pm\infty\}$ приходилось накладывать дополнительных ограничения на функции φ_0, φ_1 .

Достаточно важный для изучения класс $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$ -решений уравнения (3.1) был исследован лишь для случаев, когда функция φ_1 удовлетворяет так называемому условию S . В настоящей работе получены результаты для случаев, когда φ_1 этому условию не удовлетворяет.

Выводы

В работе получены:

1. Необходимые и достаточные условия существования $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$ -решений уравнения (4.1);
2. Неявные асимптотические формулы при $t \uparrow \omega$ для таких решений и их производных.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Асташова И.В.* Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений : дис. докт. физ.-мат. наук: 01.01.02 [текст] / Асташова Ирина Викторовна. – Москва, 2008. – 240 с.
2. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений [текст] / Р. Беллман. – Пер. с англ. – М.: ИЛ, 1954. – 216 с.
3. *Білозерова М.О.* Асимптотичні зображення розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями у деякому сенсі близькими до степеневих [текст] / М.О. Білозерова // Науковий вісник Чернівецького університету. – Чернівці: "Рута". – 2008. – Вип.374. – С.34 - 43.
4. *Вишняков В. И.,* Распределение электростатического потенциала в сферически симметричной плазме [текст] / В.И. Вишняков, Г.С. Драган, В. М. Евтухов, С. В. Маргашук. – Теплофизика высоких температур. – 1987. – Т. 25, № 3. – 620 С. – Деп. в ВИНТИ 13.12.86, № 8791. – 17 с.
5. *Евтухов В.М.* Об одном нелинейном дифференциальном уравнении второго порядка [текст] / В.М. Евтухов // Докл. АН СССР. – 1977. – Т. 233, № 4. – С. 531 - 534.
6. *Евтухов В.М.* Асимптотическое поведение решений одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка типа Эмдена - Фаулера: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 [текст] / Евтухов Вячеслав Михайлович. – Одесса, 1980. – 119 с.
7. *Евтухов В.М.* Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст] / В.М. Евтухов // Сообщ. АН ГССР. – 1982. – Т. 106., № 3. – С. 473 - 476.
8. *Евтухов В.М.* Асимптотические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений второго порядка [текст] / В.М. Евтухов // Math. Nachr. – 1984. – Bd. 115. – P. 215 - 236.

9. *Евтухов В.М.* Асимптотические свойства монотонных решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений n -го порядка [текст]/ В.М. Евтухов // Докл. расшир. заседаний семинара Ин-та прикл. мат. им. И.Н. Векуа ТГУ. – 1988. – Т. 3., № 3. – С. 62 - 65.
10. *Евтухов В.М.* Асимптотка решений одного полулинейного дифференциального уравнения второго порядка [текст]/ В.М. Евтухов // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26, № 5. – С. 776 - 787.
11. *Евтухов В.М.* Асимптотические представления монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена - Фаулера n -го порядка [текст]/ В.М. Евтухов // Докл. АН России. – 1992. – Т. 324, № 2. – С. 258 - 260.
12. *Евтухов В.М.* Об одном классе монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения n -го порядка типа Эмдена - Фаулера [текст]/ В.М. Евтухов // Сообщ. АН Грузии. – 1992. – Т. 145, № 2. – С. 269 - 273.
13. *Евтухов В.М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: дис. докт. физ.-мат. наук: 01.01.02 [текст]/ Евтухов Вячеслав Михайлович. – Киев, 1998. – 295 с.
14. *Евтухов В.М.* Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст]/ В.М. Евтухов, Е.В. Шибанина // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т.33, №6.- С.858.
15. *Евтухов В.М.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений n -го порядка [текст]/ В.М. Евтухов // Укр. мат. конгресс. Сб. избранный трудов. – Киев, 2003. – С.15 - 33.
16. *Евтухов В.М.* Об исчезающих на бесконечности решениях вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений [текст]/ В.М. Евтухов // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 4. – С. 441 - 452.

17. *Евтухов В.М.* Асимптотика решений одного класса существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст]/ В.М. Евтухов, М.А. Белозерова // Дифференціальні рівняння та їх застосування: Міжнародна конференція, 6 - 9 червня 2005 р.: тези доповідей. – Київ, 2005. – С.9.
18. *Евтухов В.М.* Асимптотические представления решений существенно нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка [текст]/ В.М. Евтухов, М.А. Белозерова // Укр. Мат. журнал. – 2008. – Т.60, №3. – С. 310 - 331.
19. *Евтухов В.М.* Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст]/ В.М. Евтухов, Л.А. Кириллова // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т.41, №8. – С. 1053 - 1061.
20. *Изобов Н.А.* О продолжаемых и непродолжаемых решениях нелинейного дифференциального уравнения произвольного порядка [текст]/ Н.А. Изобов // Мат. заметки. – 1984. – Т. 35, № 6. – С. 829 - 839.
21. *Изобов Н.А.* О кнезеровских решениях [текст]/ Н.А. Изобов // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 4. – С. 581 - 588.
22. *Кигурадзе И.Т.* Об асимптотических свойствах решений уравнения $u'' + a(t)u^n = 0$ [текст]/ И.Т. Кигурадзе // Сообщ. АН ГССР. – 1963. – Т. 30, № 2. – С. 129 - 136.
23. *Кигурадзе И.Т.* О неколеблущихся решениях уравнения $u'' + a(t)|u|^n \operatorname{sign} u = 0$ [текст]/ И.Т. Кигурадзе // Сообщ. АН ГССР. – 1964. – Т. 35, № 1. – С. 15 - 22.
24. *Кигурадзе И.Т.* Асимптотические свойства решений одного нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена - Фаулера [текст]/ И.Т. Кигурадзе // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1965. – Т. 29, № 5. – С. 965 - 986.
25. *Кигурадзе И.Т.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений [текст]/ И.Т. Кигурадзе, Т.А. Чантурия. – М.: Наука, 1990. – 430 с.

26. *Кирилова Л.О.* Асимптотичні властивості розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку, які близькі до рівнянь типу Емдена-Фаулера [текст] / Л.О. Кирилова // Науковий вісник Чернівецького університету. – Чернівці: "Рута". – 2004. – Вип.228. – С.30 - 35.
27. *Кириллова Л.А.* Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст] / Л.А. Кириллова // Нелінійні коливання. – 2005. – Т.8, №1. – С.18 - 28.
28. *Клебанов Л.В.* Локальное поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений [текст] / Л.В. Клебанов // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 7, № 8. – С. 1393 - 1397.
29. *Клоков Ю.А.* Некоторые теоремы об ограниченности решений обыкновенных дифференциальных уравнений [текст] / Ю.А. Клоков // Успехи мат. наук. – 1958. – Т. 80, № 2. – С. 189 - 194.
30. *Кондратьев В.А.* О положительных решениях уравнения $y'' = p(x)y^k$ [текст] / В.А. Кондратьев, В.А. Никишин // В кн.: Некоторые вопросы качественной теории дифференциальных уравнений и теории управления движением. – Саранск, 1980. – С. 134 - 141.
31. *Кондратьев В.А.* О некоторых асимптотических свойствах решений уравнений типа Эмдена - Фаулера [текст] / В.А. Кондратьев, В.С. Самовол // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17, № 4. – С. 749 - 750.
32. *Костин А.В.* Устойчивость и асимптотика почти треугольных систем: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Костин Александр Васильевич. – Киев, 1962. – 108 с.
33. *Костин А.В.* К вопросу о существовании у систем обыкновенных дифференциальных уравнений ограниченных частных решений, стремящихся к нулю при $t \rightarrow +\infty$ / А.В. Костин // Дифференц. уравнения. – 1965. – Т. 1, № 5. – С. 585 - 604.
34. *Костин А.В.* Об асимптотике продолжаемых решений уравнения типа Эмдена - Фаулера [текст] / А.В. Костин // Докл. АН СССР. – 1971. – Т. 200, № 1. – С. 28 - 31.

35. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения [текст]/ Дж. Сансоне. – Пер. с итал. – М.: ИЛ, 1954. – Т. 2. – 415 с.
36. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции [текст]/ Е. Сенета. – М.: Наука, 1985. – 141с.
37. *Atkinson F.V.* On second - order non - linear oscillations [text]/ F.V. Atkinson // Pasif. J. Math. – 1955. – V. 5, № 1. – P. 643 - 647.
38. *Belohorec Š.* Neoscilatorcke riesenia istej nelinearnej differencialnej rovnice druheho radu [text]/ Š. Belohorec // Mat. Fuz. Cas. – 1962. – T. 12, № 4. – S. 253 - 262.
39. *Belohorec Š.* On some properties of the equation $y''(x) + f(x)y^\alpha(x) = 0$, $0 < \alpha < 1$ [text]/ Š. Belohorec // Math. Cas. – 1967. – T. 17, № 1. – S. 10 - 19.
40. *Evtukhov V.M.* Asymptotic representations of solutions of ordinary differential equations of n -th order [text]/ V.M. Evtukhov // Mem. Differential Equations Math. Phys. Tbilisi. – 2001. – 24, № 1–4. – P. 140 - 145.
41. *Evtukhov V.M.* Asymptotic representations for unbounded solutions of second order nonlinear differential equations close to equations of Emden-Fowler type [text]/ V.M. Evtukhov, L.A. Kirillova // Mem. Differential Equations Math. Phys. - Tbilisi: Georgian academy of sciences. – 2003. – V.30. – P.153 - 158.
42. *Evtukhov V.M.* Nonlinear Poisson–Boltzmann equation in spherical symmetry [text]/ V.M. Evtukhov, V.I. Vishnyakov , G.S. Dragan // Physical Review. – 2007. – E 76, №3. – P. 1 - 5.
43. *Emden R.* Gaskugeln Anwendungen der mechanischen Warmentheorie auf Kosmologie metheorologische Probleme [text]/ R. Emden // Leipzig. – 1907.
44. *Fowler R.H.* The form near infinity of real continuous solutions of a certain differential equation of the second order [text]/ R.H. Fowler // Quart. J. Pure Appl. Math. – 1914. – V. 45. – P. 289 - 350.

45. *Fowler R.H.* The solutions of Emden's and similar differential equations [text]/ R.H. Fowler // Month. Notices. Roy. Astr. Soc. – 1930. – V. 91. – P. 63 - 91.
46. *Fowler R.H.* Further studies of Emden's and similar differential equations [text]/ R.H. Fowler // Quart. J. Math. – 1931. – V. 2, № 2. – P. 259 - 288.
47. *Karamata J.* Sur certains "Tauberian theorems" de M. M. Hardy et Littlewood [text]/ J. Karamata // Mathematica (Cluj) – 1930. – V. 3. – P. 33 - 48.
48. *Kiguradze I.T.* On asymptotic behavior of solution of non-linear non-autonomous ordinary differential equation [text]/ I.T. Kiguradze // Qual. Theory Differ. Equations. V. 1. – Amsterdam e. a. – 1981. – P. 507 - 554.
49. *Maric V.* Regular variation and asymptotic properties of solutions of nonlinear differential equations [text]/ V. Maric, M. Tomic // Publ. Inst. Math. – 1977. – V. 21, № 35 – P. 119 - 129.
50. *Maric V.* Asymptotics of solutions of generalised Thomas-Fermi equation [text]/ V. Maric, M. Tomic // J. Differ. Equations – 1980. – V. 35 – P. 36 - 44.
51. *Taliaferro S.D.* Asymptotic behavior of solutions of $y'' = \Phi(t)f(y)$ [text]/ S.D. Taliaferro // SIAM J. Math. Anal. – 1981. – V. 12. – P. 853 - 865.
52. *Thomas L.* The calculation of atomic fields [text]/ L. Thomas // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1927. – V. 3. – P. 542 - 548.
53. *Wong J.S.W.* Some stability conditions for $x'' + \alpha(t)f(x) = 0$ [text]/ J.S.W. Wong // SIAM. J. Appl. Math. – 1967. – V. 15, № 4. – P. 889 - 892.
54. *Wong J.S.W.* On the generalized Emden - Fowler equation [text]/ J.S.W. Wong // SIAM. Rev. – 1975. – V. 17, № 2. – P. 339 - 360.
55. *Evtukhov V.M., Samojlenko A. M.* Conditions for the existence of vanishing in the singular point solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations// Ukr. Math. Journal, 2010, T 62, N2, p. 52-80.