Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2010. – Т.15, вип. 18. – С. 102–111

УДК 517.926

С. А. Щёголев*, В. А. Ситник**
*Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова
**Одесский национальный политехнический университет

О СУЩЕСТВОВАНИИ И УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА КВАЗИЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Щоголев С. А., Ситник В. А. Про існування та стійкість розв'язків спеціального виду квазілінійного диференціального рівняння у банаховому просторі. Вивчається квазілінійне диференціальне рівняння у банаховому просторі. Для цього рівняння отримано умови існування та стійкості часткового розв'язку, зображуваного у вигляді ряду Фур'є з повільно змінними коефіцієнтами та частотою.
Ключові слова: многовид, повільно змінний, диференціальний, ряд Фур'є.

Щёголев С. А., Ситник В. А. О существовании и устойчивости решений специального вида квазилинейного дифференциального уравнения в банаховом пространстве. Изучается квазилинейное дифференциальное уравнение в банаховом пространстве. Для этого уравнения получены условия существования и устойчивости частного решения, представимого в виде ряда Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотой.
Ключевые слова: многообразие, медленно меняющийся, дифференциальный, ряд Фурье.

Shchogolev S. A., Sitnik V. A. On existence and stability of the solutions of special type of the quasilinear differential equation at the Banakh space. The quasilinear differential equation at the Banakh space is studied. The condition of existence and stability of particular solution which represented by a Fourier-serie with slowly varying coefficients and frequency are obtained.
Key words: Banakh space, slowly varying, differential equation, Fourier series.

1. Введение. Дифференциальным уравнениям в банаховых пространствах посвящены многочисленные исследования [1-4]. Целью данной статьи является получение аналогов для случая банаховых пространств результатов работ [5-7], касающихся вопросов существования у систем дифференциальных уравнений частных решений, представимых абсолютно и равномерно сходящимися рядами Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотами. По сравнению с работой [8] в данной работе за счёт изменения метода доказательства получены менее жёсткие условия существования решений указанного типа, а также исследован вопрос об их устойчивости.

2. Основные обозначения и определения.

Пусть B — банахово пространство. Обозначим:

$$G = \left\{t, \varepsilon : \ t \in \mathbf{R}, \ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \ \varepsilon_0 \in \mathbf{R}^+\right\}$$

Определение 1. *Скажем, что вектор-функция $f : G \to B$ принадлежит классу $\widehat{S}_m$ $(m \in \mathbf{N} \cup \{0\})$, если:*

1) $f \in C^m(\mathbf{R})$ *по* t,
2) $d^k f/dt^k = \varepsilon^k f_k^*(t,\varepsilon)$, $\sup\limits_G \|f_k^*\| < +\infty$ $(0 \le k \le m)$, *где* $\|\cdot\|$ *— норма в банаховом пространстве* B, *а производная* $\frac{df(t,\varepsilon)}{dt}$ *функции* $f(t,\varepsilon)$ *со значениями в* B *понимается в смысле следующего определения [9]:*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\| \frac{f(t+\Delta t,\varepsilon) - f(t,\varepsilon)}{\Delta t} - \frac{df(t,\varepsilon)}{dt} \right\| = 0.$$

Определение 2. С*кажем, що вектор-функция* $f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))$ *принадлежит классу* $\widehat{B}_m$ $(m \in \mathbf{N} \cup \{0\})$, *если:*
1)

$$f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t,\varepsilon)\exp(in\theta(t,\varepsilon)),\ f_n \in \widehat{S}_m,\ \frac{d^k f_n}{dt^k} = \varepsilon^k f_{nk}(t,\varepsilon),$$

$$\|f\|_{\widehat{B}_m} \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_G \|f_{nk}\| < +\infty,$$

2) скалярная функция $\theta(t,\varepsilon)$ *имеет вид:*

$$\theta(t,\varepsilon) = \int_0^t \varphi(\tau,\varepsilon)d\tau,\ \varphi : G \to \mathbf{R}^+,\ \inf_G \varphi = \varphi_0 > 0,\ \varphi \in S_m.$$

3. Постановка задачи. Рассматривается следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) + \mu X(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon),x), \tag{1}$$

$t,\varepsilon \in G$, $A(t,\varepsilon)$ — оператор-функция со значеннями в $[B \to B]$, $f \in \widehat{B}_m$, $x \in D \subset$ $\subset B$, где D — некоторая замкнутая ограниченная область банахового пространства B; X — вектор-функция со значениями в B, $\mu \in \mathbf{R}^+$.

Целью статьи является установление условий, при которых уравнение (1) имеет частные решения класса $\widehat{B}_m$.

4. Некоторые вспомогательные утверждения.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим соответствующее линейное неоднородное уравнение:

$$\frac{dx_0}{dt} = A(t,\varepsilon)x_0 + f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)). \tag{2}$$

Лемма 1. *Пусть уравнение (2) удовлетворяет следующим условиям:*
1). $A(t,\varepsilon) \in C^m(G)$ *по* t,

$$\frac{d^k A(t,\varepsilon)}{dt^k} = \varepsilon^k \widetilde{A}_k(t,\varepsilon)\ (k = \overline{0,m}) \qquad \max_{0 \le k \le m} \sup_G \|\widetilde{A}_k(t,\varepsilon)\| = A < +\infty,$$

где $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|Ax\|$.

2). Однородное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = A(t, \varepsilon)y \tag{3}$$

является экспоненциально дихотомичным на $\mathbf{R}$*, то есть любое решение* $y(t, \varepsilon)$ *уравнения (3) представимо в виде*

$$y(t, \varepsilon) = y_1(t, \varepsilon) + y_2(t, \varepsilon),$$

причём существуют положительные постоянные $K_1, K_2, \gamma_1, \gamma_2$*, не зависящие от* ε*, такие, что справедливы оценки:*

$$\|y_1(t, \varepsilon)\| \leq K_1 \exp(-\gamma_1(t - \tau))\|y_1(\tau, \varepsilon)\|, \ -\infty < \tau \leq t < +\infty,$$

$$\|y_2(t, \varepsilon)\| \leq K_2 \exp(\gamma_2(t - \tau))\|y_2(\tau, \varepsilon)\|, \ -\infty < t \leq \tau < +\infty.$$

Тогда уравнение (2) имеет единственное частное решение $x_0(t, \varepsilon, \theta) \in \widehat{B}_m$*, причём* $\exists\ K_0 \in]0; +\infty[$*, такое, что*

$$\|x_0(t, \varepsilon, \theta)\|_{\widehat{B}_m} \leq K_0 \|f(t, \varepsilon, \theta)\|_{\widehat{B}_m}.$$

Доказательство. Введем оператор Грина однородного уравнения (3), то есть оператор $G(t, \tau, \varepsilon)$, определяемый вследствие условия 2) соотношениями:
1) при $t \neq \tau$:

$$\frac{\partial G(t, \tau, \varepsilon)}{\partial t} = A(t, \varepsilon) G(t, \tau, \varepsilon), \quad \frac{\partial G(t, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = -G(t, \tau, \varepsilon) A(\tau, \varepsilon),$$

2)

$$G(\tau + 0, \tau, \varepsilon) - G(\tau - 0, \tau, \varepsilon) = E, \ G(t, t + 0, \varepsilon) - G(t, t - 0, \varepsilon) = -E$$

(E - единичний оператор),
3)

$$\|G(t, \tau, \varepsilon)\| \leq M \cdot \exp(-\gamma |t - \tau|), \tag{4}$$

где M, γ — положительные постоянные, не зависящие от t, τ, ε.

Решение класса $\widehat{B}_m$ уравнения (2) ищем в виде:

$$x_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{0n}(t, \varepsilon) \exp(in\theta(t, \varepsilon)). \tag{5}$$

Подставляя выражение (5) в уравнение (2) и приравнивая коэффициенты при $\exp(in\theta)$, получим следующие уравнения для определения коэффициентов x_{0n}:

$$\frac{dx_{0n}}{dt} = A_n(t, \varepsilon) x_{0n} + f_n(t, \varepsilon), \ n \in \mathbf{Z}, \tag{6}$$

где $A_n(t, \varepsilon) = A(t, \varepsilon) - in\varphi(t, \varepsilon) E$,

$$f_n(t, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t, \varepsilon, \theta) \exp(-in\theta) d\theta.$$

Несложно показать, что однородное уравнение:

$$\frac{dy_n}{dt} = A_n(t,\varepsilon)y_n$$

имеет оператор Грина, задаваемый формулой:

$$G_n(t,\tau,\varepsilon) = G(t,\tau,\varepsilon)\exp\left(-in\int\limits_{\tau}^{t}\varphi(\xi,\varepsilon)d\xi\right).$$

Действительно, на основании 1) имеем при $t \neq \tau$:

$$\frac{\partial G_n}{\partial t} = \frac{\partial G(t,\tau)}{\partial t}\exp\left(-in\int\limits_{\tau}^{t}\varphi(\xi,\varepsilon)d\xi\right) - in\varphi(t,\varepsilon)G\exp\left(-in\int\limits_{\tau}^{t}\varphi(\xi,\varepsilon)d\xi\right) =$$

$$= A(t,\varepsilon)G\exp\left(-in\int\limits_{\tau}^{t}\varphi(\xi,\varepsilon)d\xi\right) - in\varphi(t,\varepsilon)\exp\left(-in\int\limits_{\tau}^{t}\varphi(\xi,\varepsilon)d\xi\right) =$$

$$= A_n(t,\varepsilon)G_n.$$

Аналогично:

$$\frac{\partial G_n}{\partial \tau} = -G_n A_n(\tau,\varepsilon).$$

Далее на основании 2):

$$G_n(\tau+0,\tau,\varepsilon) - G_n(\tau-0,\tau,\varepsilon) = G(\tau+0,\tau,\varepsilon) - G(\tau-0,\tau,\varepsilon) = E, \qquad (7)$$

$$G_n(t,t+0,\varepsilon) - G_n(t,t-0,\varepsilon) = G(t,t+0,\varepsilon) - G(t,t-0,\varepsilon) = -E. \qquad (8)$$

А вследствие 3):

$$\|G_n(t,\tau,\varepsilon)\| = \|G(t,\tau,\varepsilon)\| \leq M \cdot \exp(-\gamma|t-\tau|). \qquad (9)$$

Рассмотрим следующее решение уравнения (6):

$$x_{0n}(t,\varepsilon) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_n(t,\tau,\varepsilon)f_n(\tau,\varepsilon)d\tau.$$

При $m = 0$ на основании (9) получим оценку:

$$\sup_G \|x_{0n}\| \leq \frac{2M}{\gamma}\sup_G \|f_n\|.$$

При $m \geq 1$ рассмотрим отдельно два случая:
А. $|n| \leq A\varphi_0^{-1}$.

Поскольку $x_{0n}(t,\varepsilon)$ единственное (вследствие экспоненциальной дихотомии) ограниченное решение уравнения (5), то $\forall\ t,\varepsilon \in G$:

$$\frac{dx_{0n}}{dt} \equiv A_n(t,\varepsilon)x_{0n}(t,\varepsilon) + f_n(t,\varepsilon). \qquad (10)$$

Правая часть этого тождества ограничена в G при рассматриваемых значениях n, следовательно, $dx_{0n}(t,\varepsilon)/dt$ также ограничена в G. Следовательно, при указанных значениях n имеем право продифференцировать (10):

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}_{0n}(t,\varepsilon)) = A_n(t,\varepsilon)\dot{x}_{0n}(t,\varepsilon) + \frac{dA_n(t,\varepsilon)}{dt}x_{0n} + \frac{df_n(t,\varepsilon)}{dt}.$$

Таким образом $\dot{x}_{0n}(t,\varepsilon)$ является единственным ограниченным решением уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = A_n(t,\varepsilon)x + \varepsilon g_n(t,\varepsilon),$$

где

$$g_n(t,\varepsilon) = \left(\widetilde{A}_1(t,\varepsilon) - in\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varphi(t,\varepsilon)}{dt}\ E\right)x_{0n} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{df_n(t,\varepsilon)}{dt} \in \widehat{S}_{m-1}.$$

Поэтому $\dot{x}_{0n}(t,\varepsilon) = \varepsilon\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_n(t,\tau,\varepsilon)g_n(\tau,\varepsilon)d\tau$, откуда получаем:

$$\frac{dx_{0n}}{dt} = \varepsilon x_{0n1}(t,\varepsilon),$$

где $x_{0n1}(t,\varepsilon) \in \widehat{S}_{m-1}$.

Предположим по индукции, что для некоторого l $(0 < l < m)$ выполнено: $\forall\nu = \overline{0,l}$:

$$\frac{d^\nu x_{0n}}{dt^\nu} = \varepsilon^\nu x_{0n\nu}(t,\varepsilon),$$

где $x_{0n\nu} \in \widehat{S}_{m-\nu}$, и покажем, что

$$\frac{d^{l+1}x_{0n}}{dt^{l+1}} = \varepsilon^{l+1}x_{0n,l+1}(t,\varepsilon),$$

где $x_{0n,l+1} \in \widehat{S}_{m-l-1}$. Действительно, дифференцируя $l+1$ раз тождество (9), получим:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d^{l+1}x_{0n}}{dt^{l+1}}\right) = \sum_{k=0}^{l+1} C_{l+1}^k \frac{d^k A_n(t,\varepsilon)}{dt^k}\cdot\frac{d^{l+1-k}x_{0n}(t,\varepsilon)}{dt^{l+1-k}} + \frac{d^{l+1}f_n(t,\varepsilon)}{dt^{l+1}} =$$

$$= A_n(t,\varepsilon)\frac{d^{l+1}x_{0n}}{dt^{l+1}} + \sum_{k=1}^{l+1} C_{l+1}^k \frac{d^k A_n(t,\varepsilon)}{dt^k}\cdot\frac{d^{l+1-k}x_{0n}(t,\varepsilon)}{dt^{l+1-k}} +$$

$$+\frac{d^{l+1}f_n(t,\varepsilon)}{dt^{l+1}} = A_n(t,\varepsilon)\frac{d^{l+1}x_{0n}}{dt^{l+1}} + \varepsilon^{l+1}g_{nl}(t,\varepsilon),$$

где $g_{nl}(t,\varepsilon) \in \widehat{S}_{m-l-1}$. То есть $d^{l+1}x_{0n}/dt^{l+1}$ является единственным ограниченным решением уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = A_n(t,\varepsilon)x + \varepsilon^{l+1}g_{nl}(t,\varepsilon).$$

А тогда:

$$\frac{d^{l+1}x_{0n}}{dt^{l+1}} = \varepsilon^{l+1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_n(t,\tau,\varepsilon)g_{nl}(\tau,\varepsilon)d\tau,$$

откуда и вытекает требуемое.

Б. $|n| > A\varphi_0^{-1}$. Теперь ситуация усложняется тем, що необходима не только ограниченность $x_{0nk} = \varepsilon^{-k}d^k x_{0n}/dt^k$ $(k=\overline{0,m})$ в G, а и принадлежность решения $x_0(t,\varepsilon,\theta)$ классу $\widehat{B}_m$, для чего нужно выполнение условия:

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sup_G \|x_{0nk}(t,\varepsilon)\| < +\infty.$$

Воспользуемся представлением:

$$x_{0n} = I_{1n} + I_{2n},$$

где

$$I_{1n} = \int\limits_{-\infty}^{t} G_n(t,\tau,\varepsilon)f_n(\tau,\varepsilon)d\tau,\ I_{2n} = \int\limits_{t}^{+\infty} G_n(t,\tau,\varepsilon)f_n(\tau,\varepsilon)d\tau.$$

Очевидно, что при рассматриваемых значениях n оператор $A_n(t,\varepsilon) =$ $= A(t,\varepsilon) - in\varphi(t,\varepsilon)E$ имеет обратный $A_n^{-1}(t,\varepsilon)$, причём:

$$\begin{aligned}&\|A_n^{-1}(t,\varepsilon)\| = \left\|\left(-in\varphi(t,\varepsilon)\left(E - \tfrac{1}{in\varphi(t,\varepsilon)}A(t,\varepsilon)\right)^{-1}\right)\right\| \le\\ &\le \frac{1}{|n|\varphi_0}\left\|\left(E - \frac{1}{in\varphi(t,\varepsilon)}A(t,\varepsilon)\right)^{-1}\right\| = \frac{1}{|n|\varphi_0}\left\|\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{in\varphi(t,\varepsilon)}A(t,\varepsilon)\right)^k\right\| \le\\ &\le \frac{1}{|n|\varphi_0}\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{A}{|n|\varphi_0}\right)^k = \frac{1}{|n|\varphi_0 - A}.\end{aligned} \tag{11}$$

Для каждого из интегралов I_{1n}, I_{2n} применим l-кратное интегрирование по частям $(l=\overline{1,m})$, вследствие чего получим:

$$I_{1n} = \int\limits_{-\infty}^{t} G_n(t,\tau,\varepsilon)A_n(\tau,\varepsilon)A_n^{-1}(\tau,\varepsilon)f_n(\tau,\varepsilon)d\tau =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\partial G_n(t,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}A_n^{-1}(\tau,\varepsilon)f_n(\tau,\varepsilon)d\tau =$$

$$= -G_n(t,t-0,\varepsilon)A_n^{-1}f_n(t,\varepsilon)\sum_{k=0}^{l-1}D_n^k(f_n(t,\varepsilon)) + \int\limits_{-\infty}^{t} G_n(t,\tau,\varepsilon)D_n^l(f_n(\tau,\varepsilon))d\tau,$$

где

$$D_n(u) = \frac{d}{dt}\left(A_n^{-1}(t,\varepsilon)u(t,\varepsilon)\right),\ D_n^k(u) = D_n(D_n^{k-1}(u)).$$

Аналогично:

$$I_{2n} = G_n(t, t+0, \varepsilon) A_n^{-1}(t, \varepsilon) \sum_{k=0}^{l-1} D_n^k(f_n(t, \varepsilon)) + \int\limits_t^{+\infty} G_n(t, \tau, \varepsilon) D_n^l(f_n(\tau, \varepsilon)) d\tau.$$

Учитывая теперь соотношения (7), (8), окончательно получим:

$$x_{0n} = -A_n^{-1}(t, \varepsilon) \sum_{k-0}^{s-1} D_n^k(f_n(t, \varepsilon)) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_n(t, \tau, \varepsilon) D_n^s(f_n(\tau, \varepsilon)) d\tau. \quad (12)$$

Действуя на x_{0n} оператором $D_n^{l-1}\left(\frac{d}{dt}\right)$, получим:

$$D_n^{l-1}\left(\frac{dx_{0n}}{dt}\right) = A_n(t, \varepsilon) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_n(t, \tau, \varepsilon) D_n^l(f_n(\tau, \varepsilon)) d\tau.$$

Нетрудно видеть, что вследствие (11) $D_n^l(f_n(t, \varepsilon))$ может быть записан в виде:

$$D_n^l(f_n(t, \varepsilon)) = \frac{\varepsilon^l}{n^l}\, u_{nl}(t, \varepsilon),$$

где

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_G \|u_{nl}(t, \varepsilon)\| < +\infty.$$

Поэтому

$$D_n^{l-1}\left(\frac{dx_{0n}}{dt}\right) = \frac{\varepsilon^l}{n^{l-1}} \widetilde{u}_{nl}(t, \varepsilon),$$

где

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_G \|\widetilde{u}_{nl}(t, \varepsilon)\| < +\infty.$$

Из этого неравенства, расписывая $D_n^{l-1}\left(\frac{dx_{0n}}{dt}\right)$ и учитывая, что $\forall \nu = \overline{0, l-1}$:

$$\frac{d^\nu x_{0n}}{dt^\nu} = \varepsilon^\nu x_{0n\nu}(t, \varepsilon), \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_G \|x_{0n\nu}(t, \varepsilon)\| < +\infty,$$

получим, что

$$\frac{d^l x_{0n}}{dt^l} = \varepsilon^l x_{0nl}(t, \varepsilon), \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_G \|x_{0nl}(t, \varepsilon)\| < +\infty.$$

С учётом (12) отсюда вытекает, что уравнение (2) имеет единственное частное решение $x_0(t, \varepsilon, \theta)$ класса $\widehat{B}_m$, причём существует $K_0 \in]0, +\infty[$, не зависящая от функции f такая, что:

$$\|x_0\|_{\widehat{B}_m} \leq K_0 \|f\|_{\widehat{B}_m}. \quad (13)$$

Лемма доказана.

Замечание 1. *Независимость постоянных $K_1, K_2, \gamma_1, \gamma_2$ от параметра ε в условии 2) леммы выполняется, вообще говоря, не всегда. Некоторые достаточные условия этого приведены, например, в [10].*

5. Основные результаты.

Введем область

$$\Omega = \left\{ x \in \widehat{B}_m : \ \|x - x_0\|_{\widehat{B}_m} \leq d, \ 0 < d < +\infty \right\}.$$

Теорема 1. *Пусть уравнение (1) такое, что*
1) при $\mu = 0$ выполнены условия леммы 1,
2) вектор-функция $X(t, \varepsilon, \theta, x)$ непрерывна по x, и если $x \in \widehat{B}_m$, то $X(t, \varepsilon, \theta, x)$ также из класса $\widehat{B}_m$,
3) $\exists\ L(d) \in]0, +\infty[\colon\ \forall\ x_1, x_2 \in \Omega$ выполнено неравенство:

$$\|X(t, \varepsilon, \theta, x_2) - X(t, \varepsilon, \theta, x_1)\|_{\widehat{B}_m} \leq L(d) \|x_2 - x_1\|_{\widehat{B}_m}.$$

Тогда для достаточно малых значений параметра μ уравнение (1) имеет в области Ω единственное частное решение $x(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon), \mu)$ класса $\widehat{B}_m$.

Доказательство. Решение класса $\widehat{B}_m$ уравнения (1) будем искать методом последовательных приближений, полагая в качестве начального $x_0(t, \varepsilon, \theta)$, а последующие определив как решения класса $\widehat{B}_m$ линейних уравнений:

$$\frac{dx_{j+1}}{dt} = A(t, \varepsilon) x_{j+1} + f(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon)) + \mu X(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon), x_j), \ j = 0, 1, 2, \ldots \tag{14}$$

Обозначим:

$$M(d) = \sup_{x \in \Omega} \|X(t, \varepsilon, \theta, x)\|_{\widehat{B}_m}.$$

Используя методику принципа сжатых отображений [9], на основании неравенства (13) несложно показать, что при выполнении условия

$$\mu K M(d) \leq d_0 < d \tag{15}$$

все приближения x_j $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ остаются внутри области Ω. А при выполнении условия

$$\mu K L(d) < 1 \tag{16}$$

последовательность $\{x_j\}_{j=1,2,\ldots}$ сходится по норме $\|\cdot\|_{\widehat{B}_m}$ к решению $x(t, \varepsilon, \theta, \mu)$ класса $\widehat{B}_m$ уравнения (1), причём $x(t, \varepsilon, \theta, 0) = x_0(t, \varepsilon, \theta)$.

Очевидно, что неравенства (15), (16) выполнены при достаточно малых значениях параметра μ.

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости решения $\widetilde{x}$ класса $\widehat{B}_m$ уравнения (1). Введём область:

$$\Omega_1 = \left\{ x \in B : \ \|x - \widetilde{x}\| \leq h \in \mathbf{R}^+ \right\}.$$

Теорема 2. *Пусть в области Ω_1 уравнение (1) удовлетворяет следующим условиям:*
1) оператор-функция $X(t,\varepsilon,\theta,x)$ дифференцируема по x в смысле Фреше,
2) $\left\|\frac{\partial X(t,\varepsilon,\theta,x)}{\partial x}\right\| \leq L_1$,
3) выполнено неравенство: $\gamma - ML_1 > 0$, где константы M,γ определены неравенством (4).

Тогда решение $\widetilde{x}(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ класса $\widehat{B}_m$ уравнения (1) экспоненциально устойчиво в положительном направлении.

Доказательство. Произведём в уравнении (1) подстановку

$$y = x - \widetilde{x}. \tag{17}$$

Тогда если $x \in \Omega_1$, то $||y|| \leq h$. Относительно y получим уравнение:

$$\frac{dy}{dt} = A(t,\varepsilon)y + \mu\frac{\partial X(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon),\widetilde{x}+\nu y)}{\partial x}\,y, \tag{18}$$

$0 < \nu < 1$. Очевидно, что $\widetilde{x} + \nu y \in \Omega_1$. Поэтому:

$$\left\|\frac{\partial X(t,\varepsilon,\theta,\widetilde{x}+\nu y)}{\partial x}\,y\right\| \leq \left\|\frac{\partial X(t,\varepsilon,\theta,\widetilde{x}+\nu y)}{\partial x}\right\| \cdot ||y|| \leq L_1||y||.$$

Таким образом уравнение (18) удовлетворяет всем условиям теоремы об устойчивости нулевого решения нелинейного уравнения с нестационарной главной частью в банаховом пространстве [1, с. 414]. В соответствии с этой теоремой условие 3) гарантирует экспоненциальную устойчивость решения класса $\widehat{B}_m$ уравнения (1).

Теорема 2 доказана.

1. **Далецкий Ю. Л.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве [текст] / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. – М. : Наука, 1970. – 536 с.

2. **Массера Х.** Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства [текст] / Х. Массера, Х. Шеффер. – М. : Мир, 1970. – 456 с.

3. **Митропольский Ю. А.** Интегральные многообразия в нелинейной механике [текст] / Ю. А. Митропольский, О. Б. Лыкова. – М. : Наука, 1973. – 512 с.

4. **Бойчук А. А.** Ограниченные решения линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве Лыкова [текст] / А. А. Бойчук, А. А. Покутный // Нелін. колив. – 2006. – Т. 9, № 1. – С. 3–14.

5. **Костин А. В.** Об устойчивости колебаний, представимых рядами Фурье с медленно меняющимися параметрами [текст] / А. В. Костин, С. А. Щёголев // Дифференц. уравн. – 2008. – Т. 44, № 1. – С. 45–51.

6. **Щёголев С. А.** О решениях в виде рядов Фурье с медленно меняющимися параметрами квазилинейных дифференциальных систем, приводящихся к почти треугольным [текст] / С. А. Щёголев // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. – Чернівці: Прут, 2006. – Вип. 14. – С. 267–273.

7. **Щёголев С. А.** Об одном классе решений счётной квазилинейной системы дифференциальных уравнений, содержащих медленно меняющиеся параметры [текст] / С. А. Щёголев // Укр. матем. журн. – 1998. – Т. 50, № 8. – С. 1121–1128.

8. **Щёголев С. А.** Об одном классе решений дифференциального уравнения в банаховом пространстве [текст] / С. А. Щёголев // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. – К. : ІМ НАНУ, 2003. – Вип. 10. – С. 264–270.

9. **Треногин В. А.** Функциональный анализ [текст] / В. А. Треногин. – М.:Наука, 1980. – 496 с.

10. **Митропольский Ю. А.** Исследование дихотомии линейных систем с помощью функций Ляпунова [текст] / Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, В. Л. Кулик. – К.: Наук. думка, 1990. – 272 с.