Вiсник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. i мех. – 2011. – Т. 16, вип. 16. – С. 87–94

УДК 511.33

Саттар Абд Кибрат
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

РАСШИРЕННАЯ ТЕОРЕМА ВИНОГРАДОВА

Кiбрат С. А. Розширена теорема Виноградова. В роботi доведено, що тригонометрична сума по цiлим гаусовим числам з фiксованим значенням кiлькостi простих дiльникiв є нескiнченно малою вiдносно кiлькостi таких чисел. Цей результат можна розглядати як розширену теорему Виноградова.
Ключовi слова: гаусовi простi числа, тригонометрична сума, асимптотична формула.

Кибрат С. А. Расширенная теорема Виноградова. В работе доказывается, что тригонометрическая сумма по целым гауссовым числам с фиксированным значением количества простых делителей есть бесконечно малая величина относительно количества таких чисел. Этот результат можно рассматривать как расширенная теорема Виноградова.
Ключевые слова: гауссовы простые числа, тригонометрическая сумма, асимптотическая формула.

Kibrat S. A. Extended Vinogradov theorem. In work it is proved that the exponential sum on the Gaussian integers with the fixed value of an amount of the prime divisors is infinitesimal magnitude concerning an amount of such numbers. This result can be considered as the extended Vinogradov theorem.
Key words: gaussian prime numbers, exponential sum, asymptotic formula.

Знаменитая теорема И. М. Виноградова утверждает, что для любого иррационального Θ тригонометрическая сумма

$$\pi(x,\Theta) := \sum_{\substack{p\le x\\ p-\text{простое}}} e^{2\pi i\Theta p}$$

имеет оценку $o(\pi(x))$, (здесь $\pi(x)$ обозначает количество простых чисел на отрезке $[1,x]$.

Пусть $\omega(n)$ обозначает количество различных простых делителей n. Ясно, что $\omega(n)=1$ тогда и только тогда, когда n — простое число.

Дюпэн, Холл и Тененбаум [2] показали, что для любого иррационального Θ и всех $k \le (1-\varepsilon_0)\log\log x$, $0<\varepsilon_0<1$ справедлива оценка

$$\pi_k(x,\Theta) := \sum_{\substack{n\le x\\ \omega(n)=k}} e^{2\pi i\Theta n} = o(\pi_k(x)),$$

где $\pi_k(x)$ означает число натуральных чисел $n\le x$, для которых $\omega(n)=k$.

Очевидно, что при $k=1$ мы имеем результат Виноградова.

Нашей целью является доказательство аналогов теоремы Виноградова и результата Дюпэна, Холла, Тененбаума для тригонометрических сумм над $\mathbb{Z}[i]$.

Введем некоторые обозначения, которые мы будем использовать:

$N(\alpha)$ — норма $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$, т.е. $N(\alpha) = |\alpha|^2$;

$Sp(\alpha)$ — след α из $\mathbb{Q}(i)$ в $\mathbb{Q}$, $Sp(\alpha) = 2\Re\alpha$;

$\mathfrak{p}$ всегда обозначает простое гауссово число;

для $\Theta \in \mathbb{R}$ через $||\Theta||$ обозначают расстояние Θ до ближайшего целого числа;

$e(\alpha) = e^{2\pi i \Re\alpha}$, $exp(x) = e^x$ для $x \in \mathbb{R}$;

функции μ(функция Мёбиуса) и φ(функция Эйлера), Λ(функция Мангольдта) рассматриваются как аналоги классических арифметических функций;

штрих у суммы $\sum'$ или произведения $\prod'$ означает, что сумма или произведение берутся по неассоциированным значениям переменной.

Пусть Θ — иррациональное число. Тогда для любого $\tau > 1$, в силу неравенства Дирихле, найдётся рациональное $\frac{a}{g}$, $(a,g) = 1$, $g \le \tau$ такое, что

$$\left|\Theta - \frac{a}{g}\right| \le \frac{1}{g\tau} \le \frac{1}{g^2}. \qquad (1)$$

В последующем нам понадобится следующий аналог теоремы Давенпорта.

Лемма 1. *(Давенпорт [1]). Пусть* $1 < x_0 < x_1 < x$, $1 \le g \le x$, $(a,g) = 1$. *Тогда для любой ограниченной функции* $\lambda(\omega, x)$, $\omega \in \mathbb{Z}[i]$, *т.е.* $\lambda(\omega, x) \ll 1$ *для* $\forall \omega \in \mathbb{Z}[i]$, *имеем*

$$\sum_{0<N(\alpha)<x_1} \left| \sum_{N(\omega)\le \frac{x}{N(\alpha)}} \lambda(\omega, x) e\left(\frac{a}{g}\alpha\omega\right) \right| \ll x \left(\frac{1}{x_0} + \frac{x_1}{x} + \frac{1}{g} + \frac{g}{x}\right)^{\frac{1}{2}} (\log x)^2.$$

Это утверждение доказано в [1] для функции λ целого рационального аргумента, но метод доказательства дословно переносится на случай целых гауссовых чисел.

Пусть a, g — натуральные числа, $(a,g) = 1$, $h \in \mathbb{Z}[i]$. Рассмотрим следующую сумму

$$M_0\left(x, z, \frac{hq}{g}\right) := \sum_{N(\alpha)\le x} z^{N(\alpha)} e\left(\frac{ah\alpha}{g}\right).$$

В [4] была построена асимптотическая формула:

$$M_0\left(x, z, \frac{ha}{g}\right) = x\ell(z, g, h)(\log x)^{z-1} + O_{\delta,b}\left(x(\log x)^{\Re z - 2}(\log\log x)^5\right), \qquad (2)$$

где

$$\ell(z, g, h) = (1 - z) \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{Z}[i],\\ \beta|g}} \frac{z^{\omega(\beta)} \log N(\beta)}{N(\beta)} \cdot \frac{p(z, g) \cdot c_g(\beta)}{\overline{\varphi}(g)}$$

$$c_\gamma(\beta) := \sum_{\substack{\in\mathbb{Z}[i]\\(\alpha,\gamma)=1}} e\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right) \text{ — сумма Рамануджана.}$$

$$p(z,\gamma) = A(z){\prod}_{\mathfrak{p}|\gamma}{}' \left(1 - \tfrac{1}{N(\mathfrak{p})}\right),$$
$$A(z) = \tfrac{1}{\Gamma(z)}{\prod}_{\mathfrak{p}}{}' \left(1 - \tfrac{z}{N(\mathfrak{p})}\right)^{-1}\left(1 - \tfrac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)^{z},$$

$$p(z,\gamma),\ A(z) \text{ — аналитичны в круге } |z| \le 2 - \varepsilon_0,$$

$$\overline{\varphi}(\gamma) = N(\gamma)\prod_{\mathfrak{p}|\gamma}\left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right) \text{ — обобщённая функция Эйлера в } \mathbb{Z}[i].$$

Замечание 1. *Из выражения для $p(z,\gamma)$, $\gamma = g$ и оценок суммы Рамануджана (над кольцом $\mathbb{Z}[i]$) легко вывести неравенство*

$$(g\log g)^{-2} \ll |\ell(z,g,h)| \ll (\log\log g)^4.$$

Теперь мы в состоянии доказать следующую теорему. Пусть $0 < y \le 1$. Положим

$$T(x,y,\Theta) := \sum_{N(\alpha)\le x} y^{\omega\alpha}\left|M_0\left(\frac{x}{N(\alpha)}, y, \alpha\Theta\right)\right|.$$

Теорема 1. *Пусть* $\left|\Theta - \frac{a}{g}\right| \le \frac{(\log x)^{10}}{g^2}$, $(a,g) = 1$. *Тогда*

(i) $T(x,y,\Theta) \ll x(\log x)^{y-1}(\log\log x)^y$,
если $g > (\log x)^{11}$,

(ii) $T(x,y,\Theta) \ll x(\log x)^{2y-1}\left(\frac{\tau(g)^2}{\varphi(g)}(\log\log g)^2 + (logx)^{-\frac{y}{2}}\right)$,
если $g \le (\log x)^{11}$

(здесь $\tau(g)$ и $\varphi(g)$ рассматриваются как функции над $\mathbb{Z}[i]$), т. е.

$$\varphi(g) = \overline{\varphi}(g) = g^2 \prod_{\substack{p|g,\\ p\equiv 3(mod\ 4)}}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \times \prod_{\substack{p|g,\\ p\equiv 1(mod\ 4)}}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \varepsilon_2,$$

где

$$\varepsilon_2 = \begin{cases} 1, & \textit{если } g \textit{ — нечетное},\\ \frac{1}{2}, & \textit{если } g \textit{ — четное}.\end{cases}$$

Доказательство. Сначала докажем утверждение (i). Имеем

$$T\left(x,y,\frac{a}{g}\right) = \sum_{N(\alpha)\le x} y^{\omega(\alpha)} \sum_{N(\omega)\le\frac{x}{N(\alpha)}} y^{\omega(\alpha)} e\left(\frac{a\alpha\omega}{g}\right) := T_1 + T_2 + T_3, \qquad (3)$$

где T_i, $i=1,2,3$ определяются промежутком изменения $N(\alpha)$:

$$1 \le N(\alpha) \le (\log x)^{10};\ (\log x)^{10} < N(\alpha) \le x(\log x)^{-10};\ x(\log x)^{-10}N(\alpha) \le x.$$

Для $0 \le y \le 2-\varepsilon_0$, $0<\varepsilon_0<1$ имеем

$$\sum_{N(\omega)\le x} y^{\omega(\alpha)} = x(\log x)^{y-1}\left(\Phi(y) + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right),\ \Phi(y) \ll_{\varepsilon_0} 1.$$

Поэтому T_1и T_3 можно оценить величиной $O_{\varepsilon_0}\left(\frac{x}{N(\alpha)}\left(\log\frac{x}{N(\alpha)}\right)^{y-1}\right)$.

Следовательно,

$$T_1 + T_3 \ll_{\varepsilon_0} x(\log x)^{y-1}(\log\log x)^y. \tag{4}$$

К внутренней сумме в T_2 применим лемму Давенпорта с $\lambda(\omega,x) = y^{\omega(\alpha)} \le$ ≤ 1 (ибо $y \le 1$). Возьмём $x_0 = (\log x)^{10}$, $x_1 = x(\log x)^{-10}$.

И тогда получаем

$$T_2 \ll x(\log x)^2\left(\frac{1}{(\log x)^{10}} + \frac{1}{g} + \frac{g}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \ll x(\log x)^{-3}.$$

В силу (4) теорема в случае (i) доказана. Для доказательства теоремы в случае (ii) положим

$$x_1 = \exp\sqrt{\log x},\ x_2 = x\exp\left(-2\sqrt{\log x}\right).$$

Рассмотрим сумму

$$\sum\nolimits_0 := \sum_{N(\alpha)<x_2} y^{\omega(\alpha)}\left|\int_{x_1}^{x_2} e\left(\left(\Theta - \frac{a}{g}\right)\alpha u\right) dM_0\left(u, y, \frac{a\alpha}{g}\right)\right|. \tag{5}$$

Вычисляя внутренний интеграл интегрированием по частям (используем тривиальную оценку $M_0\left(u,y,\frac{a\alpha}{g}\right)$ для нижнего предела интегрирования), получаем

$$\sum\nolimits_0 = T(x,y,\Theta) + O\left(x(\log x)^{\frac{3y}{2}-1}\right). \tag{6}$$

С другой стороны, применение формулы для M_0 даёт

$$\begin{aligned} &\int_{x_1}^{\frac{x}{N(\alpha)}} e\left(\left(\Theta - \tfrac{a}{g}\right)\alpha u\right) dM_0\left(u,y,\tfrac{a\alpha}{g}\right) = \\ &= \ell(y,g,\alpha)\int_{x_1}^{\frac{x}{N(\alpha)}} e\left(\left(\Theta - \tfrac{a}{g}\right)\alpha u\right) d\left(u(\log u)^{y-1}\right) + \\ &+ \int_{x_1}^{\frac{x}{N(\alpha)}} e\left(\left(\Theta - \tfrac{a}{g}\right)\alpha u\right) dR_g(u), \end{aligned} \tag{7}$$

где $R_g(u)$ — остаточный член в соотношении (2).

Интегрируя по частям последний интеграл, получаем

$$\begin{aligned}&\left|\int\limits_{x_1}^{\frac{x}{N(\alpha)}} e\left(\left(\Theta-\tfrac{a}{g}\right)\alpha u\right) dR_g(u)\right| \ll \left|R_g\left(\tfrac{x}{N(\alpha)}\right)\right| + |R_g(x_1)| + \\ &+2\pi\left|\Theta-\tfrac{a}{g}\right| N(\alpha)^{\frac{1}{2}} \int\limits_{x_1}^{\frac{x}{N(\alpha)}} |R_g(u)|du \ll \tfrac{x}{N(\alpha)}(\log x)^{-2}.\end{aligned} \tag{8}$$

(Мы учли, что $N(\alpha) \le x\exp\left(-2\sqrt{\log x}\right)$ и $\left|\Theta-\frac{a}{g}\right| \le \frac{(\log x)^{10}}{x}$).
Кроме того,

$$\left|\int\limits_{x_1}^{\frac{x}{N(\alpha)}} e\left(\left(\Theta-\frac{a}{g}\right)\alpha u\right) d\left(u(\log u)^{y-1}\right)\right| \ll \frac{x}{N(\alpha)}\left(\log\frac{x}{N(\alpha)}\right)^{y-1}, \tag{9}$$

если $N(\alpha) \le x_2$.
Из (6) – (9) выводим

$$T(x,y,\Theta) \ll x\sum_{N(\alpha)\le x_2} \ell(y,g,\alpha)\frac{y^{\omega(\alpha)}}{N(\alpha)}\left(\log\frac{x}{N(\alpha)}\right) + x(\log x)^{\frac{3}{2}-1}. \tag{10}$$

Теперь, используя очевидную оценку

$$\ell(y,g,\alpha) \ll \frac{(\log\log g)^2}{\varphi(g)}\left|\sum_{\substack{\beta|g\\ \beta\in\mathbb{Z}[i]}} c_\beta(\alpha)\right| \ll \frac{(\log\log g)^2}{\varphi(g)}(N(\alpha),g)\cdot 2^{\nu(g)}, \tag{11}$$

где $\nu(g)$ — число различных простых рациональных делителей g, мы получаем утверждение теоремы для случая (ii).

□

Пусть $k \ge 2$. Обозначим

$$\widetilde{\pi}_k(x) := \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}[i],\\ \omega(\alpha)=k,\\ N(\alpha)\le x}} 1, \quad \widetilde{\pi}_k(x,\Theta) := \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}[i],\\ \omega(\alpha)=k,\\ N(\alpha)\le x}} e(\Theta\alpha), \tag{12}$$

$$\hat{\pi}_k(x,\Theta) := \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}[i],\\ \omega(\alpha)=k,\\ N(\alpha)\le x}} e(\Theta\alpha)\log N(\alpha). \tag{13}$$

Сначала будем предполагать, что $g > (\log x)^{11}$.
Воспользуемся известным соотношением для функции Мангольдта $\Lambda(\alpha)$:

$$\sum_{\beta|\alpha}{}' \Lambda(\beta) = \log N(\alpha). \tag{14}$$

Пусть $x(\log x)^{-2} \le u \le x$, $u_0 = (\log x)^{10}$, $u_1 = u(\log x)^{-10}$. Тогда, используя (14), получаем

$$\left|\hat{\pi}_k\left(u, \tfrac{a}{g}\right)\right| - \left|\sum_{\substack{\beta_1\beta_2=\alpha,\\ \omega(\beta_1\beta_2)=k}} e\left(\tfrac{a\beta_1\beta_2}{g}\right)\Lambda(\beta_1)\right| \ll$$

$$\ll \sum_{u_0\le N(\beta_2)<u_1}\left|\sum_{N(\beta)\le\frac{u}{N(\beta_1)}} e\left(\tfrac{a\beta_2\gamma}{g}\right)\log N(\mathfrak{p})\right| + \sum_{u_0\le N(\beta_1)<u_1}\sqrt{\tfrac{u}{N(\beta_1)}} + \tag{15}$$

$$+ \sum_{\substack{N(\beta_1)<u_0\\ \omega(\beta_2)=k-1}} \tfrac{u}{N(\beta_1)} + \sum_{\substack{u_1\le N(\beta_1)<u\\ \omega(\beta_1)\le k-1}} \tfrac{u}{N(\beta_1)}.$$

Для оценки первой суммы справа в (15) применяем лемму Давенпорта с $\lambda(p,u) = \frac{\log N(p)}{\log u}$. Вторую сумму в (15) оцениваем тривиально, а в оставшихся двух суммах применяем абелево суммирование и используем соотношения:

$$\widetilde{\pi}_k(x) = \frac{x}{\log x}\cdot\frac{(\log\log x)^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\frac{\varphi_0\left((k-1)(\log\log x)^{-1}\right)}{\Gamma\left(1+(k-1)(\log\log x)^{-1}\right)} + \tag{16}$$

$$+ O_\delta\left(\frac{k^{\frac{3}{2}}}{(\log\log x)^2}\right),$$

если $1 \le k \le (2-\delta)\log\log x$, $0<\delta<1$.
(эта формула для целых гауссовых чисел получается по схеме доказательства Selberg [3] в случае кольца целых рациональных чисел).

$$\sum_{\substack{N(\alpha)<N\\ \omega(\alpha)=j}} \frac{|\mu(\alpha)|}{N(\alpha)} \ll \frac{1}{j!}\left(\sum_{N(\mathfrak{p})<N}\frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)^j \ll \frac{1}{j!}(\log\log N + C_0)^j, \tag{17}$$

$$C_0 > 0 - Const.$$

$$\sum_{\substack{N(\alpha)\le k-1\\ \omega(\alpha)<(\log x)^{10}}} \frac{1}{N(\alpha)} = \sum_{\substack{N(\alpha\beta^2)<(\log x)^{10}\\ \omega(\alpha\beta^2)\le k-1}} \frac{|\mu(\alpha)|}{N(\alpha\beta^2)} \ll$$

$$\ll \sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j!}(\log\log\log x + C)^j,\ C > 0 - Const. \tag{18}$$

Поэтому (см. обозначение (13))

$$\left|\hat{\pi}_k\left(u,\tfrac{a}{g}\right)\right| \ll \tfrac{u}{(\log x)^2} + \sqrt{uu_1} + u\sum_{j=0}^{k-1}\tfrac{1}{j!}(\log\log\log x + C)^j +$$

$$+ \tfrac{u}{\log x}\sum_{j=1}^{k-2}\tfrac{1}{j!}(\log\log x)^{j+1} \ll u\sum_{j=0}^{k-1}\tfrac{1}{j!} + (\log\log\log x + C)^j.$$

С помощью формулы Стирлинга для $k!$ легко убедиться, что

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} + (\log\log\log x + C)^j = \left(\frac{(\log\log x)^{k-1}}{(k-1)!}\right)$$

для всех k, $2 \leq k < 2\log\log x$.
Поэтому соотношение

$$\widetilde{\pi}_k\left(a, \frac{a}{g}\right) = \frac{\widetilde{\pi}_k\left(x, \frac{a}{g}\right)}{\log x} + \int\limits_1^x \frac{\widetilde{\pi}_k\left(u, \frac{a}{g}\right)}{u\left(\log^2 u\right)} du$$

показывает, что

$$\widetilde{\pi}_k\left(x, \frac{a}{g}\right) = O\left(\widetilde{\pi}_k(x)\right), \quad \text{если } g > (\log x)^{11}. \tag{19}$$

Для $g \leq (\log x)^{11}$ воспользуемся формулой (2) с $h = 1$, $b = 11$.
Мы имеем

$$M_0\left(x, z, \frac{a}{g}\right) = x\ell(z, g, 1)(\log x)^{z-1} + O_{\varepsilon_0}\left(x(\log x)^{\Re z-1}(\log\log x)^5\right)$$

и, повторяя рассуждения из теоремы 1, случай (ii), получаем

$$M_0(x, z, \Theta) \ll_{\varepsilon_0} x\ell(z, g, 1)(\log x)^{\Re z-1} + x(logx)^{\Re z-2}(\log\log x)^5. \tag{20}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \ell(z, g, 1) = {} & \tfrac{1}{\Gamma(z)} {\prod_{\mathfrak{p}}}' \left(1 - \tfrac{z}{N(\mathfrak{p})}\right)^{-1} \left(1 - \tfrac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)^z \times \\ & \times \sum_{\substack{\delta_1\delta_2 = g,\\ \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{Z}[i]}} \tfrac{z^{\omega(\delta_1)}}{N(\delta_1)} \cdot \tfrac{\mu(\delta_1)}{\varphi(\delta_2)} \prod_{\mathfrak{p}|\delta_2} \left(1 - \tfrac{z}{N(\mathfrak{p})}\right). \end{aligned} \tag{21}$$

Из определения

$$M_0(x, z, \Theta) := \sum_{N(\alpha) \leq x} z^{\omega(\alpha)} e^{\omega(\Theta, \alpha)}$$

видно, что

$$M_0(x, z, \Theta) = \sum \widetilde{\pi}_k(x, \Theta) z^k$$

есть многочлен от комплексной переменной z, а потому его коэффициенты можно определить по формуле Коши. Таким образом, имеем

$$\widetilde{\pi}_k(x, \Theta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C M_0(x, z, \Theta) \frac{dz}{z^{k+1}}$$

где C — любой контур в комплексной плоскости, содержащий внутри точку $z = 0$. Возьмём в качестве C окружность радиуса $r := \frac{k-1}{\log\log x}$ с центром в точке $z = 0$. Тогда повторяя рассуждения из [4] при вычислении аналогичного интеграла, мы получим

$$|\widetilde{\pi}_k(x,\Theta)| \le \frac{x}{\log x}\cdot\frac{(\log\log x)^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\Big\{\,(2-\delta)^{\omega(g)-\nu(g)}(3-\delta)^{\nu(g)}\varphi(g)^{-1}+ \\ +\frac{\log\log x}{k}\cdot\frac{(\log\log\log x)^5}{\log x}\,\Big\}\,. \tag{22}$$

Поскольку для иррациональных Θ увеличение точности приближения рациональными числами $\frac{a}{g}$ влечёт рост g, то соотношение (22) доказывает, что $\widetilde{\pi}_k\,(x,\Theta) = o\,(\widetilde{\pi}_k(x))$.

Таким образом, доказана следующая расширенная теорема Виноградова над кольцом целых гауссовых чисел.

Теорема 2. *Пусть Θ — вещественное иррациональное число. Тогда для любого натурального k, $k \le \log\log x$ имеем*

$$\widetilde{\pi}_k\,(x,\Theta) = o\,(\widetilde{\pi}_k(x))\,.$$

Заключение. Метод доказательства расширенной теоремы Виноградова, по-видимому, позволяет исследовать распределение значений $e(\Theta,\mathfrak{p})$, взвешенных функцией $f(x)$, $|x| \le 1$.

1. **Davenport H.** On some infinite series involving arithmetical functions [text] / H. Davenport. – V. II. – Quart. J. Math., 8(1937). – P. 313–330.
2. **Dupain Y.** Sur le guirepartition modulo 1 de certaines fonetions de divisors [text] / Y. Dupain, R. R. HallI, G. Tenenbaum. – London Math. S., 1982. – V. 26. – P. 397–411.
3. **Selberg A.** Note on paper by L.G. Sathe [text] / A. Selberg. – J. Jndian Math. Soc., 1954. – V. 18. – P. 83–87.
4. **Варбанець П. Д.** Аналог теореми Виноградова над кільцем цілих гаусових чисел [текст] / П. Д. Варбанець, С. А. Кибрат, С. С. Сергєєв. – Вісник Київського університету, Серія: фізико-математичні науки. – Вип. 4, 2011 (у друку).