УДК 517.925

В. М. Евтухов (Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова)

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА, АСИМПТОТИЧЕСКИ БЛИЗКИХ К ЛИНЕЙНЫМ

Asymptotic representations are obtained for a broad class of monotone solutions of nonautonomous binary differential equations of the second order that are close in a certain sense to linear equations.

Встановлено асимптотичні зображення для широкого класу монотонних розв'язків неавтономних двочленних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, що у деякому сенсі є близькими до лінійних рівнянь.

1. Введение. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t) y L(y), \tag{1.1}$$

где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p\colon [a,\omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ — непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, $L\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ — непрерывная и медленно меняющаяся при $y \to Y_0$ функция, Y_0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_{Y_0} — односторонняя окрестность Y_0.

При $L(y) \equiv 1$ уравнение (1.1) является линейным дифференциальным уравнением второго порядка. Асимптотическое поведение при $t \to +\infty$ (случай $\omega = +\infty$) его решений достаточно подробно исследовано. Многие из полученных здесь результатов вытекают из теорем, установленных в монографии [1], для линейных дифференциальных уравнений n-го порядка.

Решение y уравнения (1.1) будем называть $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решением, $-\infty \le \lambda_0 \le +\infty$, если оно определено на промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ и удовлетворяет следующим условиям:

$$y\colon [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_0}, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} y(t) = Y_0, \tag{1.2}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = \begin{cases} \text{либо} \quad 0, \\ \text{либо} \quad \pm\infty, \end{cases} \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\big[y'(t)\big]^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0. \tag{1.3}$$

При $L(y) = |\ln|y||^\sigma$, $\sigma \in \mathbb{R}$, в работах [2–6] были установлены условия существования и асимптотические при $t \uparrow \omega$ представления всех возможных типов $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решений уравнения (1.1).

Целью настоящей статьи является распространение результатов из [3–6] на случай произвольной медленно меняющейся при $y \to Y_0$ функции L.

Согласно определению медленно меняющейся функции (см. [7])

$$\lim_{y\to Y_0} \frac{L(\lambda y)}{L(y)} = 1 \qquad \text{для любого} \quad \lambda > 0. \tag{1.4}$$

Известно [7], что предельное соотношение (1.4) выполняется равномерно по λ на любом промежутке $[c, d] \subset]0, +\infty[$ (свойство M_1) и существует непрерывно дифференцируемая медленно меняющаяся при $y \to Y_0$ функция $L_1\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ (свойство M_2) такая, что

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{L(y)}{L_1(y)} = 1 \qquad \text{и} \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{yL_1'(y)}{L_1(y)} = 0. \tag{1.5}$$

Примерами медленно меняющихся при $y \to Y_0$ функций являются

$$|\ln|y||^{\sigma_1}, \qquad \ln^{\sigma_2}|\ln|y||, \quad \sigma_1,\ \sigma_2 \in \mathbb{R}, \qquad \exp\big(|\ln|y||^{\sigma_3}\big), \quad 0 < \sigma_3 < 1, \quad \exp\left(\frac{\ln|y|}{\ln|\ln|y||}\right), \tag{1.6}$$

функции, имеющие отличный от нуля конечный предел при $y \to Y_0$, и др.

2. Вспомогательные обозначения и некоторые априорные асимптотические свойства $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решений уравнения (1.1). Выберем число $b \in \Delta_{Y_0}$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$|b| < 1 \quad \text{при} \quad Y_0 = 0, \quad b > 1\ (b < -1) \quad \text{при} \quad Y_0 = +\infty\ (Y_0 = -\infty), \tag{2.1}$$

и положим

$$\Delta_{Y_0}(b) = \begin{cases} [b, Y_0[, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} - \text{левая окрестность } Y_0, \\ ]Y_0, b], & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} - \text{правая окрестность } Y_0. \end{cases}$$

Из определения $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решения ясно, что каждое такое решение уравнения (1.1) и его производные до второго порядка включительно отличны от нуля на некотором промежутке $[t_1, \omega[\subset [t_0, \omega[$, причем на этом промежутке первая производная данного решения положительна, если Δ_{Y_0} — левая окрестность Y_0, и отрицательна — в противном случае. Учитывая этот факт и выбор b, вводим два числа

$$\mu_0 = \operatorname{sign} b, \qquad \mu_1 = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} - \text{левая окрестность } Y_0, \\ -1, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} - \text{правая окрестность } Y_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

определяющие соответственно знаки $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решения и его первой производной на промежутке $[t_1, \omega[$. При этом заметим, что для $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решения

$$\mu_0\mu_1 > 0 \quad \text{при} \quad Y_0 = \pm\infty \quad \text{и} \quad \mu_0\mu_1 < 0 \quad \text{при} \quad Y_0 = 0.$$

Далее, вводим функции $\Phi_i : \Delta_{Y_0}(b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, полагая

$$\Phi_1(y) = \int\limits_{B_1}^{y} \frac{ds}{sL(s)}, \qquad \Phi_2(y) = \int\limits_{B_2}^{y} \frac{ds}{sL^{1/2}(s)}, \tag{2.3}$$

где

$$B_1 = \begin{cases} b, & \text{если} \quad \displaystyle\int\limits_b^{Y_0} \frac{ds}{sL(s)} = \pm\infty, \\ Y_0, & \text{если} \quad \displaystyle\int\limits_b^{Y_0} \frac{ds}{sL(s)} = \text{const}, \end{cases} \qquad B_2 = \begin{cases} b, & \text{если} \quad \displaystyle\int\limits_b^{Y_0} \frac{ds}{sL^{1/2}(s)} = \pm\infty, \\ Y_0, & \text{если} \quad \displaystyle\int\limits_b^{Y_0} \frac{ds}{sL^{\frac{1}{2}}(s)} = \text{const}, \end{cases}$$

а также числа

$$\mu_i^* = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad B_i = b, \\ -1, & \text{если} \quad B_i = Y_0, \end{cases} \qquad i = 1, 2. \tag{2.4}$$

В силу выбора μ_0, μ_1 и μ_i^*, $i = 1, 2$,

$$\operatorname{sign} \Phi_i(y) = \mu_0 \mu_1 \mu_i^*, \quad i = 1, 2, \qquad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}(b) \setminus \{b\}. \tag{2.5}$$

Кроме того, функции Φ_i, $i = 1, 2$, строго монотонны на промежутке $\Delta_{Y_0}(b)$ и областью их значений являются промежутки

$$\Delta_{Z_i}(c_i) = \begin{cases} [c_i, Z_i[, & \text{если} \quad \mu_0 > 0, \\ ]Z_i, c_i], & \text{если} \quad \mu_0 < 0 \end{cases} \qquad i = 1, 2, \tag{2.6}$$

где

$$c_i = \Phi_i(b), \qquad Z_i = \lim_{y \to Y_0} \Phi_i(y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad B_i = Y_0, \\ +\infty, & \text{если} \quad B_i = b \quad \text{и} \quad \mu_0\mu_1 > 0, \\ -\infty, & \text{если} \quad B_i = b \quad \text{и} \quad \mu_0\mu_1 < 0, \end{cases} \qquad i = 1, 2. \tag{2.7}$$

Значит, для них существуют непрерывно дифференцируемые и строго монотонные обратные функции $\Phi_i^{-1}\colon \Delta_{Z_i}(c_i) \longrightarrow \Delta_{Y_0}(b)$, $i = 1, 2$, для которых $\lim_{z \to Z_i} \Phi_i^{-1}(z) = Y_0$, $i = 1, 2$.

Используя правило Лопиталя, нетрудно убедиться в том, что функции Φ_i, $i = 1, 2$, являются медленно меняющимися при $y \to Y_0$, а функции Φ_i^{-1}, $i = 1, 2$, — быстро меняющимися при $z \to Z_i$, и поэтому, вообще говоря, неопределенным является характер роста возникающих в дальнейшем функций $L\big(\Phi_i^{-1}(z)\big)$, $i = 1, 2$, при $z \to Z_i$. В частности, если медленно меняющаяся при $y \to Y_0$ функция L имеет отличный от нуля конечный предел при $y \to Y_0$ или является функцией одного из видов (1.6), где $\sigma_1 \neq 1$ ($\sigma_1 \neq 2$), то $L\big(\Phi_1^{-1}(z)\big)$ $\big($соответственно $L\big(\Phi_2^{-1}(z)\big)$ — правильно меняющаяся функция при $z \to Z_1$ ($z \to Z_2$). Если же $L(y) = \ln|y|$ ($L(y) = \ln^2|y|$), или $L(y) = \ln|y| \ln|\ln|y||$ $\Big(L(y) = \big(\ln|y| \ln|\ln|y||\big)^2\Big)$, то $L\big(\Phi_1^{-1}(z)\big)$ $\Big($соответственно $L\big(\Phi_2^{-1}(z)\big)\Big)$ — быстро меняющаяся функция при $z \to Z_1$ ($z \to Z_2$).

В случае непрерывно дифференцируемой функции L

$$\lim_{z \to Z_i} \frac{z\left(L(\Phi_i^{-1}(z))\right)'}{L(\Phi_i^{-1}(z))} = \lim_{z \to Z_i} \frac{zL'(\Phi_i^{-1}(z))}{L(\Phi_i^{-1}(z))\Phi_i'(\Phi_i^{-1}(z))} = \lim_{y \to Y_0} \frac{\Phi_i(y)L'(y)}{\Phi_i'(y))L(y)}, \qquad i = 1, 2.$$

Поэтому если при $i \in \{1, 2\}$

$$\lim_{y \to Y_0} \frac{\Phi_i(y)L'(y)}{\Phi_i'(y))L(y)} = \gamma = \text{const},$$

то $L\big(\Phi_i^{-1}(z)\big)$ — правильно меняющаяся при $z \to Z_i$ функция порядка γ, т. е. допускает представление вида

$$L\big(\Phi_i^{-1}(z)\big) = |z|^\gamma L_i^*(z), \tag{2.8}$$

где L_i^* — медленно меняющаяся функция при $z \to Z_i$.

Далее, введем функцию

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{если} \quad \omega < +\infty. \end{cases}$$

С использованием тождества

$$\frac{y''(t)y(t)}{\big[y'(t)\big]^2} = \left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)' \left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^{-2} + 1,$$

определения $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решения и правила Лопиталя легко устанавливается следующее необходимое для дальнейшего изложения утверждение.

Лемма 2.1 [8]. *Пусть* $y\colon [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_0}$ — *произвольное* $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-*решение уравнения* (1.1). *Тогда*:

1) *если* $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, *то имеют место предельные соотношения*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = \frac{1}{\lambda_0 - 1}, \tag{2.9}$$

причем второе из них в случае $\lambda_0 = 0$ *справедливо при дополнительном предположении существования (конечного или равного* $\pm\infty$*) предела* $\lim_{t\uparrow\omega} \dfrac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}$;

2) *если* $\lambda_0 = 1$, *то*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = \pm\infty, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = \pm\infty. \tag{2.10}$$

3. Основные результаты. Введем функции I_k, $k = 1, 2, 3, 4$, положив

$$I_1(t) = \int_{A_1}^{t} p(\tau)\,d\tau, \qquad I_2(t) = \int_{A_2}^{t} \pi_\omega(\tau)p(\tau)\,d\tau,$$

$$I_3(t) = \int_{A_3}^{t} p^{1/2}(\tau)\,d\tau, \qquad I_4(t) = \int_{A_4}^{t} p(\tau)L\left(\Phi_2^{-1}\big(\mu_0\mu_1|\lambda_0|^{1/2}I_3(\tau)\big)\right)\,d\tau,$$

где каждый из пределов интегрирования $A_i \in \{\omega; a\}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, $A_4 \in \{\omega; a_0\}$, $a_0 \in [a, \omega[$, и выбирается так, чтобы соответствующий ему интеграл стремился при $t \uparrow \omega$ либо к нулю, либо к $\pm\infty$ (по аналогии с тем, как выбирались пределы интегрирования B_i, $i = 1, 2$, в функциях Φ_i, $i = 1, 2$).

Теорема 3.1. *Пусть функция* $L\big(\Phi_1^{-1}(z)\big)$ *является правильно меняющейся при* $z \to Z_1$ *порядка* γ *и* $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, *причем в случае* $\lambda_0 = 0$ *существует* $\lim_{t\uparrow\omega} \pi_\omega(t)p(t)\big[I_1(t)\big]^{-1}$ *(конечный или равный* $\pm\infty$*). Тогда для существования* $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-*решений уравнения* (1.1) *необходимо, а если*

$$(1 + \lambda_0)(1 + \lambda_0 + \lambda_0\gamma) \neq 0, \tag{3.1}$$

то и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)p(t)}{I_1(t)}=-1,\qquad \alpha_0(\lambda_0-1)\lim_{t\uparrow\omega}I_2(t)=Z_1, \tag{3.2}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\pi_\omega^2(t)p(t)L\Big(\Phi_1^{-1}\big(\alpha_0(\lambda_0-1)I_2(t)\big)\Big)=\frac{\alpha_0\lambda_0}{(\lambda_0-1)^2}, \tag{3.3}$$

$$\alpha_0\mu_0\mu_1(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)>0,\qquad \mu_1^*\pi_\omega(t)I_2(t)>0\qquad \textit{при}\quad t\in]a,\omega[. \tag{3.4}$$

Более того, для каждого такого решения имеют место асимптотические представления

$$\Phi_1(y(t))=\alpha_0(\lambda_0-1)I_2(t)\big[1+o(1)\big]\qquad \textit{при}\quad t\uparrow\omega, \tag{3.5}$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=\alpha_0(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)p(t)L\Big(\Phi_1^{-1}\big(\alpha_0(\lambda_0-1)I_2(t)\big)\Big)\big[1+o(1)\big]\qquad \textit{при}\quad t\uparrow\omega, \tag{3.6}$$

причем решений с такими представлениями существует однопараметрическое семейство в случае, когда $(\lambda_0-1)(1+\lambda_0+\gamma\lambda_0)I_2(t)<0$ *при* $t\in]a,\omega[$, *и двупараметрическое семейство в случае, когда* $(\lambda_0-1)(1+\lambda_0+\gamma\lambda_0)I_2(t)>0$ *и* $(\lambda_0^2-1)\pi_\omega(t)>0$ *при* $t\in]a,\omega[$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть y — произвольное $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решение дифференциального уравнения (1.1). Тогда существует число $t_1\in[a,\omega[$ такое, что

$$y\colon[t_1,\omega[\longrightarrow\Delta_{Y_0}(b),\qquad \operatorname{sign}y(t)=\mu_0\quad\text{и}\quad \operatorname{sign}y'(t)=\mu_1\quad\text{при}\quad t\in[t_1,\omega[. \tag{3.7}$$

Кроме того, имеем

$$\left(\frac{y'(t)}{y(t)L_1(y(t))}\right)'=\frac{y''(t)}{y(t)L_1(y(t)}\left[1-\frac{(y'(t))^2}{y(t)y''(t)}-\frac{(y'(t))^2}{y(t)y''(t)}\frac{y(t)L_1'(y(t))}{L_1(y(t))}\right],$$

где $L_1\colon\Delta_{Y_0}\longrightarrow]0,+\infty[$ — непрерывно дифференцируемая функция, существующая в силу свойства M_2 медленно меняющихся функций, удовлетворяющая условиям (1.5). Поэтому в силу (1.2), (1.3) и второго из условий (1.5)

$$\frac{y''(t)}{y(t)L_1\big(y(t)\big)}=\frac{1+o(1)}{1-\lambda_0}\left(\frac{y'(t)}{y(t)L_1\big(y(t)\big)}\right)'\qquad\text{при}\qquad t\uparrow\omega.$$

Из (1.1) с учетом этого асимптотического соотношения и второго из условий (1.5) находим

$$\left(\frac{y'(t)}{y(t)L_1\big(y(t)\big)}\right)'=\alpha_0(1-\lambda_0)p(t)\big[1+o(1)\big]\qquad\text{при}\qquad t\uparrow\omega.$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от t_1 до t, получаем

$$\frac{y'(t)}{y(t)L_1\big(y(t)\big)}=C+\alpha_0(1-\lambda_0)I_1(t)\big[1+o(1)\big]\qquad\text{при}\quad t\uparrow\omega, \tag{3.8}$$

где C — некоторая вещественная постоянная.

Если в I_1 предел интегрирования $A_1=a$, то это представление принимает вид

$$\frac{y'(t)}{y(t)L_1\big(y(t)\big)} = \alpha_0(1-\lambda_0)I_1(t)\big[1+o(1)\big] \qquad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{3.9}$$

Покажем, что в случае, когда $A_1=\omega$, также имеет место (3.9), т. е. $C=0$ в (3.8). В самом деле, если $C\neq 0$, то согласно (3.8)

$$\frac{y'(t)}{y(t)L_1\big(y(t)\big)} = C+o(1) \qquad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

и поэтому, учитывая (1.1), получаем

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{\alpha_0}{C}p(t)\big[1+o(1)\big] \qquad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

откуда следует, что

$$\ln|y'(t)| = C_1 + \frac{\alpha_0}{C}I_1(t)\big[1+o(1)\big] \qquad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

где C_1 — некоторая вещественная постоянная. Однако это невозможно, так как здесь выражение, стоящее справа, имеет конечный предел при $t\uparrow\omega$, а выражение слева в силу первого из условий (1.3) — бесконечный. Значит, в (3.8) $C=0$ и имеет место представление (3.9).

Из (3.9) с учетом первого из условий (1.5) следует, что

$$\frac{y'(t)}{y(t)L\big(y(t)\big)} = \alpha_0(1-\lambda_0)I_1(t)\big[1+o(1)\big] \qquad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{3.10}$$

В силу этого асимптотического соотношения и (1.1) имеем

$$\frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = \frac{\pi_\omega(t)p(t)}{(1-\lambda_0)I_1(t)}\big[1+o(1)\big] \qquad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{3.11}$$

Поскольку при $\lambda_0=0$ существует $\lim_{t\uparrow\omega}\dfrac{\pi_\omega(t)p(t)}{I_1(t)}$ (конечный или равный $\pm\infty$), согласно лемме 2.1 для любого $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ имеют место предельные соотношения (2.9). В силу второго из них и (3.11) выполняется первое из условий (3.2). Учитывая его, записываем (3.10) в виде

$$\frac{y'(t)}{y(t)L\big(y(t)\big)} = \alpha_0(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)p(t)\big[1+o(1)\big] \qquad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{3.12}$$

Отсюда с учетом знаков y и y' следует первое из знаковых условий (3.4), а также асимптотическое представление (3.5). В силу (3.5) и (2.5), (2.7) выполняются второе из знаковых условий (3.4) и второе из условий (3.2). Кроме того, из (3.5) с учетом того, что функция $L\big(\Phi_1^{-1}(z)\big)$ является правильно меняющейся при $z\to Z_1$ порядка γ, следует, что

$$L\big(y(t)\big) = L\Big(\Phi_1^{-1}\big(\alpha_0(\lambda_0-1)I_2(t)\big)\Big)\big[1+o(1)\big] \qquad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

В силу этого представления из (3.12) получаем представление (3.6), из которого согласно первому из предельных соотношений (2.9) вытекает (3.3).

Достаточность. Пусть наряду с (3.2)–(3.4) выполняется неравенство (3.1). Покажем, что в этом случае существуют $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решения уравнения (1.1), допускающие при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления (3.5), (3.6).

Применяя к уравнению (1.1) преобразование

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \alpha_0(1-\lambda_0)I_1(t)L_1\Big(\Phi_1^{-1}\big(\alpha_0(\lambda_0-1)I_2(t)\big)\Big)\big[1+v_1(\tau)\big],$$
$$\Phi_1\big(y(t)\big) = \alpha_0(\lambda_0-1)I_2(t)\big[1+v_2(\tau)\big], \qquad \tau = \beta\ln|\pi_\omega(t)|, \tag{3.13}$$

где

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ -1, & \text{если} \quad \omega < +\infty, \end{cases}$$

получаем систему дифференциальных уравнений

$$v_1' = \frac{\beta h_1(\tau)}{1-\lambda_0}\left[H(\tau,v_2) - \frac{g_1(\tau)(1+v_1)^2}{h_1(\tau)} + (1+v_1)\Big(\lambda_0 - 1 + g_1(\tau)g_2(\tau)\Big)\right],$$
$$v_2' = -\beta h_2(\tau)\left[\frac{1+v_1}{H(\tau,v_2)} + h_1(\tau)(1+v_2)\right], \tag{3.14}$$

где

$$h_1\big(\tau(t)\big) = \frac{\pi_\omega(t)p(t)}{I_1(t)}, \qquad H\big(\tau(t),v_2\big) = \frac{L\Big(\Phi_1^{-1}\big(\alpha_0(\lambda_0-1)I_2(t)(1+v_2)\big)\Big)}{L_1\Big(\Phi_1^{-1}\big(\alpha_0(\lambda_0-1)I_2(t)\big)\Big)},$$

$$h_2\big(\tau(t)\big) = \frac{\pi_\omega(t)I_1(t)}{I_2(t)}, \qquad g_1\big(\tau(t)\big) = \alpha_0(\lambda_0-1)^2\pi_\omega(t)I_1(t)L_1\Big(\Phi_1^{-1}\big(\alpha_0(\lambda_0-1)I_2(t)\big)\Big),$$

$$g_2\big(\tau(t)\big) = \frac{\Phi_1^{-1}\big(\alpha_0(\lambda_0-1)I_2(t)\big)L_1'\Big(\Phi_1^{-1}\big(\alpha_0(\lambda_0-1)I_2(t)\big)\Big)}{L_1\Big(\Phi_1^{-1}\big(\alpha_0(\lambda_0-1)I_2(t)\big)\Big)}.$$

В силу выбора числа β функция τ имеет свойства

$$\lim_{t\uparrow\omega}\tau(t) = +\infty, \quad \tau'(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in [a,\omega[^1, \qquad \tau\colon [a,\omega[\longrightarrow [\tau_0,+\infty[, \qquad \tau_0 = \beta\ln|\pi_\omega(a)|. \tag{3.15}$$

Поэтому, используя первое из условий (3.2), находим

$$\lim_{\tau\to+\infty} h_1(\tau) = -1, \quad \lim_{\tau\to+\infty} h_2(\tau) = 0, \quad \int_{\tau_1}^{+\infty}|h_2(\tau)|\,d\tau = +\infty, \quad \lim_{\tau\to+\infty}\frac{h_2'(\tau)}{h_2(\tau)} = 0 \tag{3.16}$$

(τ_1 — любое из промежутка $]\tau_0,+\infty[$).

Согласно второму из условий (3.2), условиям (3.4), а также (2.5) и (2.7) (при $i=1$) существует число $t_1 \in]a,\omega[$ такое, что $\alpha_0(\lambda-1)I_2(t)(1+v_2) \in \Delta_{Z_1}(c_1)$ при $t \in [t_1,\omega[$ и $|v_2| \le \dfrac{1}{2}$. При

[1]При $\omega = +\infty$ считаем, что $a > 0$.

таком выборе числа t_1 правые части системы (3.14) определены и непрерывны на множестве $[\tau_1, +\infty[\times D$, где $\tau_1 = \beta \ln |\pi_\omega(t_1)|$ и $D = \left\{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : \ |v_i| \le \dfrac{1}{2}, i = 1, 2\right\}$.

Поскольку функция $L(\Phi_1^{-1}(z))$ является правильно меняющейся при $z \to Z_1$ порядка γ, т. е. допускает представление вида (2.8), и выполняется второе из условий (3.2), с учетом свойства M_1 медленно меняющихся функций имеем

$$L\Big(\Phi_1^{-1}\big(\alpha_0(\lambda_0 - 1)I_2(t)(1 + v_2)\big)\Big) =$$

$$= \Big|\Phi_1^{-1}\big(\alpha_0(\lambda_0 - 1)I_2(t)\big)\Big|^\gamma |1 + v_2|^\gamma L_1^*\Big(\Phi_1^{-1}\big(\alpha_0(\lambda_0 - 1)I_2(t)(1 + v_2)\big)\Big) =$$

$$= \Big|\Phi_1^{-1}\big(\alpha_0(\lambda_0 - 1)I_2(t)\big)\Big|^\gamma |1 + v_2|^\gamma L_1^*\Big(\Phi_1^{-1}\big(\alpha_0(\lambda_0 - 1)I_2(t)\big)\Big)\big[1 + R(t, v_2)\big] =$$

$$= L\Big(\Phi_1^{-1}\big(\alpha_0(\lambda_0 - 1)I_2(t)\big)\Big)|1 + v_2|^\gamma [1 + R(t, v_2],$$

где

$$\lim_{t \uparrow \omega} R(t, v_2) = 0 \qquad \text{равномерно по} \quad |v_2| \le \frac{1}{2}.$$

В силу этого представления и первого из условий (1.5)

$$H(\tau, v_2) = |1 + v_2|^\gamma \big[1 + r_1(\tau, v_2)\big], \qquad \frac{1}{H(\tau, v_2)} = |1 + v_2|^{-\gamma} \big[1 + r_2(\tau, v_2)\big],$$

где функции r_i, $i = 1, 2$, непрерывны на множестве $[\tau_1, +\infty[\times \left\{v_2 \in \mathbb{R} \colon |v_2| \le \dfrac{1}{2}\right\}$ и такие, что

$$\lim_{\tau \to +\infty} r_i(\tau, v_2) = 0, \quad i = 1, 2, \qquad \text{равномерно по} \quad |v_2| \le \frac{1}{2}.$$

Кроме того, ясно, что $\lim_{t \uparrow \omega} \Phi_1^{-1}\big(\alpha_0(\lambda_0 - 1)I_2(t)\big) = Y_0$, и поэтому в силу условий (1.5), (3.3) и первого из условий (3.2)

$$\lim_{\tau \to +\infty} g_1(\tau) = -\lambda_0, \qquad \lim_{\tau \to +\infty} g_2(\tau) = 0.$$

На основании изложенного выше систему дифференциальных уравнений (3.14) можно представить в виде

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{\beta}{\lambda_0 - 1}\big[f_1(\tau, v_1, v_2) - (\lambda_0 + 1)v_1 + \gamma v_2 + V_1(v_1, v_2)\big], \\ v_2' &= -\beta h_2(\tau)\big[f_2(\tau, v_1, v_2) + v_1 - (\gamma + 1)v_2 + V_2(v_1, v_2)\big], \end{aligned} \tag{3.17}$$

где

$$V_1(v_1, v_2) = -\lambda_0 v_1^2 + (1 + v_2)^\gamma - 1 - \gamma v_2, \qquad V_2(v_1, v_2) = (1 + v_2)^{-\gamma}(1 + v_1) - 1 - v_1 + \gamma v_2,$$

а функции f_i, $i = 1, 2$, непрерывны на множестве $[\tau_1, +\infty[\times D$ и таковы, что

$$\lim_{\tau\to+\infty} f_i(\tau, v_1, v_2) = 0, \quad i = 1, 2, \qquad \text{равномерно по} \quad (v_1, v_2) \in D.$$

Поскольку $\lim_{|v_1|+|v_2|\to 0} \dfrac{\partial V_i(v_1, v_2)}{\partial v_j} = 0$, $i, j = 1, 2$, то функции V_i, $i = 1, 2$, удовлетворяют условиям

$$\lim_{|v_1|+|v_2|\to 0} \frac{V_i(v_1, v_2)}{|v_1| + |v_2|} = 0, \qquad i = 1, 2.$$

Также заметим, что в силу (3.1) коэффициент при v_1 в первом уравнении системы (3.17) отличен от нуля и определитель

$$\begin{vmatrix} -(\lambda_0 + 1) & \gamma \\ 1 & -(\gamma + 1) \end{vmatrix} = 1 + \lambda_0 + \gamma\lambda_0,$$

составленный из коэффициентов при v_1 и v_2, стоящих в квадратных скобках этой системы, также отличен от нуля.

Таким образом, для системы дифференциальных уравнений (3.17) выполняются с учетом (3.16) все условия теоремы 2.6. из работы [9]. Согласно этой теореме система (3.17) имеет, по крайней мере, одно решение $(v_1, v_2)\colon [\tau_2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\tau_2 \ge \tau_1$, стремящееся к нулю при $\tau \to +\infty$, причем таких решений существует однопараметрическое семейство в случае, когда $(\lambda_0 - 1)(1 + \lambda_0 + \gamma\lambda_0)h_2(\tau) > 0$ при $\tau > \tau_0$, и двупараметрическое в случае, когда $\beta(\lambda_0 + 1)(\lambda_0 - 1) > 0$ и $(\lambda_0 - 1)(1 + \lambda_0 + \gamma\lambda_0)h_2(\tau) < 0$ при $\tau > \tau_0$. Каждому такому решению системы (3.17) в силу замен (3.13) соответствует решение $y : [t_2, \omega[\longrightarrow \Delta(Y_0)$ дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющее при $t \uparrow \omega$ асимптотическим соотношениям

$$\Phi_1(y(t)) = \alpha_0(\lambda_0 - 1)I_2(t)\big[1 + o(1)\big],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \alpha_0(1 - \lambda_0)I_1(t)L_1\Big(\Phi_1^{-1}\big(\alpha_0(\lambda_0 - 1)I_2(t)\big)\Big)\big[1 + o(1)\big].$$

Первое из этих соотношений совпадает с (3.5), а второе в силу (1.5) и первого из условий (3.2) может быть записано в виде (3.6). Используя представления (3.5) и (3.6), а также условия (3.2)–(3.4), нетрудно проверить, что любое из таких решений является $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решением. Справедливость утверждения теоремы об условиях существования одно- и двупараметрического семейств $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решений следует из указанных выше неравенств, если учесть, что

$$\beta = \operatorname{sign} \pi_\omega(t) \quad \text{и} \quad \operatorname{sign} h_2(\tau(t)) = -\operatorname{sign} I_2(t) \quad \text{при} \quad t \in]a, \omega[.$$

Теорема доказана.

Далее, установим два результата для случая, когда функция $L(\Phi_1^{-1}(z))$ не является правильно меняющейся при $z \to Z_1$. Первый из них касается $P_\omega(Y_0, 1)$-решений, которые не охватывались теоремой 3.1, а второй – $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решений уравнения (1.1), для которых $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

Теорема 3.2. *Пусть функция $L\big(\Phi_2^{-1}(z)\big)$ является правильно меняющейся при $z \to Z_2$ порядка γ. Тогда для существования $P_\omega(Y_0, 1)$-решений уравнения* (1.1) *необходимо, а если функция $p\colon [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ непрерывно дифференцируема и такая, что существует* (*конечный или равный* $\pm\infty$)

$$\lim_{t\uparrow\omega} p'(t)p^{-3/2}(t)L^{-1/2}\Big(\Phi_2^{-1}\big(\mu_0\mu_1 I_3(t)\big)\Big),$$

то и достаточно, чтобы

$$\lim_{t\uparrow\omega}\pi_\omega(t)\left[p(t)L\Big(\Phi_2^{-1}\big(\mu_0\mu_1 I_3(t)\big)\Big)\right]^{1/2}=\infty, \qquad \mu_0\mu_1\lim_{t\uparrow\omega} I_3(t)=Z_2 \tag{3.18}$$

и выполнялись неравенства

$$\alpha_0>0, \qquad \mu_2^* I_3(t)>0 \quad \textit{при} \quad t\in]a,\omega[. \tag{3.19}$$

Более того, для каждого такого решения имеют место при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления

$$\Phi_2\big(y(t)\big)=\mu_0\mu_1 I_3(t)\big[1+o(1)\big], \qquad \frac{y'(t)}{y(t)}=\mu_0\mu_1\left[p(t)L\Big(\Phi_2^{-1}\big(\mu_0\mu_1 I_3(t)\big)\Big)\right]^{1/2}\big[1+o(1)\big], \tag{3.20}$$

причем таких решений при выполнении указанных условий существует однопараметрическое семейство в случае, когда $\mu_0\mu_1\mu_2^*<0$, и двупараметрическое в случае, когда $\mu_2^*>0$ и $\mu_0\mu_1>0$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $y\colon [t_0,\omega[\to\Delta_{Y_0}-P_\omega(Y_0,1)$-решение дифференциального уравнения (1.1). Тогда для некоторого $t_1\in[t_0,\omega[$ выполняются условия (3.7) и в силу леммы 2.1 — условия (2.10). Кроме того, из (1.3) следует, что $y''(t)\sim\dfrac{[y'(t)]^2}{y(t)}$ при $t\uparrow\omega$, и поэтому согласно (1.1)

$$\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^2=\alpha_0 p(t)L(y(t)\big[1+o(1)\big] \qquad \text{при} \qquad t\uparrow\omega.$$

Отсюда следуют первое из условий (3.19) и асимптотическое соотношение

$$\frac{y'(t)}{y(t)L^{\frac12}(y(t))}=\mu_0\mu_1 p^{1/2}(t)\big[1+o(1)\big] \qquad \text{при} \qquad t\uparrow\omega. \tag{3.21}$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от t_1 до t, получаем

$$\Phi_2(y(t))=\mu_0\mu_1 I_3(t)\big[1+o(1)\big] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Следовательно, имеет место первое из представлений (3.20). Кроме того, отсюда в силу (2.5) и (2.7) следуют второе из предельных условий (3.18) и второе из неравенств (3.19). Если же учесть, что $L(\Phi_2^{-1}(z))$ является правильно меняющейся функцией порядка γ при $z\to Z_2$, то в силу приведенного выше асимптотического соотношения, (2.8) и свойства M_1 медленно меняющихся функций

$$L(y(t))=L\Big(\Phi_2^{-1}\big(\mu_0\mu_1 I_3(t)\big[1+o(1)\big]\Big)=L\Big(\Phi_2^{-1}\big(\mu_0\mu_1 I_3(t)\big)\Big)\big[1+o(1)\big] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Используя это представление, из (3.21) получаем второе из асимптотических соотношений (3.20) и в силу (2.10) — первое из предельных условий (3.18).

Достаточность. Предположим, что функция $p\colon [a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ непрерывно дифференцируема, существует (конечный или равный $\pm\infty$) $\lim_{t\uparrow\omega} p'(t)p^{-3/2}(t)$ и выполняются условия (3.18), (3.19). В этом случае, применяя к уравнению (1.1) преобразование

$$\tau(t)=\beta\ln|I_3(t)|, \qquad \Phi_2\big(y(t)\big)=\mu_0\mu_1 I_3(t)\big[1+v_1(\tau)\big],$$
$$\frac{y'(t)}{y(t)}=\mu_0\mu_1 p^{1/2}(t)L_1^{1/2}\Big(\Phi_2^{-1}\big(\mu_0\mu_1 I_3(t)\big)\Big)\big[1+v_2(\tau)\big], \tag{3.22}$$

где

$$\beta=\begin{cases}1, & \text{если} \quad \lim\limits_{t\uparrow\omega} I_3(t)=\infty,\\ -1, & \text{если} \quad \lim\limits_{t\uparrow\omega} I_3(t)=0,\end{cases}$$

и $L_1\colon \Delta_{Y_0}\longrightarrow]0,+\infty[$ — непрерывно дифференцируемая и медленно меняющаяся при $y\to Y_0$ функция со свойствами (1.5), получаем систему дифференциальных уравнений

$$v_1'=\beta\left[[H(\tau,v_1)]^{-1/2}(1+v_2)-1-v_1\right],$$
$$v_2'=\beta q(\tau)\left[H(\tau,v_1)-(1+v_2)^2-\mu_0\mu_1 h(\tau)(1+v_2)\right], \tag{3.23}$$

в которой

$$H\big(\tau(t),v_1\big)=\frac{L\Big(\Phi_2^{-1}\Big(\mu_0\mu_1 I_3(t)[1+v_1]\Big)\Big)}{L_1\Big(\Phi_2^{-1}\big(\mu_0\mu_1 I_3(t)\big)\Big)},$$

$$q\big(\tau(t)\big)=\mu_0\mu_1 I_3(t)L_1^{1/2}\Big(\Phi_2^{-1}\Big(\mu_0\mu_1 I_3(t)\Big)\Big),$$

$$h\big(\tau(t)\big)=\frac{\Big(p^{1/2}(t)L_1^{1/2}\Big(\Phi_2^{-1}\big(\mu_0\mu_1 I_3(t)\big)\Big)\Big)'}{p(t)L_1\Big(\Phi_2^{-1}\Big(\mu_0\mu_1 I_3(t)\Big)\Big)}.$$

Учитывая второе из условий (3.18) и второе из неравенств (3.19), подбираем число $t_1\in]a,\omega[$ так, чтобы $\mu_0\mu_1 I_3(t)[1+v_1]\in\Delta_{Z_2}(c_2)$ (см. (2.6)) при $t\in[t_1,\omega[$ и $|v_1|\le\dfrac{1}{2}$. При таком выборе числа t_1

$$\lim_{t\uparrow\omega}\tau(t)=+\infty,\ \tau'(t)>0 \text{ при } t\in[t_1,\omega[,\ \tau\colon[t_1,\omega[\longrightarrow[\tau_1,+\infty[, \qquad \tau_1=\beta\ln|I_3(t_1)|$$

и правые части системы (3.23) непрерывны на множестве $\Omega=[\tau_1,+\infty[\times D$, где $D=\left\{(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2\colon |v_i|\le\dfrac{1}{2}, i=1,2\right\}$. Кроме того, в силу первого из условий (3.18)

$$\int\limits_{\tau_1}^{+\infty} q(\tau)\,d\tau=\mu_0\mu_1\beta\int\limits_{t_1}^{\omega} p^{1/2}(t)L_1^{1/2}\Big(\Phi_2^{-1}\Big(\mu_0\mu_1 I_3(t)\Big)\Big)dt=\pm\infty. \tag{3.24}$$

Далее, покажем, что

$$\lim_{\tau\to+\infty} h(\tau) = 0, \qquad \lim_{\tau\to+\infty} q(\tau) = \infty. \tag{3.25}$$

Поскольку согласно условиям теоремы существует (конечный или равный $\pm\infty$) $\lim_{t\uparrow\omega} p'(t)p^{-3/2}(t)$, выполняются второе из условий (3.18) и второе из условий (1.5), для функции h также существует (конечный или равный $\pm\infty$) предел при $t \uparrow \omega$. Допустим, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} h(\tau(t)) = \begin{cases} \text{либо} & \text{const} \neq 0, \\ \text{либо} & \pm\,\infty. \end{cases} \tag{3.26}$$

Интегрируя функцию $h\big(\tau(t)\big)$ на промежутке от t_1 до t, получаем

$$\int\limits_{t_1}^{t} h\big(\tau(t)\big)\,dt = -\frac{1}{p^{1/2}(t)L_1^{1/2}\Big(\Phi_2^{-1}\big(\mu_0\mu_1 I_3(t)\big)\Big)} + C, \tag{3.27}$$

где C — некоторая постоянная.

Если $\omega = +\infty$, то $\pi_\omega(t) = t$, и в этом случае в силу первого из условий (3.18)

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_{t_1}^{t} h(\tau(t))\,dt}{t} = 0.$$

Однако это невозможно, так как в силу правила Лопиталя и (3.26)

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_{t_1}^{t} h\big(\tau(t)\big)\,dt}{t} = \lim_{t\to+\infty} h\big(\tau(t)\big) \neq 0.$$

Если же $\omega < \infty$, то $\pi_\omega(t) = t - \omega$, и в силу первого из условий (3.18)

$$\lim_{t\uparrow\omega} p^{1/2}(t)L_1^{1/2}\Big(\Phi_2^{-1}\big(\mu_0\mu_1 I_3(t)\big)\Big) = +\infty.$$

Поэтому из (3.27) следует, что $\lim_{t\uparrow\omega} \displaystyle\int_{t_1}^{t} h(\tau(t))\,dt = C$. В силу этого условия равенство (3.27) может быть представлено в виде

$$\int\limits_{\omega}^{t} h\big(\tau(t)\big)\,dt = -\frac{1}{p^{1/2}(t)L_1^{1/2}\Big(\Phi_2^{-1}\big(\mu_0\mu_1 I_3(t)\big)\Big)}.$$

Разделив это соотношение на $\pi_\omega(t)$ и перейдя к пределу при $t \uparrow \omega$, с учетом первого из условий (3.18) получим

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\displaystyle\int_{\omega}^{t} h(\tau(t))\,dt}{t-\omega} = 0.$$

Однако это невозможно, так как предел, стоящий слева, в силу правила Лопиталя и (3.26) отличен от нуля.

Следовательно, предположение о том, что $\lim_{t\uparrow\omega} h\big(\tau(t)\big) \neq 0$, было неверным. Значит,

$$\lim_{t\uparrow\omega} h\big(\tau(t)\big) = \lim_{\tau\to+\infty} h(\tau) = 0.$$

Чтобы установить справедливость второго из предельных соотношений (3.25), введем функцию $z(t) = q(\tau(t))$. Для этой функции имеем

$$z'(t) = \mu_0\mu_1 p^{1/2}(t) L_1^{1/2}\Big(\Phi_2^{-1}\big(\mu_0\mu_1 I_3(t)\big)\Big)\big[1 + \delta(t)z(t)\big], \tag{3.28}$$

где

$$\delta(t) = \frac{\mu_0\mu_1\Phi_2^{-1}\big(\mu_0\mu_1 I_3(t)\big)L_1'\Big(\Phi_2^{-1}\big(\mu_0\mu_1 I_3(t)\big)\Big)}{2L_1\Big(\Phi_2^{-1}\big(\mu_0\mu_1 I_3(t)\big)\Big)} \frac{L^{1/2}\Big(\Phi_2^{-1}\big(\mu_0\mu_1 I_3(t)\big)\Big)}{L_1^{1/2}\Big(\Phi_2^{-1}\big(\mu_0\mu_1 I_3(t)\big)\Big)}.$$

Поскольку выполняются предельные соотношения (1.5), а в силу второго из условий (3.18), второго из неравенств (3.19) и свойств функции Φ_2 следует, что $\lim_{t\uparrow\omega} \Phi_2^{-1}\big(\mu_0\mu_1 I_3(t)\big) = Y_0$, здесь $\lim_{t\uparrow\omega} \delta(t) = 0$. Следовательно, для любого значения $c \in \mathbb{R}$ функция

$$f(t,c) = \mu_0\mu_1 p^{1/2}(t) L_1^{1/2}\Big(\Phi_2^{-1}\big(\mu_0\mu_1 I_3(t)\big)\Big)\big[1 + \delta(t)c\big]$$

сохраняет знак в некоторой левой окрестности ω. Поэтому согласно лемме 2.1 из работы [10] для функции z существует конечный или равный $\pm\infty$ предел при $t \uparrow \omega$. Если бы этот предел был конечным, то из (3.28) получили бы асимптотическое соотношение

$$z'(t) = \mu_0\mu_1 p^{1/2}(t) L_1^{1/2}\Big(\Phi_2^{-1}\big(\mu_0\mu_1 I_3(t)\big)\Big)\big[1 + o(1)\big] \qquad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

из которого следует, что

$$z(t) - z(t_1) = \mu_0\mu_1 \int\limits_{t_1}^{t} p^{1/2}(s) L_1^{1/2}\Big(\Phi_2^{-1}\big(\mu_0\mu_1 I_3(s)\big)\Big)\big[1 + o(1)\big]\, ds.$$

Однако это невозможно, так как здесь выражение, стоящее слева, имеет конечный предел при $t \uparrow \omega$, а выражение справа в силу первого из условий (3.18) — бесконечный. Значит,

$$\lim_{t\uparrow\omega} z(t) = \lim_{t\uparrow\omega} q\big(\tau(t)\big) = \lim_{\tau\to+\infty} q(\tau) = \infty.$$

Перейдем к установлению вида функций $H(\tau, v_1)$ и $H^{-1/2}(\tau, v_1)$.

Поскольку согласно условиям теоремы функция $L\big(\Phi_2^{-1}(z)\big)$ является правильно меняющейся при $z \to Z_2$ порядка γ, в силу второго из условий (3.18), второго из неравенств (3.19), представления (2.8) и свойства M_2 медленно меняющихся функций имеем

$$L\Big(\Phi_2^{-1}\big(\mu_0\mu_1 I_3(t)[1+v_1]\big)\Big) = |I_3(t)|^{\gamma}|1+v_1|^{\gamma} L_2^*\big(\mu_0\mu_1 I_3(t)[1+v_1]\big) =$$

$$= |I_3(t)|^{\gamma}|1+v_1|^{\gamma} L_2^*\big(\mu_0\mu_1 I_3(t)\big)\big[1 + R(t,v_1)\big] =$$

$$= L\bigg(\Phi_2^{-1}\Big(\mu_0\mu_1 I_3(t)\Big)\bigg)|1+v_1|^{\gamma}\big[1 + R(t,v_1)\big],$$

где функция R непрерывна на множестве $[t_1, \omega[\times\left\{v_1 \in \mathbb{R}\colon |v_1| \le \frac{1}{2}\right\}$ и такая, что $\lim_{t\uparrow\omega} R(t, v_1) = 0$ равномерно по $|v_1| \le \frac{1}{2}$. Отсюда с учетом первого из условий (1.5) следует, что имеют место представления

$$H^{-1/2}(\tau, v_1) = |1 + v_1|^{-\gamma/2}\big[1 + r_1(\tau, v_1)\big], \qquad H(\tau, v_1) = |1 + v_1|^{\gamma}\big[1 + r_2(\tau, v_1)\big],$$

где функции r_i, $i = 1, 2$, непрерывны на множестве $[\tau_1, +\infty[\times\left\{v_1 \in \mathbb{R}\colon |v_1| \le \frac{1}{2}\right\}$ и удовлетворяют условиям

$$\lim_{t\uparrow\omega} r_i(\tau, v_1) = 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{равномерно по} \quad |v_1| \le \frac{1}{2}. \tag{3.29}$$

Используя эти представления, записываем систему дифференциальных уравнений (3.23) в виде

$$\begin{aligned} v_1' &= \beta\big[f_1(\tau, v_1, v_2) + a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + V_1(v_1, v_2)\big], \\ v_2' &= \beta q(\tau)\big[f_2(\tau, v_1, v_2) + a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + V_2(v_1, v_2)\big], \end{aligned} \tag{3.30}$$

где

$$f_1(\tau, v_1, v_2) = (1 + v_1)^{-\gamma/2}(1 + v_2)r_1(\tau, v_1), \quad V_1(v_1, v_2) = (1 + v_2)(1 + v_1)^{-\gamma/2} - 1 - v_2 + \frac{\gamma}{2}v_1,$$

$$f_2(\tau, v_1, v_2) = (1 + v_1)^{\gamma}r_2(\tau, v_1) - \mu_0\mu_1 h(\tau)(1 + v_2), \quad V_2(v_1, v_2) = -v_2^2 + (1 + v_1)^{\gamma} - 1 - \gamma v_1,$$

$$a_{11} = -\frac{\gamma}{2} - 1, \qquad a_{12} = 1, \qquad a_{21} = \gamma, \qquad a_{22} = -2.$$

Здесь функции V_i, $i = 1, 2$, удовлетворяют условиям

$$\lim_{|v_1|+|v_2|\to 0} \frac{\partial V_i(v_1, v_2)}{\partial v_j} = 0, \quad i, j = 1, 2, \tag{3.31}$$

а функции f_i, $i = 1, 2$, в силу (3.29) и первого из условий (3.25) таковы, что

$$\lim_{\tau\to+\infty} f_i(\tau, v_1, v_2) = 0, \quad i = 1, 2, \qquad \text{равномерно по} \qquad (v_1, v_2) \in D.$$

Кроме того,

$$a_{22} = -2 \ne 0 \quad \text{и} \quad a_{11} - a_{12}a_{21}a_{22}^{-1} = -\frac{\gamma}{2} - 1 + \frac{\gamma}{2} = -1 \ne 0.$$

В силу этих условий и (3.24), (3.25) для системы дифференциальных уравнений (3.30) выполняются все условия теоремы 2.8 из работы [9]. Согласно этой теореме система дифференциальных уравнений (3.30) имеет, по крайней мере, одно решение $(v_1, v_2)\colon [\tau_2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\tau_2 \ge \tau_1$, стремящееся к нулю при $\tau \to +\infty$, причем таких решений существует однопараметрическое семейство в случае, когда $q(\tau) < 0$ при $\tau \ge \tau_1$, и двупараметрическое в случае, когда $\beta > 0$ и $\beta q(\tau) > 0$ при $\tau \ge \tau_1$. Каждому из этих решений в силу замен (3.21) и первого из условий (1.5) соответствует решение $y\colon [t_2, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_0}$, $t_2 \in [a, \omega[$, дифференциального уравнения (1.1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (3.20). Кроме того, учитывая, что $\beta = \operatorname{sign} I_3(t)$ при $t \in]a,\omega[$, а также второе из неравенств (3.19), приходим к выводу о справедливости утверждения теоремы об условиях наличия одно- и двупараметрического семейств решений с данными представлениями. Любое из этих решений уравнения (1.1) в силу условий (3.18) и (3.19) является $P_\omega(Y_0,1)$-решением.

Теорема доказана.

Теорема 3.3. *Пусть функция $L\big(\Phi_2^{-1}(z)\big)$ является правильно меняющейся при $z \to Z_2$ порядка γ и $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0;1\}$. Тогда для существования $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решений уравнения* (1.1) *необходимо, а если*

$$(1+\lambda_0)\left[1+\lambda_0+\frac{\gamma}{2}(\lambda_0-1)\right] \neq 0, \tag{3.32}$$

то и достаточно, чтобы

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I_4'(t)}{I_4(t)} = -1, \qquad \lim_{t\uparrow\omega}\pi_\omega(t)I_4(t) = -\frac{\alpha_0\lambda_0}{(\lambda_0-1)^2}, \qquad \mu_0\mu_1\lim_{t\uparrow\omega}I_3(t) = Z_2 \tag{3.33}$$

и выполнялись неравенства

$$\alpha_0\lambda_0 > 0, \qquad \mu_0\mu_1(\lambda_0-1)\pi_\omega(t) > 0 \qquad и \qquad \mu_2^* I_3(t) > 0 \qquad при \quad t \in]a,\omega[. \tag{3.34}$$

Более того, для каждого такого решения имеют место при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления

$$\Phi_2\big(y(t)\big) = \mu_0\mu_1|\lambda_0|^{1/2}I_3(t)\big[1+o(1)\big], \qquad \frac{y'(t)}{y(t)} = \alpha_0(1-\lambda_0)I_4(t)\big[1+o(1)\big], \tag{3.35}$$

причем таких решений при выполнении указанных условий существует однопараметрическое семейство в случае, когда $\mu_0\mu_1\mu_2^*\left[1+\lambda_0+\frac{\gamma}{2}(\lambda_0-1)\right] < 0$, и двупараметрическое, когда $\mu_0\mu_1(1+\lambda_0) > 0$ и $\mu_2^*(1+\lambda_0)\left[1+\lambda_0+\frac{\gamma}{2}(\lambda_0-1)\right] > 0$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $y\colon [t_0,\omega[\longrightarrow \Delta_{Y_0}$ — произвольное $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решение дифференциального уравнения (1.1). Тогда наряду с (1.2) и (1.3) для некоторого $t_1 \in [t_0,\omega[$ выполняются условия (3.7) и в силу леммы 2.1 — условия (2.9).

Из (1.1) с учетом второго из условий (1.3) имеем

$$\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^2 = \alpha_0\lambda_0 p(t)L\big(y(t)\big)\big[1+o(1)\big] \qquad при \quad t\uparrow\omega. \tag{3.36}$$

Отсюда ясно, что выполняется первое из условий (3.34) и имеет место (с учетом знаков y и y') асимптотическое соотношение

$$\frac{y'(t)}{y(t)L^{1/2}\big(y(t)\big)} = \mu_0\mu_1|\lambda_0|^{1/2}p^{1/2}(t)\big[1+o(1)\big] \qquad при \quad t\uparrow\omega. \tag{3.37}$$

Кроме того, из (1.1) следует, что

$$\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)' + \left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^2 = \alpha_0 p(t)L\big(y(t)\big),$$

и поэтому в силу (3.36)

$$\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)' = \alpha_0(1-\lambda_0)p(t)L\big(y(t)\big)\big[1+o(1)\big] \qquad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{3.38}$$

Интегрируя (3.37) на промежутке от t_1 до t, получаем соотношение, которое не противоречит второму из условий (1.2) лишь в случае, когда

$$\Phi_2(y(t)) = \mu_0\mu_1|\lambda_0|^{\frac{1}{2}}I_3(t)\big[1+o(1)\big] \qquad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Значит, имеет место первое из асимптотических представлений (3.35) и в силу (2.5), (2.7) выполняются третье из предельных условий (3.33) и третье из неравенств (3.34).

Поскольку согласно условиям теоремы функция $L(\Phi_2^{-1}(z))$ является правильно меняющейся при $z\to Z_2$ и справедливы установленные выше представление для $\Phi_2(y(t))$ и условия из (3.33), (3.34), при $t\uparrow\omega$

$$L\big(y(t)\big) = L\bigg(\Phi_2^{-1}\Big(\mu_0\mu_1|\lambda_0|^{1/2}I_3(t)\big[1+o(1)\big]\Big)\bigg) = L\bigg(\Phi_2^{-1}\Big(\mu_0\mu_1|\lambda_0|^{1/2}I_3(t)\Big)\bigg)\big[1+o(1)\big].$$

Подставляя это значение $L\big(y(t)\big)$ в правую часть (3.38) и интегрируя полученное при этом соотношение на промежутке от a_0 до t, где $a_0\in[t_1,\omega[$ и такое, что $\mu_0\mu_1|\lambda_0|^{1/2}I_3(t)\in\Delta_{Z_2}(c)$ при $t\in[a_0,\omega[$, находим

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \alpha_0(1-\lambda_0)I_4(t)\big[1+o(1)\big] \qquad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

т. е. выполняется второе из асимптотических представлений (3.35). В силу этого условия и (1.1) имеем

$$\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} \sim \alpha_0(1-\lambda_0)\pi_\omega(t)I_4(t) \qquad \text{и} \qquad \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} \sim \frac{\pi_\omega(t)I_4'(t)}{(1-\lambda_0)I_4(t)} \qquad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Отсюда с учетом (2.9) получаем первое и второе из предельных условий (3.33). Учитывая первое из них и второе из асимптотических соотношений (3.35), убеждаемся также в справедливости второго из знаковых условий (3.34).

Достаточность. Пусть наряду с (3.33) и (3.34) выполняется неравенство (3.32). Покажем, что в этом случае дифференциальное уравнение (1.1) имеет $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решение, допускающее при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления (3.35), и выясним вопрос об их количестве. Для этого, применяя к уравнению (1.1) преобразование

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \alpha_0(1-\lambda_0)I_4(t)\big[1+v_1(\tau)\big], \qquad \Phi_2\big(y(t)\big) = \mu_0\mu_1|\lambda_0|^{1/2}I_3(t)\big[1+v_2(\tau)\big],$$
$$\tau = \beta\ln|\pi_\omega(t)|, \qquad \text{где} \quad \beta = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \omega=+\infty, \\ -1, & \text{если} \quad \omega<+\infty, \end{cases} \tag{3.39}$$

получаем с учетом первых двух из знаковых условий (3.34) систему дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
&v_1' = \frac{\beta}{1-\lambda_0}\Big[g_1(\tau)H(\tau,v_2) - \alpha_0(1-\lambda_0)^2 g_2(\tau)(1+v_1)^2 - (1-\lambda_0)g_1(\tau)(1+v_1)\Big],\\
&v_2' = \beta g_3(\tau)\left[\left|\frac{(1-\lambda_0)^2 g_2(\tau)}{\lambda_0 g_1(\tau)}\right|^{1/2}\frac{1+v_1}{H^{1/2}(\tau,v_2)} - 1 - v_2\right],
\end{aligned} \tag{3.40}
$$

в которой

$$
g_1\big(\tau(t)\big) = \frac{\pi_\omega(t)I_4'(t)}{I_4(t)}, \qquad g_2\big(\tau(t)\big) = \pi_\omega(t)I_4(t), \qquad g_3\big(\tau(t)\big) = \frac{\pi_\omega(t)p^{1/2}(t)}{I_3(t)},
$$

$$
H\big(\tau(t),v_2\big) = \frac{L\Big(\Phi_2^{-1}\Big(\mu_0\mu_1|\lambda_0|^{1/2}I_3(t)[1+v_2]\Big)\Big)}{L\Big(\Phi_2^{-1}\Big(\mu_0\mu_1|\lambda_0|^{1/2}I_3(t)\Big)\Big)}.
$$

В силу третьего из условий (3.33), третьего из неравенств (3.34) и (2.5), (2.7) (при $i=2$) существует число $t_1 \in]a,\omega[$ такое, что $\mu_0\mu_1|\lambda_0|^{1/2}I_3(t)[1+v_2] \in \Delta_{Z_2}(c_2)$ при $t\in[t_1,\omega[$ и $|v_2| \le \dfrac{1}{2}$. Отсюда с учетом свойств (3.15) функции τ ясно, что правые части системы (3.40) непрерывны на множестве $\Omega = [\tau_1,+\infty[\times D$, где $\tau_1 = \beta\ln|\pi_\omega(t_1)|$ и $D = \left\{(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2\colon |v_i| \le \dfrac{1}{2},\ i=1,2\right\}$. Кроме того, с использованием первых двух условий из (3.33), третьего из неравенств (3.34) и свойств (3.15) имеем

$$
\lim_{\tau\to+\infty} g_1(\tau) = \lim_{t\uparrow\omega} g_1(\tau(t)) = -1, \quad \lim_{\tau\to+\infty} g_2(\tau) = \lim_{t\uparrow\omega} g_2(\tau(t)) = -\frac{\alpha_0\lambda_0}{(\lambda_0-1)^2}, \tag{3.41}
$$

$$
\int\limits_{\tau_1}^{+\infty}|g_3(\tau)|\,d\tau = \mu_2^*\int\limits_{t_1}^{\omega}\frac{I_3'(t)}{I_3(t)}dt = \mu_2^*\ln|I_3(t)|\Big|_{t_1}^{\omega} = +\infty. \tag{3.42}
$$

Поскольку функция $L\left(\Phi_2^{-1}(z)\right)$ является правильно меняющейся при $z\to Z_2$, таким же образом, как при доказательстве двух предыдущих теорем, устанавливаем, что

$$
H(\tau,v_2) = |1+v_2|^{\gamma}\big[1+r_1(\tau,v_2)\big], \qquad H^{-1/2}(\tau,v_2) = |1+v_2|^{-\gamma/2}\big[1+r_2(\tau,v_2)\big], \tag{3.43}
$$

где функции r_i, $i=1,2$, непрерывны на множестве $[\tau_1,+\infty[\times\left\{v_1\in\mathbb{R}\colon |v_1| \le \dfrac{1}{2}\right\}$ и удовлетворяют условиям

$$
\lim_{t\uparrow\omega} r_i(\tau,v_1) = 0, \quad i=1,2, \qquad \text{равномерно по} \quad |v_1| \le \frac{1}{2}.
$$

Далее, заметим, что

$$
\beta g_3(\tau) = \frac{g_4(\tau)}{q(\tau)},
$$

где

$$
q\big(\tau(t)\big) = I_3(t)L_1^{1/2}\left(\Phi_2^{-1}\left(\mu_0\mu_1|\lambda_0|^{1/2}I_3(t)\right)\right),
$$

$$g_4\big(\tau(t)\big) = \left| \frac{g_1\big(\tau(t)\big) g_2\big(\tau(t)\big) L_1\big(\Phi_2^{-1}\left(\mu_0\mu_1|\lambda_0|^{1/2} I_3(t)\right)\big)}{L\big(\Phi_2^{-1}\left(\mu_0\mu_1|\lambda_0|^{1/2} I_3(t)\right)\big)} \right|^{1/2}$$

и $L_1 \colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ — непрерывно дифференцируемая и медленно меняющаяся при $y \to Y_0$ функция со свойствами (1.5).

Здесь в силу (3.41), (3.42) и (1.5)

$$\lim_{\tau\to+\infty} g_4(\tau) = \frac{|\lambda_0|^{1/2}}{|\lambda_0 - 1|}, \qquad \mu_2^* \int\limits_{\tau_1}^{+\infty} \frac{d\tau}{q(\tau)} = +\infty. \tag{3.44}$$

Как при доказательстве достаточности теоремы 3.2, можно установить, что здесь для данной функции q также выполняется второе из предельных условий (3.25). Кроме того, учитывая (3.33), второе из условий (1.5) и вид функции τ, нетрудно проверить, что

$$\lim_{\tau\to+\infty} \frac{q'(\tau)}{q(\tau)} = 0. \tag{3.45}$$

В силу первого из условий (3.44), а также (3.41) и (3.43) система дифференциальных уравнений (3.40) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{\beta}{1-\lambda_0}\Big[f_1(\tau, v_1, v_2) + a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + V_1(v_1, v_2)\Big], \\ v_2' &= \frac{|\lambda_0|^{1/2} h(\tau)}{|\lambda_0 - 1|}\Big[f_2(\tau, v_1, v_2) + a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + V_2(v_1, v_2)\Big], \end{aligned} \tag{3.46}$$

где функции f_i, $i = 1, 2$, непрерывны на множестве $[\tau_1, +\infty[\times D$ и таковы, что

$$\lim_{\tau\to+\infty} f_i(\tau, v_1, v_2) = 0, \quad i = 1, 2, \qquad \text{равномерно по} \qquad (v_1, v_2) \in D,$$

$$h(\tau) = \frac{1}{q(\tau)}, \qquad a_{11} = 1 + \lambda_0, \qquad a_{12} = -\gamma, \qquad a_{21} = 1, \qquad a_{22} = -\frac{\gamma}{2} - 1,$$

$$V_1(v_1, v_2) = \lambda_0 v_1^2 + 1 + \gamma v_2 - (1 + v_2)^\gamma, \quad V_2(v_1, v_2) = \frac{\gamma}{2} v_2 + (1 + v_1)\left[(1 + v_2)^{-\gamma/2} - 1\right].$$

В этой системе уравнений функции V_i, $i = 1, 2$, удовлетворяют условиям (3.31), функция h в силу (3.25), (3.45) и второго из условий условий (3.44) имеет свойства

$$\lim_{\tau\to+\infty} h(\tau) = 0, \qquad \lim_{\tau\to+\infty} \frac{h'(\tau)}{h(\tau)} = 0, \qquad \int\limits_{\tau_1}^{+\infty} h(\tau)\, d\tau = \pm\infty,$$

а постоянные a_{ij}, $i, j = 1, 2$, согласно условию (3.32) таковы, что

$$a_{11} = 1 + \lambda_0 \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\left[1 + \lambda_0 + \frac{\gamma}{2}(\lambda_0 - 1)\right] \neq 0.$$

Тем самым показано, что для системы дифференциальных уравнений (3.45) выполняются все условия теоремы 2.6 из работы [9]. На основании этой теоремы система уравнений (3.45) имеет, по крайней мере, одно решение $(v_1, v_2)\colon [\tau_2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\tau_2 \geq \tau_1$, стремящееся к нулю при $\tau \to +\infty$, причем таких решений существует однопараметрическое семейство в случае, когда $\mu_0\mu_1\mu_2^*\left[1+\lambda_0+\dfrac{\gamma}{2}(\lambda_0-1)\right] < 0$, и двупараметрическое в случае $\mu_0\mu_1(1+\lambda_0) > 0$ и $\mu_2^*(1+\lambda_0)\left[1+\lambda_0+\dfrac{\gamma}{2}(\lambda_0-1)\right] > 0$. Каждому такому решению системы (3.45) в силу замен (3.39) соответствует решение $y\colon [t_2, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_0}$, $t_2 \in [t_1, \omega[$, допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (3.35), причем нетрудно убедиться с помощью этих представлений и условий (3.33) и (3.34), что оно является $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решением.

Теорема доказана.

Из установленных здесь теорем в частном случае, когда $L(y) = |\ln|y||^\sigma$, следуют все основные результаты работ [3–6].

1. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1990. – 430 с.
2. *Evtukhov V. M., Mousa Jaber Abu Elshour.* Asymptotic behaviour of solutions of second order nonlinear differential equations clouse to linear equations // Mem. Different. Equat. Math. Phys. – 2008. – **43**. – P. 97–106.
3. *Муса Джабер Абу эль-шаур.* Асимптотика решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, близких к линейным // Нелінійні коливання. – 2008. – **11**, № 2. – С. 230–241.
4. *Mousa Jaber Abu Elshour.* Asymptotic representations of the solutions of a class of the second order non-autonomous differential equations // Mem. Different. Equat. Math. Phys. – 2008. – **44**. – P. 59–68.
5. *Mousa Jaber Abu Elshour, Evtukhov V. M.* Asymptotic representations for solutions of a class of second order nonlinear differential equations // Miscolc Math. Notes. – 2009. – **2**. – P. 119–127.
6. *Mousa Jaber Abu Elshour.* Asymptotic representations of solutions of second order nonlinear differential equations // Int. Math. Forum. – 2009. – **4**, № 17. – P. 835–844.
7. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.
8. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: Дис . . . д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1998. – 295 с.
9. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 1. – С. 52–80.
10. *Евтухов В. М., Шинкаренко В. Н.* Асимптотические представления решений двучленных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с экспоненциальной нелинейностью // Дифференц. уравнения. – 2008. – **44**, № 3. – С. 308–322.

Получено 10.06.11